

# **Elementi Di Teoria Degli Insiemi**

APPUNTI DEL CORSO DI ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI  
TENUTO DAL PROF. MARCELLO MAMINO

DIEGO MONACO  
d.monaco2@studenti.unipi.it  
UNIVERSITÀ DI PISA

Anno Accademico 2022-23

## Indice

<b>1</b>	<b>Prologo nel XIX secolo</b>	<b>5</b>
1.1	Digressione: insiemi numerabili	8
1.2	Tornando agli insiemi di unicità	10
1.3	Giochi di parole	12
1.4	Scopi del corso	13
<b>2</b>	<b>Il linguaggio della teoria degli insiemi</b>	<b>14</b>
2.1	Le regole di inferenza	14
<b>3</b>	<b>I primi assiomi</b>	<b>15</b>
3.1	Assiomi dell'insieme vuoto e di estensionalità	15
3.2	Assioma di separazione	16
3.3	Classi e classi proprie	17
3.4	Assioma del paio e coppia di Kuratowski	18
3.5	Assioma dell'unione e operazioni booleane	19
3.6	Assioma delle parti e prodotto cartesiano	20
3.7	Relazioni di equivalenza e di ordine, funzioni	21
<b>4</b>	<b>Assioma dell'infinito e numeri naturali</b>	<b>22</b>
4.1	Gli assiomi di Peano	22
4.2	L'ordine di omega	23
4.3	Induzione forte e principio del minimo	24
4.4	Ricorsione numerabile	25
<b>5</b>	<b>Cardinalità</b>	<b>26</b>
5.1	Teorema di Cantor-Berstein	26
5.2	Teorema di Cantor	27
5.3	Operazioni fra cardinalità	28
<b>6</b>	<b>Cardinalità finite</b>	<b>29</b>
6.1	Principio dei cassetti	29
6.2	Operazioni fra le cardinalità finite	30
<b>7</b>	<b>La cardinalità numerabile</b>	<b>31</b>
7.1	Insiemi numerabili in pratica	31
7.2	Prodotto di numerabili è numerabile	32
7.3	Numeri interi e razionali	33
7.4	Ordini densi numerabili	34
7.5	Il grafo random	35
<b>8</b>	<b>I numeri reali e la cardinalità del continuo</b>	<b>36</b>
8.1	Caratterizzazione dei reali come ordine	36
8.2	La cardinalità del continuo è $2^{\aleph_0}$	37
8.3	Operazioni che coinvolgono la cardinalità del continuo	38
8.4	Sottrarre un numerabile dal continuo	39
<b>9</b>	<b>Stato del corso</b>	<b>40</b>
<b>10</b>	<b>I buoni ordinamenti</b>	<b>41</b>
10.1	Operazioni fra buoni ordinamenti	41

10.2	Gli ordinali di Von Neumann	42
10.3	Assioma del rimpiazzamento	43
10.4	Induzione e ricorsione transfinita	44
10.5	Operazioni fra gli ordinali	45
<b>11</b>	<b>Aritmetica ordinale e forma normale di Cantor</b>	<b>46</b>
11.1	Sottrazione e divisione euclidea	46
11.2	La forma normale di Cantor	47
11.3	Punti fissi e epsilon-numbers	48
11.4	Operazioni in forma normale di Cantor	49
<b>12</b>	<b>Gli alef</b>	<b>50</b>
12.1	Teorema di Hartogs	50
12.2	Somme e prodotti di alef	51
<b>13</b>	<b>L'assioma della scelta</b>	<b>52</b>
13.1	Buon ordinamento implica AC	52
13.2	AC implica buon ordinamento (idea)	53
13.3	Zorn implica buon ordinamento	54
13.4	AC implica Zorn	55
13.5	Conseguenze immediate di AC	56
13.6	Esempi di applicazione di AC	57
13.7	Basi di spazi vettoriali	58
13.8	Invariante di Dehn	59
13.9	Insieme di Vitali	60
13.10	Teorema di Cantor-Bendixson	61
13.11	Teorema di Tarski sulla scelta	62
<b>14</b>	<b>Aritmetica cardinale</b>	<b>63</b>
14.1	Somme e prodotti infiniti	63
14.2	Teorema di König	64
14.3	Cofinalità	65
14.4	Formula di Hausdorff	66
<b>15</b>	<b>Gerarchia di Von Neumann</b>	<b>67</b>
15.1	Formule relativizzate ad una classe	67
15.2	Assioma di buona fondazione	68
15.3	Principio di epsilon-induzione	69

## Premessa

Queste dispense sono la quasi esatta trascrizione in  $\text{\LaTeX}$  delle dispense del corso di Elementi di teoria degli insiemi, tenuto del prof. Marcello Mamino nell'anno accademico 2022-23.

## Ringraziamenti

Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>.



## §1 Prologo nel XIX secolo

La nascita della teoria degli insiemi è una storia complicata di cui so pochissimo. Però, persone che ne sanno molto più di me hanno sostenuto l'opinione che il problema seguente abbia avuto un ruolo. Come che sia, è almeno un'introduzione possibile.

**Problema 1.1.** Data una serie trigonometrica:

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

se, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , sappiamo che  $S(x)$  converge a 0, possiamo dire che i coefficienti  $c_0, a_i, b_i$  sono tutti 0?

Risolto positivamente da **Georg Cantor** nel 1870.

**Definizione 1.2.** Diciamo che  $X \subseteq \mathbb{R}$  è un **insieme di unicità** se, per ogni serie trigonometrica:

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

vale la seguente implicazione:

$S(x)$  converge a 0 per tutti gli  $x \notin X \implies$  tutti i coefficienti  $c_0, a_i, b_i$  sono nulli

### Esempio 1.3

Per il risultato di Cantor,  $\emptyset$  è di unicità.

**Problema 1.4.** Quali sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono di unicità?

### Fatto 1.5

$X \subseteq \mathbb{R}$  è di unicità se (ma non solo se) ogni funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfi le ipotesi seguenti è necessariamente lineare<sup>a</sup>:

- per ogni intervallo aperto  $]a, b[$  con  $]a, b[ \cap X = \emptyset$ ,  $f|_{]a, b[}$  è lineare;
- per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , se  $f$  ha derivate destre e sinistre in  $x$ , allora queste coincidono<sup>b</sup>.

<sup>a</sup> $f(x) = \alpha x + \beta$ .

<sup>b</sup>Ovvero  $f$  non ha punti angolosi.

### Esempio 1.6

$X = \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$  con  $\dots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = +\infty$ ,  $\lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = -\infty$  ha la proprietà data dal **Fatto 1.5**, quindi è di unicità.

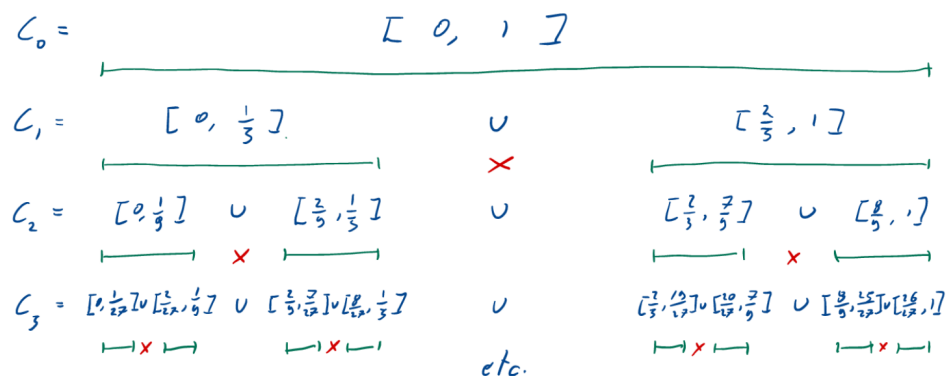
### NON Esempio 1.7

L'intervallo  $[0, 1]$  o  $\mathbb{R}$  non hanno la proprietà espressa dall'Fatto 1.5.

### NON Esempio buffo 1.8

Per l'insieme di Cantor non vale il Fatto 1.5.

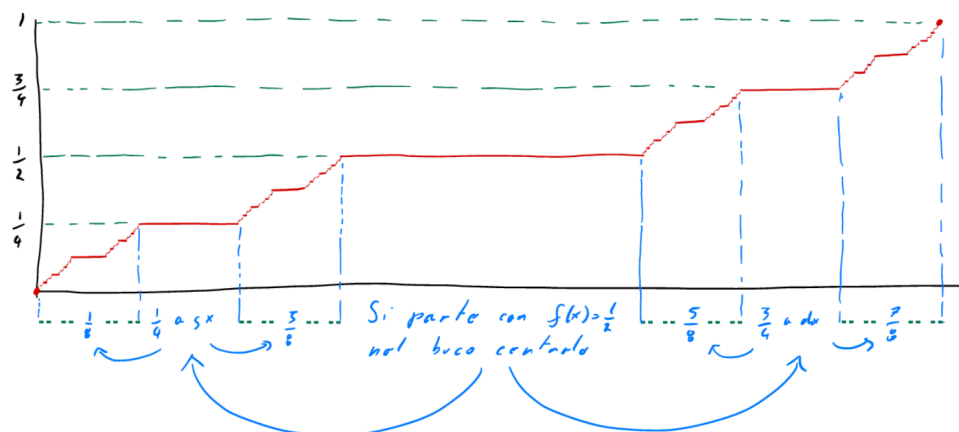
Possiamo costruire l'insieme di Cantor a partire dall'intervallo  $C_0 = [0, 1]$  nel seguente modo:



ovvero, preso l'intervallo  $[0, 1]$  possiamo dividerlo in tre parti e rimuovere la parte centrale  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , chiamiamo gli intervalli rimanenti  $C_1$ , possiamo iterare il procedimento sui due segmenti di  $C_1$  ed ottenere  $C_2, C_3, \dots$ , a questo punto definiamo l'insieme di Cantor  $C$  come:

$$C := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$$

Esiste una funzione continua (e crescente)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  detta **scala di Cantor** (o **scala del diavolo**), tale che  $f'(x) = 0$  per  $x \notin C$  e non è derivabile in  $x \in C$ .

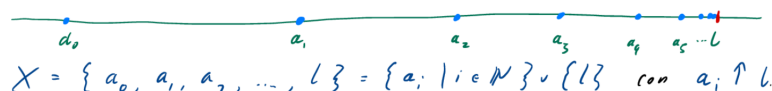


tale funzione si costruisce aggiungendo tratti costanti (prima  $\frac{1}{2}$ , poi  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  e così via, dividendo l'intervallo  $[0, 1]$  sull'asse delle ordinate in parti uguali) alle parti eliminate sull'intervallo  $[0, 1]$  sull'asse delle ascisse per costruire l'insieme di Cantor.

**Nota 1.9** — Per  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{C}$  non vale il [Fatto 1.5](#) ma, in realtà, sono di unicità.

### Esempio buffo 1.10

L'insieme degli elementi di una successione crescente col suo limite è un esempio di insieme di unicità.

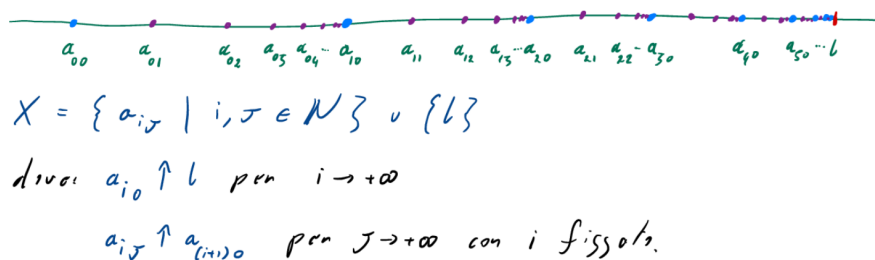


Dimostriamo quindi che  $X$  è un insieme di unicità.

*Dimostrazione.* La funzione  $f$  è lineare in  $]-\infty, a_0[$ ,  $]a_0, a_1[$ ,  $]a_1, a_2[$ ,  $\dots$ . Quindi nei punti  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ammette derivata destra e sinistra. Siccome questi punti non possono essere angolosi,  $f_{|]-\infty, a_0[}$ ,  $f_{|]a_0, a_1[}$ , etc. hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi, sfruttando la cardinalità,  $f_{|]-\infty, a_0[}$  è lineare. Siccome  $f_{|]-\infty, a_0[}$  è lineare, usando nuovamente l'assenza di punti angolosi abbiamo la tesi.  $\square$

### Esempio più buffo 1.11

L'insieme degli elementi di una successione crescente di successioni crescenti è un insieme di unicità.



Dimostriamo che  $X$  è di unicità.

*Dimostrazione.* In ciascuno degli intervalli  $]a_{i0}, a_{(i+1)0}[$ ,  $f$  è lineare, ragionando come nell'esempio precedente, ci siamo ridotti alla situazione - di nuovo - dell'esempio precedente con  $a'_i = a_{i0}$ .  $\square$

## §1.1 Digressione: insiemi numerabili

**Definizione 1.12.** Un insieme  $X$  è **numerabile** se è il supporto di una successione,  $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ , con  $a_i \neq a_j$  per ogni  $i \neq j$ .<sup>1</sup>

### Esempio 1.13

Alcuni esempi di insiemi numerabili sono:

- $\mathbb{N}$ , l'insieme dei numeri naturali, infatti, la successione  $a_i = i$  realizza la biezione.
- I numeri dispari, con la biezione data da  $a_i = 2i + 1$ .
- I numeri primi,  $a_i = p_i$ , con  $p_i$   $i$ -esimo numero primo.
- $\mathbb{Z}$  l'insieme dei numeri interi, con la biezione data da  $a_i = (-1)^i \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ .

### Esempio meno immediato 1.14

L'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$  è numerabile.

*Dimostrazione.* La funzione  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (x, y) \longmapsto 2^x(1 + 2y) - 1$  è biunivoca (perché?), quindi  $a_i = f^{-1}(i)$  enumera  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  $\square$

### Proposizione 1.15

Un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è, a sua volta, numerabile.

*Dimostrazione.* Sia  $Y \subseteq X$  con  $Y$  infinito e  $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ . La sottosuccessione  $b_j = a_{i_j}$  degli  $a_*$  che appartengono a  $Y$  enumera  $Y$ . A essere precisi bisognerebbe dire esattamente chi sono gli indici  $i_j$ . Per ricorsione:

$$i_0 = \min\{i | a_i \in Y\} \quad i_{j+1} = \min\{i > i_j | a_i \in Y\}$$

dove i minimi esistono perché  $Y$  non è finito.  $\square$

### Proposizione 1.16

Se  $X$  e  $Y$  sono numerabili  $X \times Y = \{(a, b) | a \in X, b \in Y\}$  è anch'esso numerabile.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ ,  $Y = \{b_j | j \in \mathbb{N}\}$ . Siccome  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) | i, j \in \mathbb{N}\}$ . Quindi  $X \times Y = \{(a_{i_t}, b_{j_t}) | t \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

### Esempio 1.17

$\mathbb{Q}$  è numerabile.

<sup>1</sup>O in altre parole se esiste  $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$  biunivoca.



*Dimostrazione.*  $\mathbb{Q}$  è in corrispondenza biunivoca con:

$$F = \{(\text{num.}, \text{den.}) \mid \text{num.} \in \mathbb{Z} \wedge \text{den.} \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \text{M.C.D.}(\text{num.}, \text{den.}) = 1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

□

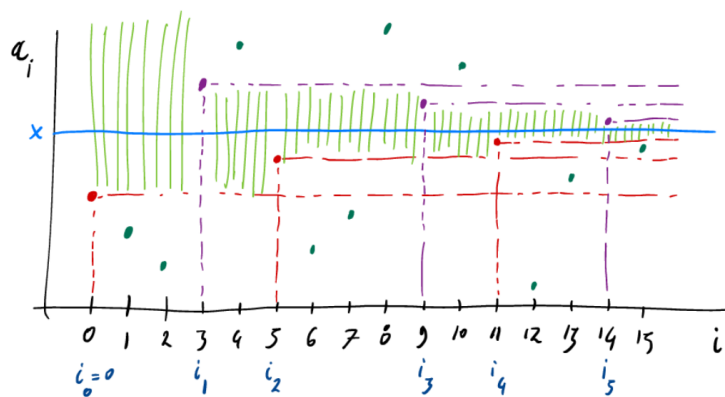
### NON Esempio 1.18

$\mathbb{R}$  non è numerabile.

*Dimostrazione.* Supponendo, per assurdo, che  $\mathbb{R} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , cerchiamo un  $x \in \mathbb{R}$  che non compare fra gli  $a_i$ . Allo scopo, costruiamo la sottosuccessione  $a_{i_j}$  definita per ricorrenza da:

$$i_0 = 0 \quad i_1 = \min\{i \mid a_i > a_0\} \quad i_{j+1} = \min\{i \mid a_i \text{ è compreso tra } a_{i_{j-1}} \text{ e } a_{i_j}\}$$

graficamente:



Si vede facilmente (esercizio!) che la successione  $\{a_{i_{2k}}\}_k$  è crescente,  $\{a_{i_{2k+1}}\}_k$  è decrescente e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k}} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k+1}}$ . Fissiamo  $x$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k}} \leq x \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k+1}}$ .

Chiaramente  $x$  non è nessuno degli  $a_{i_j}$ , perché  $a_{i_{2k}} < x < a_{i_{2k+1}}$ . Supponiamo  $x = a_n$ , allora ci sarà  $j$  tale che  $i_j < n < i_{j+1}$ , ma questo è assurdo perché allora  $x = a_n$  è compreso fra  $a_{i_{j-1}}$  e  $a_{i_j}$ , però  $n < i_{j+1}$  contro la minimalità di quest'ultimo.

**Esercizio 1.19.** Completare la dimostrazione nel caso  $n < i$ .

**Esercizio 1.20.** Dimostrare che l'insieme di Cantor  $C$  non è numerabile.

□

## §1.2 Tornando agli insiemi di unicità

### Teorema 1.21 (Cantor-Lebesgue)

Se  $X \subseteq \mathbb{R}$  è chiuso e numerabile, allora  $X$  soddisfa il [Fatto 1.5](#), ed è, quindi, di unicità.

La strategia di dimostrazione passa attraverso una definizione.

**Definizione 1.22.** Dato  $X \subseteq \mathbb{R}$ , il **derivato di Cantor-Bendixson** di  $X$  è:

$$X' = X \setminus \{\text{punti isolati di } X\}$$

(dove  $a \in X$  è un **punto di accumulazione** se  $\exists \varepsilon > 0 : ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap X = \{a\}$ ).

**Osservazione 1.23** — Se  $X$  è chiuso e per  $X'$  vale il [Fatto 1.5](#), allora anche per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).

*Dimostrazione.* Occorre dimostrare che se  $f$  è continua, lineare, ristretta agli intervalli aperti che non intersecano  $X$ , e non ha punti angolosi, allora  $f$  è lineare ristretta agli intervalli aperti che non intersecano  $X'$ . Fatto questo, usando l'ipotesi su  $X'$ ,  $f$  è lineare - abbiamo quindi mostrato che per  $X$  vale [Fatto 1.5](#).

Sia  $]a, b[ \cap X' = \emptyset$ , dobbiamo dire che  $f|_{]a, b[}$  è lineare. Ci basta dire che per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $f|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$  è lineare. Siccome  $]a, b[ \cap X' = \emptyset$ ,  $]a, b[ \cap X = \{\text{punti isolati di } X\}$ . Quindi  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \cap X$  è finito - se così non fosse, avrebbe un punto di accumulazione  $\alpha$  che non può essere un punto isolato di  $X$  (altrimenti si avrebbe un assurdo). Per cui  $f|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$  è lineare a tratti, e, siccome non ha punti angolosi, è lineare.  $\square$

### Corollario 1.24

Sia  $X^{(n)} = X'' \dots^a$ . Se  $X^{(n)} = \emptyset$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , allora per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).  
<sup>a</sup><sub>n</sub> volte.


*Dimostrazione.* Induzione su  $n$ .  $\square$

Il guaio è che ci sono chiusi numerabili per cui  $X^{(n)} \neq \emptyset$ , qualunque sia  $n$ .

### Esempio 1.25

Vogliamo costruire  $X$  chiuso e numerabile tale che  $X^{(n)} \neq \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Cominciamo col rivedere alcuni esempi già visti.

•  $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  con  $a_i \uparrow +\infty$  per  $i \rightarrow \infty$ .



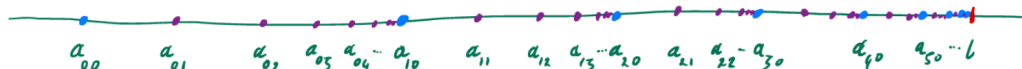
Tutti i punti sono isolati,  $X' = \emptyset$ .

- $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots, l\}$  con  $a_i \uparrow l$  per  $i \rightarrow \infty$ .

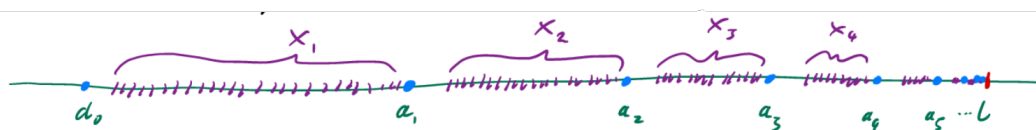


“Successione con punto limite”. Tutti i punti sono isolati salvo  $l$ , quindi  $X' = \{l\}$  e  $X'' = \emptyset$ .

- $X = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$  con  $a_{i0} \uparrow l$  e  $a_{ij} \uparrow a_{(i+1)0}$



“Successione di successioni”,  $X' = \{a_{10}, a_{20}, \dots, l\}$ ,  $X'' = \{l\}$  e  $X''' = \emptyset$ .  
Si vede che possiamo proseguire, in qualche modo, costruendo una successione di successioni di successioni, etc.  $n$  volte,  $X_n$ . Avremo  $X_n^{(n)} \neq \emptyset$ ,  $X_n^{(n+1)} = \emptyset$ . Ora costruiamo  $X_\omega$  fatto così:



È chiaro che, per ogni  $n$ ,  $X_\omega^{(n)} \neq \emptyset$ . D'altro canto,  $X_\omega$  soddisfa il [Fatto 1.5](#), perché  $f$  deve essere lineare in ciascuno degli intervalli  $[a_n, a_{n+1}]$ , perché  $X_{n+1}$  soddisfa il [Fatto 1.5](#), quindi ci si riduce al caso della successione.

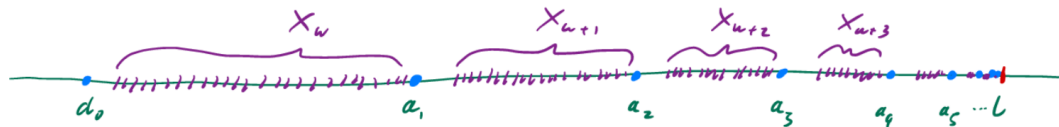
**Esercizio 1.26.** Perché  $X_\omega$  è numerabile?

Ora potremmo pensare che, pazienza se  $X_\omega$  non si smonta a furia di derivati, sarà un caso particolare. Però adesso, possiamo fare una successione di insiemi come  $X_\omega$ , chiamiamola  $X_{\omega+1}$ , e una successione di questi  $X_{\omega+2}$ , etc.  
Al diavolo, serve un nuovo corollario!

### Corollario 1.27

Se  $X^{(n)}$  è di “tipo  $X_\omega$ ”, allora per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).

Ok, questo corollario copre  $X_\omega$ ,  $X_{\omega+1}$ ,  $X_{\omega+2}$ , ma copre anche  $X_{\omega+2}$ ?



No: occorre un nuovo corollario.

### Corollario 1.28

Se  $X^{(n)}$  è di “tipo  $X_{\omega-2}$ ”, allora per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).

E poi un altro per  $X_{\omega-3}$ , e un altro per  $X_{\omega-4}$ , etc.

E ora abbiamo finito? No, perché possiamo costruire una nuova successione con  $X_\omega, X_{\omega-2}, X_{\omega-3}$ , etc.

Se chiamiamo questa follia  $X_{\omega \cdot \omega}$ , ecco che si riparte a fare successioni di  $X_{\omega \cdot \omega}$ . Ora si sarà capito che definiremo una serie aritmetica di queste cose, per cui potremo fare anche  $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}$ , etc. È questa la soluzione allora?

No, ogni sforzo di trovare l'induzione a capo delle induzioni è vano. Se ho  $X_\omega, X_{\omega^\omega}, X_{\omega^{\omega^\omega}}$ , etc., allora, ecco che faccio una successione con queste cose, la battezzo in qualche modo - ad esempio,  $X_{\varepsilon_0}$  - e si riparte!

Per smontare ogni possibile insieme chiuso e numerabile occorre un **nuovo tipo di induzione**, l'**induzione transfinita**, che è strettamente più potente dell'induzione aritmetica. Questa tecnica è stata sviluppata da Cantor, forse prendendo le mosse dal problema degli insiemi di unicità, e sarà uno degli argomenti centrali del corso.

**Esercizio 1.29** (per la fine del corso). Dimostrare il teorema di [Cantor-Lebesgue](#).

## §1.3 Giochi di parole

Descrivere un oggetto matematico non basta per crearlo. Se bastasse, si incorrerebbe in contraddizioni come queste.

### Paradosso di Russell

Tipicamente le collezioni - uso questa parola perché daremo, al termine “insieme”, un senso tecnico preciso - non sono membro di se stesse: la collezione di tutti i numeri primi non è un numero primo. Però ci sono anche collezioni che sono membra di se stesse: per esempio la collezione di tutte le collezioni. Consideriamo:

$$N = \{\text{collezioni } X \mid X \notin X\}$$

la collezione delle collezioni che non sono membra di se stesse -  $N$  per collezioni normali. Quindi ci chiediamo se  $N \in N$  oppure no?  $N \in N$  se e solo se per definizione  $N \notin N$ , che è assurdo.

Il paradosso di Russell ci dice che, del principio di collezione - ossia l'idea che data una proprietà ben definita  $P$  si possa costruire la collezione  $\{X \mid P(X)\}$  - non ci si può fidare.

### Paradosso di Berry

L'italiano annovera un numero finito di parole, è quindi possibile formare solo un numero finito di frasi di meno di cento parole. Alcune di queste descrivono un numero naturale,

altre no. Comunque, solo un numero finito di numeri naturali può essere descritto con meno di cento parole. Per il principio del minimo, esiste:

$h$  = “il più piccolo numero naturale che l’italiano non può  
descrivere con meno di cento parole”

Il guaio chiaramente, è che lo abbiamo appena descritto con sedici parole.

Quindi non ci si può fidare troppo neppure dell’italiano, o meglio, non è possibile descrivere precisamente cosa sia una descrizione precisa.

In conclusione, occorre fissare un linguaggio formale in cui si esprimano le proposizioni della teoria degli insiemi, e occorre fissare un sistema di assiomi, espressi in questo linguaggio, che dicano quali costruzioni sono lecite: quali insiemi esistono. Il ruolo della teoria degli insiemi è, poi, di fondare l’edificio della matematica. L’ambizione, quindi, è che il linguaggio e gli assiomi della teoria degli insiemi, siano in realtà, il linguaggio e gli assiomi della matematica.

## §1.4 Scopi del corso

Questo corso persegue due obiettivi:

- (1) Studiare i **fondamenti della matematica**, nella forma più comunemente accettata nel XX secolo e fino ad ora, la teoria degli insiemi di **Zermelo-Fraenkel** con l’assioma della scelta (ZFC).
- (2) Studiare tecniche e strumenti che sono stati sviluppati grazie alla teoria degli insiemi, per esempio: la teoria delle cardinalità, la teoria dei numeri ordinali, l’induzione e la ricorsione transfinita.

In questo corso non ci occupiamo dei modelli della teoria degli insiemi. Mi spiego. Per esempio, in teoria dei gruppi si assiomatizza cosa sia un gruppo, e poi si studia come possano essere fatti i diversi gruppi. In teoria degli insiemi si assiomatizza l’universo di tutti gli insiemi, però, per il teorema di incompletezza di **Gödel**, questa assiomatizzazione non può essere completa. Quindi esistono tanti universi insiemistici possibili. Indagare queste possibilità - i modelli della teoria degli insiemi - è argomento di corsi più avanzati.

## §2 Il linguaggio della teoria degli insiemi

### §2.1 Le regole di inferenza

### §3 I primi assiomi

#### **Assioma 3.1** (Assioma dell'insieme vuoto)

Esiste un insieme vuoto.

$$\exists x, \forall y : y \notin x$$

#### **Assioma 3.2** (Assioma di estensionalità)

Un insieme è determinato dalla collezione dei suoi elementi. Due insiemi coincidono se e solo se hanno i medesimi elementi.

$$\forall a, \forall b : a = b \longleftrightarrow \forall x (x \in a \longleftrightarrow x \in b)$$

#### §3.1 Assiomi dell'insieme vuoto e di estensionalità

### §3.2 Assioma di separazione



### §3.3 Classi e classi proprie

### §3.4 Assioma del paio e coppia di Kuratowski

### §3.5 Assioma dell'unione e operazioni booleane

### §3.6 Assioma delle parti e prodotto cartesiano

### §3.7 Relazioni di equivalenza e di ordine, funzioni

## §4 Assioma dell'infinito e numeri naturali

### §4.1 Gli assiomi di Peano

## §4.2 L'ordine di omega

### §4.3 Induzione forte e principio del minimo



## §4.4 Ricorsione numerabile

## §5 Cardinalità

### §5.1 Teorema di Cantor-Berstein

## §5.2 Teorema di Cantor

## §5.3 Operazioni fra cardinalità

## §6 Cardinalità finite

### §6.1 Principio dei cassetti

## §6.2 Operazioni fra le cardinalità finite

## §7 La cardinalità numerabile

### §7.1 Insiemi numerabili in pratica

## §7.2 Prodotto di numerabili è numerabile



### §7.3 Numeri interi e razionali

## §7.4 Ordini densi numerabili

## §7.5 Il grafo random

## **§8 I numeri reali e la cardinalità del continuo**

### **§8.1 Caratterizzazione dei reali come ordine**

## §8.2 La cardinalità del continuo è $2$ alla alef-zero

### §8.3 Operazioni che coinvolgono la cardinalità del continuo

## §8.4 Sottrarre un numerabile dal continuo

## §9 Stato del corso



## **§10 I buoni ordinamenti**

### **§10.1 Operazioni fra buoni ordinamenti**

## §10.2 Gli ordinali di Von Neumann

### §10.3 Assioma del rimpiazzamento

## §10.4 Induzione e ricorsione transfinita

## §10.5 Operazioni fra gli ordinali

## **§11 Aritmetica ordinale e forma normale di Cantor**

### **§11.1 Sottrazione e divisione euclidea**

## §11.2 La forma normale di Cantor

### §11.3 Punti fissi e epsilon-numbers



## §11.4 Operazioni in forma normale di Cantor

## §12 Gli alef

### §12.1 Teorema di Hartogs

## §12.2 Somme e prodotti di alef

## §13 L'assioma della scelta

### §13.1 Buon ordinamento implica AC

## §13.2 AC implica buon ordinamento (idea)

### §13.3 Zorn implica buon ordinamento

## §13.4 AC implica Zorn

## §13.5 Conseguenze immediate di AC



## §13.6 Esempi di applicazione di AC

## §13.7 Basi di spazi vettoriali

## §13.8 Invariante di Dehn

## §13.9 Insieme di Vitali

## §13.10 Teorema di Cantor-Bendixson

### §13.11 Teorema di Tarski sulla scelta

## §14 Aritmetica cardinale

### §14.1 Somme e prodotti infiniti

## §14.2 Teorema di König



### §14.3 Cofinalità

## §14.4 Formula di Hausdorff

## §15 Gerarchia di Von Neumann

### §15.1 Formule relativizzate ad una classe

## §15.2 Assioma di buona fondazione

### §15.3 Principio di epsilon-induzione