Relazione elaborato sull'uso del software Gurobi

Coppia 22: Ferrari Emanuel (736206), Lupica Benedetto (731502)

GitHub repository: https://github.com/EmanuelWRK/unibs-gurobi-2025

Il problema decisionale assegnato ci richiede di minimizzare il costo di acquisto di diverse tipologie di rottami $r \in R$ per un'azienda metallurgica. Conosciamo i costi, definiti dal vettore p_r, dove l'i-esimo elemento indica il prezzo €/kg dell'i-esimo rottame. Sia ogni rottame composto da elementi chimici $e \in E$. Ogni rottame r è costituito da una percentuale θ_{er} di elemento chimico $e \in E$. In particolare, θ_{er} è una matrice $r \times e$, dove l'elemento *i*, *j* identifica la percentuale del j-esimo elemento $\in E$ dell'i-esimo rottame $\in R$. Ogni rottame r ha un coefficiente di fusione μ_r che indica la percentuale del rottame effettivamente utilizzata. Ogni colata del forno dovrà produrre esattamente Q kg di acciaio, di cui la composizione deve rispettare dei valori minimi e massimi per ogni elemento $e \in E$, dati in percentuale rispettivamente nei vettori parametro β^e_{min} e β^e_{max}.

Modello del problema

Si tratta di un *problema di miscelazione applicato alla metallurgia*; abbiamo identificato la funzione obiettivo in questo modo:

$$\min \sum_{i=0}^{r \in R} p_r x_r$$

in cui:

- p_r è in costo unitario €/kg del i-esimo rottame;
- x_r è la variabile decisionale da noi designata per rappresentare la quantità (in kg) dell'i-esimo rottame.

Abbiamo individuato un totale di *21 vincoli:*

Vincolo di produzione totale

Il vincolo di uguaglianza che individua la quantità di acciaio da produrre:

$$\sum_{i=0}^{r \in R} \frac{\mu_r}{100} x_r = Q$$

in cui:

- μ_r è il coefficiente di fusione dell'i-esimo rottame;
- x_r è la variabile decisionale da noi designata per rappresentare la quantità (in kg) dell'i-esimo rottame;
- Q è la quantità in kg di acciaio da produrre.

Vincoli di percentuale minima

Vincoli di maggiore uguale che identificano la minima quantità di elemento $e \in E$ che deve essere presente nei Q kg di acciaio prodotto:

$$\left(\sum_{j=0}^{e \in E} \left(\sum_{i=0}^{r \in R} \frac{\mu_r}{100} x_r\right) \frac{\theta_{er}}{100}\right) \geq \sum_{j=0}^{e \in E} \frac{\beta^j_{min}}{100} Q$$

in cui:

- μ_r è il coefficiente di fusione dell'i-esimo rottame;
- x_r è la variabile decisionale da noi designata per rappresentare la quantità (in kg) dell'i-esimo rottame;
- θ_{er} è la quantità in percentuale del j-esimo elemento presente nel i-esimo rottame;
- β^j_{min} è la minima quantità in percentuale del j-esimo elemento che deve essere presente nel prodotto finale;
- Q è la quantità in kg di acciaio da produrre.

Vincoli di percentuale massima

Vincoli di minore uguale che identificano la massima quantità di elemento $e \in E$ che deve essere presente nei Q kg di acciaio prodotto:

$$(\sum_{j=0}^{e \in E}(\sum_{i=0}^{r \in R}\frac{\mu_r}{100}x_r)\frac{\theta_{er}}{100}) \leq \sum_{j=0}^{e \in E}\frac{\beta^j_{max}}{100}Q$$

in cui:

- μ_r è il coefficiente di fusione dell'i-esimo rottame;
- x_r è la variabile decisionale da noi designata per rappresentare la quantità (in kg) dell'i-esimo rottame;
- θ_{er} è la quantità in percentuale del j-esimo elemento presente nel i-esimo rottame;
- β^j_{max} è la massima quantità in percentuale del j-esimo elemento che deve essere presente nel prodotto finale;
- Q è la quantità in kg di acciaio da produrre.

Vincoli di struttura

Vengono definiti in automatico da Gurobi nella fase di creazione di variabili, impostando il lower bound a 0 e l'upper bound a ∞:

$$x_i \geq 0, \ \forall x_r$$

Quesiti

Quesito I

- 1.I: Per identificare le variabili in base e fuori base abbiamo sfruttato i parametri *VBasis* (variabili decisionali) e *CBasis* (variabili di slack e surplus) nel metodo *inBase(GRBModel model)*, stampando a video **1** se la variabile in esame si trova in base (il parametro corrispondente vale 0), **0** altrimenti.
- 1.II: Il metodo *ccr(GRBModel model)* stampa a video, sfruttando gli attributi *RC* e *Pi*, i coefficienti di costo ridotto delle variabili (sia decisionali che di slack e surplus).
- 1.III: Il metodo *multipla(GRBModel model)* ritorna **vero** se la variabile in esame è sia fuori base che con coefficiente di costo ridotto nullo, **falso** altrimenti; il metodo *degenere(GRBModel model)* ritorna **vero** se la variabile in esame è sia in base che con valore nullo, **falso** altrimenti.
- 1.IV: Il metodo *vincoliAttivi(GRBModel model)* stampa a video i nomi dei vincoli attivi, ovvero i vincoli con slack = 0 $\implies$ siamo sulla frontiera del vincolo nella soluzione di base corrente, questi vincoli identificano il vertice ottimo.
- 1.V: Il metodo *lambdaAZero(GRBModel model)* stampa a video il numero di vincoli non attivi $\implies$ la cui slack è $\neq$ 0. Una componente del duale è nulla se il vincolo a essa associata è non attivo.

Quesito II

- 2.I: Gli attributi *SAObjLow* e *SAObjUp* rappresentano l'analisi di sensitività del coefficiente oggetto della variabile in esame; il metodo *rangeObj(GRBModel model)* stampa a video l'intervallo entro il quale la variazione del parametro p_r non cambia la soluzione di base ottima trovata (stampa $\pm\infty$ in caso).
- 2.II: Gli attributi *SARHSLow* e *SARHSUp* rappresentano l'analisi di sensitività dei termini noti del vincolo in esame; il metodo *rangeConstr(GRBModel model, double maxProd)* stampa a video l'intervallo entro il quale la variazione del parametro β^e_{max} non cambia la soluzione di base ottima trovata (stampa $\pm\infty$ in caso). N.B.: il valore dell'intervallo trovato viene moltiplicato per il reciproco della massima produzione(*maxProd*) poiché il RHS del vincolo (ovvero il termine noto) non è composto esclusivamente dal parametro β^e_{max}, ma anche dal valore di massima produzione Q.
- 2.III: Il metodo *maxQforZMAX(GRBModel model, GRBVar[] rottami)* ritorna il valore di Q massimo tale per cui $\min\sum_{i=0}^{r \in R} p_r x_r \leq z_{max}$, dove z_{max} è dato dal quesito. Il metodo itera, eliminando tutti i vincoli dal modello, e riaggiungendoli con un nuovo valore di Q incrementato di 1.0 di iterazione in iterazione. Quando $z^*_{i-esima\ iterazione} \geq z_{max}$, il ciclo si interrompe.

Quesito III

Abbiamo creato un nuovo modello, implementando manualmente il metodo delle due fasi, che ha come funzione obiettivo:

$$\min \sum \mathbf{1^T} y_i$$

dove y_i è la variabile ausiliaria relativa all'i-esimo vincolo, e i vincoli in forma standard sono $Ax + y = b$. Ottimizzando questo modello, se le variabili $y^*_i = 0$ allora le $x^*_{due\ fasi}$ (le variabili decisionali all'ottimo nel problema in prima fase del metodo due fasi) rappresentano i valori di una soluzione di base ammissibile su cui è possibile iniziare la risoluzione con il simplesso nel problema iniziale, e la funzione obiettivo $z^*_{due\ fasi}$ in questo vertice è il valore delle $x^*_{due\ fasi}$ moltiplicate per i rispettivi costi unitari p_r. I metodi scritti e utilizzati per l'implementazione di questo modello sono: *twoPhasesObject(GRBModel model, GRBVar[] y)*, *twoPhasesVariables(GRBModel model)*, *twoPhasesConstraints(GRBModel model, double maxProd, GRBVar[] rottami*, *GRBVar[] y)*, *twoPhasesObjectValue(GRBModel model)* e *twoPhasesVarValue(GRBModel model)*.