Sperimentazioni di Fisica I mod. A – Lezione 5

Algebra Booleana (II)

Dipartimento di Fisica e Astronomia "G. Galilei",
Università degli Studi di Padova

Algebra Booleana

Lezione V: Algebra Booleana

1. Algebra Booleana a 2 Elementi

Algebra A = {0,1}

Consideriamo l'**insieme A = {0,1}** di due elementi.

Date due variabili booleane x, y $\in$ A, si definiscono **due operazioni binarie "+", "*"** e l'**operazione unaria di complementazione "‾"**:

OR

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Verifica delle Proprietà (I)

- **Idempotenza:**

x + x = x ?

0 + 0 = 0 ok

1 + 1 = 1 ok

- **Idempotenza:**

x * x = x ?

0 * 0 = 0 ok

1 * 1 = 1 ok

- **Elemento Neutro:**

x + 0 = x ?

0 + 0 = 0 ok

1 + 0 = 1 ok

- **Elemento Neutro:**

x * 1 = x ?

0 * 1 = 0 ok

1 * 1 = 1 ok

Verifica delle Proprietà (II)

- **Complemento:**

$a + \bar{a} = 1$?

$0 + 1 = 1$ ok

$1 + 0 = 1$ ok

- **Assorbimento:**

$x + (x * y) = x$?

$0 + (0 * 1) = 0 + 0 = 0$ ok

$0 + (0 * 0) = 0 + 0 = 0$ ok

$1 + (1 * 1) = 1 + 1 = 1$ ok

$1 + (1 * 0) = 1 + 0 = 1$ ok

- **Complemento:**

$a * \bar{a} = 0$?

$0 * 1 = 0$ ok

$1 * 0 = 0$ ok

- **Assorbimento:**

$x * (x + y) = x$?

$0 * (0 + 1) = 0 * 1 = 0$ ok

$0 * (0 + 0) = 0 * 0 = 0$ ok

$1 * (1 + 1) = 1 * 1 = 1$ ok

$1 * (1 + 0) = 1 * 1 = 1$ ok

Verifica delle Proprietà (III)

- **Doppio Complemento:**

$a = \overline{\overline{a}}$?

$0 = \overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0$ ok

- **Doppio Complemento:**

$a = \overline{\overline{a}}$?

$1 = \overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1$ ok

- **Legge di De Morgan:**

$\overline{a + e} = \bar{a} * \bar{e}$?

$\overline{1 + 0} = \overline{0} * \overline{1}$

$\overline{1} = 1 * 0$

$0 = 0$ ok

- **Legge di De Morgan:**

$\overline{a * e} = \bar{a} + \bar{e}$?

$\overline{0 * 1} = \overline{0} + \overline{1}$

$\overline{0} = 1 + 0$

$1 = 1$ ok

Gli Operatori NAND e NOR

E' possibile costruire gli **operatori logici NAND e NOR**, applicando l'**operatore NOT agli operatori AND ed OR**, rispettivamente.

NOR = NOT OR

x	y	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$\overline{(x + y)} = \overline{x} * \overline{y}$$

NAND = NOT AND

x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{(x * y)} = \overline{x} + \overline{y}$$

Algebra Booleana

Lezione V: Algebra Booleana

2. Teorema Fondamentale

Funzioni Booleane

Una **funzione booleana** di n variabili indipendenti è una **corrispondenza** tra il **prodotto cartesiano** $\{0,1\}^n$ e l'**insieme {0,1}**:

$$f : \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Una funzione booleana è **univocamente definita** da:

1. una **forma analitica**,

   oppure

2. una **tabella di verità**.

Una **forma analitica** di una funziona booleana è data semplicemente dalla sua **formula**.

Forma Analitica

$$f(a,b,c) = \overline{a + c} + \overline{b} * (a + c)$$

Vediamo come costruire una tabella di verità

a	b	c	$a + c$	$\overline{a + c}$	$\overline{b}$	$\overline{b} * (a+c)$	f
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Teorema Fondamentale (I)

Data una **forma analitica** è sempre possibile costruire la corrispondente **tabella di verità**.

Per il **passaggio reciproco** è necessario introdurre il **teorema fondamentale dell'algebra booleana**.

La dimostrazione procede per passi successivi.

Proviamo che

$$\forall \mathbf{f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}} \quad \text{e} \quad \forall x \in \{0,1\}$$

$$\mathbf{f(x) = x * f(1) + \overline{x} * f(0)}$$

Teorema Fondamentale (II)

- **Passo 1**. Assumiamo che **$f(x) = k$ (costante)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x * f(1) + \overline{x} * f(0) \\
&= x * k + \overline{x} * k \\
&= k * (x + \overline{x}) \\
&= k * 1 \\
&= k \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Teorema Fondamentale (III)

- **Passo 2**. Assumiamo che **f(x) = x**, $\forall x \in \{0,1\}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x * f(1) + \overline{x} * f(0) \\
&= x * 1 + \overline{x} * 0 \\
&= x + 0 \\
&= x \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Teorema Fondamentale (IV)

- **Passo 3**. Assumiamo che il teorema sia valido per ogni funzione **$f(x)$** e verifichiamo se vale anche per la funzione **$g(x) = \overline{f(x)}$**

$$
\begin{aligned}
g(x) \quad &= \overline{f(x)} \\
&= \overline{x * f(1) + \overline{x} * f(0)} \\
&= \overline{(x * f(1))} * \overline{(\overline{x} * f(0))} \qquad \text{(De Morgan)} \\
&= (\overline{x} + \overline{f(1)}) * (x + \overline{f(0)}) \qquad \text{(De Morgan)} \\
&= \cancel{\overline{x} * x} + \overline{x} * \overline{f(0)} + x * \overline{f(1)} + \overline{f(1)} * \overline{f(0)} \\
&= \overline{x} * \overline{f(0)} + x * \overline{f(1)} + \overline{f(1)} * \overline{f(0)} * (x + \overline{x}) \\
&= (x * \overline{f(1)}) * (1 + \overline{f(0)}) + (\overline{x} * \overline{f(0)}) * (1 + \overline{f(1)}) \\
&= x * \overline{f(1)} * 1 + \overline{x} * \overline{f(0)} * 1 \\
&= x * g(1) + \overline{x} * g(0)
\end{aligned}
$$

Teorema Fondamentale (V)

- **Passo 4**. Assumiamo che il teorema sia valido per due funzioni booleane, **f(x) e g(x)**, verifichiamo se il teorema è valido anche per la funzione

$$\mathbf{h(x) = f(x) + g(x)}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x * f(1) + \overline{x} * f(0) + x * g(1) + \overline{x} * g(0) \\ &= x * (f(1) + g(1)) + \overline{x} * (f(0) + g(0)) \\ &= x * h(1) + \overline{x} * h(0) \end{aligned}$$

Teorema Fondamentale (VI)

- **Passo 5**. Assumiamo che il teorema sia valido per le due funzioni boolene, **f(x) e g(x)**, verifichiamo se è valido anche per funzione

$$k(x) = f(x) * g(x)$$

$$\begin{aligned}
k(x) &= f(x) * g(x) \\
&= (x * f(1) + \overline{x} * f(0)) * (x * g(1) + \overline{x} * g(0)) \\
&= x\, f(1)\, x\, g(1) + x\, f(1)\, \overline{x}\, g(0) + \\
&\qquad + \overline{x}\, f(0)\, x\, g(1) + \overline{x}\, f(0)\, \overline{x}\, g(0) \\
&= x\, f(1)\, x\, g(1) + \overline{x}\, f(0)\, \overline{x}\, g(0) \\
&= x\, f(1)\, g\,(1) + \overline{x}\, f(0)\, g(0) \\
&= x\, k(1) + \overline{x}\, k(0)
\end{aligned}$$

Teorema Fondamentale

Data una **generica funzione** di un numero arbitrario **n** di **variabili booleane**:

$$f(x_{n-1}, \ldots, x_0) : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$$

Abbiamo:

$$f(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0) = \bigcup_{i_{n-1}=0}^{1} \ldots \bigcup_{i_1=0}^{1} \bigcup_{i_0=0}^{1} x_{n-1}^{i_{n-1}} \ldots x_1^{i_1} x_0^{i_0} f(i_{n-1},\ldots,i_1,i_0)$$

$$f(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0) = \sum_{i_{n-1}=0}^{1} \ldots \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_0=0}^{1} x_{n-1}^{i_{n-1}} \ldots x_1^{i_1} x_0^{i_0} f(i_{n-1},\ldots,i_1,i_0)$$

dove:

$$x_j^{i_j} = \begin{cases} x_j & \text{if } i_j = 1, \\ \overline{x_j} & \text{if } i_j = 0. \end{cases} \qquad \forall j = 0,1,\ldots,n-1$$

“Forma Congiuntiva di f”

Teorema Fondamentale (n = 1,2)

$$f(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0)=\bigcup_{i_{n-1}=0}^{1}\cdots\bigcup_{i_1=0}^{1}\bigcup_{i_0=0}^{1} x_{n-1}^{i_{n-1}}\ldots x_1^{i_1}x_0^{i_0}\,f(i_{n-1},\ldots,i_1,i_0)$$

$$\forall j = 0, 1, 2, \ldots\ n\text{-}1 \qquad x_j^{i_j}=\begin{cases} x_j & \text{if } i_j=1,\\ \overline{x_j} & \text{if } i_j=0.\end{cases}$$

- Se **f** è **funzione** di un'**unica variabile x_0**:

$$f(x_0)=\bigcup_{i_0=0}^{1} x_0^{i_0}\,f(i_0)=x_0\,f(1)+\overline{x_0}\,f(0)$$

- Se **f** è **funzione** di **due variabili x_0 e x_1**:

$$f(x_0,x_1)=\bigcup_{i_1=0}^{1}\bigcup_{i_0=0}^{1} x_0^{i_0}x_1^{i_1}\,f(i_0,i_1)=\bigcup_{i_1=0}^{1} x_1^{i_1}(x_0\,f(1,i_1)+\overline{x_0}\,f(0,i_1))$$

$$f(x_0,x_1)=x_1[x_0\,f(1,1)+\overline{x_0}\,f(0,1)]+\overline{x_1}[x_0\,f(1,0)+\overline{x_0}\,f(0,0)]$$

$$f(x_0,x_1)=x_0x_1\,f(1,1)+\overline{x_0}x_1\,f(0,1)+x_0\overline{x_1}\,f(1,0)+\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,f(0,0)$$

Funzioni Booleane

Scriviamo una **funziona booleana**, partendo da una **tabella di verità**

a	e	f(a,e)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f(a,e)} &= \bar{a}\bar{e}\, f(0,0) + \bar{a}e\, f(0,1) + a\bar{e}\, f(1,0) + ae\, f(1,1)\\
&= \bar{a}\bar{e} * 0 + \bar{a}e * 1 + a\bar{e} * 1 + ae * 0\\
&= \mathbf{\bar{a}e + a\bar{e}}
\end{aligned}
$$

(Operatore XOR)

a	e	f(a,e)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f(a,e)} &= \bar{a}\bar{e}\, f(0,0) + \bar{a}e\, f(0,1) + a\bar{e}\, f(1,0) + ae\, f(1,1)\\
&= \bar{a}\bar{e} * 1 + \bar{a}e * 0 + a\bar{e} * 1 + ae * 0\\
&= \bar{a}\bar{e} + a\bar{e}\\
&= \bar{e} * (\bar{a} + a)\\
&= \bar{e} * 1\\
&= \mathbf{\bar{e}} \quad \textbf{(Operatore NOT(e))}
\end{aligned}
$$

Esercizio: n = 3 variabili

Proviamo a scrivere la **funzione booleana** descritta dalla seguente **tabella di verità**:

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Soluzione

$$f(a,b,c) = 1*\bar{a}\bar{b}\bar{c} + 1*\bar{a}\bar{b}c + 0*\bar{a}b\bar{c} + 1*\bar{a}bc + 1*a\bar{b}\bar{c} + 1*a\bar{b}c + 0*ab\bar{c} + 1*abc$$

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}(\bar{c} + c) + \bar{a}bc + a\bar{b}(\bar{c} + c) + abc$$

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}bc + a\bar{b} + abc$$

$$f(a,b,c) = (\bar{a} + a)\bar{b} + (\bar{a} + a)bc$$

$$f(a,b,c) = \bar{b} + bc$$

$$f(abc) = \bar{b} + c$$

Verifica

$$f = \overline{b} + c$$

a	b	c	$\overline{b}$	f
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Esercizio 8

Data la seguente tabella di verità, ricavarne la corrispondente funzione booleana utilizzando il teorema fondamentale dell'algebra booleana e semplificarla usando le regole dell'algebra booleana, indicando a lato la proprietà utilizzata, ove possibile.

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(a,b,c) = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$

$$f(a,b,c) = (\overline{a} + a)bc + a\overline{b}c + ab\overline{c}$$

$$f(a,b,c) = bc + a\overline{b}c + ab\overline{c}$$

$$f(a,b,c) = (b + a\overline{b})c + ab\overline{c}$$

$$f(a,b,c) = (b + a)c + ab\overline{c}$$

$$f(a,b,c) = ac + bc + ab\overline{c}$$

$$f(a,b,c) = ac + b(c + a\overline{c})$$

$$f(a,b,c) = ac + b(c + a)$$

$$f(a,b,c) = ac + bc + ba$$

$$f(a,b,c) = ab + ac + bc$$

"Forma Disgiuntiva"

E' possibile dimostrare anche la **versione duale del teorema** enunciato precedentemente. Ovvero che:

$\forall\ f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ e $\forall x \in \{0,1\}$

$$\mathbf{f(x) = (x + f(0)) * (\overline{x} + f(1))}$$

E per il caso generale di **n variabili**

$$f(x_{n-1}, \ldots, x_0) : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$$

$$f(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0) = \bigcap_{i_{n-1}=0}^{1} \ldots \bigcap_{i_1=0}^{1} \bigcap_{i_0=0}^{1} [x_{n-1}^{i_{n-1}} + \ldots + x_1^{i_1} + x_0^{i_0} + f(i_{n-1},\ldots,i_1,i_0)]$$

$$\forall j = 0,1,\ldots,n-1 \quad x_j^{i_j} = \begin{cases} x_j & \text{if } i_j = 1, \\ \overline{x_j} & \text{if } i_j = 0. \end{cases}$$

Corollario I

Data una **funzione booleana**:

$$y(x_{n-1},\ldots,x_0) : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$$

$$y(x_{n-1},\ldots,x_0) = x_j \cdot y\left(x_{n-1},\ldots,1,\ldots,x_0\right) + \overline{x_j} \cdot y\left(x_{n-1},\ldots,0,\ldots,x_0\right)$$

$$y(x_{n-1},\ldots,x_0) = \left[x_j + y\left(x_{n-1},\ldots,0,\ldots,x_0\right)\right] \cdot \left[\overline{x_j} + y\left(x_{n-1},\ldots,0,\ldots,x_0\right)\right]$$

Nella prima espressione **x_j è sostituito da 1** e **$\overline{x_j}$ da 0**.

La **seconda espressione** è semplicemente la **duale** della prima.

Corollario II

Data una **funzione booleana**:

$$y(x_{n-1}, \ldots, x_0) : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$$

$$x_j \cdot y\left(x_{n-1}, \ldots, x_j, \ldots, x_0\right) = x_j \cdot y\left(x_{n-1}, \ldots, 1, \ldots, x_0\right)$$
$$x_j + y\left(x_{n-1}, \ldots, x_j, \ldots, x_0\right) = x_j + y\left(x_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, x_0\right)$$

Nella prima espressione **x_j è sostituito da 1** e **$\overline{x_j}$ da 0**.

La **seconda espressione** è semplicemente la **duale** della prima.

Esercizio 9

Semplificare la seguente espressione, utilizzando le regole dell'algebra booleana:

$$\overline{abcd + abc\bar{d} + a\bar{b}c + bc(\overline{a+d}) + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{b}(\overline{c+d}) + ab\bar{d} + \bar{a}b\bar{d} + \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}cd}$$

$$\overline{abcd + abc\bar{d} + a\bar{b}c + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{d} + \bar{a}b\bar{d} + \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}cd}$$

$$\overline{abc(d+\bar{d}) + a\bar{b}c + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{b}(\bar{c}+c)\bar{d} + (a+\bar{a})b\bar{d} + \bar{a}cd}$$

$$\overline{abc + a\bar{b}c + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{b}(\bar{d}) + b\bar{d} + \bar{a}cd}$$

$$\overline{ac(b+\bar{b}) + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{d}(\bar{b}+b) + \bar{a}cd}$$

$$\overline{ac + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{d} + \bar{a}cd}$$

$$\overline{c(a+\bar{a}d) + \bar{d}(\bar{a}bc + a\bar{b}c + 1)}$$

$$\overline{c(a+d)+\bar{d}} = \overline{ca+cd+\bar{d}}$$

$$\overline{(\bar{d}+cd)+ca} = \overline{\bar{d}+c+ca}$$

$$\overline{c(1+a)+\bar{d}} = \overline{c+\bar{d}}$$

$$\bar{c}d$$

Esercizio 10

Semplificare la seguente espressione, utilizzando le regole dell'algebra booleana:

$$\overline{abcd + bc\overline{d} + abcd + \overline{a}bc\overline{d} + (\overline{a+c})bd + \overline{a}bcd + (\overline{a+b})\overline{d} + \overline{a}cd + \overline{a}d\overline{c} + \overline{a}b\overline{d} + \overline{c}ab}$$

$$\overline{abcd + bc\overline{d} + abcd + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}bcd + \overline{a}(\overline{b})\overline{d} + \overline{a}cd + \overline{a}(\overline{c})d + \overline{a}b\overline{d} + ab\overline{c}}$$

$$\overline{abcd + bc\overline{d} + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}bcd + \overline{a}(\overline{b})\overline{d} + \overline{a}cd + \overline{a}(\overline{c})d + \overline{a}b\overline{d} + ab\overline{c}}$$

$$\overline{(a+\overline{a})bcd + bc\overline{d} + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}\overline{d}(\overline{b}+b) + \overline{a}d(c+\overline{c}) + ab\overline{c}}$$

$$\overline{bcd + bc\overline{d} + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}\overline{d} + \overline{a}d + ab\overline{c}}$$

$$\overline{bc(d+\overline{d}) + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}(\overline{d}+d) + ab\overline{c}}$$

$$\overline{bc + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a} + ab\overline{c}}$$

$$\overline{b(c+a\overline{c}) + \overline{a}(bc\overline{d} + b\overline{c}d + 1)}$$

$$\overline{b(c+a)+\overline{a}} = \overline{bc+ab+\overline{a}} = \overline{bc+b+\overline{a}}$$

$$\overline{b(c+1)+\overline{a}} = \overline{\overline{a}+b}$$

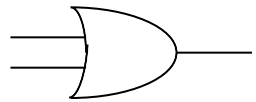
$$a\overline{b}$$

Algebra Booleana

Lezione V: Algebra Booleana
3. Elettronica

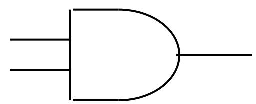
Porte Logiche (I)

OR



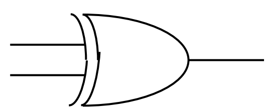
A	B	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND



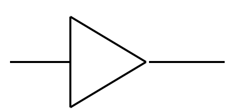
A	B	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

XOR



A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

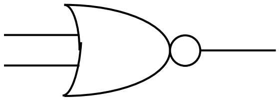
Buffer



A	Buffer
0	0
1	1

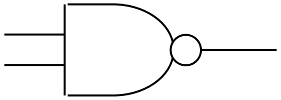
Porte Logiche (II)

NOR



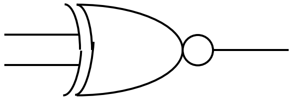
A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NAND



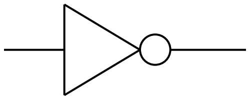
A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR



A	B	XNOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

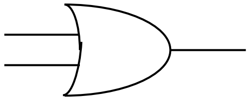
NOT



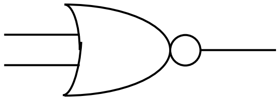
A	NOT
0	1
1	0

Porte Logiche: Riepilogo

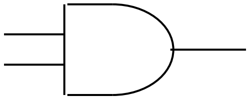
OR



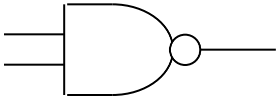
NOR



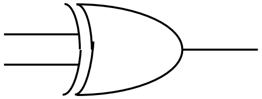
AND



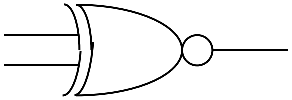
NAND



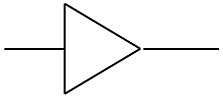
XOR



XNOR



Buffer



NOT