Sperimentazioni di Fisica I mod. A – Lezione 2

Numeri Relativi

Dipartimento di Fisica e Astronomia "G. Galilei",
Università degli Studi di Padova

Rappresentazione dei Numeri

Lezione II: Numeri Relativi

1. Introduzione

Complemento alla Radice

Dato un numero x espresso in base-R con un numero n di cifre, si definisce **complemento alla radice R**, il numero:

$$C_R(x) = R^n - x$$

Allo stesso modo si definisce il **complemento alla radice R diminuita di uno**, il numero:

$$C_{R-1}(x) = (R^n - 1) - x = R^n - 1 - x = (R^n - x) - 1$$

C_R e C_{R-1} sono legati dalla relazione:

$$C_{R-1}(x) = C_R(x) - 1$$

$$C_R(x) = C_{R-1}(x) + 1$$

Complementi in Base-10

In **base-10**, si definiscono il **complemento a 10** ($\mathbf{C_{10}}$, complemento alla radice 10) e il **complemento a 9** ($\mathbf{C_9}$, complemento alla radice 10 diminuita di 1).

Consideriamo il numero $\mathbf{873_{10}}$

$$\mathbf{C_{10}(873)} = 10^3 - 873 = 1000 - 873 = \mathbf{127}$$

$$\mathbf{C_9(873)} = (10^3 - 1) - 873 = 999 - 873 = \mathbf{126}$$

$$C_{10}(873) = C_9(873) + 1 = 126 + 1 = 127$$

Altro esempio, consideriamo il numero $\mathbf{75911_{10}}$

$$\mathbf{C_{10}(75911)} = 10^5 - 75911 = 100000 - 75911 = \mathbf{24089}$$

$$\mathbf{C_9(75911)} = (10^5 - 1) - 75911 = 99999 - 75911 = \mathbf{24088}$$

Complementi in altre Basi

1. Complemento alla radice R diminuita di uno, $C_{R-1}(x)$

$$C_F(369_{16}) = FFF_{16} - 369_{16} = C96_{16}$$

$$C_9(873_{10}) = 999_{10} - 873_{10} = 126_{10}$$

$$C_7(1551_8) = 7777_8 - 1551_8 = 6226_8$$

$$C_1(1101101001_2) = 1111111111_2 - 1101101001_2 = 0010010110_2$$

2. Complemento alla radice R, $C_R(x)$

$$C_{16}(369_{16}) = C_F(369_{16}) + 1_{16} = C96_{16} + 1_{16} = C97_{16}$$

$$C_{10}(873_{10}) = C_9(873_{10}) + 1_{10} = 126_{10} + 1_{10} = 127_{10}$$

$$C_8(1551_8) = C_7(1551_8) + 1_8 = 6226_8 + 1_8 = 6227_8$$

$$C_2(1101101001_2) = C_1(1101101001_2) + 1_2 = 0010010111_2$$

Rappresentazione dei Numeri

Lezione II: Numeri Relativi

2. La Rappresentazione del Segno

Il Segno

Il parametro che contraddistingue due numeri con lo stesso valore assoluto è il **segno**.

Il segno può assumere unicamente **due valori**: **"+"** e **"–"**

Per rappresentare l'informazione-segno è necessario e sufficiente **un bit**, una cifra che possa assumere valori 0 ed 1.

Aggiungiamo una cifra $\mathbf{d_n}$, che rappresenta il segno

$$\mathbf{d = (d_n d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_2 d_1 d_0)_R}$$

dove $d_i \in \{0, 1, \ldots R\text{-}1\}$, $i \in N$ e

$\mathbf{d_n = 0}$, se il numero è **positivo**

$\mathbf{d_n = 1}$, se il numero è **negativo**

$$d = (1 - 2d_n)\sum_{i=0}^{n-1} d_i R^i$$

I Numeri Relativi in Base-2

Interi Positivi. Si aggiunge **uno zero (0)** come cifra più significativa **(d_n = 0)**, mentre il resto delle cifre rimane invariato ($d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0$).

$$|19_{10}| = 10011_2$$

$$+19_{10} = \mathbf{0}10011_2$$

Interi Negativi. Ci sono diverse possibili rappresentazioni:

1. Rappresentazione **Modulo e Segno**,
2. Rappresentazione in **Complemento ad Uno**,
3. Rappresentazione in **Complemento a Due**.
4. Rappresentazione in **Eccesso-q**

Rappresentazione dei Numeri

Lezione II: Numeri Relativi

3. Rappresentazione Modulo e Segno

Modulo e Segno (I)

Un primo approccio al problema è di **separare** nettamente **il modulo** (valore assoluto) dell'intero rappresentato e di riservare il **bit più significativo** per la rappresentazione del **segno**.

Tale bit avrà valore **0** per i numeri **positivi** e **1** per i numeri **negativi**.

$$|19_{10}| = 10011_2$$

$$+19_{10} = 010011_2$$

$$-19_{10} = 110011_2$$

Fissato il **numero di bit disponibili** per la rappresentazione di un numero, resta individuato l'**intervallo di valori rappresentabili**.

Modulo e Segno (II)

Supponiamo di descrivere un intero con **n bit**, **1 bit** sarà riservato al **segno** e **n-1** al suo **modulo**. L'intervallo rappresentabile sarà

$$[-2^{n-1}+1,\ 2^{n-1}-1]$$

Vediamo un esempio con **n = 8**, $[-2^7+1,\ 2^7-1] = [-127, +127]$

Sistema Binario	**Signed (8-bit)**	**Unsigned (8-bit)**
00000000_2	$+0_{10}$	0_{10}
00000001_2	$+1_{10}$	1_{10}
01111111_2	$+127_{10}$	127_{10}
10000000_2	-0_{10}	128_{10}
10000001_2	-1_{10}	129_{10}
11111111_2	-127_{10}	255_{10}

Rappresentazione ridondante per la presenza di **due "0"**: **+0** e **–0**.

Utilizzata inizialmente nei primi computer (IBM 7090).

Oggi usata per il **significante/mantissa** nei numeri a **virgola mobile**.

Rappresentazione dei Numeri

Lezione II: Numeri Relativi
4. Rappresentazione
Complemento ad Uno

Complemento ad Uno

Ricordiamo la definizione di **complemento ad uno** (alla radice R diminuita di uno in base-2) di un numero x rappresentato con n bit:

$$\mathbf{C_{R-1}(x_R) = R_R{}^n - 1_R - x_R}$$

$$C_1(x_2) = 2_2{}^n - 1_2 - x_2$$

Per passare da un numero al suo **negativo**, si utilizza l'operazione di **complemento ad uno**.

La stessa trasformazione permette di passare da un numero negativo al corrispondente **positivo**:

$$\begin{aligned}\mathbf{C_1(C_1(x_2))} \quad &= 2_2{}^n - 1_2 - C_1(x_2)_2 = \\ &= 2_2{}^n - 1_2 - (2_2{}^n - 1_2 - x_2) = \\ &= 2_2{}^n - 1_2 - 2_2{}^n + 1_2 + x_2 = \\ &= \mathbf{x_2}\end{aligned}$$

Regola Pratica

Intero Positivo: si aggiunge un **bit di segno (0)** come cifra più significativa.

Intero Negativo: si considera il **complemento ad uno** dell'intero positivo.

$$|19_{10}| = 10011_2$$

$$+19_{10} = 010011_2$$

$$-19_{10} = C_1(010011_2) = 111111_2 - 010011_2 = 101100_2$$

→ Per trovare la rappresentazione in complemento ad uno, **invertire ad uno ad uno tutti i bit** della parola.

L'**intervallo** di valori rappresentato è lo stesso della rappresentazione Modulo-Segno: $[-2^{n-1}+1, +2^{n-1}-1]$.

Per esempio, per $n = 8$: $[-127_{10}, +127_{10}]$.

Numeri Rappresentati in C_1

Sistema Binario	Signed (8-bit)	Unsigned (8-bit)
00000000_2	$+0_{10}$	0_{10}
00000001_2	$+1_{10}$	1_{10}
01111101_2	$+125_{10}$	125_{10}
01111110_2	$+126_{10}$	126_{10}
01111111_2	$+127_{10}$	127_{10}
10000000_2	-127_{10}	128_{10}
10000001_2	-126_{10}	129_{10}
10000010_2	-125_{10}	130_{10}
11111101_2	-2_{10}	253_{10}
11111110_2	-1_{10}	254_{10}
11111111_2	-0_{10}	255_{10}

Alcuni Inconvenienti

La rappresentazione è **ridondante** per la scrittura dello **"0"**:

$$\mathbf{00\ldots00_2 = +0_{10}} \qquad\qquad \mathbf{11\ldots11_2 = -0_{10}}$$

Il complemento ad uno permetterebbe un **design più semplice dell'hardware** (es. i circuiti di addizione e sottrazione sono più semplici rispetto alla rappresentazione modulo e segno), ma la duplice rappresentazione dello "0" può generare degli inconvenienti nelle operazioni.

Nelle **sottrazioni**, come vedremo, possono inoltre verificarsi degli **errori** se non si considera opportunamente il **riporto**.

CDC 6000 e Univac 1100 utilizzarono il complemento ad uno.

Successivamente **Intel** fu tra i primi ad integrare il **complemento a due** (Intel 8080). La scelta fu quindi seguita anche da AMD ed IBM.

Addizione

Consideriamo la somma di $\mathbf{A_1 = +121_{10}}$ e $\mathbf{A_2 = -55_{10}}$

$$|\mathbf{A_1}| = \mathbf{121_{10} = 1111001_2}$$

$$\mathbf{A_1 = +121_{10} = 01111001_2}$$

$$|\mathbf{A_2}| = \mathbf{55_{10} = 110111_2}$$

$$+|\mathbf{A_2}| = \mathbf{+55_{10} = 00110111_2}$$

$$\mathbf{A_2 = -55_{10} = C_1(00110111)_2 = 11001000_2}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{1\,1\,1\,1\,1} \\ \mathbf{01111001_2} + \\ \mathbf{11001000_2} = \\ \hline \mathbf{(1)01000001_2} \end{array}$$

$\mathbf{A_1 + A_2} = 01000001_2 = 64_{10} + 1_{10} = \mathbf{65_{10}}$

ma $\mathbf{A_1 + A_2} = 121_{10} - 55_{10} = \mathbf{66_{10}}$!!!

occorre **sommare l'overflow** per ottenere il risultato corretto: $65_{10} + 1_2 = \mathbf{66_{10}}$

Rappresentazione dei Numeri

Lezione II: Numeri Relativi

5. Rappresentazione Complemento a Due

Complemento a Due

I problemi relativi alla **doppia rappresentazione dello "0"** e del **riporto dell'overflow nelle sottrazioni** sono evitati con la rappresentazione dei numeri negativi in **complemento a due**.

$$\mathbf{C_R(x_R) = R_R{}^n - x_R}$$

$$C_2(x_2) = 2_2{}^n - x_2 = C_1(x_2) + 1$$

Ci sono **due regole pratiche** per il calcolo del complemento a due:

1. Calcolare il **complemento ad 1, $C_1(x_2)$**, invertendo tutti i bit, e poi **sommare 1** al risultato;

$$C_2(0101100_2) = 1010011_2 + 1_2 = 1010100_2$$

2. Partendo da destra, **copiare tutti i bit fino al primo "1"** e poi **invertire tutti i bit a sinistra del primo "1"**

$$C_2(\mathbf{0101100}_2) = \mathbf{1010100}_2$$

Numeri Rappresentati in C_2

Sistema Binario	Signed (8-bit)	Unsigned (8-bit)
00000000_2	0_{10}	0_{10}
00000001_2	$+1_{10}$	1_{10}
01111101_2	$+125_{10}$	125_{10}
01111110_2	$+126_{10}$	126_{10}
01111111_2	$+127_{10}$	127_{10}
10000000_2	-128_{10}	128_{10}
10000001_2	-127_{10}	129_{10}
10000010_2	-126_{10}	130_{10}
11111101_2	-3_{10}	253_{10}
11111110_2	-2_{10}	254_{10}
11111111_2	-1_{10}	255_{10}

Confronto C_1 e C_2

Sistema Binario	C_1 (8-bit)	C_2 (8-bit)
00000000_2	$+0_{10}$	0_{10}
00000001_2	$+1_{10}$	$+1_{10}$
01111101_2	$+125_{10}$	$+125_{10}$
01111110_2	$+126_{10}$	$+126_{10}$
01111111_2	$+127_{10}$	$+127_{10}$
10000000_2	-127_{10}	-128_{10}
10000001_2	-126_{10}	-127_{10}
10000010_2	-125_{10}	-126_{10}
11111101_2	-2_{10}	-3_{10}
11111110_2	-1_{10}	-2_{10}
11111111_2	-0_{10}	-1_{10}

Proprietà in C_2

E' il **metodo più diffuso** nella rappresentazione dei numeri negativi in **informatica**.

Si utilizza un **unico circuito** per **addizione** e **sottrazione**, permettendo tecnologie più semplici e maggior precisione.

Il **valore assoluto** di un **numero negativo** si ottiene **invertendo** il valore dei singoli bit e **sommando 1** al numero binario risultante

(unica eccezione $10000000_2 = -128_{10}$)

$$-5_{10} = 11111011_2 \rightarrow C_2(11111011_2) = C_1(11111011_2) + 1_2 =$$
$$= 00000100_2 + 1_2 = 00000101_2 = 4_{10} * 1_{10} + 1_{10} = 5_{10}$$

L'**intervallo** dei numeri rappresentati è **$[-2^{n-1}, +2^{n-1}-1]$**, per esempio per una rappresentazione in **$n = 8$** bit: **[– 128,127]**.

C'è un'**unica rappresentazione** dello **0**.

Addizione

Sommando due numeri di **segno diverso**, il **segno** del risultato è determinato **automaticamente**.

1 1 1 1 1   1 1 1

$0000\ 1111_2 + (+15_{10})$

$1111\ 1011_2 = (-5_{10})$

$0000\ 1010_2\ (10_{10})$

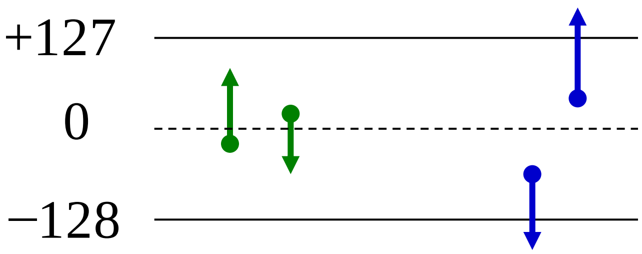
Sommando due numeri dello **stesso segno**, occorre determinare se il risultato è **fuori intervallo**.

0 1   1

$0100\ 1011_2 + (+75_{10})$

$0100\ 0010_2 = (+66_{10})$

$1000\ 1101_2\ (-115_{10})\ (\neq 141_{10})$



Se gli **ultimi due riporti** sono **diversi**, si è verificata una condizione di **overflow**!

Rappresentazione dei Numeri

Lezione II: Numeri Relativi
6. Rappresentazione
in Eccesso-q

Eccesso-q

Questa notazione, detta anche **“biased”**, si realizza **aggiungendo** un valore fissato **“q”** (detto eccesso, **offset**) ai numeri della rappresentazione.

Dato il numero di bit, **n**, della rappresentazione **l’eccesso è** (generalmente)

$$q = 2^{n-1} - 1$$

Lo **“0”** è rappresentato dal numero **“q”**, mentre una combinazione di **bit tutti nulli** rappresenta il numero **“–q”**.

$$\text{Intervallo: } [-2^{n-1}+1,\ 2^{n-1}]$$

Tale notazione è utilizzata per indicare l’**esponente** nei **numeri in virgola mobile**. Per esempio, secondo lo standard IEEE-P754, nei numeri in precisione singola (**32-bit**) l’esponente utilizza 8 bit ed è rappresentato in **eccesso-127**. Nei numeri in precisione doppia (**64-bit**), sono riservati 11 bit all’esponente rappresentato in **eccesso-1023**.

Numeri Rappresentati in Eccesso-127

Sistema Binario	Offset-127 (8-bit)	Unsigned (8-bit)
00000000_2	**-127_{10}**	**0_{10}**
00000001_2	-126_{10}	1_{10}
01111101_2	-2_{10}	125_{10}
01111110_2	-1_{10}	126_{10}
01111111_2	**0_{10}**	**127_{10}**
10000000_2	1_{10}	128_{10}
10000001_2	2_{10}	129_{10}
10000010_2	3_{10}	130_{10}
11111110_2	127_{10}	254_{10}
11111111_2	**128_{10}**	**255_{10}**

Esercizio 1 (I)

Dato il numero decimale $x = -80_{10}$, rappresentarlo in base binaria nelle seguenti notazioni, utilizzando (complessivamente) 8 bit:

1. **Modulo e Segno MS in base due**
2. **Complemento ad Uno C1 in base due**
3. **Complemento a Due C2 in base due**
4. **Eccesso-q**

Passo 1. Conversione del numero x in base 2.

$80 = \ldots$

$= 64 + 16 = 2^6 + 2^4 =$

$1*2^6 + 0*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0$

$80_{10} = 1010000_2$

$80 / 2 = 40 + 0 / 2$

$40 / 2 = 20 + 0 / 2$

$20 / 2 = 10 + 0 / 2$

$10 / 2 = 5 + 0 / 2$

$5 / 2 = 2 + 1 / 2$

$2 / 2 = 1 + 0 / 2$

$1 / 2 = 0 + 1 / 2$

Esercizio 1 (II)

Passo 2. Quanti bit abbiamo a disposizione? 8

Quanti bit servono per rappresentare il modulo di x? 7

Passo 3. **Modulo e Segno**

Modulo: 1010000

Segno: 1 (negativo)

→ **1-1010000**

Passo 4. **Complemento ad Uno (C1)**

Invertiamo tutti i bit del Modulo

→ **1-0101111**

Esercizio 1 (III)

Passo 5. **Complemento a Due (C2)**

Sommiamo 1 al Complemento ad 1: 10101111 + 1

→ **1-0110000**

Passo 6. **Eccesso –q**

Quanto vale q?

$q = 2^{n-1} - 1 = 27 - 1 = 128 - 1 = 127$

Per rappresentare x in eccesso –127, dobbiamo sommare q = 127 a x = – 80 e convertire il numero risultante (– 80 + 127 = 47) dalla base decimale alla base binaria.

→ **0-0101111**

Esercizio 2

Dato il numero decimale $x = -153_{10}$, rappresentarlo in base binaria nelle seguenti notazioni, utilizzando (complessivamente) 9 bit:

1. **Modulo e Segno MS in base due**
2. **Complemento ad Uno C1 in base due**
3. **Complemento a Due C2 in base due**
4. **Eccesso-q**

Soluzione:	Modulo e Segno:	1-10011001
	Complemento ad Uno:	1-01100110
	Complemento a Due:	1-01100111
	Eccesso-255:	0-01100110

Confronto tra le Rappresentazioni (I)

$R = 10$	$R = 2$				
	Valore Assoluto	Modulo e Segno	Complemento a Uno	Complemento a Due	Eccesso -7
+15	1111	-	-	-	-
+14	1110	-	-	-	-
+13	1101	-	-	-	-
+12	1100	-	-	-	-
+11	1011	-	-	-	-
+10	1010	-	-	-	-
+9	1001	-	-	-	-
+8	1000	-	-	-	1111
+7	0111	0111	0111	0111	1110
+6	0110	0110	0110	0110	1101
+5	0101	0101	0101	0101	1100
+4	0100	0100	0100	0100	1011
+3	0011	0011	0011	0011	1010
+2	0010	0010	0010	0010	1001
+1	0001	0001	0001	0001	1000
+0	0000	0000	0000	0000	0111
-0	-	1000	1111	-	-
-1	-	1001	1110	1111	0110
-2	-	1010	1101	1110	0101
-3	-	1011	1100	1101	0100
-4	-	1100	1011	1100	0011
-5	-	1101	1010	1011	0010
-6	-	1110	1001	1010	0001
-7	-	1111	1000	1001	0000
-8	-	-	-	1000	-

Confronto tra le Rappresentazioni (II)

$R = 10$	$R = 2$				
	Valore Assoluto	Modulo e Segno	Complemento a Uno	Complemento a Due	Eccesso -7
+15	1111	-	-	-	-
+14	1110	-	-	-	-
+13	1101	-	-	-	-
+12	1100	-	-	-	-
+11	1011	-	-	-	-
+10	1010	-	-	-	-
+9	1001	-	-	-	-
+8	1000	-	-	-	1111
+7	0111	0111	0111	0111	1110
+6	0110	0110	0110	0110	1101
+5	0101	0101	0101	0101	1100
+4	0100	0100	0100	0100	1011
+3	0011	0011	0011	0011	1010
+2	0010	0010	0010	0010	1001
+1	0001	0001	0001	0001	1000
+0	0000	0000	0000	0000	0111
-0	-	1000	1111	-	-
-1	-	1001	1110	1111	0110
-2	-	1010	1101	1110	0101
-3	-	1011	1100	1101	0100
-4	-	1100	1011	1100	0011
-5	-	1101	1010	1011	0010
-6	-	1110	1001	1010	0001
-7	-	1111	1000	1001	0000
-8	-	-	-	1000	-