

Over de aard van de wiskundige werkelijkheid

G.J.E. Rutten, Amsterdam, 21 maart 2005

Ooit willen weten wat de ware aard is van de wiskundige werkelijkheid? Dan is dit artikel iets voor jou.

De methode van wiskundig onderzoek sinds de Griekse oudheid

De titel van dit artikel veronderstelt het bestaan van een *wiskundige werkelijkheid*. Dit is een belangrijk element in de zogenoemde Platonische houding ten opzichte van de wiskunde. De Platonische houding gaat er ook vanuit dat de wiskundige werkelijkheid bestaat naast en onafhankelijk van onze wereld. Wiskundige feiten zijn ontdekkingen in plaats van menselijke uitvindingen en *wiskundig onderzoek* moet gezien worden als een activiteit gericht op het verwerven van een zo adequaat mogelijk beeld van de wiskundige werkelijkheid.

Hoe vollediger het beeld, hoe dieper het inzicht in deze werkelijkheid. Wiskundig onderzoek heeft dus als doel om de wiskundige werkelijkheid zo goed mogelijk te verkennen en bloot te leggen. Uit deze opvatting over wiskunde putten vele wiskundigen hun broodnodige inspiratie en motivatie om door te gaan met het uitermate inspannende onderzoek dat tegenwoordig tot niet meer leidt dan marginale resultaten op uitermate specialistische deelgebieden. Natuurlijk zijn er uitzonderingen zoals bijvoorbeeld de wiskundige ontdekkingen van Andrew Wiles in het begin van de jaren negentig. Deze uitzonderingen worden echter niet voor niets zo breed uitgemeten in de wereldpers.

Hoe proberen wiskundigen de onafhankelijk van hen bestaande wiskundige werkelijkheid te onthullen? Sinds de Griekse oudheid doen wiskundigen dit door het ontwikkelen van zogenoemde *wiskundige theorieën*.

Wiskundigen theorieën ontstaan door het formuleren en bewijzen van *wiskundige stellingen*. Een wiskundige stelling verwoord op heldere en eenduidige wijze een bepaalde eigenschap van de wiskundige werkelijkheid. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de stelling die stelt dat er oneindig veel priemgetallen bestaan (Euclides) of dat de enige twee machten die 1 van elkaar verschillen 8 en 9 zijn (Catalan).

Wiskundige theorieën zijn vaak zeer fraaie, ingenieuze bouwwerken die bestaan uit een prachtige structuur van abstracte wiskundige concepten en onderling gerelateerde stellingen over de wiskundige eigenschappen van deze concepten. Wiskundigen theorieën ontlenen hun legitimiteit aan het feit dat ze zijn gefundeerd op algemeen geaccepteerde *uitgangspunten* (axioma's) en *redeneerregels* (logica). De logica wordt gebruikt om vanuit de axioma's allerlei wiskundige stellingen te bewijzen.

Doordat verschillende wiskundige theorieën zijn gebaseerd op dezelfde uitgangspunten en redeneerregels is het onmogelijk dat ze met elkaar in tegenspraak zijn. Zo zal bijvoorbeeld de getaltheorie niet in tegenspraak zijn met de meetkunde. Het is zelfs zo dat de concepten en eigenschappen van de ene theorie (zoals de getaltheorie) moeiteeloos gecombineerd kunnen worden met die van een andere theorie (zoals de meetkunde). Om genoemde twee redenen kan zonder verlies van algemeenheid worden aangenomen dat wiskundigen gezamelijk werken aan één universele wiskundige theorie in plaats van aan een groot aantal verschillende wiskundige theorieën. In de rest van dit artikel noem ik deze theorie UTW (Universe Theorie van de Wiskunde).

Leidt deze methode van wiskundig onderzoek tot een adequaat beeld van de wiskundige werkelijkheid?

De fundamentele vraag die bijna nooit gesteld wordt is de vraag of het werken aan UTW eigenlijk wel leidt tot een adequaat inzicht in de wiskundige werkelijkheid. Mijn claim is dat dit niet zo is. Het denken in termen van UTW leidt onvermijdelijk tot de overtuiging dat de wiskundige werkelijkheid gezien moet worden als een gestructureerd bouwwerk waarin alles met alles op een logisch dwingende wijze met elkaar samenhangt. Ik zal laten zien dat dit een volstrekt onjuist beeld is van de wiskundige werkelijkheid en dat UTW dus een vals rookgordijn opwerpt die ons het zicht op de ware aard van de wiskundige werkelijkheid ontnemt.

Wiskundige theorieën zijn onvolledig (K. Gödel) en de wiskundige werkelijkheid is contingent (G. Chaitin)

De logicus Kurt Gödel toonde in 1930 al aan dat géén enkele wiskundige theorie in staat is om alle eigenschappen van de natuurlijke getallen (0, 1, 2, ...) te bewijzen. Dit betekent dat iedere wiskundige theorie waarin natuurlijke getallen een rol spelen per definitie *incompleet* is. Uiteraard spelen natuurlijke getallen een rol in UTW. Het werken aan UTW kan dus nooit tot een volledig beeld van de wiskundige werkelijkheid leiden omdat veel ware uitspraken

over natuurlijke getallen simpelweg niet bewijsbaar zijn in UTW. Het zéér aansprekende romantische beeld van de wiskundige werkelijkheid als boek met axioma's waaruit op logisch dwingende wijze iedere wiskundige waarheid kan worden afgeleid ('het boek van Paul Erdos') bleek reeds in 1930 een utopie.

Met Gödel werd een eerste belangrijke stap in de juiste richting gezet. Als wiskundig onderzoek niet tot een volledig beeld van de wiskundige werkelijkheid leidt is de deur opengezet naar de vraag of wiskundig onderzoek überhaupt wel een adequaat inzicht in de wiskundige werkelijkheid kan bieden. Het stellen en beantwoorden van deze vraag kon echter pas na doorbraken die tientallen jaren ná Gödel werden bereikt.

De belangrijkste doorbraak kwam van Gregory Chaitin. Chaitin toonde aan dat met een gegeven wiskundige theorie slechts wiskundige stellingen kunnen worden bewezen waarvan de complexiteit niet groter is dan de complexiteit van de axioma's. Complexiteit moet hier begrepen worden als een maat voor het aantal tekens dat nodig is om een stelling op te schrijven ('te representeren'). Stellingen waarvan de complexiteit groter dan die van de axioma's zijn dus simpelweg *onbeslisbaar* binnen de gegeven theorie. Hun waarheid of onwaarheid kan met behulp van de desbetreffende theorie niet vastgesteld worden.

Chaitin liet hiermee zien dat de door Gödel ontdekte onvolledigheid niet iets obscuurs is dat slechts een enkele keer opduikt. Dankzij Chaitin weten we dat onvolledigheid overal is. Alle wiskundige uitspraken met een complexiteit groter dan de complexiteit van de UWT axioma's zijn onbeslisbaar. Hun waarheid of onwaarheid kan onmogelijk worden vastgesteld met UWT.

Vanaf een bepaalde complexiteit kan de waarheid of onwaarheid van een wiskundige uitspraak dus niet meer door logisch redeneren vanuit algemeen geaccepteerde wiskundige axioma's vastgesteld worden. Hieruit volgt dat de waarheid of onwaarheid van dergelijke wiskundige uitspraken willekeurig (contingent) is. Deze uitspraken zijn simpelweg waar of onwaar *zonder enig rationeel aanwijsbare reden*. Er verandert helemaal niets aan deze situatie wanneer wij in de toekomst erin zouden slagen om nieuwe algemeen geaccepteerde axioma's aan UTW toe te voegen. De nieuw gevormde theorie 'UWT' bestaat immers opnieuw uit een slechts eindig veel axioma's. Alle wiskundige uitspraken met een complexiteit hoger dan die van de 'UWT' axioma's blijven onbeslisbaar.

Wat zegt dit over het inzicht in de wiskundige werkelijkheid dat verkregen wordt door het werken aan UTW?

UTW zal nooit leiden tot een adequaat beeld van de wiskundige werkelijkheid. Het dichtst bij een beeld dat recht doet aan de ware aard van de wiskundige werkelijkheid is het beeld van de wiskundige werkelijkheid als een volstrekt willekeurige, contingente structuur van feiten die waar of onwaar zijn *zonder dat daarvoor een logisch dwingende oorzaak bestaat*. Alle wiskundige uitspraken met een complexiteit groter dan een bepaalde grenswaarde zijn zonder rationeel aanwijsbare reden waar of onwaar. De (on)waarheid van deze uitspraken is geheel willekeurig of anders gezegd volkomen toevallig.

Een denkbeeldig opperwezen die in staat is de gehele wiskundige werkelijkheid in één keer te overzien, zal dan ook het denken in wiskundige theorieën (of UTW) beschouwen als een vrucheloze, onzinnige poging om enig licht te werpen op de wiskundige werkelijkheid. Dit wezen zal beamen dat door theorievorming er juist een vertroebeld of beter gezegd een vals beeld ontstaat van de wiskundige werkelijkheid. Namelijk het geheel foutieve beeld van de wiskundige werkelijkheid als een geïntegreerde, logische samenhangende, dieptestructuur van bewijsbare stellingen.

Dit beeld staat ver af van het enige beeld van de wiskundige werkelijkheid dat recht doet aan haar ware aard: De wiskundige werkelijkheid als vormeloze, ongestructureerde entiteit welke bestaat uit wiskundige uitspraken waarvan de waarheid of onwaarheid voor het logisch redeneren ontoegankelijk is en daarmee op toeval berust (contingent is).

De contingentie van de wiskundige werkelijkheid blijkt ook uit de praktijk van het wiskundig onderzoek
Het is mogelijk om de willekeur van de wiskundige werkelijkheid via een geheel andere weg inzichtelijk te maken.

Hiervoor richten we ons op de praktijk van het bewijzen van wiskundige stellingen. Bewijzen van onderling sterk verwante stellingen lijken vaak in het geheel niet op elkaar. Een geringe herformulering van een bepaalde stelling resulteert meestal in een compleet ander bewijs of zelfs tot het überhaupt niet meer kunnen vinden van een bewijs.

Bekende bewijzen van bestaande stellingen bieden daarom meestal weinig tot géén hulp bij de zoektocht naar afleidingen van nieuwe gelijksoortige stellingen. Dit maakt het vinden van een bewijs voor een wiskundige stelling iedere keer weer tot een zéér moeizaam proces waarbij de wiskundige feitelijk weer geheel op nieuw moet beginnen. Een bewijs van een stelling is dan ook vaak het resultaat van een uniek, geheel op zichzelfstaand, creatief proces.

Het zoeken naar wiskundige bewijzen is dus een zeer onzekere en geestelijk zwaarbelastende activiteit. Een goed voorbeeld in dit verband is het zoeken naar oplossingen van Diophantische vergelijkingen. Bekende bewijzen van oplossingen van reeds onderzochte type vergelijkingen zeggen absoluut niets over het eventuele bewijs voor een nieuw type Diophantische vergelijking.

Bewijzen van stellingen delen feitelijk niet meer dan de gebruikte concepten (getal, verzameling) en toegepaste afleidingsregels (logica). Hiermee ligt de relatie tussen stellingen op het laagst denkbare niveau. Relaties op hogere niveaus, waarbij voor het bewijs van de ene stelling gebruik wordt gemaakt van (het bewijs van) een andere stelling, vormen de grote uitzondering. Natuurlijk zijn er genoeg voorbeelden van dergelijke hogere relaties. Het probleem is alleen dat het iedere keer dezelfde soort exemplarische voorbeelden betreft die niet voor niets zo bekend geworden zijn.

Vergelijk dit met computer programmatuur. Zelden wordt een nieuw computer programma ontwikkeld door het zoeken naar en vervolgens integreren van bestaande, eenvoudigere programma's. Het is inderdaad niet overeenkomstig de werkelijkheid om te denken dat computer programma's bestaan uit samenstellingen van minder complexe programma's die op hun beurt ook weer bestaan uit simpelere programma's. Ieder computer programma staat op zichzelf en bestaat dus uit een unieke combinatie van elementaire computer instructies. Het zijn uitsluitend deze instructies die de verschillende programma's gemeen hebben. Een programmeur moet dus iedere keer weer helemaal opnieuw beginnen met het regel voor regel coderen van een nieuw programma.

Zo is het ook in het wiskundig onderzoek. Dit onderzoek heeft nauwelijks een cumulatief karakter omdat men niet in staat blijkt om afdoende te profiteren van bestaande stellingen en bewijzen bij het afleiden van nieuwe stellingen.

Wat zeggen deze constateringen ons over de aard van de wiskundige werkelijkheid?

Wanneer de wiskundige werkelijkheid in essentie niet contingent is had verwacht mogen worden dat bewijzen van gelijksoortige stellingen veel meer op elkaar zouden lijken. Bovendien had verwacht mogen worden dat wiskundig onderzoek een cumulatief karakter heeft en dat wiskundigen veel gemakkelijker een vele malen breder scala van stellingen hadden kunnen afleiden dan in de praktijk blijkbaar het geval is.

Dat het wiskundig onderzoek wordt gekenmerkt door een zeer moeizame zoektocht naar bewijzen voor nieuwe stellingen moet dus wel leiden tot de intuïtie dat contingentie in de wiskunde een zeer grote rol speelt. Andrew Wiles heeft jarenlang gezwoegd op de laatste stelling van Fermat. Wanneer we een nieuwe stelling formuleren waarin slechts één klein detail wordt verandert, is de kans groot dat een bewijs voor deze gemodificeerde stelling in een geheel andere hoek moet worden gezocht. Een nieuwe zoektocht waarin we waarschijnlijk niets zullen hebben aan het monumentale werk van Andrew Wiles. Andrew zou dus feitelijk helemaal opnieuw moeten beginnen en niet meer tot zijn beschikking hebben dat de elementaire wiskundige concepten.

Wiskundige stellingen hangen dus onderling nauwelijks samen. Hiermee krijgt iedere stelling feitelijk een sterk geïsoleerd en daarmee onwillekeurig ook een sterk contingent karakter.

De structuur van een planeet oppervlak als metafoor voor de contingentie van de wiskundige werkelijkheid
De contingentie van de wiskundige werkelijkheid kan ook met een metafoor onder woorden worden gebracht.

Laten we ons eens voorstellen dat een aantal blinde onderzoekers de geometrie van het oppervlak van een bepaalde planeet wil onderzoeken. Om een adequaat beeld van het planeet oppervlak te verkrijgen besluiten zij om allerlei geometrische theorieën over dit oppervlak te ontwikkelen. Hierbij nemen de onderzoekers aan dat alle geometrische

eigenschappen van het planeet oppervlak afleidbaar zijn vanuit een beperkt aantal algemeen aanvaarde kenmerken van dit specifieke oppervlak.

Na enige tijd zullen er een aantal theorieën over het planeet oppervlak naast elkaar bestaan. Stuk voor stuk prachtige bouwwerkjes waarin allerlei structurele eigenschappen van het planeet oppervlak worden geformuleerd en bewezen. De bewezen eigenschappen hebben allemaal een beperkte complexiteit. Ze zijn anders gezegd in een beperkt aantal woorden (tekens) te formuleren. Complexere eigenschappen waarvan de formulering te bewerkelijk zou worden onderzoekt men niet. Sommige eigenschappen van het planeet oppervlak worden rechtstreeks bewezen vanuit de algemeen aanvaarde kenmerken van het oppervlak, andere worden afgeleid uit reeds eerder bewezen eigenschappen van het planeet oppervlak. Na verloop van tijd zullen de onderzoekers uitsluitend denken in termen van verbanden tussen de verschillende planeet oppervlak theorieën en de verschillende stellingen binnen iedere planeetoppervlak theorie. Het is deze beleveniswereld die het beeld bepaald dat de onderzoekers hebben van het planeet oppervlak.

Leiden al deze inspanningen nu tot een adequaat beeld van het planeet oppervlak en daarmee tot een diep inzicht in dit oppervlak? Het antwoord is kortweg nee. Vergelijk dit bijvoorbeeld eens met iemand die de kans krijgt om het planeet oppervlak ineens te aanschouwen. Het inzicht dat een dergelijk persoon verkrijgt in het planeet oppervlak is dermate diep, dat deze persoon niet eens meer op het idee zou komen om allerlei planeet oppervlak theorieën te gaan opstellen. Hij ziet als het ware ineens de volledige werkelijkheid van het planeet oppervlak. Denken in termen van het bewijzen van stellingen over planeet oppervlak eigenschappen is voor deze persoon onzinnig en juist een teken van de onmacht die men kennelijk heeft om het oppervlak ineens te aanschouwen. Inderdaad zijn in deze metafoor de onderzoekers blind. Maar dat verklaart niet hun onmacht. De werkelijke oorzaak van hun onmacht is gelegen in hun blijkbaar verborgen aannname dat het planeet oppervlak beschouwd moet worden als een fijnmazige, logisch gestructureerde entiteit waarvan de eigenschappen bewijsbaar zijn uit enkele elementaire kenmerken. Niets is natuurlijk minder waar voor iemand die in staat is om het oppervlak ineens visueel te aanschouwen en zo direct inziet dat het een volstrekt vormeloze entiteit betreft met volkomen willekeurige geometrische eigenschappen die zijn zoals ze zijn zonder enige logisch aanwijsbare reden. Slechts enkele, voornamelijk eenvoudige, eigenschappen van het planeet oppervlak lenen zich voor beschrijving middels gestructureerde theorieën. Dit betreft echter een verwaarloosbaar klein deel van de totale werkelijkheid van het planeet oppervlak.

Zo is het ook met de wiskundige werkelijkheid. Een denkbeeldig hoger wezen dat in staat is om de wiskundige werkelijkheid ineens in haar totaliteit te aanschouwen zal zich een adequaat beeld van deze werkelijkheid vormen. Een dergelijk wezen zal dan ook het denken in termen van wiskundige theorieën ervaren als en bovendien inzien dat wiskundige theorievorming zelfs leidt tot een onjuist beeld van deze werkelijkheid.

Een blik op de ware aard van de wiskundige werkelijkheid

De mens is echter niet in staat om de wiskundige werkelijkheid in haar totaliteit te aanschouwen. Daarom stort de mensheid zich op het formuleren en bewijzen van allerlei stellingen over deze werkelijkheid met als doel om toch nog enig inzicht in haar te verkrijgen. Zij zijn dus genoodzaakt om allerlei wiskundige theorieën te ontwikkelen die feitelijk niets meer zijn dan onbeholpen gereedschappen om toch nog enig inzicht te krijgen in de weerbarstige contingente wiskundige werkelijkheid. Wiskundige theorieën maken geen onderdeel uit van deze werkelijkheid en zoals aangegeven zal het zogenaamde inzicht dat langs deze weg wordt verkregen niet alleen uitermate beperkt en fragmentarisch, maar ook volstrekt misplaatst en misleidend zijn. Een daadwerkelijk waarheidsgetrouw beeld van de wiskundige werkelijkheid kan nooit langs de weg van wiskundige theorievorming worden verkregen.

Zoals hierboven toegelicht zal een denkbeeldig opperwezen dat wel in staat is om zich ineens via de aanschouwing een volledig beeld te vormen van de wiskundige werkelijkheid tot het diepe waarheidsgetroouwe inzicht komen dat de wiskundige werkelijkheid juist geen gestructureerd bouwwerk is waarin alles met alles op logisch dwingende wijze samenhangt, maar begrepen moet worden als een vormeloze, structuurloze verzameling van contingente wiskundige feiten.

Een totaal blik op de ware aard van de wiskundige werkelijkheid

Het verbluffende is nu dat dit artikel laat zien dat de mens tot hetzelfde inzicht kan komen als een denkbeeldig hoger wezen dankzij de stellingen van Gödel en Chaitin. Dit zijn geen stellingen binnen de wiskunde, maar stellingen over de wiskunde. Verbijsterend is dat dit inzicht zelfs in eenvoudige woorden gevatt kan worden. Dat dit zo is vervuld

mij met een gevoel van diepe bewondering. Als de ware aard van de wiskundige werkelijkheid zowel kenbaar als representeerbaar is, geldt dit misschien ook voor de ware aard van het Zijn zelf. Ik geloof dat dit inderdaad het geval is maar verdere bespiegelingen in deze richting vallen buiten het bereik van dit artikel.

De mens bereikt genoemd inzicht niet door de totale wiskundige werkelijkheid ineens te aanschouwen (hetgeen voor de mens als wezen met beperkte hersencapaciteit immers onmogelijk is) maar zoals gezegd door gebruik te maken van de inzichten van Gödel en Chaitin. In dit verband mogen we ook best nog eens wijzen op de ervaringen die de mens door de eeuwen heen heeft opgedaan met de praktijk van het wiskundig onderzoek.

Hoewel de mens de gehele wiskundige werkelijkheid niet ineens kan aanschouwen, is het haar dus wel gegeven om zich een waarheidsgrouw beeld van de aard van deze werkelijkheid te vormen. Dit beeld is zelfs visueel te maken als een oneindige ongestructureerde oceaan van wiskundige uitspraken waarvan de waarheid of onwaarheid door willekeur ofwel het toeval is bepaald en met ergens in deze oneindige zee van contingentie een verwaarloosbaar klein gestructureerd eilandje van wiskundige uitspraken waarvan de waarheid of onwaarheid bewijsbaar en dus logisch dwingend is.

