

Schema Spannungsberechnung (Hexahedra mit 20 Knoten und 8 Gausspunkten)

Lauf über alle Elemente

- Elementtyp feststellen
- Materialparameter des Elements identifizieren (C-Matrix oder wie auch immer)
- Vektor mit den Knotenpunktkoordinaten des Elements aufbauen:
 $\tilde{\mathbf{x}}^T = \{\tilde{x}_1 \quad \tilde{y}_1 \quad \tilde{z}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{z}_2 \quad \dots \quad \tilde{x}_{20} \quad \tilde{y}_{20} \quad \tilde{z}_{20}\}$ oder je nach Geschmack oder konsistent mit der bereits vorhandenen Systematik auch drei Vektoren für die jeweiligen Koordinatenrichtungen des globalen Systems:
 $\tilde{\mathbf{x}}^T = \{\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \dots \quad \tilde{x}_{20}\}$
 $\tilde{\mathbf{y}}^T = \{\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \dots \quad \tilde{y}_{20}\}$
 $\tilde{\mathbf{z}}^T = \{\tilde{z}_1 \quad \tilde{z}_2 \quad \dots \quad \tilde{z}_{20}\}$
- Vektor mit den Verschiebungen auf den Elementknoten zuweisen:
 $\tilde{\mathbf{u}}^T = \{\tilde{u}_1 \quad \tilde{v}_1 \quad \tilde{w}_1 \quad \tilde{u}_2 \quad \tilde{v}_2 \quad \tilde{w}_2 \quad \dots \quad \tilde{u}_{20} \quad \tilde{v}_{20} \quad \tilde{w}_{20}\}$
- Lauf über die 8 (2^3) Gausspunkte des Elements
 - Funktion für Interpolationsfunktionen (Form-, Approximations-) aufrufen, die mit den globalen Knotenpunktkoordinaten am jeweiligen Gausspunkt (lokale Elementkoordinaten) die globalen Dehnungen (B-Matrix) berechnet.
 - B-Matrix mit den Knotenverschiebungen multiplizieren → Dehnungsvektor am jeweiligen Gausspunkt $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\}$
 - Steifigkeitsmatrix C des Werkstoffgesetzes mit den Dehnungen multiplizieren
 $\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}$
- Daten abspeichern, zwei Optionen:
 - a) direkt wie berechnet für alle Gausspunkte
 - b) erst extrapolieren auf die Elementknoten und so abspeichern

fertig

Vorteil a): Rohdaten, unverfälscht, stehen für weitere Datenreduktionen zur Verfügung

Nachteil a): man muss bei späterer Weiterverarbeitung die globalen Koordinaten der Gausspunkte des jeweiligen Elementes ebenfalls abgespeichert haben. Deren Berechnung lässt sich sehr leicht bei der B-Matrix-Berechnung mit erledigen:

$$\begin{Bmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{x}^T \text{ bei geeigneter Struktur der Interpolationsfunktionsmatrix } \mathbf{N}.$$

Vorteil b): Spannungen auf Knotenpunkten sind bequemer zu handhaben, vor allem weil die Knotenpunktkoordinaten schon irgendwo abgelegt sind.

Nachteil b): die extrapolierten Werte sind nicht immer eine ebenso gute Näherung wie die Werte auf den Gausspunkten

Man sollte nicht bei der Spannungsberechnung gleich die Elementspannungen auf die jeweils gemeinsamen Knoten mitteln, um so die Spannungen knotenweise abspeichern zu können. Das ist zwar einfach, spart Speicher und ist daher verlockend, aber man verliert die Möglichkeit, aneinandergrenzende Bereiche mit unterschiedlichen Materialien richtig abbilden zu können.

Extrapolation:

Bedeutung der Indizes:

- i: Spannungskomponente
- j: Gausspunkt
- k: Elementknotenpunkt

1. Schritt: die Parameter der Verteilungsfunktion (Variation of stresses) bestimmen:

$$\begin{bmatrix} 1 & s_1 & t_1 & r_1 & s_1 t_1 & t_1 r_1 & s_1 r_1 & s_1 r_1 t_1 \\ 1 & s_2 & t_2 & r_2 & s_2 t_2 & t_2 r_2 & s_2 r_2 & s_2 r_2 t_2 \\ 1 & s_3 & t_3 & r_3 & s_3 t_3 & t_3 r_3 & s_3 r_3 & s_3 r_3 t_3 \\ 1 & s_4 & t_4 & r_4 & s_4 t_4 & t_4 r_4 & s_4 r_4 & s_4 r_4 t_4 \\ 1 & s_5 & t_5 & r_5 & s_5 t_5 & t_5 r_5 & s_5 r_5 & s_5 r_5 t_5 \\ 1 & s_6 & t_6 & r_6 & s_6 t_6 & t_6 r_6 & s_6 r_6 & s_6 r_6 t_6 \\ 1 & s_7 & t_7 & r_7 & s_7 t_7 & t_7 r_7 & s_7 r_7 & s_7 r_7 t_7 \\ 1 & s_8 & t_8 & r_8 & s_8 t_8 & t_8 r_8 & s_8 r_8 & s_8 r_8 t_8 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \end{Bmatrix}_i \quad \text{oder} \quad \mathbf{C}_i \mathbf{p}_i = \boldsymbol{\sigma}_i$$

Die σ_i sind die i-te Spannungskomponente, die an den 8 Gausspunkten berechnet vorliegt.

Inversion der Gleichungen liefert die Parameter \mathbf{p}_i , im ANSYS mit a, b,, ... , h bezeichnet, welche die Verteilung der jeweiligen Spannung im Element beschreiben:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{C}_i^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i$$

Damit kann man dann die Spannungswerte auf den Knoten berechnen, indem man für die lokalen Koordinaten die Werte der 20 Elementknotenpunkte angibt:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{20} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & t_1 & r_1 & s_1 t_1 & t_1 r_1 & s_1 r_1 & s_1 r_1 t_1 \\ 1 & s_2 & t_2 & r_2 & s_2 t_2 & t_2 r_2 & s_2 r_2 & s_2 r_2 t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & s_{20} & t_{20} & r_{20} & s_{20} t_{20} & t_{20} r_{20} & s_{20} r_{20} & s_{20} r_{20} t_{20} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_8 \end{Bmatrix}_i$$

Diese Prozedur muss man für jede Spannungskomponente einzeln durchführen, also insgesamt 6mal.

13.6. Nodal and Centroidal Data Evaluation

Area and volume elements normally compute results most accurately at the integration points. The location of these data, which includes structural stresses, elastic and thermal strains, field gradients, and fluxes, can then be moved to nodal or centroidal locations for further study. This is done with extrapolation or interpolation, based on the element shape functions or simplified shape functions given in [Table 13.6: "Assumed Data Variation of Stresses"](#).

Table 13.6 Assumed Data Variation of Stresses

Geometry	Number of Integration Points	Assumed Data Variation
Triangles	3	$a + bs + ct$
Quadrilaterals	4	$a + bs + ct + dst$
Tetrahedra	4	$a + bs + ct + dr$
Hexahedra	8	$a + bs + ct + dr + est + ftr + gsr + hstr$

where:

a, b, c, d, e, f, g, h = coefficients
s, t, r = element natural coordinates

The extrapolation is done or the integration point results are simply moved to the nodes, based on the user's request (input on the [ERESX](#) command). If material nonlinearities exist in an element, the least squares fit can cause inaccuracies in the extrapolated nodal data or interpolated centroidal data. These inaccuracies are normally minor for plasticity, creep, or swelling, but are more pronounced in elements where an integration point may change status, such as [SHELL41](#), [SOLID65](#), etc.

There are a number of adjustments and special cases:

1. [SOLID90](#) and [SOLID95](#) use only the eight corner integration points.
2. [SHELL63](#) uses a least squares fitting procedure for the bending stresses. Data from all three integration points of each of the four triangles is used.
3. [SHELL43](#), [SOLID46](#), [SHELL91](#), [SHELL93](#), [SHELL99](#), and [SOLID191](#) use the procedure for quadrilaterals repeatedly at various levels through the element thickness.
4. Uniform stress cases, like a constant stress triangle, do not require the above processing.