Elementi Di Teoria Degli Insiemi

APPUNTI DEL CORSO DI ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
TENUTO DAL PROF. MARCELLO MAMINO

Diego Monaco
d.monaco2@studenti.unipi.it
Università di Pisa

Anno Accademico 2022-23

Indice

Premessa

Queste dispense sono la quasi esatta trascrizione in LaTeX delle dispense del corso di Elementi di teoria degli insiemi, tenuto dal prof. Marcello Mamino nell'anno accademico 2022-23.

Ringraziamenti

§1 Prologo nel XIX secolo

La nascita della teoria degli insiemi è una storia complicata di cui so pochissimo. Però, persone che ne sanno molto più di me hanno sostenuto l'opinione che il problema seguente abbia avuto un ruolo. Come che sia, è almeno un'introduzione possibile.

Problema 1.1. Data una serie trigonometrica:

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

se, per ogni $x \in \mathbb{R}$, sappiamo che $S(x)$ converge a 0, possiamo dire che i coefficienti c_0, a_i, b_i sono tutti 0?

Risolto positivamente da Georg Cantor nel 1870.

Definizione 1.2. Diciamo che $X \subseteq \mathbb{R}$ è un **insieme di unicità** se, per ogni serie trigonometrica:

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

vale la seguente implicazione:

$$S(x) \text{ converge a } 0 \text{ per tutti gli } x \notin X \implies \text{tutti i coefficienti } c_0, a_i, b_i \text{ sono nulli}$$

Esempio 1.3

Per il risultato di Cantor, $\emptyset$ è di unicità.

Problema 1.4. Quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono di unicità?

Fatto 1.5

$X \subseteq \mathbb{R}$ è di unicità se (ma non solo se) ogni funzione continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi le ipotesi seguenti è necessariamente lineare[a]:

- per ogni intervallo aperto $]a, b[$ con $]a, b[\cap X = \emptyset$, $f_{|]a,b[}$ è lineare;
- per ogni $x \in \mathbb{R}$, se f ha derivate destre e sinistre in x, allora queste coincidono[b].

[a] $f(x) = \alpha x + \beta$.
[b] Ovvero f non ha punti angolosi.

Esempio 1.6

$X = \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$ con $\dots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, $\lim\limits_{i \to +\infty} a_i = +\infty$, $\lim\limits_{i \to -\infty} a_i = -\infty$ ha la proprietà data dal Fatto 1.5, quindi è di unicità.

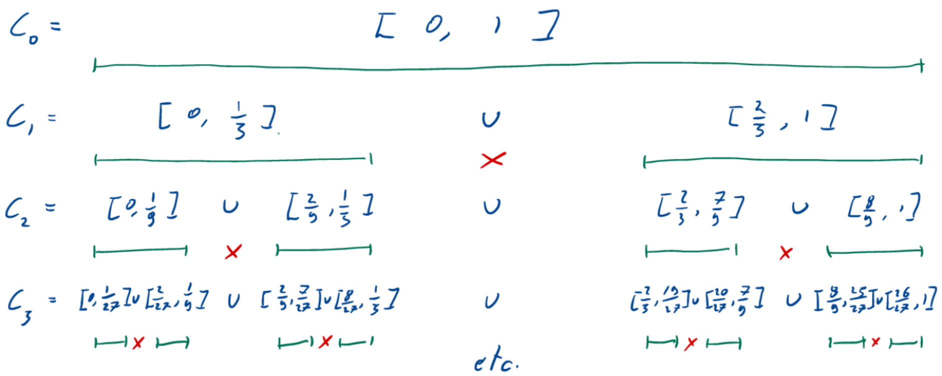
NON Esempio 1.7

L'intervallo $[0, 1]$ o $\mathbb{R}$ non hanno la proprietà espressa dall'Fatto 1.5.

NON Esempio buffo 1.8

Per l'**insieme di Cantor** non vale il Fatto 1.5.

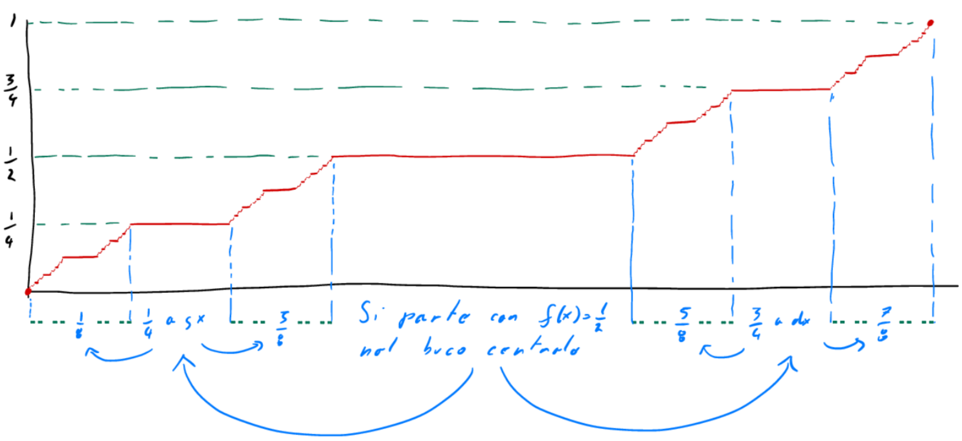
Possiamo costruire l'insieme di Cantor a partire dall'intervallo $C_0 = [0, 1]$ nel seguente modo:



ovvero, preso l'intervallo $[0, 1]$ possiamo dividerlo in tre parti e rimuovere la parte centrale $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, chiamiamo gli intervalli rimanenti C_1, possiamo iterare il procedimento sui due segmenti di C_1 ed ottenere $C_2, C_3, \ldots$, a questo punto definiamo l'insieme di Cantor C come:

$$C := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$$

Esiste una funzione continua (e crescente) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ detta **scala di Cantor** (o **scala del diavolo**), tale che $f'(x) = 0$ per $x \notin C$ e non è derivabile in $x \in C$.



Diego Monaco
d.monaco2@studenti.unipi.it
Università di Pisa (Anno Accademico 2022-23)

tale funzione si costruisce aggiungendo tratti costanti (prima $\frac{1}{2}$, poi $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e così via, dividendo l'intervallo $[0,1]$ sull'asse delle ordinate in parti uguali) alle parti eliminate sull'intervallo $[0,1]$ sull'asse delle ascisse per costruire l'insieme di Cantor.

Nota 1.9 — Per $\mathbb{Q}$ e C non vale il Fatto 1.5 ma, in realtà, sono di unicità.

Esempio buffo 1.10

L'insieme degli elementi di una successione crescente col suo limite è un esempio di insieme di unicità.

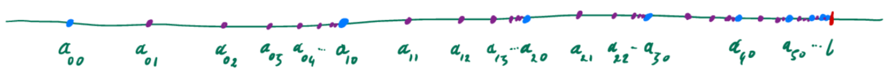
$X = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, l\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ con $a_i \uparrow l$.

Dimostriamo quindi che X è un insieme di unicità.

Dimostrazione. La funzione f è lineare in $]-\infty, a_0[,]a_0, a_1[,]a_1, a_2[, \ldots$. Quindi nei punti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ammette derivata destra e sinistra. Siccome questi punti non possono essere angolosi, $f_{|]-\infty,a_0[}$, $f_{|]a_0,a_1[}$, etc. hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi, sfruttando la cardinalità, $f_{|]-\infty,a_0[}$ è lineare. Siccome $f_{|]-\infty,a_0[}$ è lineare, usando nuovamente l'assenza di punti angolosi abbiamo la tesi. □

Esempio più buffo 1.11

L'insieme degli elementi di una successione crescente di successioni crescenti è un insieme di unicità.



$X = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$

dove $a_{i0} \uparrow l$ per $i \to +\infty$

$a_{ij} \uparrow a_{(i+1)0}$ per $j \to +\infty$ con i fissato.

Dimostriamo che X è di unicità.

Dimostrazione. In ciascuno degli intervalli $]a_{i0}, a_{(i+1)0}[$, f è lineare, ragionando come nell'esempio precedente, ci siamo ridotti alla situazione - di nuovo - dell'esempio precedente con $a'_i = a_{i0}$. □

§1.1 Digressione: insiemi numerabili

Definizione 1.12. Un insieme X è **numerabile** se è il supporto di una successione, $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, con $a_i \neq a_j$ per ogni $i \neq j$.[1]

Esempio 1.13

Alcuni esempi di insiemi numerabili sono:

- $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri naturali, infatti, la successione $a_i = i$ realizza la bigezione.
- I numeri dispari, con la bigezione data da $a_i = 2i + 1$.
- I numeri primi, $a_i = p_i$, con p_i i-esimo numero primo.
- $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi, con la bigezione data da $a_i = (-1)^i \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$.

Esempio meno immediato 1.14

L'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$ è numerabile.

Dimostrazione. La funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (x, y) \longmapsto 2^x(1 + 2y) - 1$ è biunivoca (perché?), quindi $a_i = f^{-1}(i)$ enumera $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\square$

Proposizione 1.15

Un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è, a sua volta, numerabile.

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ con Y infinito e $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$. La sottosuccessione $b_j = a_{i_j}$ degli a_* che appartengono a Y enumera Y. A essere precisi bisognerebbe dire esattamente chi sono gli indici i_j. Per ricorsione:

$$i_0 = \min\{i | a_i \in Y\} \qquad i_{j+1} = \min\{i > i_j | a_i \in Y\}$$

dove i minimi esistono perché Y non è finito. $\square$

Proposizione 1.16

Se X e Y sono numerabili $X \times Y = \{(a, b) | a \in X, b \in Y\}$ è anch'esso numerabile.

Dimostrazione. Fissiamo $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{b_j | j \in \mathbb{N}\}$. Siccome $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i_t, j_t) | t \in \mathbb{N}\}$. Quindi $X \times Y = \{(a_{i_t}, a_{j_t}) | t \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Esempio 1.17

$\mathbb{Q}$ è numerabile.

[1] O in altre parole se esiste $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ biunivoca.

Dimostrazione. $\mathbb{Q}$ è in corrispondenza biunivoca con:

$$F = \{(\text{num.}, \text{den.}) | \text{num.} \in \mathbb{Z} \wedge \text{den.} \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \text{M.C.D.(num.,den.)} = 1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

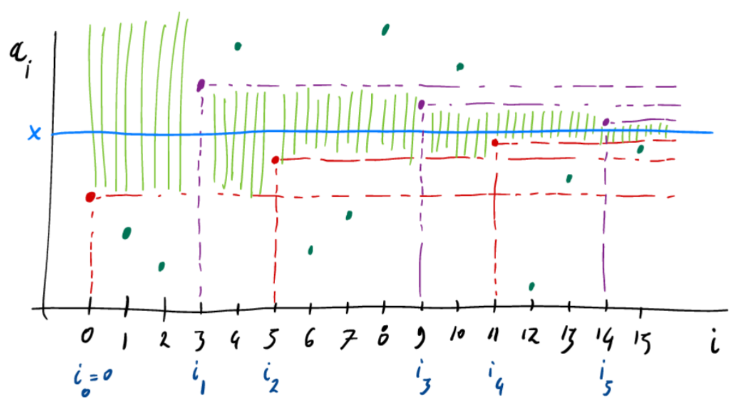
□

NON Esempio 1.18
$\mathbb{R}$ non è numerabile.

Dimostrazione. Supponendo, per assurdo, che $\mathbb{R} = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, cerchiamo un $x \in \mathbb{R}$ che non compare fra gli a_i. Allo scopo, costruiamo la sottosuccessione a_{i_j} definita per ricorrenza da:

$$i_0 = 0 \qquad i_1 = \min\{i | a_i > a_0\} \qquad i_{j+1} = \min\{i |\, a_i \text{ è compreso tra } a_{j-1} \text{ e } a_j\}$$

graficamente:



Si vede facilmente (esercizio!) che la successione $\{a_{i_{2k}}\}_k$ è crescente, $\{a_{i_{2k+1}}\}_k$ è decrescente e $\lim_{k\to+\infty} a_{i_{2k}} \leq \lim_{k\to+\infty a_{i_{2k+1}}}$. Fissiamo x tale che $\lim_{k\to+\infty} a_{i_{2k}} \leq x \leq \lim_{k\to+\infty} a_{i_{2k+1}}$. Chiaramente x non è nessuno degli a_{i_j}, perché $a_{i_{2k}} < x < a_{i_{2k+1}}$. Supponiamo $x = a_n$, allora ci sarà j tale che $i_j < n < i_{j+1}$, ma questo è assurdo perché allora $x = a_n$ è compreso fra $a_{i_{j-1}}$ e a_{i_j}, però $n < i_{j+1}$ contro la minimalità di quest'ultimo.

Esercizio 1.19. Completare la dimostrazione nel caso $n < i$.

Esercizio 1.20. Dimostrare che l'insieme di Cantor C non è numerabile.

□

§1.2 Tornando agli insiemi di unicità

Teorema 1.21 (Cantor-Lebesgue)
Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso e numerabile, allora X soddisfa il Fatto 1.5, ed è, quindi, di unicità.

La strategia di dimostrazione passa attraverso una definizione.

Definizione 1.22. Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, il **derivato di Cantor-Bendixson** di X è:

$$X' = X \setminus \{\text{punti isolati di } X\}$$

(dove $a \in X$ è un **punto di accumulazione** se $\exists \varepsilon > 0 :]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap X = \{a\}$).

Osservazione 1.23 — Se X è chiuso e per X' vale il Fatto 1.5, allora anche per X vale il Fatto 1.5.

Dimostrazione. Occorre dimostrare che se f è continua, lineare, ristretta agli intervalli aperti che non intersecano X, e non ha punti angolosi, allora f è lineare ristretta agli intervalli aperti che non intersecano X'. Fatto questo, usando l'ipotesi su X', f è lineare - abbiamo quindi mostrato che per X vale Fatto 1.5.
Sia $]a, b[\cap X' = \emptyset$, dobbiamo dire che $f_{|]a,b[}$ è lineare. Ci basta dire che per ogni $\varepsilon > 0$, $f_{|[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$ è lineare. Siccome $]a, b[\cap X' = \emptyset$, $]a, b[\cap X = \{\text{punti isolati di } X\}$. Quindi $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \cap X$ è finito - se così non fosse, avrebbe un punto di accumulazione α che non può essere un punto isolato di X (altrimenti si avrebbe un assurdo). Per cui $f_{|[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$ è lineare a tratti, e, siccome non ha punti angolosi, è lineare. □

Corollario 1.24
Sia $X^{(n)} = X''^{\cdots}$[a]. Se $X^{(n)} = \emptyset$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora per X vale il Fatto 1.5.

[a] n volte.

Dimostrazione. Induzione su n. □

Il guaio è che ci sono chiusi numerabili per cui $X^{(n)} \neq \emptyset$, qualunque sia n.

Esempio 1.25
Vogliamo costruire X chiuso e numerabile tale che $X^{(n)} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Cominciamo col rivedere alcuni esempi già visti.

- $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ con $a_i \uparrow +\infty$ per $i \to \infty$.

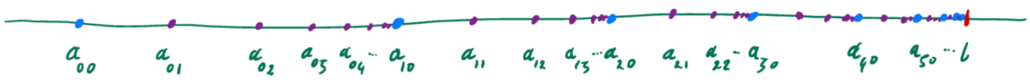
Tutti i punti sono isolati, $X' = \emptyset$.

Diego Monaco
d.monaco2@studenti.unipi.it
Università di Pisa (Anno Accademico 2022-23)

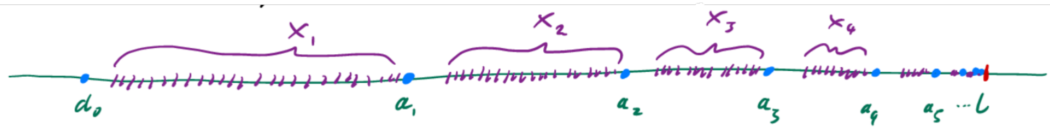
- $X = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, l\}$ con $a_i \uparrow l$ per $i \to \infty$.

"Successione con punto limite". Tutti i punti sono isolati salvo l, quindi $X' = \{l\}$ e $X'' = \emptyset$.

- $X = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ con $a_{i0} \uparrow l$ e $a_{ij} \uparrow a_{(i+1)0}$



"Successione di successioni", $X' = \{a_{10}, a_{20}, \ldots, l\}$, $X'' = \{l\}$ e $X''' = \emptyset$.
Si vede che possiamo proseguire, in qualche modo, costruendo una successione di successioni di successioni, etc. n volte, X_n. Avremo $X_n^{(n)} \neq \emptyset$, $X_n^{(n+1)} = \emptyset$. Ora costruiamo X_ω fatto così:



È chiaro che, per ogni n, $X_\omega^{(n)} \neq \emptyset$. D'altro canto, X_ω soddisfa il Fatto 1.5, perché f deve essere lineare in ciascuno degli intervalli $[a_n, a_{n+1}]$, perché X_{n+1} soddisfa il Fatto 1.5, quindi ci si riduce al caso della successione.

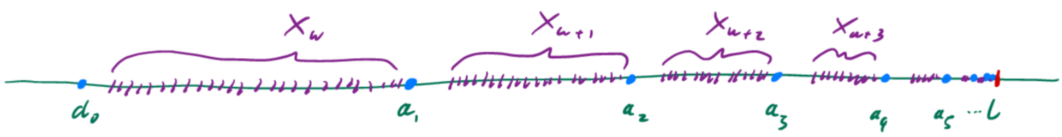
Esercizio 1.26. Perché X_ω è numerabile?

Ora potremmo pensare che, pazienza se X_ω non si smonta a furia di derivati, sarà un caso particolare. Però adesso, possiamo fare una successione di insiemi come X_ω, chiamiamola $X_{\omega+1}$, e una successione di questi $X_{\omega+2}$, etc.
Al diavolo, serve un nuovo corollario!

Corollario 1.27
Se $X^{(n)}$ è di "tipo X_ω", allora per X vale il Fatto 1.5.

Ok, questo corollario copre X_ω, $X_{\omega+1}$, $X_{\omega+2}$, ma copre anche $X_{\omega \cdot 2}$?

Diego Monaco
d.monaco2@studenti.unipi.it
Università di Pisa (Anno Accademico 2022-23)



No: occorre un nuovo corollario.

Corollario 1.28
Se $X^{(n)}$ è di "tipo $X_{\omega-2}$", allora per X vale il Fatto 1.5.

E poi un altro per $X_{\omega\cdot 3}$, e un altro per $X_{\omega\cdot 4}$, etc.
E ora abbiamo finito? No, perché possiamo costruire una nuova successione con $X_\omega, X_{\omega\cdot 2}, X_{\omega\cdot 3}$, etc.
Se chiamiamo questa follia $X_{\omega\cdot\omega}$, ecco che si riparte a fare successioni di $X_{\omega\cdot\omega}$. Ora si sarà capito che definiremo una serie aritmetica di queste cose, per cui potremo fare anche ω^ω, ω^{ω^ω}, etc. È questa la soluzione allora?
No, ogni sforzo di trovare l'induzione a capo delle induzioni è vano. Se ho X_ω, X_{ω^ω}, $X_{\omega^{\omega^\omega}}$, etc., allora, ecco che faccio una successione con queste cose, la battezzo in qualche modo - ad esempio, X_{ε_0} - e si riparte!
Per smontare ogni possibile insieme chiuso e numerabile occorre un **nuovo tipo di induzione**, l'**induzione transfinita**, che è strettamente più potente dell'induzione aritmetica. Questa tecnica è stata sviluppata da Cantor, forse prendendo le mosse dal problema degli insiemi di unicità, e sarà uno degli argomenti centrali del corso.

Esercizio 1.29 (per la fine del corso)**.** Dimostrare il teorema di Cantor-Lebesgue.

§1.3 Giochi di parole

Descrivere un oggetto matematico non basta per crearlo. Se bastasse, si incorrerebbe in contraddizioni come queste.

Paradosso di Russell

Tipicamente le collezioni - uso questa parola perché daremo, al termine "insieme", un senso tecnico preciso - non sono membro di se stesse: la collezione di tutti i numeri primi non è un numero primo. Però ci sono anche collezioni che sono membra di se stesse: per esempio la collezione di tutte le collezioni. Consideriamo:

$$N = \{\text{collezioni } X \,|X \notin X\}$$

la collezione delle collezioni che non sono membra di se stesse - N per collezioni normali. Quindi ci chiediamo se $N \in N$ oppure no? $N \in N$ se e solo se per definizione $N \notin N$, che è assurdo.
Il paradosso di Russell ci dice che, del principio di collezione - ossia l'idea che data una proprietà ben definita P si possa costruire la collezione $\{X|P(X)\}$ - non ci si può fidare.

Paradosso di Berry

L'italiano annovera un numero finito di parole, è quindi possibile formare solo un numero finito di frasi di meno di centro parole. Alcune di queste descrivono un numero naturale, altre no. Comunque, solo un numero finito di numeri naturali può essere descritto con meno di cento parole. Per il principio del minimo, esiste:

$$h = \text{“il più piccolo numero naturale che l'italiano non può descrivere con meno di cento parole”}$$

Il guaio chiaramente, è che lo abbiamo appena descritto con sedici parole.
Quindi non ci si può fidare troppo neppure dell'italiano, o meglio, non è possibile descrivere precisamente cosa sia una descrizione precisa.
In conclusione, occorre fissare un linguaggio formale in cui si esprimano le proposizioni della teoria degli insiemi, e occorre fissare un sistema di assiomi, espressi in questo linguaggio, che dicano quali costruzioni sono lecite: quali insiemi esistono. Il ruolo della teoria degli insiemi è, poi, di fondare l'edificio della matematica. L'ambizione, quindi, è che il linguaggio e gli assiomi della teoria degli insiemi, siano in realtà, il linguaggio e gli assiomi della matematica.

§1.4 Scopi del corso

Questo corso persegue due obiettivi:

(1) Studiare i **fondamenti della matematica**, nella forma più comunemente accettata nel XX secolo e fino ad ora, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'assioma della scelta (ZFC).

(2) Studiare tecniche e strumenti che sono stati sviluppati grazie alla teoria degli insiemi, per esempio: la teoria delle cardinalità, la teoria dei numeri ordinali, l'induzione e la ricorsione transfinita.

In questo corso non ci occupiamo dei modelli della teoria degli insiemi. Mi spiego. Per esempio, in teoria dei gruppi si assiomatizza cosa sia un gruppo, e poi si studia come possano essere fatti i diversi gruppi. In teoria degli insiemi si assiomatizza l'universo di tutti gli insiemi, però, per il teorema di incompletezza di Gödel, questa assiomatizzazione non può essere completa. Quindi esistono tanti universi insiemistici possibili. Indagare queste possibilità - i modelli della teoria degli insiemi - è argomento di corsi più avanzati.

§2 Il linguaggio della teoria degli insiemi

Per non incorrere in contraddizione, accettiamo che le sole proposizioni ad avere senso siano quelle esprimibili mediante **formule insiemistiche**. Le formule si costruiscono ricorsivamente.

- Le lettere $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ rappresentano **variabili**. I valori delle variabili sono sempre insiemi, e non ci sono altri oggetti salvo gli insiemi.
- Le **formule atomiche** sono:

  $$\text{variabile} = \text{variabile} \qquad\qquad \text{variabile} \in \text{variabile}^{2}$$

  sono formule atomiche $x = y$, $x = x$, $\alpha = C$, e anche $x \in y$, $x \in x$, $\alpha \in C$.
- Le formule atomiche si combinano tra loro mediante:
  - **connettivi logici**
  - **quantificatori**

§2.1 Le regole di inferenza

[2] "appartiene a".

§3 I primi assiomi

Assioma 3.1 (Assioma dell'insieme vuoto)
Esiste un insieme vuoto.

$$\exists x \, \forall y \; y \notin x$$

Assioma 3.2 (Assioma di estensionalità)
Un insieme è determinato dalla collezione dei suoi elementi. Due insiemi coincidono se e solo se hanno i medesimi elementi.

$$\forall a \, \forall b \; a = b \longleftrightarrow \forall x (x \in a \longleftrightarrow x \in b)$$

§3.1 Assiomi dell'insieme vuoto e di estensionalità

§3.2 Assioma di separazione

§3.3 Classi e classi proprie

§3.4 Assioma del paio e coppia di Kuratowski

§3.5 Assioma dell'unione e operazioni booleane

§3.6 Assioma delle parti e prodotto cartesiano

§3.7 Relazioni di equivalenza e di ordine, funzioni

§4 Assioma dell'infinito e numeri naturali

§4.1 Gli assiomi di Peano

§4.2 L'ordine di omega

§4.3 Induzione forte e principio del minimo

§4.4 Ricorsione numerabile

§5 Cardinalità

§5.1 Teorema di Cantor-Berstein

§5.2 Teorema di Cantor

§5.3 Operazioni fra cardinalità

§6 Cardinalità finite

§6.1 Principio dei cassetti

§6.2 Operazioni fra le cardinalità finite

§7 La cardinalità numerabile

§7.1 Insiemi numerabili in pratica

§7.2 Prodotto di numerabili è numerabile

§7.3 Numeri interi e razionali

§7.4 Ordini densi numerabili

§7.5 Il grafo random

§8 I numeri reali e la cardinalità del continuo

§8.1 Caratterizzazione dei reali come ordine

§8.2 La cardinalità del continuo è 2 alla alef-zero

§8.3 Operazioni che coinvolgono la cardinalità del continuo

§8.4 Sottrarre un numerabile dal continuo

§9 Stato del corso

§10 I buoni ordinamenti

§10.1 Operazioni fra buoni ordinamenti

§10.2 Gli ordinali di Von Neumann

§10.3 Assioma del rimpiazzamento

§10.4 Induzione e ricorsione transfinita

§10.5 Operazioni fra gli ordinali

§11 Aritmetica ordinale e forma normale di Cantor

§11.1 Sottrazione e divisione euclidea

§11.2 La forma normale di Cantor

§11.3 Punti fissi e epsilon-numbers

§11.4 Operazioni in forma normale di Cantor

§12 Gli alef

§12.1 Teorema di Hartogs

§12.2 Somme e prodotti di alef

§13 L'assioma della scelta

§13.1 Buon ordinamento implica AC

§13.2 AC implica buon ordinamento (idea)

§13.3 Zorn implica buon ordinamento

§13.4 AC implica Zorn

§13.5 Conseguenze immediate di AC

§13.6 Esempi di applicazione di AC

§13.7 Basi di spazi vettoriali

§13.8 Invariante di Dehn

§13.9 Insieme di Vitali

§13.10 Teorema di Cantor-Bendixson

§13.11 Teorema di Tarski sulla scelta

§14 Aritmetica cardinale

§14.1 Somme e prodotti infiniti

§14.2 Teorema di König

§14.3 Cofinalità

§14.4 Formula di Hausdorff

§15 Gerarchia di Von Neumann

§15.1 Formule relativizzate ad una classe

§15.2 Assioma di buona fondazione

§15.3 Principio di epsilon-induzione