

# **Elementi Di Teoria Degli Insiemi**

APPUNTI DEL CORSO DI ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI  
TENUTO DAL PROF. MARCELLO MAMINO

DIEGO MONACO  
d.monaco2@studenti.unipi.it  
UNIVERSITÀ DI PISA

Anno Accademico 2022-23

## Indice

<b>1</b>	<b>Prologo nel XIX secolo</b>	<b>5</b>
1.1	Digressione: insiemi numerabili	8
1.2	Tornando agli insiemi di unicità	10
1.3	Giochi di parole	12
1.4	Scopi del corso	13
<b>2</b>	<b>Il linguaggio della teoria degli insiemi</b>	<b>14</b>
2.1	Le regole di inferenza	15
<b>3</b>	<b>I primi assiomi</b>	<b>18</b>
3.1	Assiomi dell'insieme vuoto e di estensionalità	18
3.2	Assioma di separazione	19
3.3	Classi e classi proprie	20
3.4	Assioma del paio e coppia di Kuratowski	21
3.5	Assioma dell'unione e operazioni booleane	22
3.6	Assioma delle parti e prodotto cartesiano	23
3.7	Relazioni di equivalenza e di ordine, funzioni	24
<b>4</b>	<b>Assioma dell'infinito e numeri naturali</b>	<b>25</b>
4.1	Gli assiomi di Peano	25
4.2	L'ordine di omega	26
4.3	Induzione forte e principio del minimo	27
4.4	Ricorsione numerabile	28
<b>5</b>	<b>Cardinalità</b>	<b>29</b>
5.1	Teorema di Cantor-Berstein	29
5.2	Teorema di Cantor	30
5.3	Operazioni fra cardinalità	31
<b>6</b>	<b>Cardinalità finite</b>	<b>32</b>
6.1	Principio dei cassetti	32
6.2	Operazioni fra le cardinalità finite	33
<b>7</b>	<b>La cardinalità numerabile</b>	<b>34</b>
7.1	Insiemi numerabili in pratica	34
7.2	Prodotto di numerabili è numerabile	35
7.3	Numeri interi e razionali	36
7.4	Ordini densi numerabili	37
7.5	Il grafo random	38
<b>8</b>	<b>I numeri reali e la cardinalità del continuo</b>	<b>39</b>
8.1	Caratterizzazione dei reali come ordine	39
8.2	La cardinalità del continuo è $2$ alla alef-zero	40
8.3	Operazioni che coinvolgono la cardinalità del continuo	41
8.4	Sottrarre un numerabile dal continuo	42
<b>9</b>	<b>Stato del corso</b>	<b>43</b>
<b>10</b>	<b>I buoni ordinamenti</b>	<b>44</b>
10.1	Operazioni fra buoni ordinamenti	44

10.2	Gli ordinali di Von Neumann	45
10.3	Assioma del rimpiazzamento	46
10.4	Induzione e ricorsione transfinita	47
10.5	Operazioni fra gli ordinali	48
<b>11</b>	<b>Aritmetica ordinale e forma normale di Cantor</b>	<b>49</b>
11.1	Sottrazione e divisione euclidea	49
11.2	La forma normale di Cantor	50
11.3	Punti fissi e epsilon-numbers	51
11.4	Operazioni in forma normale di Cantor	52
<b>12</b>	<b>Gli alef</b>	<b>53</b>
12.1	Teorema di Hartogs	53
12.2	Somme e prodotti di alef	54
<b>13</b>	<b>L'assioma della scelta</b>	<b>55</b>
13.1	Buon ordinamento implica AC	55
13.2	AC implica buon ordinamento (idea)	56
13.3	Zorn implica buon ordinamento	57
13.4	AC implica Zorn	58
13.5	Conseguenze immediate di AC	59
13.6	Esempi di applicazione di AC	60
13.7	Basi di spazi vettoriali	61
13.8	Invariante di Dehn	62
13.9	Insieme di Vitali	63
13.10	Teorema di Cantor-Bendixson	64
13.11	Teorema di Tarski sulla scelta	65
<b>14</b>	<b>Aritmetica cardinale</b>	<b>66</b>
14.1	Somme e prodotti infiniti	66
14.2	Teorema di König	67
14.3	Cofinalità	68
14.4	Formula di Hausdorff	69
<b>15</b>	<b>Gerarchia di Von Neumann</b>	<b>70</b>
15.1	Formule relativizzate ad una classe	70
15.2	Assioma di buona fondazione	71
15.3	Principio di epsilon-induzione	72

## Premessa

Queste dispense sono la quasi esatta trascrizione in  $\text{\LaTeX}$  delle dispense del corso di Elementi di teoria degli insiemi, tenuto dal prof. Marcello Mamino nell'anno accademico 2022-23.

## Ringraziamenti

Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>.



## §1 Prologo nel XIX secolo

La nascita della teoria degli insiemi è una storia complicata di cui so pochissimo. Però, persone che ne sanno molto più di me hanno sostenuto l'opinione che il problema seguente abbia avuto un ruolo. Come che sia, è almeno un'introduzione possibile.

**Problema 1.1.** Data una serie trigonometrica:

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

se, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , sappiamo che  $S(x)$  converge a 0, possiamo dire che i coefficienti  $c_0, a_i, b_i$  sono tutti 0?

Risolto positivamente da **Georg Cantor** nel 1870.

**Definizione 1.2.** Diciamo che  $X \subseteq \mathbb{R}$  è un **insieme di unicità** se, per ogni serie trigonometrica:

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

vale la seguente implicazione:

$S(x)$  converge a 0 per tutti gli  $x \notin X \implies$  tutti i coefficienti  $c_0, a_i, b_i$  sono nulli

### Esempio 1.3

Per il risultato di Cantor,  $\emptyset$  è di unicità.

**Problema 1.4.** Quali sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono di unicità?

### Fatto 1.5

$X \subseteq \mathbb{R}$  è di unicità se (ma non solo se) ogni funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfi le ipotesi seguenti è necessariamente lineare<sup>a</sup>:

- per ogni intervallo aperto  $]a, b[$  con  $]a, b[ \cap X = \emptyset$ ,  $f|_{]a, b[}$  è lineare;
- per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , se  $f$  ha derivate destre e sinistre in  $x$ , allora queste coincidono<sup>b</sup>.

<sup>a</sup> $f(x) = \alpha x + \beta$ .

<sup>b</sup>Ovvero  $f$  non ha punti angolosi.

### Esempio 1.6

$X = \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$  con  $\dots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = +\infty$ ,  $\lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = -\infty$  ha la proprietà data dal **Fatto 1.5**, quindi è di unicità.

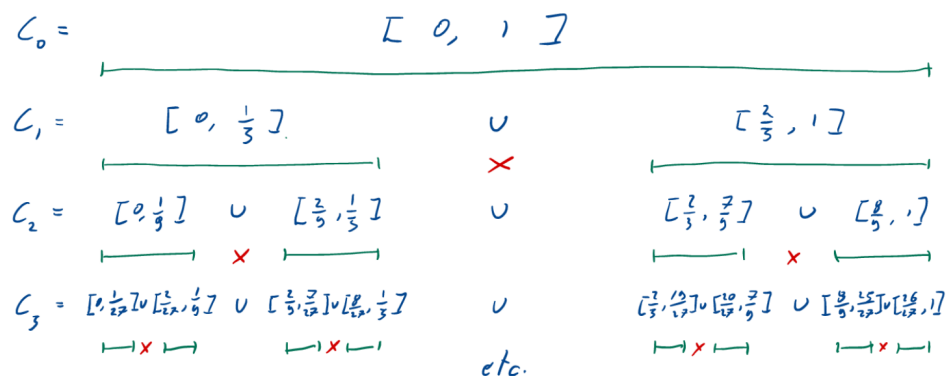
### NON Esempio 1.7

L'intervallo  $[0, 1]$  o  $\mathbb{R}$  non hanno la proprietà espressa dall'Fatto 1.5.

### NON Esempio buffo 1.8

Per l'insieme di Cantor non vale il Fatto 1.5.

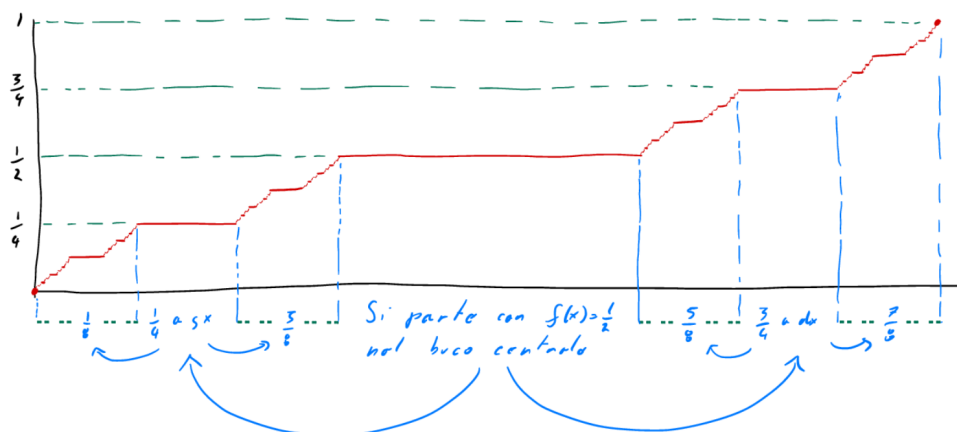
Possiamo costruire l'insieme di Cantor a partire dall'intervallo  $C_0 = [0, 1]$  nel seguente modo:



ovvero, preso l'intervallo  $[0, 1]$  possiamo dividerlo in tre parti e rimuovere la parte centrale  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , chiamiamo gli intervalli rimanenti  $C_1$ , possiamo iterare il procedimento sui due segmenti di  $C_1$  ed ottenere  $C_2, C_3, \dots$ , a questo punto definiamo l'insieme di Cantor  $C$  come:

$$C := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$$

Esiste una funzione continua (e crescente)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  detta **scala di Cantor** (o **scala del diavolo**), tale che  $f'(x) = 0$  per  $x \notin C$  e non è derivabile in  $x \in C$ .

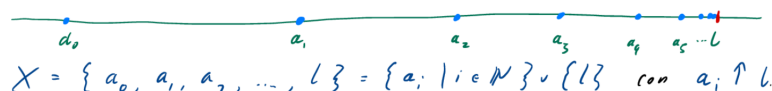


tale funzione si costruisce aggiungendo tratti costanti (prima  $\frac{1}{2}$ , poi  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  e così via, dividendo l'intervallo  $[0, 1]$  sull'asse delle ordinate in parti uguali) alle parti eliminate sull'intervallo  $[0, 1]$  sull'asse delle ascisse per costruire l'insieme di Cantor.

**Nota 1.9** — Per  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{C}$  non vale il [Fatto 1.5](#) ma, in realtà, sono di unicità.

### Esempio buffo 1.10

L'insieme degli elementi di una successione crescente col suo limite è un esempio di insieme di unicità.

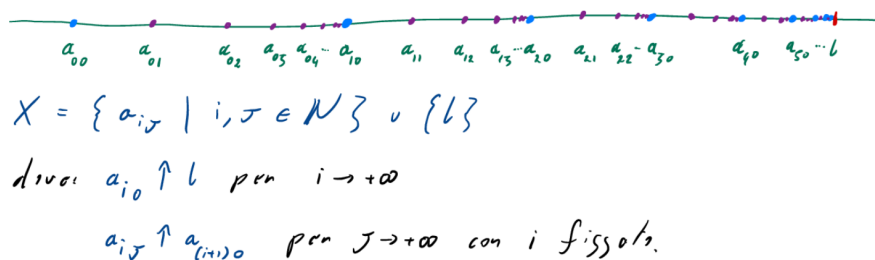


Dimostriamo quindi che  $X$  è un insieme di unicità.

*Dimostrazione.* La funzione  $f$  è lineare in  $]-\infty, a_0[$ ,  $]a_0, a_1[$ ,  $]a_1, a_2[$ ,  $\dots$ . Quindi nei punti  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ammette derivata destra e sinistra. Siccome questi punti non possono essere angolosi,  $f_{|]-\infty, a_0[}$ ,  $f_{|]a_0, a_1[}$ , etc. hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi, sfruttando la cardinalità,  $f_{|]-\infty, a_0[}$  è lineare. Siccome  $f_{|]-\infty, a_0[}$  è lineare, usando nuovamente l'assenza di punti angolosi abbiamo la tesi.  $\square$

### Esempio più buffo 1.11

L'insieme degli elementi di una successione crescente di successioni crescenti è un insieme di unicità.



Dimostriamo che  $X$  è di unicità.

*Dimostrazione.* In ciascuno degli intervalli  $]a_{i,0}, a_{(i+1),0}[$ ,  $f$  è lineare, ragionando come nell'esempio precedente, ci siamo ridotti alla situazione - di nuovo - dell'esempio precedente con  $a'_i = a_{i,0}$ .  $\square$

## §1.1 Digressione: insiemi numerabili

**Definizione 1.12.** Un insieme  $X$  è **numerabile** se è il supporto di una successione,  $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ , con  $a_i \neq a_j$  per ogni  $i \neq j$ .<sup>1</sup>

### Esempio 1.13

Alcuni esempi di insiemi numerabili sono:

- $\mathbb{N}$ , l'insieme dei numeri naturali, infatti, la successione  $a_i = i$  realizza la biezione.
- I numeri dispari, con la biezione data da  $a_i = 2i + 1$ .
- I numeri primi,  $a_i = p_i$ , con  $p_i$   $i$ -esimo numero primo.
- $\mathbb{Z}$  l'insieme dei numeri interi, con la biezione data da  $a_i = (-1)^i \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ .

### Esempio meno immediato 1.14

L'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$  è numerabile.

*Dimostrazione.* La funzione  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (x, y) \longmapsto 2^x(1 + 2y) - 1$  è biunivoca (perché?), quindi  $a_i = f^{-1}(i)$  enumera  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  $\square$

### Proposizione 1.15

Un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è, a sua volta, numerabile.

*Dimostrazione.* Sia  $Y \subseteq X$  con  $Y$  infinito e  $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ . La sottosuccessione  $b_j = a_{i_j}$  degli  $a_*$  che appartengono a  $Y$  enumera  $Y$ . A essere precisi bisognerebbe dire esattamente chi sono gli indici  $i_j$ . Per ricorsione:

$$i_0 = \min\{i | a_i \in Y\} \quad i_{j+1} = \min\{i > i_j | a_i \in Y\}$$

dove i minimi esistono perché  $Y$  non è finito.  $\square$

### Proposizione 1.16

Se  $X$  e  $Y$  sono numerabili  $X \times Y = \{(a, b) | a \in X, b \in Y\}$  è anch'esso numerabile.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ ,  $Y = \{b_j | j \in \mathbb{N}\}$ . Siccome  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) | i, j \in \mathbb{N}\}$ . Quindi  $X \times Y = \{(a_{i_t}, b_{j_t}) | t \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

### Esempio 1.17

$\mathbb{Q}$  è numerabile.

<sup>1</sup>O in altre parole se esiste  $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$  biunivoca.



*Dimostrazione.*  $\mathbb{Q}$  è in corrispondenza biunivoca con:

$$F = \{(\text{num.}, \text{den.}) \mid \text{num.} \in \mathbb{Z} \wedge \text{den.} \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \text{M.C.D.}(\text{num.}, \text{den.}) = 1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

□

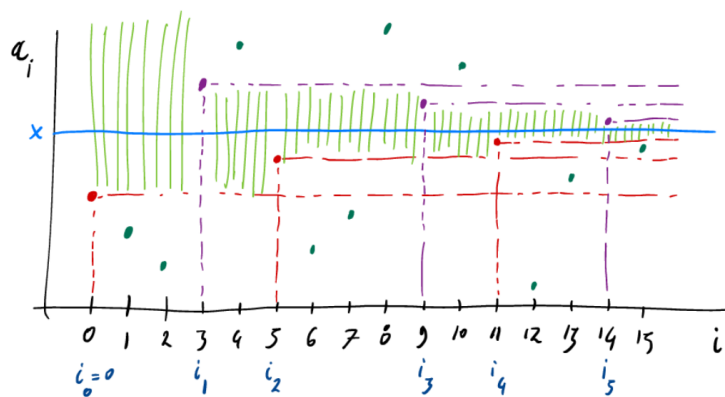
### NON Esempio 1.18

$\mathbb{R}$  non è numerabile.

*Dimostrazione.* Supponendo, per assurdo, che  $\mathbb{R} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , cerchiamo un  $x \in \mathbb{R}$  che non compare fra gli  $a_i$ . Allo scopo, costruiamo la sottosuccessione  $a_{i_j}$  definita per ricorrenza da:

$$i_0 = 0 \quad i_1 = \min\{i \mid a_i > a_0\} \quad i_{j+1} = \min\{i \mid a_i \text{ è compreso tra } a_{i_{j-1}} \text{ e } a_{i_j}\}$$

graficamente:



Si vede facilmente (esercizio!) che la successione  $\{a_{i_{2k}}\}_k$  è crescente,  $\{a_{i_{2k+1}}\}_k$  è decrescente e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k}} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k+1}}$ . Fissiamo  $x$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k}} \leq x \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i_{2k+1}}$ .

Chiaramente  $x$  non è nessuno degli  $a_{i_j}$ , perché  $a_{i_{2k}} < x < a_{i_{2k+1}}$ . Supponiamo  $x = a_n$ , allora ci sarà  $j$  tale che  $i_j < n < i_{j+1}$ , ma questo è assurdo perché allora  $x = a_n$  è compreso fra  $a_{i_{j-1}}$  e  $a_{i_j}$ , però  $n < i_{j+1}$  contro la minimalità di quest'ultimo.

**Esercizio 1.19.** Completare la dimostrazione nel caso  $n < i$ .

**Esercizio 1.20.** Dimostrare che l'insieme di Cantor  $C$  non è numerabile.

□

## §1.2 Tornando agli insiemi di unicità

### Teorema 1.21 (Cantor-Lebesgue)

Se  $X \subseteq \mathbb{R}$  è chiuso e numerabile, allora  $X$  soddisfa il [Fatto 1.5](#), ed è, quindi, di unicità.

La strategia di dimostrazione passa attraverso una definizione.

**Definizione 1.22.** Dato  $X \subseteq \mathbb{R}$ , il **derivato di Cantor-Bendixson** di  $X$  è:

$$X' = X \setminus \{\text{punti isolati di } X\}$$

(dove  $a \in X$  è un **punto di accumulazione** se  $\exists \varepsilon > 0 : ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap X = \{a\}$ ).

**Osservazione 1.23** — Se  $X$  è chiuso e per  $X'$  vale il [Fatto 1.5](#), allora anche per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).

*Dimostrazione.* Occorre dimostrare che se  $f$  è continua, lineare, ristretta agli intervalli aperti che non intersecano  $X$ , e non ha punti angolosi, allora  $f$  è lineare ristretta agli intervalli aperti che non intersecano  $X'$ . Fatto questo, usando l'ipotesi su  $X'$ ,  $f$  è lineare - abbiamo quindi mostrato che per  $X$  vale [Fatto 1.5](#).

Sia  $]a, b[ \cap X' = \emptyset$ , dobbiamo dire che  $f|_{]a, b[}$  è lineare. Ci basta dire che per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $f|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$  è lineare. Siccome  $]a, b[ \cap X' = \emptyset$ ,  $]a, b[ \cap X = \{\text{punti isolati di } X\}$ . Quindi  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \cap X$  è finito - se così non fosse, avrebbe un punto di accumulazione  $\alpha$  che non può essere un punto isolato di  $X$  (altrimenti si avrebbe un assurdo). Per cui  $f|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$  è lineare a tratti, e, siccome non ha punti angolosi, è lineare.  $\square$

### Corollario 1.24

Sia  $X^{(n)} = X'' \dots^a$ . Se  $X^{(n)} = \emptyset$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , allora per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).  
<sup>a</sup><sub>n</sub> volte.

*Dimostrazione.* Induzione su  $n$ .  $\square$

Il guaio è che ci sono chiusi numerabili per cui  $X^{(n)} \neq \emptyset$ , qualunque sia  $n$ .

### Esempio 1.25

Vogliamo costruire  $X$  chiuso e numerabile tale che  $X^{(n)} \neq \emptyset$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Cominciamo col rivedere alcuni esempi già visti.

•  $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  con  $a_i \uparrow +\infty$  per  $i \rightarrow \infty$ .

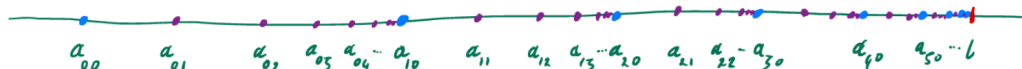
Tutti i punti sono isolati,  $X' = \emptyset$ .

- $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots, l\}$  con  $a_i \uparrow l$  per  $i \rightarrow \infty$ .

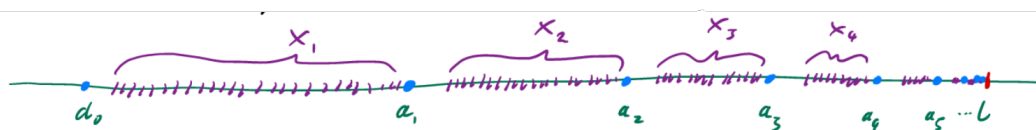


“Successione con punto limite”. Tutti i punti sono isolati salvo  $l$ , quindi  $X' = \{l\}$  e  $X'' = \emptyset$ .

- $X = \{a_{i,j} \mid i,j \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$  con  $a_{i,0} \uparrow l$  e  $a_{i,j} \uparrow a_{(i+1),0}$



“Successione di successioni”,  $X' = \{a_{10}, a_{20}, \dots, l\}$ ,  $X'' = \{l\}$  e  $X''' = \emptyset$ .  
Si vede che possiamo proseguire, in qualche modo, costruendo una successione di successioni di successioni, etc.  $n$  volte,  $X_n$ . Avremo  $X_n^{(n)} \neq \emptyset$ ,  $X_n^{(n+1)} = \emptyset$ . Ora costruiamo  $X_\omega$  fatto così:



È chiaro che, per ogni  $n$ ,  $X_\omega^{(n)} \neq \emptyset$ . D'altro canto,  $X_\omega$  soddisfa il [Fatto 1.5](#), perché  $f$  deve essere lineare in ciascuno degli intervalli  $[a_n, a_{n+1}]$ , perché  $X_{n+1}$  soddisfa il [Fatto 1.5](#), quindi ci si riduce al caso della successione.

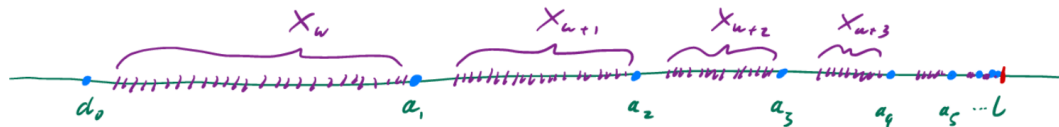
**Esercizio 1.26.** Perché  $X_\omega$  è numerabile?

Ora potremmo pensare che, pazienza se  $X_\omega$  non si smonta a furia di derivati, sarà un caso particolare. Però adesso, possiamo fare una successione di insiemi come  $X_\omega$ , chiamiamola  $X_{\omega+1}$ , e una successione di questi  $X_{\omega+2}$ , etc.  
Al diavolo, serve un nuovo corollario!

### Corollario 1.27

Se  $X^{(n)}$  è di “tipo  $X_\omega$ ”, allora per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).

Ok, questo corollario copre  $X_\omega$ ,  $X_{\omega+1}$ ,  $X_{\omega+2}$ , ma copre anche  $X_{\omega \cdot 2}$ ?



No: occorre un nuovo corollario.

### Corollario 1.28

Se  $X^{(n)}$  è di “tipo  $X_{\omega-2}$ ”, allora per  $X$  vale il [Fatto 1.5](#).

E poi un altro per  $X_{\omega-3}$ , e un altro per  $X_{\omega-4}$ , etc.

E ora abbiamo finito? No, perché possiamo costruire una nuova successione con  $X_\omega, X_{\omega-2}, X_{\omega-3}$ , etc.

Se chiamiamo questa follia  $X_{\omega \cdot \omega}$ , ecco che si riparte a fare successioni di  $X_{\omega \cdot \omega}$ . Ora si sarà capito che definiremo una serie aritmetica di queste cose, per cui potremo fare anche  $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}$ , etc. È questa la soluzione allora?

No, ogni sforzo di trovare l'induzione a capo delle induzioni è vano. Se ho  $X_\omega, X_{\omega^\omega}, X_{\omega^{\omega^\omega}}$ , etc., allora, ecco che faccio una successione con queste cose, la battezzo in qualche modo - ad esempio,  $X_{\varepsilon_0}$  - e si riparte!

Per smontare ogni possibile insieme chiuso e numerabile occorre un **nuovo tipo di induzione**, l'**induzione transfinita**, che è strettamente più potente dell'induzione aritmetica. Questa tecnica è stata sviluppata da Cantor, forse prendendo le mosse dal problema degli insiemi di unicità, e sarà uno degli argomenti centrali del corso.

**Esercizio 1.29** (per la fine del corso). Dimostrare il teorema di [Cantor-Lebesgue](#).

## §1.3 Giochi di parole

Descrivere un oggetto matematico non basta per crearlo. Se bastasse, si incorrerebbe in contraddizioni come queste.

### Paradosso di Russell

Tipicamente le collezioni - uso questa parola perché daremo, al termine “insieme”, un senso tecnico preciso - non sono membro di se stesse: la collezione di tutti i numeri primi non è un numero primo. Però ci sono anche collezioni che sono membra di se stesse: per esempio la collezione di tutte le collezioni. Consideriamo:

$$N = \{\text{collezioni } X \mid X \notin X\}$$

la collezione delle collezioni che non sono membra di se stesse -  $N$  per collezioni normali. Quindi ci chiediamo se  $N \in N$  oppure no?  $N \in N$  se e solo se per definizione  $N \notin N$ , che è assurdo.

Il paradosso di Russell ci dice che, del principio di collezione - ossia l'idea che data una proprietà ben definita  $P$  si possa costruire la collezione  $\{X \mid P(X)\}$  - non ci si può fidare.

### Paradosso di Berry

L'italiano annovera un numero finito di parole, è quindi possibile formare solo un numero finito di frasi di meno di cento parole. Alcune di queste descrivono un numero naturale,

altre no. Comunque, solo un numero finito di numeri naturali può essere descritto con meno di cento parole. Per il principio del minimo, esiste:

$h$  = “il più piccolo numero naturale che l’italiano non può  
descrivere con meno di cento parole”

Il guaio chiaramente, è che lo abbiamo appena descritto con sedici parole.

Quindi non ci si può fidare troppo neppure dell’italiano, o meglio, non è possibile descrivere precisamente cosa sia una descrizione precisa.

In conclusione, occorre fissare un linguaggio formale in cui si esprimano le proposizioni della teoria degli insiemi, e occorre fissare un sistema di assiomi, espressi in questo linguaggio, che dicano quali costruzioni sono lecite: quali insiemi esistono. Il ruolo della teoria degli insiemi è, poi, di fondare l’edificio della matematica. L’ambizione, quindi, è che il linguaggio e gli assiomi della teoria degli insiemi, siano in realtà, il linguaggio e gli assiomi della matematica.

## §1.4 Scopi del corso

Questo corso persegue due obiettivi:

- (1) Studiare i **fondamenti della matematica**, nella forma più comunemente accettata nel XX secolo e fino ad ora, la teoria degli insiemi di **Zermelo-Fraenkel** con l’assioma della scelta (ZFC).
- (2) Studiare tecniche e strumenti che sono stati sviluppati grazie alla teoria degli insiemi, per esempio: la teoria delle cardinalità, la teoria dei numeri ordinali, l’induzione e la ricorsione transfinita.

In questo corso non ci occupiamo dei modelli della teoria degli insiemi. Mi spiego. Per esempio, in teoria dei gruppi si assiomatizza cosa sia un gruppo, e poi si studia come possano essere fatti i diversi gruppi. In teoria degli insiemi si assiomatizza l’universo di tutti gli insiemi, però, per il teorema di incompletezza di **Gödel**, questa assiomatizzazione non può essere completa. Quindi esistono tanti universi insiemistici possibili. Indagare queste possibilità - i modelli della teoria degli insiemi - è argomento di corsi più avanzati.

## §2 Il linguaggio della teoria degli insiemi

Per non incorrere in contraddizione, accettiamo che le sole proposizioni ad avere senso siano quelle esprimibili mediante **formule insiemistiche**. Le formule si costruiscono ricorsivamente.

- Le lettere  $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$  rappresentano **variabili**. I valori delle variabili sono sempre insiemi, e non ci sono altri oggetti salvo gli insiemi.
- Le **formule atomiche** sono:

$$\text{variabile} = \text{variabile} \qquad \text{variabile} \in \text{variabile}^2$$

sono formule atomiche  $x = y$ ,  $x = x$ ,  $\alpha = C$ , e anche  $x \in y$ ,  $x \in x$ ,  $\alpha \in C$ .

- Le formule atomiche si combinano tra loro mediante:
  - connettivi logici** ovvero il “non” la “e” e la “o” (inclusiva):

$$\neg \text{formula} \qquad \text{formula} \wedge \text{formula} \qquad \text{formula} \vee \text{formula}$$

quindi ad esempio:

$$\neg \Phi \equiv \text{“}\Phi \text{ è falsa”}$$

$$\Phi \wedge \psi \equiv \text{“}\Phi \text{ e } \psi \text{ sono entrambe vere”}$$

$$\Phi \vee \psi \equiv \text{“almeno una fra } \Phi \text{ e } \psi \text{ è vera”}$$

- quantificatori** ovvero quello universale “per ogni” e quello esistenziale “esiste”:

$$\forall x \text{ formula} \qquad \exists x \text{ formula}$$

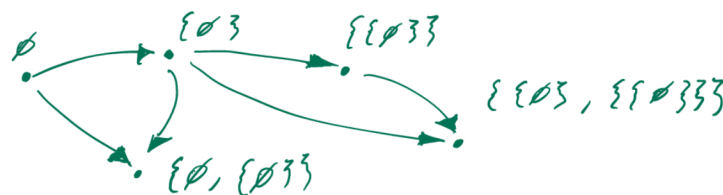
ad esempio:

$$\forall x \Phi \equiv \text{“}\Phi \text{ è vera qualunque sia l'insieme } x\text{”}$$

$$\exists x \Phi \equiv \text{“c'è un insieme } x \text{ che fa sì che } \Phi \text{ sia vera”}$$

**Esercizio 2.1.** Chiaramente varranno  $\forall x x = x$ ,  $\forall x \exists y x = y$ ,  $\neg \exists x \forall y x = y$ .

**L'intuizione** è che l'universo insiemistico sia un gigantesco grafo diretto (aciclico) i cui vertici sono gli insiemi, ed in cui le frecce rappresentano la relazione di appartenenza.



<sup>2</sup> “appartiene a”.

Possiamo solo fare affermazioni a proposito di vertici e frecce di questo grafo. Per esempio:

“ $a$  è un elemento di un certo  $b$ ”  $\equiv$  “ $c$ ’è un percorso di due frecce fra  $a$  e  $b$ ”

che corrisponde mediante formule insiemistiche a  $\exists x a \in x \wedge x \in b$ . E ancora:

“ $a$  è un sottoinsieme di  $b$ ”  $\equiv$  “ogni elemento di  $a$  è elemento di  $b$ ”  $\equiv$   
 $\equiv$  “non  $c$ ’è un insieme che è elemento di  $a$  e non di  $b$ ”  $\equiv$   
 $\equiv$  “non  $c$ ’è un vertice con una freccia verso  $a$  e non una verso  $b$ ”

che corrisponde mediante formule insiemistiche a  $\neg \exists x x \in a \wedge \neg x \in b$  (tutto ciò che raggiunge  $a$  deve raggiungere anche  $b$ ).

**Parentesi** Ad essere precisi, avremmo dovuto definire le formule includendo un mucchio di parentesi, allo scopo di eliminare ogni possibilità di formare una combinazione di simboli ambigua. Per esempio  $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vee \Phi_3$  è ambigua, perché si potrebbe leggere  $(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \vee \Phi_3$  o  $\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \vee \Phi_3)$ . In una notazione completamente parentesizzata, per esempio, la formula per “ $a$  è un sottoinsieme di  $b$ ” sarebbe:

$$\neg(\exists x((x \in a) \wedge (\neg(x \in b))))$$

Non useremo, in generale, questa notazione, ma useremo le parentesi selettivamente per evitare ambiguità.

**Aberrazioni** Le formule appena descritte costituiscono il linguaggio della teoria degli insiemi **puro**. Durante il corso estenderemo più volte questo linguaggio mediante abbreviazioni, che semplicemente rimpiazzano formule più lunghe con scritture convenzionali più compatte, e quindi non alterano la potenza espressiva del linguaggio. Vediamo le prime abbreviazioni:

$$x \neq y \stackrel{\text{def}}{=} \neg x = y \quad x \notin y \stackrel{\text{def}}{=} \neg x \in y \quad \nexists \Phi^3$$

**Nota:** Il fatto che possiamo dire  $C = A \cup B$  o  $C = A \cap B$  non significa né che questi oggetti esistano né che siano unici. Dimosteremo fra poco l’esistenza e unicità di unione e intersezione.

**Esercizio 2.2.** Esprimi queste proposizioni mediante formule insiemistiche pure:

- gli elementi degli elementi di  $A$  sono elementi di  $A$ ;
- $B$  è l’insieme dei sottoinsiemi di  $A$ ;
- l’unione degli elementi di  $A$  è l’intersezione di quelli di  $B$ <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Qui assumi che l’unione e intersezione.

## §2.1 Le regole di inferenza

La teoria assiomatica degli insiemi si compone di tre parti: il linguaggio formale che abbiamo appena descritto, gli assiomi della teoria che studieremo durante il corso, ed un sistema di regole che specificano precisamente quali passaggi sono leciti nelle dimostrazioni. Possiamo immaginare questa ultima componente come una specie di algebra dei ragionamenti, che permette di verificare i passaggi di una dimostrazione in maniera puramente meccanica, come se fossero semplici manipolazioni algebrica. Noi non vedremo le regole di inferenza, e voglio spiegare qui il perché.

<sup>3</sup>DA COMPLETARE

- 1 Sono argomento del corso di logica.
- 2 In realtà, scrivere le dimostrazioni in maniera formale, le renderebbe lunghissime e particolarmente incomprensibili.
- 3 In pratica, non si sbaglia facendo ragionamenti che non reggono, si sbaglia dicendo cose fumose che non possono essere espresse nel linguaggio della teoria. Per esempio, le parole “e così via” sono pericolose.
- 4 Conoscere le regole - fidatevi - non aiuta né a trovare né a capire le dimostrazioni.

Pur senza dare un sistema completo di regole, vediamo qualche manipolazione formale che potrebbe servire.

**Tavole di verità** Due combinazioni mediante connettivi logici ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) delle stesse formule - “**combinazioni booleane**” - alle volte, dicono la stessa cosa. Per esempio,  $\neg\Phi \vee \neg\psi \equiv \neg(\Phi \wedge \psi)$ . Per verificare questo fatto basta considerare tutte le possibili combinazioni di valori di verità che possono assumere le formule combinate - nell'esempio  $\Phi$  e  $\psi$  - compilando una “**tabella di verità**”.

$\Phi$	$\psi$	$\neg\Phi$	$\neg\psi$	$\neg\Phi \vee \neg\psi$	$\Phi \wedge \psi$	$\neg(\Phi \wedge \psi)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V

Come si osserva le due colonne corrispondenti ai valori di verità delle nostre formule iniziali hanno gli stessi valori di verità in ogni caso.

Conviene tenere a mente alcune delle equivalenze elementari:

$$\begin{aligned} \neg\neg\Phi &\equiv \Phi & \Phi \wedge (\psi \vee \Theta) &\equiv (\Phi \wedge \psi) \vee (\Phi \wedge \Theta) & \Phi \vee (\psi \wedge \Theta) &\equiv (\Phi \vee \psi) \wedge (\Phi \vee \Theta) \\ \neg(\Phi \wedge \psi) &\equiv \neg\Phi \vee \neg\psi & \neg(\Phi \vee \psi) &\equiv \neg\Phi \wedge \neg\psi \\ \Phi \rightarrow \neg\psi &\equiv \psi \rightarrow \neg\Phi & \Phi \rightarrow \psi &\equiv \neg\psi \rightarrow \neg\Phi \end{aligned}$$

**Esercizio 2.3.** Dimostrare le equivalenze delle formule elencate sopra.

Per quanto riguarda i quantificatori ricordiamo le regole seguenti, che tuttavia non sono esaustive.

$$\begin{aligned} \neg\forall x \Phi &\equiv \exists x \neg\Phi & \neg\forall x \neg\Phi &\equiv \exists x \Phi \\ \neg\exists x \Phi &\equiv \forall x \neg\Phi & \neg\exists x \neg\Phi &\equiv \forall x \Phi \end{aligned}$$

**Esercizio 2.4.** Convinciti della validità delle equivalenze precedenti.

**Esercizio 2.5.** Dimostra che:

$$\neg\forall x \in A \Phi \equiv \exists x \in A \neg\Phi \quad \neg\exists x \in A \Phi \equiv \forall x \in A \neg\Phi$$

<sup>4</sup> “equivale a”.



**Esercizio 2.6.** Dimostra che:

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \equiv \neg \exists x(x \in A \wedge \neg x \in B)$$

**Esercizio 2.7.** Secondo te, la seguente formula è vera?

$$\forall A((\exists x x \in A) \rightarrow \exists x \in A(x \in B \rightarrow \forall y \in A y \in B))$$

Infine vi sono regole per la relazione di uguaglianza, che dicono, in sostanza, che se  $x = y$  allora  $x$  e  $y$  non sono distinguibili, ossia vale  $\Phi(x) \leftrightarrow \Phi(y)$  qualunque sia  $\Phi$ . Per quanto ci riguarda, **se  $x = y$  allora  $x$  e  $y$  sono nomi della stessa cosa**.

### §3 I primi assiomi

#### Assioma 3.1 (Assioma dell'insieme vuoto)

Esiste un insieme vuoto.

$$\exists x \forall y y \notin x$$

**Nota 3.2** — Questo assioma non sarebbe strettamente necessario, in quanto potremmo ottenere un insieme vuoto anche come sottoprodotto, per esempio, dell'assioma dell'infinito che vedremo in seguito. Tuttavia è bello poter partire avendo per le mani almeno un insieme.

#### Assioma 3.3 (Assioma di estensionalità)

Un insieme è determinato dalla collezione dei suoi elementi. Due insiemi coincidono se e solo se hanno i medesimi elementi.

$$\forall a \forall b a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

**Esercizio 3.4.** Dimostra che la freccia  $a = b \rightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)$ , in realtà, segue dal fatto che se  $a = b$  allora  $a$  e  $b$  sono indistinguibili.

**Convenzione** Le variabili libere (= non quantificate), se non specificato altrimenti, si intendono quantificate universalmente all'inizio della formula. Per cui possiamo scrivere l'assioma di estensionalità semplicemente nella forma:

$$a = b \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in b)$$

#### Proposizione 3.5

C'è un unico insieme vuoto.

$$\exists! x \forall y y \notin x$$

*Dimostrazione.* Consideriamo due insiemi vuoti  $x_1$  e  $x_2$ , ossia supponiamo  $\forall y y \notin x_1$ , e  $\forall y y \notin x_2$ . Allora:

$$\forall y y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2$$

perché  $y \in x_1$  e  $y \in x_2$  sono entrambe necessariamente false. Quindi, per [estensionalità](#),  $x_1 = x_2$ .  $\square$

### §3.1 Assiomi dell'insieme vuoto e di estensionalità

### §3.2 Assioma di separazione

### §3.3 Classi e classi proprie

### §3.4 Assioma del paio e coppia di Kuratowski

### §3.5 Assioma dell'unione e operazioni booleane

### §3.6 Assioma delle parti e prodotto cartesiano

### §3.7 Relazioni di equivalenza e di ordine, funzioni



## §4 Assioma dell'infinito e numeri naturali

### §4.1 Gli assiomi di Peano

## §4.2 L'ordine di omega

### §4.3 Induzione forte e principio del minimo

## §4.4 Ricorsione numerabile

## §5 Cardinalità

### §5.1 Teorema di Cantor-Berstein

## §5.2 Teorema di Cantor

### §5.3 Operazioni fra cardinalità

## §6 Cardinalità finite

### §6.1 Principio dei cassetti



## §6.2 Operazioni fra le cardinalità finite

## §7 La cardinalità numerabile

### §7.1 Insiemi numerabili in pratica

## §7.2 Prodotto di numerabili è numerabile

### §7.3 Numeri interi e razionali

## §7.4 Ordini densi numerabili

## §7.5 Il grafo random

## §8 I numeri reali e la cardinalità del continuo

### §8.1 Caratterizzazione dei reali come ordine

## §8.2 La cardinalità del continuo è $2$ alla alef-zero



### §8.3 Operazioni che coinvolgono la cardinalità del continuo

## §8.4 Sottrarre un numerabile dal continuo

## §9 Stato del corso

## §10 I buoni ordinamenti

### §10.1 Operazioni fra buoni ordinamenti

## §10.2 Gli ordinali di Von Neumann

### §10.3 Assioma del rimpiazzamento

## §10.4 Induzione e ricorsione transfinita

## §10.5 Operazioni fra gli ordinali



## §11 Aritmetica ordinale e forma normale di Cantor

### §11.1 Sottrazione e divisione euclidea

## §11.2 La forma normale di Cantor

### §11.3 Punti fissi e epsilon-numbers

## §11.4 Operazioni in forma normale di Cantor

## §12 Gli alef

### §12.1 Teorema di Hartogs

## §12.2 Somme e prodotti di alef

## §13 L'assioma della scelta

### §13.1 Buon ordinamento implica AC

## §13.2 AC implica buon ordinamento (idea)



### §13.3 Zorn implica buon ordinamento

### §13.4 AC implica Zorn

## §13.5 Conseguenze immediate di AC

## §13.6 Esempi di applicazione di AC

## §13.7 Basi di spazi vettoriali

## §13.8 Invariante di Dehn

## §13.9 Insieme di Vitali

## §13.10 Teorema di Cantor-Bendixson



### §13.11 Teorema di Tarski sulla scelta

## §14 Aritmetica cardinale

### §14.1 Somme e prodotti infiniti

## §14.2 Teorema di König

### §14.3 Cofinalità

## §14.4 Formula di Hausdorff

## §15 Gerarchia di Von Neumann

### §15.1 Formule relativizzate ad una classe

## §15.2 Assioma di buona fondazione

### §15.3 Principio di epsilon-induzione