Recursão

Aula 2

Diego Padilha Rubert

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Algoritmos e Programação II

Conteúdo da aula

Motivação

- Conceito fundamental em computação
- Programas elegantes, mais curtos e poderosos
- Equivalência entre programas recursivos — não-recursivos (?)
- Memória

Motivação

- Conceito fundamental em computação
- Programas elegantes, mais curtos e poderosos
- Equivalência entre programas recursivos — não-recursivos (?)
- Memória

Motivação

- Conceito fundamental em computação
- Programas elegantes, mais curtos e poderosos
- Equivalência entre programas recursivos — não-recursivos (?)
- Memória

Motivação

- Conceito fundamental em computação
- Programas elegantes, mais curtos e poderosos
- Equivalência entre programas recursivos — não-recursivos (?)
- Memória

Definição

- Alguns problemas têm uma estrutura recursiva: cada entrada do problema contém uma entrada menor do mesmo problema
- Estratégia:

  se a entrada do problema é pequena então
  resolva-a diretamente;
  senão,
  reduza-a a uma entrada menor do mesmo problema,
  aplique este método à entrada menor
  e volte à entrada original.
- Algoritmo recursivo, programa recursivo, função recursiva
- Uma função recursiva é aquela que possui uma ou mais chamadas a si mesma (chamada recursiva)
- Toda função deve possuir ao menos uma chamada externa a ela. Se todas as chamadas à função são externas, então a função é dita não-recursiva

Definição

- Alguns problemas têm uma estrutura recursiva: cada entrada do problema contém uma entrada menor do mesmo problema
- Estratégia:

  se a entrada do problema é pequena então
  resolva-a diretamente;
  senão,
  reduza-a a uma entrada menor do mesmo problema,
  aplique este método à entrada menor
  e volte à entrada original.

- Algoritmo recursivo, programa recursivo, função recursiva
- Uma função recursiva é aquela que possui uma ou mais chamadas a si mesma (chamada recursiva)
- Toda função deve possuir ao menos uma chamada externa a ela. Se todas as chamadas à função são externas, então a função é dita não-recursiva

Definição

- Alguns problemas têm uma estrutura recursiva: cada entrada do problema contém uma entrada menor do mesmo problema
- Estratégia:

  se a entrada do problema é pequena então
  resolva-a diretamente;
  senão,
  reduza-a a uma entrada menor do mesmo problema,
  aplique este método à entrada menor
  e volte à entrada original.
- Algoritmo recursivo, programa recursivo, função recursiva
- Uma função recursiva é aquela que possui uma ou mais chamadas a si mesma (chamada recursiva)
- Toda função deve possuir ao menos uma chamada externa a ela. Se todas as chamadas à função são externas, então a função é dita não-recursiva

Definição

- Alguns problemas têm uma estrutura recursiva: cada entrada do problema contém uma entrada menor do mesmo problema
- Estratégia:

  se a entrada do problema é pequena então
  resolva-a diretamente;
  senão,
  reduza-a a uma entrada menor do mesmo problema,
  aplique este método à entrada menor
  e volte à entrada original.
- Algoritmo recursivo, programa recursivo, função recursiva
- Uma função recursiva é aquela que possui uma ou mais chamadas a si mesma (chamada recursiva)
- Toda função deve possuir ao menos uma chamada externa a ela. Se todas as chamadas à função são externas, então a função é dita não-recursiva

Definição

- Alguns problemas têm uma estrutura recursiva: cada entrada do problema contém uma entrada menor do mesmo problema
- Estratégia:

  se a entrada do problema é pequena então
  resolva-a diretamente;
  senão,
  reduza-a a uma entrada menor do mesmo problema,
  aplique este método à entrada menor
  e volte à entrada original.
- Algoritmo recursivo, programa recursivo, função recursiva
- Uma função recursiva é aquela que possui uma ou mais chamadas a si mesma (chamada recursiva)
- Toda função deve possuir ao menos uma chamada externa a ela. Se todas as chamadas à função são externas, então a função é dita não-recursiva

Definição

- Em geral, a toda função recursiva corresponde uma outra não-recursiva equivalente
- Correção de um algoritmo recursivo pode ser facilmente demonstrada usando indução matemática
- A implementação de uma função recursiva pode acarretar gasto maior de memória, já que durante o processo de execução da função muitas informações devem ser guardadas na pilha de execução

Definição

- Em geral, a toda função recursiva corresponde uma outra não-recursiva equivalente
- Correção de um algoritmo recursivo pode ser facilmente demonstrada usando indução matemática
- A implementação de uma função recursiva pode acarretar gasto maior de memória, já que durante o processo de execução da função muitas informações devem ser guardadas na pilha de execução

Definição

- Em geral, a toda função recursiva corresponde uma outra não-recursiva equivalente
- Correção de um algoritmo recursivo pode ser facilmente demonstrada usando indução matemática
- A implementação de uma função recursiva pode acarretar gasto maior de memória, já que durante o processo de execução da função muitas informações devem ser guardadas na pilha de execução

Exemplos

Problema

Dado um número inteiro $n \geqslant 0$, computar o fatorial $n!$.

Usamos uma fórmula que nos permite naturalmente escrever uma função recusiva para calcular $n!$:

$$n! = \begin{cases} 1\,, & \text{se } n \leqslant 1\,, \\ n \times (n-1)!\,, & \text{caso contrário}\,. \end{cases}$$

Exemplos

Problema

Dado um número inteiro $n \geqslant 0$, computar o fatorial $n!$.

Usamos uma fórmula que nos permite naturalmente escrever uma função recusiva para calcular $n!$:

$$n! = \begin{cases} 1\,, & \text{se } n \leqslant 1\,, \\ n \times (n-1)!\,, & \text{caso contrário}\,. \end{cases}$$

Exemplos

Uma solução.

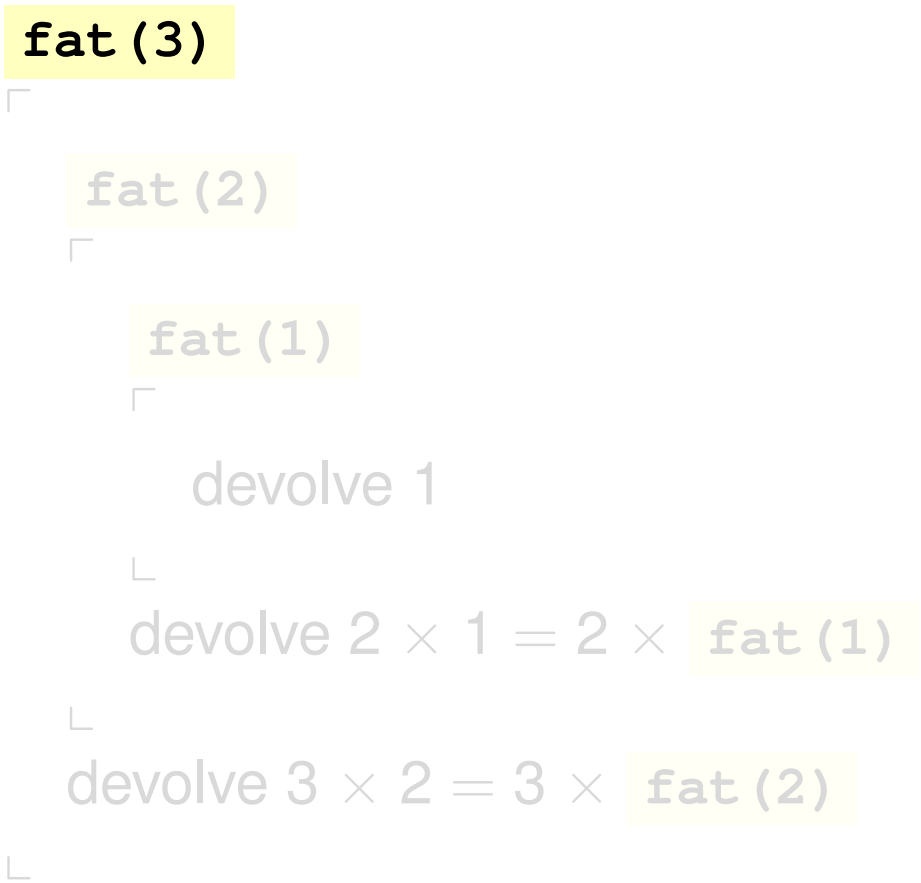
```
/* Recebe um número inteiro n >= 0 e devolve o fatorial de n */
int fat(int n)
{
   int result;

   if (n <= 1)
      result = 1;
   else
      result = n * fat(n-1);

   return result;
}
```

Exemplos

Outra solução.

```
/* Recebe um número inteiro n >= 0 e devolve o fatorial de n */
int fat(int n)
{
   if (n <= 1)
      return 1;
   else
      return n * fat(n-1);
}
```

Exemplos

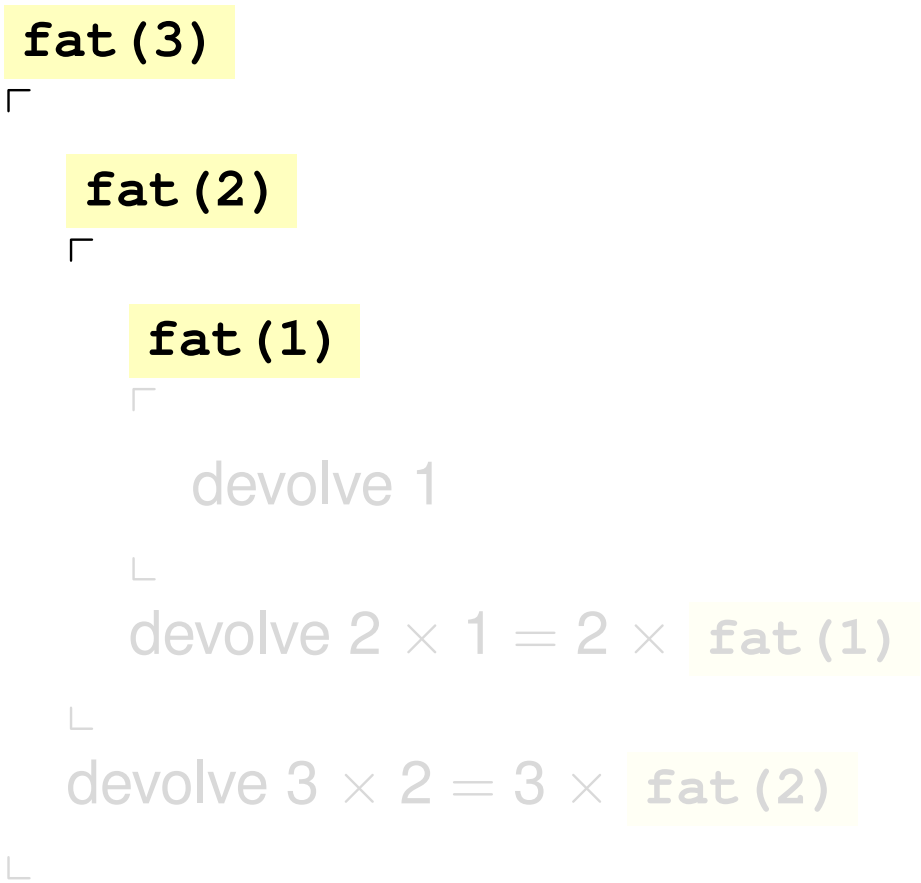


Exemplos

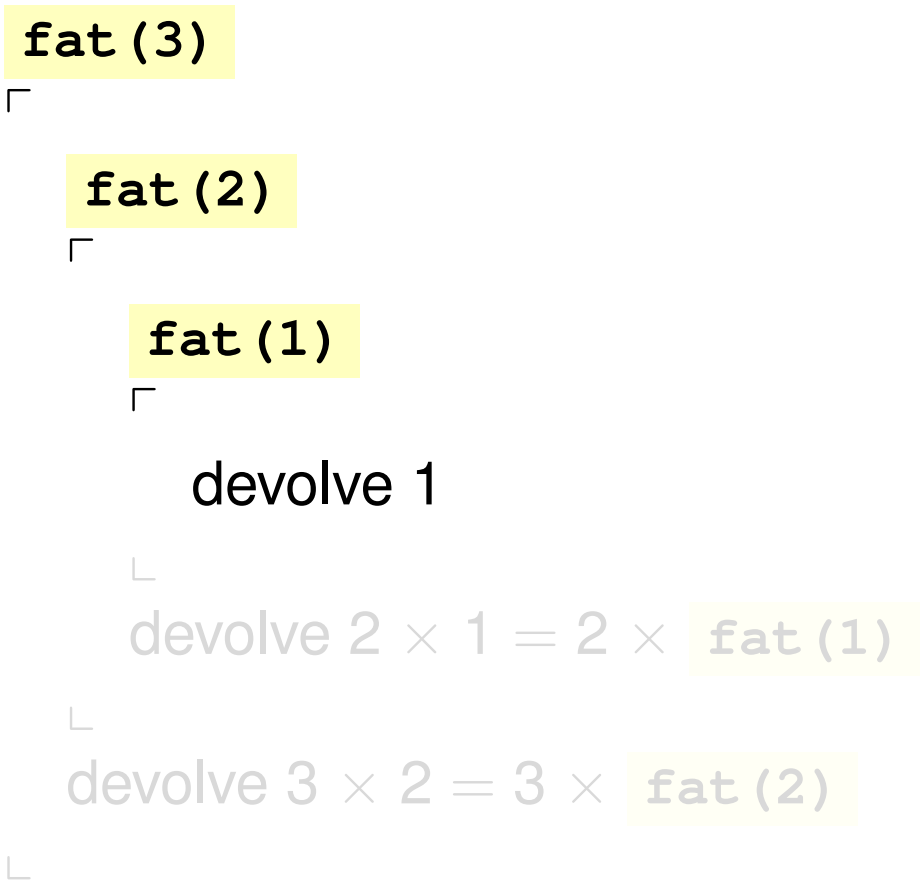
`fat(3)`

- `fat(2)`
  - `fat(1)`
    - devolve 1
  - devolve $2 \times 1 = 2 \times$ `fat(1)`
- devolve $3 \times 2 = 3 \times$ `fat(2)`

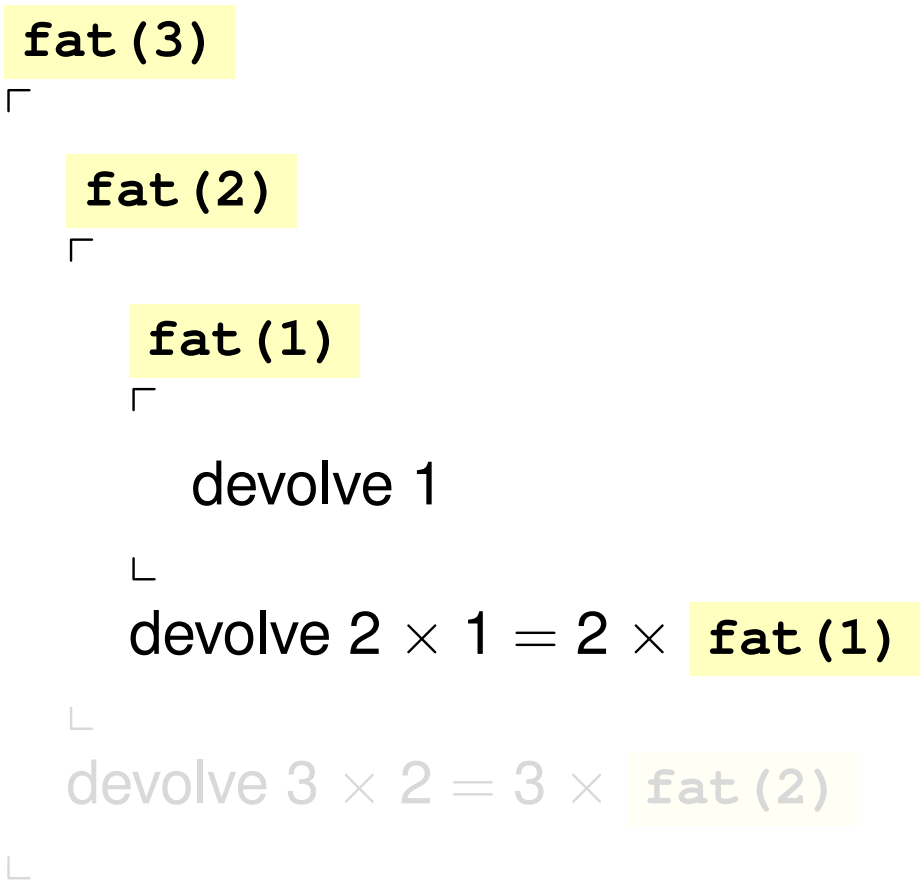
Exemplos



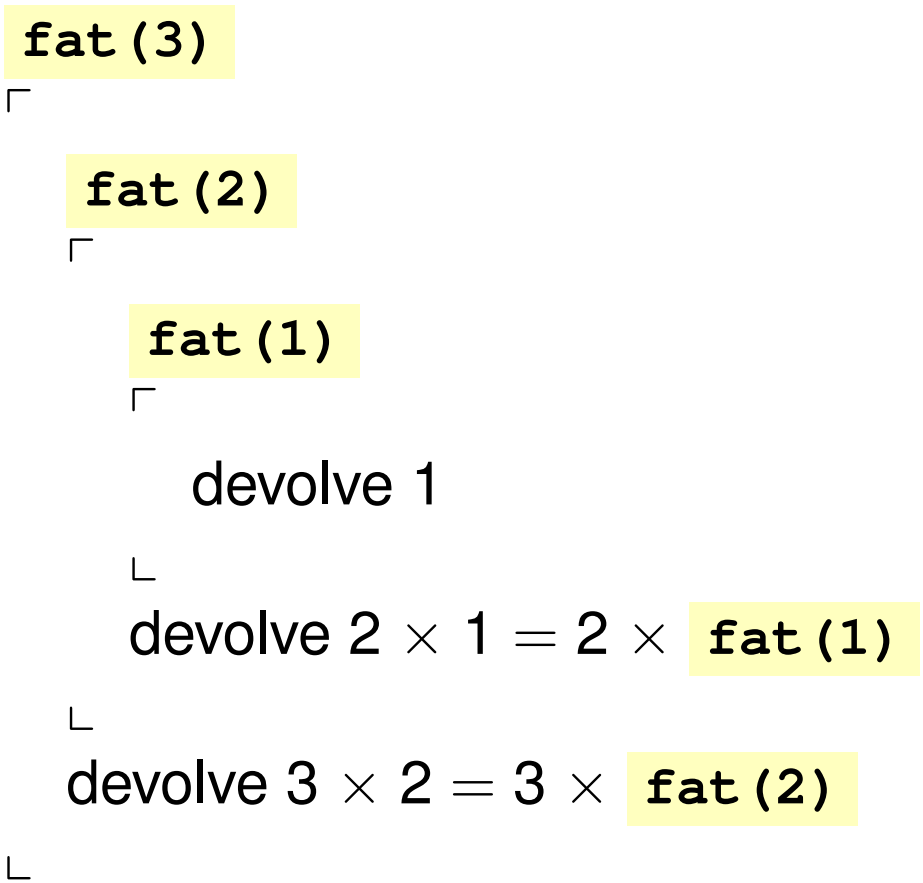
Exemplos



Exemplos



Exemplos



Exemplos

Problema

Dado um número inteiro $n > 0$ e uma sequência de n números inteiros armazenados em um vetor v, determinar um valor máximo em v.

Exemplos

```
/* Recebe um número inteiro n > 0 e um vetor v de números in-
   teiros com n elementos e devolve um elemento máximo de v */
int maximo(int n, int v[MAX])
{
   int aux;

   if (n == 1)
      return v[0];
   else {
      aux = maximo(n-1, v);
      if (aux > v[n-1])
         return aux;
      else
         return v[n-1];
   }
}
```

Correção

Como verificar que uma função recursiva está correta?

- Passo 1: escreva *o que* a função deve fazer;
- Passo 2: verifique se a função de fato faz o que deveria fazer quando a entrada é pequena;
- Passo 3: imagine que a entrada é grande e suponha que a função fará a coisa certa para entradas menores; sob essa hipótese, verifique que a função faz o que dela se espera.

Correção

Como verificar que uma função recursiva está correta?

Passo 1: escreva *o que* a função deve fazer;

Passo 2: verifique se a função de fato faz o que deveria fazer quando a entrada é pequena;

Passo 3: imagine que a entrada é grande e suponha que a função fará a coisa certa para entradas menores; sob essa hipótese, verifique que a função faz o que dela se espera.

Correção

Como verificar que uma função recursiva está correta?

- Passo 1: escreva *o que* a função deve fazer;
- Passo 2: verifique se a função de fato faz o que deveria fazer quando a entrada é pequena;
- Passo 3: imagine que a entrada é grande e suponha que a função fará a coisa certa para entradas menores; sob essa hipótese, verifique que a função faz o que dela se espera.

Correção

Como verificar que uma função recursiva está correta?

- Passo 1: escreva *o que* a função deve fazer;
- Passo 2: verifique se a função de fato faz o que deveria fazer quando a entrada é pequena;
- Passo 3: imagine que a entrada é grande e suponha que a função fará a coisa certa para entradas menores; sob essa hipótese, verifique que a função faz o que dela se espera.

Correção

Proposição

A função `maximo` encontra um maior elemento em um vetor v com $n \geqslant 1$ números inteiros.

Correção

Prova

Indução na quantidade n de elementos do vetor v.

Se $n = 1$ é fácil.

Suponha que para qualquer valor inteiro positivo $m < n$ a função compute corretamente `maximo(m, v)`.

Suponha agora que temos um vetor v contendo $n > 1$ números inteiros.

Chamada externa `maximo(n, v)`, com $n > 1$. A função executa:

```
aux = maximo(n-1, v);
```

Por hipótese de indução, `aux` contém um valor máximo para os $n - 1$ primeiros valores do vetor v. Então, a função decide quem é maior: `aux` ou `v[n-1]`.

Correção

Prova

Indução na quantidade n de elementos do vetor v.

Se $n = 1$ é fácil.

Suponha que para qualquer valor inteiro positivo $m < n$ a função compute corretamente `maximo(m, v)`.

Suponha agora que temos um vetor v contendo $n > 1$ números inteiros.

Chamada externa `maximo(n, v)`, com $n > 1$. A função executa:

```
aux = maximo(n-1, v);
```

Por hipótese de indução, `aux` contém um valor máximo para os $n - 1$ primeiros valores do vetor v. Então, a função decide quem é maior: `aux` ou `v[n-1]`.

Correção

Prova

Indução na quantidade n de elementos do vetor v.
Se $n = 1$ é fácil.
Suponha que para qualquer valor inteiro positivo $m < n$ a função compute corretamente `maximo(m, v)`.
Suponha agora que temos um vetor v contendo $n > 1$ números inteiros.
Chamada externa `maximo(n, v)`, com $n > 1$. A função executa:

```
aux = maximo(n-1, v);
```

Por hipótese de indução, `aux` contém um valor máximo para os $n - 1$ primeiros valores do vetor v. Então, a função decide quem é maior: `aux` ou `v[n-1]`.

Correção

Prova

Indução na quantidade n de elementos do vetor v.
Se $n = 1$ é fácil.
Suponha que para qualquer valor inteiro positivo $m < n$ a função compute corretamente `maximo(m, v)`.
Suponha agora que temos um vetor v contendo $n > 1$ números inteiros.
Chamada externa `maximo(n, v)`, com $n > 1$. A função executa:

```
aux = maximo(n-1, v);
```

Por hipótese de indução, `aux` contém um valor máximo para os $n - 1$ primeiros valores do vetor v. Então, a função decide quem é maior: `aux` ou `v[n-1]`.

Exercícios

1. A n-ésima potência de um número x, denotada por x^n, pode ser computada recursivamente observando a seguinte a fórmula:

$$x^n = \begin{cases} 1\,, & \text{se } n = 0\,, \\ x \cdot x^{n-1}\,, & \text{se } n > 1\,. \end{cases}$$

Considere neste exercício que x e n são números inteiros.

(a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

```
int pot(int x, int n)
```

que receba dois números inteiros x e n e calcule e devolva x^n.

(b) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
int potR(int x, int n)
```

que receba dois números inteiros x e n e calcule e devolva x^n.

(c) Escreva um programa que receba dois números inteiros x e n, com $n \geqslant 0$, e devolva x^n. Use as funções em (a) e (b) para mostrar os dois resultados.

Exercícios

```c
#include <stdio.h>

/* Recebe um dois números inteiros x e n
   e devolve x a n-ésima potência */
int pot(int x, int n)
{
   int i, result;

   result = 1;
   for (i = 1; i <= n; i++)
      result = result * x;
   return result;
}

/* Recebe um dois números inteiros x e n
   e devolve x a n-ésima potência */
int potR(int x, int n)
{
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return x * potR(x, n-1);
}
```

Exercícios

```
/* Recebe dois números inteiros x e n e im-
   prime x a n-ésima potência chamando duas
   funções: uma não-recursiva e uma recursiva */
int main(void)
{
   int x, n;

   scanf("%d%d", &x, &n);
   printf("Não-resursiva: %d^%d = %d\n", x, n, pot(x, n));
   printf("Resursiva    : %d^%d = %d\n", x, n, potR(x, n));

   return 0;
}
```

Exercícios

2. O que faz a função abaixo?

```
void imprime_alguma_coisa(int n)
{
   if (n != 0) {
      imprime_alguma_coisa(n / 2);
      printf("%c", '0' + n % 2);
   }
}
```

Escreva um programa para testar a função `imprime_alguma_coisa`.

Exercícios

3. (a) Escreva uma função recursiva que receba dois números inteiros positivos e devolva o máximo divisor comum entre eles usando o algoritmo de Euclides.
   (b) Escreva um programa que receba dois números inteiros e calcule o máximo divisor comum entre eles. Use a função do item (a).
4. (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
float soma(int n, float v[MAX])
```

   que receba um número inteiro $n > 0$ e um vetor v de números com ponto flutuante com n elementos, e calcule e devolva a soma desses números.
   (b) Usando a função do item anterior, escreva um programa que receba um número inteiro n, com $n \geqslant 1$, e mais n números reais e calcule a soma desses números.

Exercícios

5. (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
int soma_digitos(int n)
```

que receba um número inteiro positivo n e devolva a soma de seus dígitos.

(b) Escreva um programa que receba um número inteiro n e imprima a soma de seus dígitos. Use a função do item (a).

Exercícios

6. A **sequência de Fibonacci** é uma sequência de números inteiros positivos dada pela seguinte fórmula:

$$\begin{cases} F_1 &= 1\,, \\ F_2 &= 1\,, \\ F_i &= F_{i-1} + F_{i-2}\,, \quad \text{para } i \geqslant 3. \end{cases}$$

   (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
int Fib(int i)
```

   que receba um número inteiro positivo i e devolva o i-ésimo termo da sequência de Fibonacci, isto é, F_i.

   (b) Escreva um programa que receba um número inteiro $i \geqslant 1$ e imprima o termo F_i da sequência de Fibonacci. Use a função do item (a).

Exercícios

7. O **piso** de um número inteiro positivo x é o único inteiro i tal que $i \leqslant x < i + 1$. O piso de x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.
   Segue uma amostra de valores da função $\lfloor \log_2 n \rfloor$:

n	15	16	31	32	63	64	127	128	255	256
$\lfloor \log_2 n \rfloor$	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8

   (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
int piso_log2(int n)
```

   que receba um número inteiro positivo n e devolva $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

   (b) Escreva um programa que receba um número inteiro $n \geqslant 1$ e imprima $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Use a função do item (a).

Exercícios

8. Considere o seguinte processo para gerar uma sequência de números. Comece com um inteiro n. Se n é par, divida por 2. Se n é ímpar, multiplique por 3 e some 1. Repita esse processo com o novo valor de n, terminando quando $n = 1$. Por exemplo, a sequência de números a seguir é gerada para $n = 22$:

$$22 \;\; 11 \;\; 34 \;\; 17 \;\; 52 \;\; 26 \;\; 13 \;\; 40 \;\; 20 \;\; 10 \;\; 5 \;\; 16 \;\; 8 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1$$

É conjecturado que esse processo termina com $n = 1$ para todo inteiro $n > 0$. Para uma entrada n, o **comprimento do ciclo de** n é o número de elementos gerados na sequência. No exemplo acima, o comprimento do ciclo de 22 é 16.

Exercícios

(a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

```
int ciclo(int n)
```

que receba um número inteiro positivo n, mostre a sequência gerada pelo processo descrito acima na saída e devolva o comprimento do ciclo de n.

(b) Escreva uma versão recursiva da função do item (a) com a seguinte interface:

```
int cicloR(int n)
```

que receba um número inteiro positivo n, mostre a sequência gerada pelo processo descrito acima na saída e devolva o comprimento do ciclo de n.

(c) Escreva um programa que receba um número inteiro $n \geqslant 1$ e determine a sequência gerada por esse processo e também o comprimento do ciclo de n. Use as funções em (a) e (b) para testar.

Exercícios

9. Podemos calcular a potência x^n de uma maneira mais eficiente. Observe primeiro que se n é uma potência de 2 então x^n pode ser computada usando sequências de quadrados. Por exemplo, x^4 é o quadrado de x^2 e assim x^4 pode ser computado usando somente duas multiplicações ao invés de três. Esta técnica pode ser usada mesmo quando n não é uma potência de 2, usando a seguinte fórmula:

$$x^n = \begin{cases} 1\,, & \text{se } n = 0, \\ (x^{n/2})^2\,, & \text{se } n \text{ é par}, \\ x \cdot x^{n-1}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases} \qquad (1)$$

   (a) Escreva uma função com interface:

   ```
   int potencia(int x, int n)
   ```

   que receba dois números inteiros x e n e calcule e devolva x^n usando a fórmula (1).

   (b) Escreva um programa que receba dois números inteiros a e b e imprima o valor de a^b.