Geometria Analítica e Álgebra Linear na Astrofísica

Emanuel Silva

Outubro 2023

Sumário

1 Órbitas planetárias

No início do século XVII, Johannes Kepler formulou as três leis fundamentais do movimento planetário, que descreve o movimento dos corpos em relação aos outros.

Primeira Lei: das elipses

Os planetas se movimentam em órbitas elípticas, com o sol em um de seus focos. Quanto maior a excentricidade de uma elipse, mais achatada a elipse. Um dos planetas do sistema solar com maior excentricidade é Mercúrio, com $e = 0.21$, enquanto todos os outros é $e < 0.1$.

Segunda Lei: das áreas iguais

A área que um planeta "varre" em tempos iguais, é igual. Kepler descobriu que, não só o movimento dos corpos não é circular, mas também sua velocidade não é constante. Essa lei prevê uma descrição quantitativa de como as velocidades orbitais dos planetas mudam com a distância ao sol. Como demonstrado graficamente na figura 2, as áreas hachuradas possuem áreas iguais. A segunda lei de Kepler indica que o movimento é mais lento perto do Afélio, o ponto mais distante do sol, e mais rapidamente no periélio, ponto mais próximo ao sol.

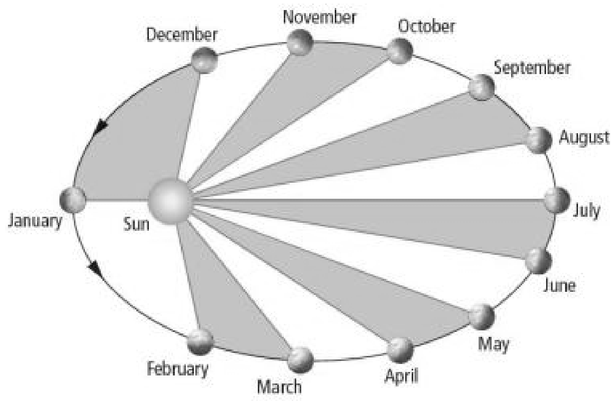

Figura 1: Lei das Áreas

Imagem disponível em
http://labman.phys.utk.edu/phys135core/modules/m8/Kepler.html
(Acesso setembro de 2023)

Terceira Lei: das harmonias

O quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse que representa a órbita do planeta. Essa lei pode ser expressa pela fórmula: $P^2 = Ka^3$. (Fazer)

Demonstração das Leis de Kepler

Para demonstrar as Leis de Kepler, faz-se necessário conhecer as Três Leis de Newton e a sua Lei da Gravitação Universal. Essas leis podem ser resumidas da seguinte forma:

A velocidade de um objeto permanece constante ao menos que uma força atue sobre ele. Se uma força atua em um objeto, sua aceleração é diretamente proporcional à força e inversamente proporcional a sua massa. Resumidamente $F = ma$, onde F é a força, m é a massa e a é a aceleração. A força sempre ocorre em pares de igual magnitude e direção oposta. Como Newton disse: "Para toda ação, há uma reação de igual valor e direção oposta".

A lei de gravitação universal de Newton pode também ser escrita matematicamente. Suponha que dois objetos esféricos, de massa M e m, e seus centros estejam separados por uma distância r. A força gravitacional de atração entre eles é

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

No qual G é a constante gravitacional, de valor $G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2Kg^{-2}$. O sinal negativo indica que ela sempre é uma força de atração.

A demonstração se mostra mais fácil a partir da segunda lei.

1.1 Segunda Lei de Kepler

A Geometria Analítica já se faz necessária diretamente para chegar na Segunda lei de Kepler, pois o uso de coordenadas polares, produto escalar e produto vetorial é essencial para chegar às conclusões.

A Gravidade é um exemplo de força central, o que significa que a força sempre está definida de ou para um determinado ponto. No caso da força gravitacional, a força $\overrightarrow{F}$ que age sobre uma massa m sempre aponta para uma força central M, e seu módulo é proporcional a $1/r^2$. Para se realizarem os cálculos faze-se necessário que seja entendido o conceito de coordenadas cartesianas e polares.

Nas coordenadas cartesianas, os vetores canônicos em relação aos eixos x, y e z são, respectivamente, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{k}$. Já nas coordenadas polares, para definir um vetor é necessário conhecer seu módulo r e o ângulo associado a ele θ. As coordenadas cartesianas podem ser expressadas no formato polar pela relação $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$. A figura 3 demonstra a associação.

(FIGURA 3)

Na figura 3, os vetores unitários $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{\theta}$ são

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\,cos(\theta) + \overrightarrow{j}\,sen(\theta) \tag{1.1}$$

e

$$\overrightarrow{\theta} = -\overrightarrow{i}\,sen(\theta) + \overrightarrow{j}\,cos(\theta) \tag{1.2}$$

O produto escalar entre esses vetores é

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\theta} = -sen(\theta)cos(\theta) + sen(\theta)cos(\theta) = 0 \tag{1.3}$$

e seu produto vetorial é

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\theta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & cons(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{k}\,cos^2(\theta) + \overrightarrow{k}\,sen^2(\theta) = \overrightarrow{k} \tag{1.4}$$

Assim, fica demonstrado que $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{\theta}$ são mutuamente ortogonais, assim como são ortogonais a $\overrightarrow{k}$.

A partir das equações (1.1) e (1.2) podemos calcular a variação de $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{\theta}$ em relação ao ângulo.

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\overrightarrow{i}\,cos(\theta) + \overrightarrow{j}\,sen(\theta)) = -\overrightarrow{i}\,sen(\theta) + \overrightarrow{j}\,cos(\theta) = \overrightarrow{\theta} \tag{1.5}$$

e

$$\frac{d\overrightarrow{\theta}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(-\overrightarrow{i}\,sen(\theta) + \overrightarrow{j}\,cos(\theta)) = -\overrightarrow{i}\,cos(\theta) - \overrightarrow{j}\,sen(\theta) = -\overrightarrow{r} \tag{1.6}$$

Usando essas informações, usa-se a regra da cadeia para calcular a variação de $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{\theta}$ em relação ao tempo:

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \overrightarrow{\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{1.7}$$

e

$$\frac{d\overrightarrow{\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\overrightarrow{r}\frac{d\theta}{dt} \tag{1.8}$$

2 Análise de Trajetórias

2.1 Introdução

Até então, vimos a análise das trajetórias de corpos celestes, agora, iremos ver como funcionam as análises e as mudanças de trajetória de objetos e veículos enviados pelo homem. Para isso, uma rápida introdução da corrida espacial.

No dia 4 de outubro de 1957, a União Soviética lançou ao espaço o Sputnik I, o primeiro satélite a fazer uma órbita na Terra, iniciando formalmente a era espacial. A figura 2 mostra a trajetória percorrida por ele.

Imagem disponível em
https://explainingscience.org/2022/09/19/4-october-1957-sputnik-1/

Quando Santos Dummont inventou o avião em 1906 - como também outros inventores, como os irmãos Wright, Victor Tatin e E. Lilian Todd - não houveram impactos diretos e rápidos de sua invenção. Já com o desenvolvimento do primeiro satélite, em apenas 12 anos a humanidade colocou o primeiro ser vivo no espaço, primeiro humano, orbitou a lua e teve pessoas caminhando na Lua. Em apenas mais 7 anos, já haviam veículos terrestres nas superfícies de Marte e Vênus. A maioria desses veículos fazem parte dessas 3 categorias

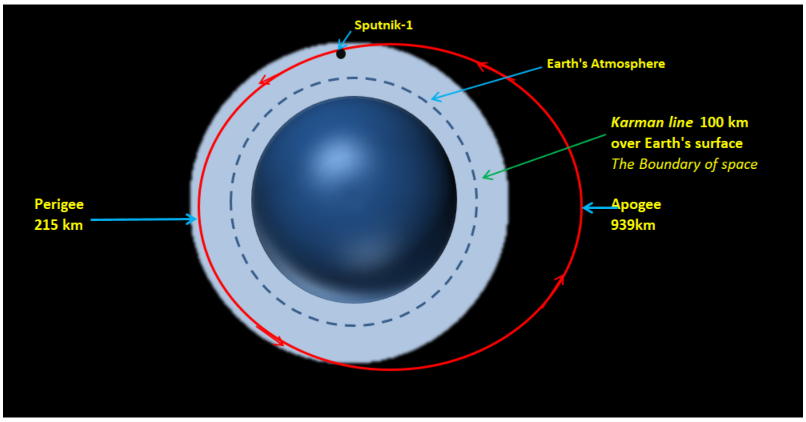

Figura 2: Trajetória da Sputnik 1

1. Satélites terrestres, são lançados com velocidade o suficiente para orbitar a Terra
2.

3 Conclusão

4 Referências

(esboço)

Foundations of astrophysics, Ryden, Barbara
Introduction to flight, John D. Anderson Jr.