Sperimentazioni di Fisica I mod. A – Lezione 4

Algebra Booleana (I)

Dipartimento di Fisica e Astronomia "G. Galilei",
Università degli Studi di Padova

Algebra Booleana

Lezione IV: Algebra Booleana

1. Teoria degli Insiemi

Definizione di Insieme

Un **insieme** è una **collezione di oggetti**, detti **elementi** o **membri dell'insieme**.

Un insieme è **definito** quando:

1. Si specificano **individualmente** gli elementi che ne **appartengono**, es. A = {1,5,6}
2. Si definiscono **una o più regole di selezione** che permettono di stabilire se un elemento appartiene all'insieme o meno, es. B = {2,4,6,8}, ovvero gli interi positivi pari maggiori di 0 e minori di 10.

Un insieme particolare è l'**insieme vuoto**: Ø, { }, ovvero un insieme privo di elementi.

Definizione di Sottoinsieme

Un insieme **S** è un **sottoinsieme** di **A**, se **tutti gli elementi di S** sono anche **elementi di A**.

$$S \subset A \iff \forall x : x \in S \Rightarrow x \in A$$

L'insieme vuoto, { }, è un **sottoinsieme** di tutti gli insiemi.

L'insieme **S** è un **sottoinsieme proprio di A**, se esiste almeno **un elemento di A** che **non appartiene ad S**.

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

L'insieme **Universo**, **U**, è l'insieme che contiene **tutti gli elementi che vogliamo considerare** (indipendentemente dalla loro appartenenza ad A).

Insiemi Particolari

N, l'insieme dei numeri **naturali**

$$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Z, l'insieme dei numeri **relativi**

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Q, l'insieme dei numeri **razionali**

$$Q = \{1/2, 4/3, -7/5, 10, \ldots\}$$

R, l'insieme dei numeri **reali**

$$R = \{\log(2), \mathrm{radq}(8), \pi, \ldots\}$$

C, l'insieme dei numeri **complessi**

$$C = \{\log(-1), \mathrm{radq}(-1), i, \ldots\}$$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

Operazioni tra Insiemi (I)

1. Uguaglianza

Due insiemi A e B sono uguali, **A = B**, se e solo se **ogni elemento di A** è anche **elemento di B** e **ogni elemento di B** è anche **elemento di A**.

$$A = B \iff \forall x, x \in A \iff x \in B$$

2. Unione

L'**unione** di due insiemi A e B è un **insieme che contiene tutti gli elementi di A e B**.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

- $A \cup B = B \cup A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- $A \subseteq (A \cup B)$ and $B \subseteq (A \cup B)$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cup \emptyset = A$.

Operazioni tra Insiemi (II)

3. Intersezione

L'**intersezione** di due insiemi A e B è un insieme che contiene **gli elementi che appartengono simultaneamente ad A e B**.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

- $A \cap B = B \cap A;$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- $A \cap B \subseteq A$ and $A \cap B \subseteq B;$
- $A \cap A = A;$
- $A \cap \emptyset = \emptyset.$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

L'**unione** si distribuisce sulle **intersezioni**.
L'**intersezione** si distribuisce sulle **unioni**.

Operazioni tra Insiemi (III)

4. Complemento

Il **complemento di A relativo a B**, B \ A, è l'insieme di **tutti elementi di B che non appartengono ad A**.

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ and } x \notin A\}$$

Se il **complemento** è relativo all'**intero universo U**, U \ A, si chiama **complemento assoluto**, **$\bar{A}$**

$$U \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

- $A \cup \bar{A} = U$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $\overline{U} = \emptyset$ and $\overline{\emptyset} = U$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Operazioni tra Insiemi (IV)

5. Prodotto Cartesiano

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B, **A x B**, è l'insieme di tutte le **coppie ordinate (a,b)** tali che **a sia un elemento di A** e **b sia un elemento di B**.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ and } y \in B\}$$

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Un caso interessante è il **prodotto** di un **insieme per se stesso**:

$$A \times A \equiv A^2 = \{(x, y) : x \in A \text{ and } y \in A\}$$

Operazioni tra Insiemi (V)

6. Leggi di De Morgan

Dati 3 insiemi, **A, B e C**, valgono le seguenti proprietà:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Se **A è l'intero universo U**, allora:

$$\overline{(B \cup C)} = \overline{B} \cap \overline{C}$$

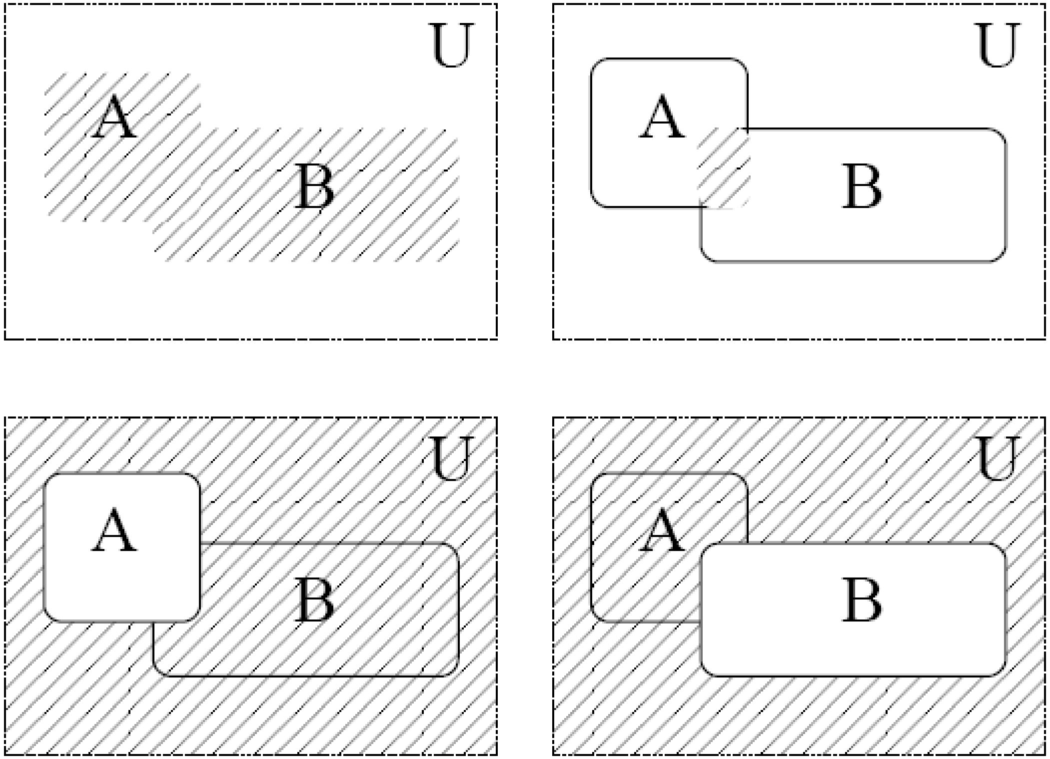
$$\overline{(B \cap C)} = \overline{B} \cup \overline{C}$$

Il **complemento dell'unione** di due insiemi, B e C, è pari all'**intersezione dei complementi** dei due insiemi.

Il **complemento dell'intersezione** di due insiemi, B e C, è pari all'**unione dei complementi** dei due insiemi

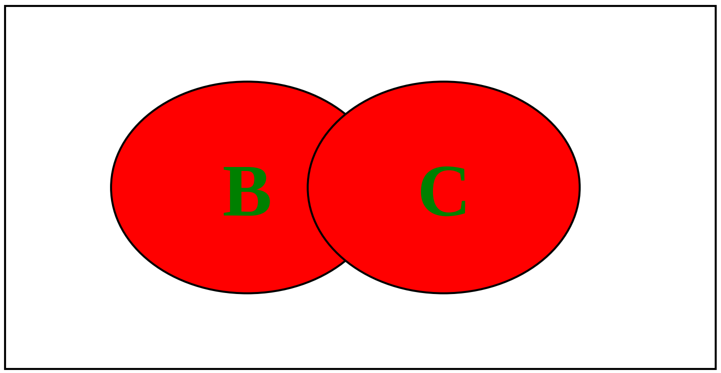
Diagrammi di Venn

Un modo molto semplice di rappresentare (e capire) le relazioni tra diversi insiemi è utilizzare i **diagrammi di Venn**.

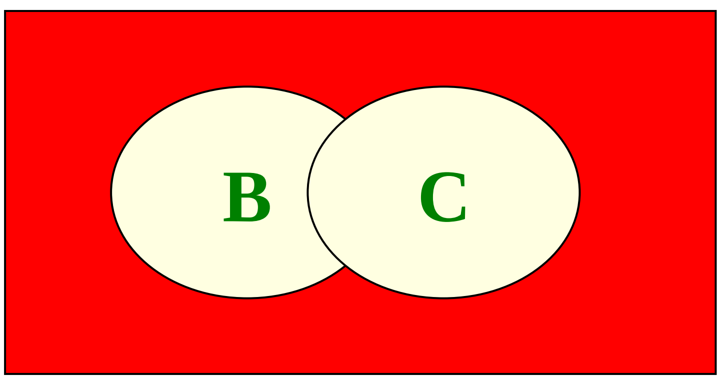


Leggi di De Morgan

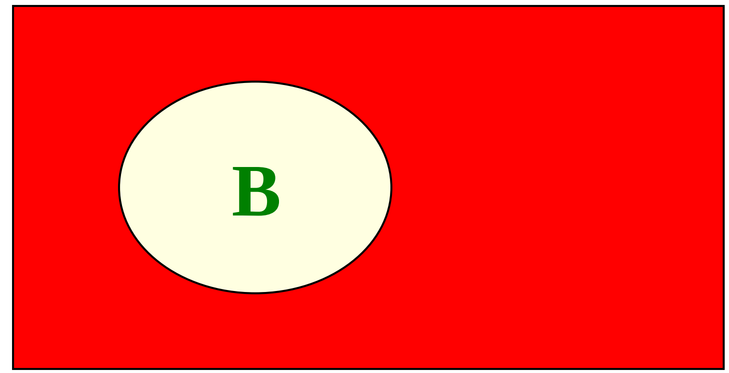
$(B \cup C)$



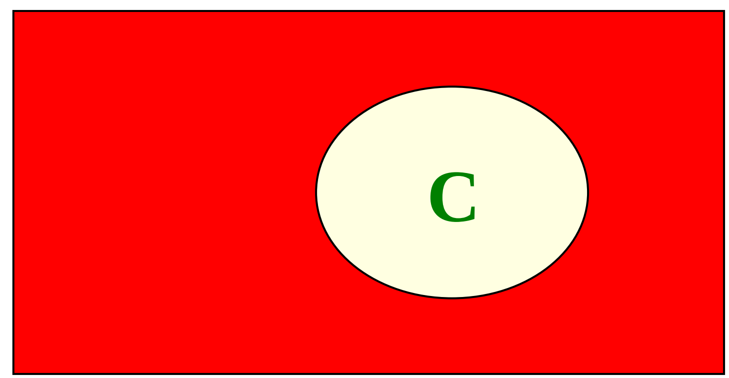
$\overline{(B \cup C)}$



$\overline{B}$



$\overline{C}$



$\overline{B} \cap \overline{C}$

Algebra Booleana

Lezione IV: Algebra Booleana

2. Definizione e Proprietà

Definizione

Dato un **insieme, A**, su cui operare, un'**algebra boolena, b(A)**, richiede l'**esistenza** di:

1. **due operazioni binarie** tra gli elementi dell'insieme
   - **Unione** (**OR logico**), indicata con U, V, +
   - **Intersezione** (**AND logico**), indicata con $\cap$, Λ, $*$

2. **un'operazione unaria** tra gli elementi dell'insieme
   - **Complemento** (**NOT logico**), indicato un una barra al di sopra dell'elemento considerato dell'insieme.

Proprietà di AND e OR

- **Idempotenza** $a \cdot a = a + a = a$

- **Commutativa**

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + b = b + a$$

- **Associativa**

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

- **Distributiva (mutua)**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

- **Assorbimento** $a \cdot (a + b) = a + (a \cdot b) = a$

Elemento Neutro e Complemento

La struttura algebrica richiede l'esistenza di un **elemento neutro** per ogni operazione **binaria**:

- **0** per l'**OR** logico
- **1** per l'**AND** logico

$$0 \cdot a = 0$$

$$0 + a = a$$

$$1 \cdot a = a$$

$$1 + a = 1$$

Ogni **elemento a** di **b(A)** ed il suo **complemento ā** di **b(A)** soddisfano le seguenti espressioni:

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

$$a + \bar{a} = 1$$

Principio di Dualità

Data un'espressione tra gli elementi di un'algebra booleana è sempre possibile dedurre una **relazione duale**, ottenuta **scambiando tra loro**

- gli **operatori logici AND ed OR** (**AND** ↔ **OR**)
- gli **elementi neutri 0 ed 1** (**0** ↔ **1**)

Relazione Ordinaria	**Relazione Duale**
$a + \overline{a} = 1$	$a \cdot \overline{a} = 0$
$a \cdot (a + b) = a$	$a + (a \cdot b) = a$

Idempotenza

Relazione Ordinaria	Relazione Duale
Idempotenza: $a + a = a$	**Idempotenza: $a * a = a$**
$a + a = (a + a) * \mathbf{1}$	$a * a = (a * a) + \mathbf{0}$
$= (a + a) * (\mathbf{a + \bar{a}})$	$= (a * a) + (\mathbf{a * \bar{a}})$
$= a + (\mathbf{a * \bar{a}})$	$= a * (\mathbf{a + \bar{a}})$
$= a + \mathbf{0}$	$= a * \mathbf{1}$
$= a$	$= a$

Proprietà degli Elementi Neutri

Relazione Ordinaria

El. Neutro: $a + 0 = a$

$$
\begin{aligned}
a + 0 &= a + (a * \bar{a}) \\
&= (a + a) * (a + \bar{a}) \\
&= a * 1 \\
&= a
\end{aligned}
$$

Relazione Duale

El. Neutro: $a * 1 = a$

$$
\begin{aligned}
a * 1 &= a * (a + \bar{a}) \\
&= (a * a) + (a * \bar{a}) \\
&= a + 0 \\
&= a
\end{aligned}
$$

Unicità del Complemento

Per ogni elemento di **a** appartenente all'**algebra booleana b(A)**, esiste **uno ed un solo complemento $\bar{a}$**.

Dimostrazione per Assurdo.

Supponiamo che per ogni a, **esistano due elementi distinti $\bar{a}$ ed $\bar{e}$** tali per cui:

$$\mathbf{a + \bar{a} = 1} \qquad \mathbf{a + \bar{e} = 1}$$

$$\mathbf{a * \bar{a} = 0} \qquad \mathbf{a * \bar{e} = 0}$$

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= 1 * \bar{e} & &= (a + \bar{a}) * \bar{e} \\
&= a * \bar{e} + \bar{a} * \bar{e} & &= 0 + \bar{a} * \bar{e} \\
&= a * \bar{a} + \bar{a} * \bar{e} & &= \bar{a} * (a + \bar{e}) \\
&= \bar{a} * 1 & &= \bar{a}
\end{aligned}$$

Pertanto, $\mathbf{\bar{a} = \bar{e}}$

Doppio Complemento

Per ogni elemento di **a** appartenente all'**algebra booleana b(A)**, il **doppio complemento di a è l'elemento originale**.

Dimostrazione, sfruttando la **definizione di complemento**.

$$\bar{a} + \overline{(\bar{a})} = 1 \qquad \bar{a} * \overline{(\bar{a})} = 0$$

e

$$\bar{a} + a = 1 \qquad \bar{a} * a = 0$$

a ed $\bar{\bar{a}}$ sono **entrambi complementi di $\bar{a}$**. Ma abbiamo appena dimostrato l'unicità del complemento.

Pertanto, $\mathbf{a = \bar{\bar{a}}}$

Legge di Assorbimento (I)

Relazione Ordinaria

$$a + (a * b) = a$$

$$\begin{aligned} a + (a * b) &= (a * 1) + (a * b) \\ &= a * (1 + b) \\ &= a * 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Relazione Duale

$$a * (a + b) = a$$

$$\begin{aligned} a * (a + b) &= (a + 0) * (a + b) \\ &= a + (0 * b) \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

Legge di Assorbimento (II)

Relazione Ordinaria

$$\mathbf{a + (\bar{a} * b) = a + b}$$

$$\begin{aligned} a + (\bar{a} * b) &= (a + \bar{a}) * (a + b) \\ &= 1 * (a + b) \\ &= a + b \end{aligned}$$

Relazione Duale

$$\mathbf{a * (\bar{a} + b) = a * b}$$

$$\begin{aligned} a * (\bar{a} + b) &= (a * \bar{a}) + (a * b) \\ &= 0 + (a * b) \\ &= a * b \end{aligned}$$

Teorema di De Morgan (I)

Dati due elementi **a ed e** dell'**algebra boolena b(A)**, valgono le seguenti relazioni:

$$\overline{a + e} = \bar{a} * \bar{e}$$

$$\overline{a * e} = \bar{a} + \bar{e}$$

La dimostrazione si basa sulla **definizione di complemento**.

Mostriamo dapprima che **per entrambi**, **$\overline{(a + e)}$ ed $(\bar{a} * \bar{e})$**, l'**OR logico con (a + e) è 1**.

$$
\begin{aligned}
1 = (a + e) + \overline{(a + e)} \quad & = (a + e) + \bar{a} * \bar{e} \\
& = e + (a + \bar{a} * \bar{e}) \\
& = e + ((a + \bar{a}) * (a + \bar{e})) \\
& = e + (1 * (a + \bar{e})) \\
& = a + (e + \bar{e}) \\
& = a + 1 \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Teorema di De Morgan (II)

Mostriamo ora che **per ambo i membri, $\overline{(a + e)}$ ed $(\bar{a} * \bar{e})$**, l'**AND logico con $(a + e)$ è 0**.

$$
\begin{aligned}
0 = (a + e) * \overline{(a + e)} \quad & = (a + e) * (\bar{a} * \bar{e}) \\
& = a * (\bar{a} * \bar{e}) + e * (\bar{a} * \bar{e}) \\
& = (a * \bar{a}) * \bar{e} + \bar{a} * (e * \bar{e}) \\
& = 0 * \bar{e} + \bar{a} * 0 \\
& = 0 + 0 \\
& = 0
\end{aligned}
$$

Pertanto, **$\overline{(a + e)}$ ed $(\bar{a} * \bar{e})$**, risultano entrambi **complementi di $(a + e)$**. Per **l'unicità del complemento**, abbiamo verificato:

$$\overline{a + e} = \bar{a} * \bar{e}$$

La **seconda relazione è duale** a quella appena dimostrata.

Applicazione

Complementiamo entrambe le relazioni del teorema di De Morgan

$$\mathbf{a + e = \overline{\bar{a} * \bar{e}}}$$

$$\mathbf{a * e = \overline{\bar{a} + \bar{e}}}$$

E' evidente come l'**operatore logico OR** si possa scrivere come una **combinazione degli operatori logici NOT ed AND**.

In modo del tutto simile, l'**operatore logico AND** si può scrivere come una **combinazione degli operatori logici NOT ed OR**.