

Gruppe: Gegeben sei eine Menge G . Gegeben sei ferner eine Verknüpfung $*$ auf G , d.h. eine Abbildung von $G \times G$ in G .

↳ Die Menge G zusammen mit der Verknüpfung $= (G, *)$, heißt Gruppe wenn folgende Axiome erfüllt sind:

1. Assoziativgesetz: $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in G$

2. Es gibt ein neutrales Element $e \in G$ bezüglich der Verknüpfung, d.h., dass es gelten soll:

- 2.1 $e * a = a$

- 2.2 $a * a^{-1} = e$

wobei a^{-1} = inverses Element von a

Kommutative Gruppe, wenn es außerdem gilt:

3. Kommutativgesetz: $a * b = b * a$

$\forall a, b \in G$

Vektorraum: Eine Menge V , die mit einer Addition $\dot{+}: V \times V \rightarrow V$ und einer Multiplikation mit Skalaren $\otimes: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ versehen ist, heißt reeller Vektorraum falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $(V, \dot{+})$ ist eine kommutative Gruppe

2.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \otimes v &= \lambda \otimes v + \mu \otimes v & \forall v, w \in V \wedge \\ \lambda \otimes (v + w) &= \lambda \otimes v + \lambda \otimes w & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \lambda \otimes (\mu \otimes v) &= (\lambda \mu) \otimes v \\ 1 \otimes v &= v \end{aligned}$$

↳ hier nie vergessen auch $v + w \in V$ und $\lambda \otimes v \in V$ zu prüfen!

Lineare Hülle (Linear Kombination der Vektoren \in Menge X):

1. $X \subset V \Rightarrow \text{lin } X \subset V$

2. $X \subset \text{lin } X \quad \forall X \subset V$

3. $X \subset Y \Rightarrow \text{lin } X \subset \text{lin } Y \quad \forall X, Y \subset V$

4. $\text{lin}(\text{lin } X) = \text{lin } X \quad \forall X \subset V$

Unterraum: Seien V & W Vektorräume die durch die selbe $\dot{+}$ \otimes definiert sind mit $W \subset V$, dann genügt damit W Unterraum zu zeigen, dass:

1. $0 \in W$

2. $v + w \in W$

3. $\lambda \otimes v \in W$

$$\forall v, w \in V$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge v \in V$$

wohl: $A = \{ \text{Menge von Vektoren von } V \}$

Erzeugendensystem:

Sei: $A \subset V$. A heißt Erzeugendensystem von V , wenn sich jedes Element von V als Linearkombination von Elementen in A darstellen lässt, d.h. wenn $V = \text{lin } A$.

↪ Es gilt außerdem: $A \subset \text{lin } B \Rightarrow \text{lin } A \subset \text{lin } B$ so wenn $\text{lin } A = V$ gilt auch, dass $\text{lin } B = V$, wodurch auch B Erzeugendensystem von V ist.

! Seien $V = \text{Vektorraum}$ $\wedge A \subset V$. Dann ist A genau dann lin. unabhängig, wenn jedes $v \in V$ auf höchstens eine Weise als lin. Kombination von A darstellt werden kann.

Basis: Ist $V = \text{Vektorraum}$ $\wedge B = \text{lin. unabhängiges E2S von } V$

↪ Dann heißt $B = \text{Basis von } V$

⇒ Basis wenn jedes $v \in V$ sich auf genau eine Weise darstellen werden kann.

Komponente: Ist $B = \{v_i \mid i \in I = \{1, \dots, m\}\}$ eine Basis von V und hat

$v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i$$

dann heißt λ_i die i -te Komponente (Koordinate) von v bezüglich der Basis B .

Basisergänzungssatz: Besitzt V ein endliches E2S (z.B. A) und ist $C \subset V$

lin. unabhängig, so existiert ein $B \subset C$ mit $C \subset B \subset A$ die eine Basis von V ist. (d.h. man kann C zu einer endlichen Basis B von V ergänzen).

Austauschsatz von Steinitz:

Dies ist weil 1 Vektor sich genau auf 1 Weise darstellen lässt

↪ somit wenn w und v^j lin. abhängig dann w und v^i für alle $i \neq j$ lin. unabhängig da v^i und v^j lin. unabhängig.

Sei B eine Basis von V und habe $w \in V$, die Darstellung: $w = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i$ mit $\lambda_i \neq 0$ für $i \neq j$, dann kann man w mit v^i für diese j austauschen und B mit w anstatt v^i bleibt noch eine Basis.

! Es ist nun klar, dass folgendes gilt:

* Sind $A \wedge B$ zwei Basen eines (endlichdimensionalen) Vektorraums V , so enthalten $A \wedge B$ gleich viele Elemente."

und * Hat ein Vektorraum eine Basis mit n Elementen und ist C eine lin. unabhängige Teilmenge von V mit n Elementen, so ist C eine Basis von V .

Matrix: $A = A^T \Rightarrow$ Matrix symmetrisch; $A = -A^T \Rightarrow$ schief-symmetrisch.

Rechengesetze für Matrizen:

$$7. \underbrace{IA = AI = A}_{\text{Bei } I \text{ gilt}}$$

Kommutativgesetz.

$$11. AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$14. (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$1. (A^T)^T = A \quad 2. (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T \quad 4. (AB)C = A(BC)$$

$$5. A(B+C) = AB + AC$$

$$6. (A+B)C = AC + BC$$

$$8. A^0 = I \quad 9. A^n = A^{n-1}A$$

$$10. A^{m+n} = A^m \cdot A^n$$

$$12. (A^{-1})^{-1} = A$$

$$13. (AB)^{-1} = B^T A^{-1}$$

Zeilen- und Spaltenrang:

$\dim \{A_{1,1}, A_{2,1}, \dots, A_{m,1}\} =$ Zeilensum von A
 $\dim \{A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,n}\} =$ Spaltenraum von A .

! Diese müssen gleich sein.

$\begin{cases} \dim \text{ Zeilensum von } A = \text{Anzahl unabhängige Zeile } = \text{ Zeilensum von } A \\ \dim \text{ Spaltenraum von } A = \text{Anzahl unabhängige Spalten } = \text{ Spaltenrang von } A \end{cases}$

↳ es folgt $\operatorname{rg} A = \operatorname{Sp.rang} A = \operatorname{Zeilrang} A$ mit $A(m \times n)$ muss also gelten:

$$\operatorname{rg} A \leq m \quad \wedge \quad \operatorname{rg} A \leq n \quad \text{und} \quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$$

Lösbarkeit eines LGS: LGS mit $Ax = b$

⇒ LGS genau lösbar wenn $\operatorname{rg}[A, b] = \operatorname{rg} A$ oder wenn $\operatorname{rg} A = n$

⇒ Ist ein LGS lösbar und x^0 eine spezielle Lsg. von $Ax = b$, so ist die Lösungsmenge $M = x^0 + L$, wobei $L = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$

! L ist somit die Lösungsmenge des homogenen LGS und ist ein Unterraum von \mathbb{R}^m und es gilt $\dim L = n - \operatorname{rg} A$

! Es gilt $\operatorname{rg} A = m$ dann und nur dann wenn $Ax = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist.

Lineare Abbildung Definition: Gegeben $V \wedge W$ = Vektorräume, φ = Abbildung von V in W .

↳ Die Abbildung φ heißt linear wenn für $v_1, v_2 \in V \wedge \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ stets gilt:

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

⇒ lin. Abbildung wird auch Homomorphismus genannt.

Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen die gelten müssen (hier $\varphi: V \rightarrow W$)

$$1. \varphi(0_V) = 0_W \quad 2. \varphi(v^1 - v^2) = \varphi(v^1) - \varphi(v^2)$$

$$3. \varphi(\sum_{i=1}^m \lambda_i v^i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(v^i) \quad 4. \text{wenn } v^i \text{ i=1, ..., m lin. abhängig, dann auch } \varphi(v^i) \text{ lin. abhängig.}$$

5. Wenn $\varphi(v^i)$ i=1, ..., m lin. unabhängig, dann auch v^i lin. unabhängig.

$$6. (\varphi \circ \psi)(v) = \varphi(\psi(v)) \quad 7. (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \text{ wobei } \varphi \wedge \psi = \text{lin. Abb.}$$

$$8. \text{Für das Hintereinanderführen von zwei Abbildungen gilt: } (\varphi \circ \psi)(v) = \varphi(\psi(v))$$

Definitionen: 1. $\varphi(V) =$ Bild der Abbildung φ 2. $\operatorname{kern} \varphi = \{v \in W \mid \varphi(v) = 0\}$

3. $\varphi(v) = w \Leftrightarrow$ lineare Gleichung

Es gilt nun für $\varphi: V \rightarrow W$, $M \subseteq v \in V \mid \varphi(v) = w\}$

1. M ist nicht leer genau dann, wenn $w \in \varphi(V)$

2. Ist vo. jggnd einer Lösung der Gleichung, so ist M als $M = v^0 + \operatorname{kern} \varphi$ darstellbar.

! Sei $f: V \rightarrow W$. Dann ist:
 1. $f(V)$ = Unterraum von W
 2. $\text{kern } f$ = Unterraum von V

Weitere wichtige Eigenschaften von Abbildungen: (hier $f: V \rightarrow W$)

1. gilt für $v^1 + v^2, f(v^1) + f(v^2)$, so heißt f injektiv.
2. ist f injektiv und linear, so heißt f regular.
3. Gilt $W = f(V)$ so heißt f surjektiv.
4. Ist f injektiv & surjektiv, so heißt f bijektiv.
 Ls ist f bijektiv und linear, so heißt f Isomorphismus zwischen V und W .
 Dann ist $f^{-1}: f(V) \subset W \rightarrow V$ wiederum eine injektive Abbildung.
5. Sei $f: V \rightarrow W$ eine injektive in. Abbildung mit der Inversen f^{-1} . Dann

Wenn $f(V)$ endlich dimensional. ($f: V \rightarrow W$)

Ist $\{v^1, \dots, v^k\}$ Basis von $\text{kern } f$ sowie $\{w^1, \dots, w^r\}$ = Basis von W
 gegeben und sind $v^1, \dots, v^r \in V$ mit:

$$f(v^i) = w^i \quad i = 1, \dots, r$$

dann gilt: 1. $k = n - r$
 2. $B = \{v^1, \dots, v^k, v^1, \dots, v^k\} = \text{Basis von } V$

3. $\dim V = \dim \text{kern } f + \dim f(V) \Rightarrow \dim f(V) \leq \dim V$
4. f ist injektiv genau dann, wenn $\dim f(V) = \dim V$
 oder anders gesagt wenn $\dim \text{kern } f = 0$ d.h. $\text{kern } f \{0\}$
5. Ist $f: V \rightarrow W$ bijektiv, so ist W auch endlichdimensional
 und es gilt $\dim V = \dim W$

Daraus ergibt sich für Matrizen:

1. $\text{kern } f = \text{Lösungsmenge des LGS } Ax = 0$
2. Abbildung injektiv nur dann, wenn LGS nur die triviale Lösung $\{0\}$ hat.
3. $f(V) = \text{Spaltenraum von } A$
4. Abbildung genau dann injektiv wenn $\dim f(V) = n$
 => also kann die Abbildung, die Matrix, nur injektiv sein wenn $m \geq n$ ist.
5. Vereinigt man eine Basis des Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$
 (d.h. der Kern von f) mit je einer speziellen Lösung
 der inhomogenen LGS $Ax = w^i$ möglich einer Basis
 $\{w^1, \dots, w^r\}$ des Spaltenraums von A (= Bild von f)
 dann erhält man eine Basis $\{v^1, \dots, v^k, v^1, \dots, v^r\}$ von V

! Somit gilt die bekannte Formel: $\dim L = n - \text{rg } A$

Prinzip der linearen Fortsetzung: Hat V eine endliche Basis $\{v^1, \dots, v^n\}$
 und ist $f: V \rightarrow W$ linear, so ist die Abbildung f durch die Bilder der Basiselemente $f(v^i)$ $i=1, \dots, n$
 bereits vollständig bestimmt. → siehe auch Satz 10.1 von lin.
 abhängig abhängig

Darüber hinaus gilt: Seien V und W Vektorräume und zumindest V endlichdimensional. Ist $\{v^1, \dots, v^n\}$ eine Basis von V und $\{w^1, \dots, w^m\} \subset W$, dann gibt es genau eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit:

$$f(v^i) = w^i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

Lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Abbildungen:

Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ eine Basis von V und $\{w^1, \dots, w^m\}$ eine Basis von W .
 ↳ Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Die Bilder der Basisvektoren sind nun gegeben als:

$$f(v^j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w^i, \quad j = 1, \dots, n$$

! Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ist durch die Bilder der Basisvektoren in V die lineare Abbildung f schon vollständig bestimmt.

↳ Mit anderen Worten ist also die Abbildung f durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} f(v^1) & f(v^2) & \dots & f(v^n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{W}^m$$

bereits vollständig bestimmt. ↳ die j -te Spalte von A ist also der Komponentenvektor / Koeffizientenvektor von $f(v^j)$ bezüglich der gegebenen Basis W .

! Sei nun $v \in V$ beliebig und habe die Komponenten x_j bezüglich der Basisvektoren v^j für j , also:

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v^j$$

Dann folgt, da f linear:

$$f(v) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} w^i \right) = \sum_{i=1}^m y_i w^i$$

$$\text{wobei } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, m$$

! **Fazit:** Bei gegebenen Basen in V und W ist jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine Matrix A zugeordnet, deren jede Spalte der Komponentenvektor von $f(v^j)$ ist und die eine lineare Abbildung vom Raum \mathbb{R}^n in den Raum \mathbb{R}^m vermittelt.

sehr wichtig

! Wichtig: Die Matrix A hängt von den vorgegebenen Basen in V und W ab.

Aus was oben zu den Bezeichnungen hin Abbildung \Leftrightarrow Matrix gesagt wurde ist nun klar, dass:

1. Isomorphismus, d.h. Abbildung bijektiv, wenn

$$\operatorname{rg} A = m = n$$

2. Für zwei Abbildungen $f: V \rightarrow W$ u. $\varphi: V \rightarrow W$ gilt:

$$2.1 \text{ für } \lambda f = \lambda A_f$$

$$2.2 \quad f + \varphi = A_f + A_\varphi$$

3. $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim X = r$; $f: V \rightarrow W$ u. $\varphi: W \rightarrow X$ mit $A_f (n \times m)$ und $A_\varphi (r \times m)$

dann gehört zu $\varphi \circ f$ $A_\varphi \cdot A_f$.

\hookrightarrow Die Definition des Matrizenprodukts, wie wir sie vorgenommen haben, ist also gerechtfertigt durch die hintereinanderausführung von linearen Abbildungen.

$$4 \quad \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = \dim f(V)$$

Zusammenfassend gilt also folgendes: Seien V und W = Vektorräume mit $\dim V = n$ u. $\dim W = m$ und $f: V \rightarrow W$ lin. Abbildung und A Matrix die die lin. Abbildung beschreibt, dann

Sind folgende Bedingungen gleichwertig:

$$f \text{ injektiv} = \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker f = 0 = \operatorname{rg} f = n = \operatorname{rg} A = n$$

Person sind folgende Bedingungen gleichwertig

$$f \text{ surjektiv} = (\text{d.h. } W = f(V)) \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = m = (\operatorname{rg} f = \dim f(V)) \\ = \operatorname{rg} A = m$$

Schliesslich sind folgenden Bedingungen gleichwertig:

$$f \text{ ist bijektiv} = \dim V = \dim W \wedge f \text{ ist injektiv} \\ \dim V = \dim W \wedge f \text{ ist surjektiv.}$$

\hookrightarrow d.h. es gilt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$$

$$f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$$

$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m = n.$$

Wichtig: Es gilt für eine beliebige lin. Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie Isomorphismen $\varrho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$rg(\varrho \circ \varphi) = rg \varphi \quad \text{und} \quad rg(\varphi \circ \psi) = rg \varphi$$

Koordinatentransformation:

Definition Koordinatentransformation: Sei V Vektorraum mit $\dim V = n$ und es seien $B = \{\underline{p}^1, \dots, \underline{p}^n\}$ & $C = (\underline{q}^1, \dots, \underline{q}^n)$ Basen von V .

↳ Die lin. Abb. $\varphi: V \rightarrow V$ die durch $\boxed{\varphi(\underline{p}^i) = \underline{q}^i}$ gegeben ist, heißt Koordinatentransformation.

↳ Die Matrix T die diese Abbildung beschreibt heißt Transformationsmatrix bezüglich der Basen B .

Es muss also gelten: $\underline{Q} = \underline{P} \cdot T$

Und somit gilt $\underline{P} = \underline{Q} \cdot T^{-1}$

! Daraus folgt unmittelbar, dass die Matrix S , d.h. die Transformationsmatrix bezüglich der Basis C die Inverse der Matrix T sein muss, d.h.

$$S = T^{-1}$$

Sei nun $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und seien \underline{x} und \underline{y} die Komponentenvektoren von \underline{v} bezüglich B bzw. C , d.h.,

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{p}^i = \sum_{i=1}^n y_i \underline{q}^i$$

Somit gilt die Matrixdarstellung:

$$\underline{v} = \underline{Q} \cdot S \underline{x}$$

$$\underline{v} = \underline{P} \cdot \underline{x} = \underline{Q} \cdot \underline{y}$$

$$S = \underline{Q}^{-1} \underline{P} = T^{-1}$$

oder
unmittelbar
folgt:

$$\boxed{\underline{y} = \underline{Q}^{-1} \underline{P} \underline{x} = T^{-1} \underline{x}}$$

äquivalent zu $S \underline{x}$

$$\begin{aligned} & Q \cdot S \underline{x} \\ &= \underline{P} \underline{x} \\ &= \underline{Q} T^{-1} \underline{x} \end{aligned}$$

also man transformiert
die Koeffizienten
für B in
Koeffizienten für
 C

Skalarprodukt und Norm:

Skalarprodukt ist eine Verknüpfung, die zwei Vektoren eines Vektorraums auf solche Weise eine reelle Zahl zuordnet, dass man einen Winkel zwischen diesen Vektoren betrachten kann.

Definition: Ist in einem Vektorraum V zu je zwei Vektoren $v, w \in V$ eindeutig eine reelle Zahl $\langle v, w \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

- für Verstand
betrachtet
einspieler
 $v_1 w_1 + v_2 w_2$
1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
 2. $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$
 3. $\langle v+v, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle$ für beliebige $v \in V$
 4. $\langle v, v \rangle > 0$ falls $v \neq 0$

zugeordnet, so heißt $\langle v, w \rangle$ Skalarprodukt der Vektoren v u. w .

Orthogonalität: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann heißen zwei Vektoren $v \neq 0$ u. $w \neq 0$ aus V orthogonal zueinander, falls $\langle v, w \rangle = 0$ gilt.
Wir schreiben dann $v \perp w$.

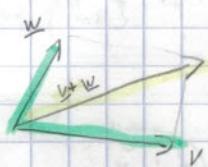
Definition Norm: Ist V ein beliebiger Vektorraum, dann heißt eine auf V definierte reellwertige Funktion $v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ eine Norm auf V und die Zahl $\|v\|$ Norm von v , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\|v\| > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ (Definitheit)

2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \wedge v \in V$ (Homogenität)

3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

↳ da



Sei V ein beliebiger Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann heißt für $v \in V$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm von v .

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: Sei V ein beliebiger Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und dadurch induzierten Norm $\|\cdot\|$. Dann gilt für beliebige $v, w \in V$ die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Zu den wichtigsten Normen zählen:

$$\text{euklidische Norm: } \|\underline{x}\|_2 := \sqrt{\underline{x}^T \cdot \underline{x}}$$

$$\text{Maximumnorm: } \|\underline{x}\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$$\text{Summennorm: } \|\underline{x}\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$$

! Sei V ein beliebiger Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$. Dann gilt für $\underline{v}, \underline{w} \in V$ in der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung die Gleichheit, d.h.

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$$

genau dann, wenn $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ linear abhängig sind.

! Die Gleichheit in der Dreiecksungleichung:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\| = \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$$

gilt hingegen genau wenn $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ positiv linear abhängig sind, d.h. wenn die zwei Vektoren in der gleichen Richtung laufen.

↳ d.h. es muss also ein $\lambda \geq 0$ existieren, so dass $\underline{v} = \lambda \underline{w}$ oder $\underline{w} = \lambda \underline{v}$

Orthonormalsystem und Orthonormalbasis:

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$. Ist $I = \{1, \dots, n\}$, dann heißt die Menge B der Form:

$$B = \{\underline{v}^i \mid i \in I\} \subset V \text{ mit } \|\underline{v}^i\| = 1 \quad \forall i \in I \text{ und} \\ \langle \underline{v}^i, \underline{v}^j \rangle = 0 \quad \forall i, j \in I: i \neq j$$

ein Orthonormalsystem (ONS) in V . Ist B überdies eine Basis von V , so heißt B Orthonormalbasis von V .

Es gilt nun: Sei B eine Orthonormalbasis so gilt für ein beliebiges $\underline{v} \in V$.

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{v}^j$$

$$\Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{v}^i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \underline{v}^j, \underline{v}^i \right\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle \underline{v}^j, \underline{v}^i \rangle = x_i \|\underline{v}^i\|^2$$

somit gilt da $\|\underline{v}^i\| = 1$

$$x_i = \langle \underline{v}, \underline{v}^i \rangle$$

da aus ONS folgt $\langle \underline{v}^i, \underline{v}^i \rangle = 0$

Lin. Approximationsprobleme:

Das Approximationsproblem kann wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\min_{\underline{w} \in W} \|\underline{v} - \underline{w}\|$$

Sei nun V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$.

Seien $\underline{v} \in V$ sowie $B = \{\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^n\}$ ein ONS in V und $W = \text{lin } B$. Dann hat das lineare Approximationsproblem die eindeutige Lösung $\underline{w}^* = w(\underline{v})$ mit:

$$w(\underline{v}) = \sum_{j=1}^n \langle \underline{v}, \underline{w}^j \rangle \underline{w}^j$$

(Koordinaten von \underline{w}^j) \rightarrow Punkt der am nächsten ist.

Gram-Schmidt'scher Orthonormierung - geometrische Idee:

↳ Somit wissen wir nun wie man ein ONS konstruiert.

gegeben $A = \{\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^n\} \subset V$ lin. unabhängig.

Schritt 1: Normiere $\underline{w}^1 \rightarrow$ es ergibt sich $\underline{v}^1 = \frac{1}{\|\underline{w}^1\|} \cdot \underline{w}^1$

Schritt 2: Projiziere \underline{w}^2 auf \underline{v}^1 bilden das Vektor $\underline{w}^2 - w(\underline{w}^2)$
(für Projektion gilt Formel oben $w(\underline{v})$)

Schritt 3: Tue dies bis alle Vektoren von A in eine ONS überführt werden.

9. Mache die Probe, dass die Vektoren orthogonal aufeinander stehen.



Beachte: In jedem endlich-dimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt existiert eine Orthonormalbasis, man kann sie z.B. mit Hilfe des Orthonormalverfahrens von Gram und Schmidt (siehe oben) aus einer gegebenen Basis konstruieren.

Orthogonales Komplement

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und W ein Unterraum von V .

↪ Dann heißt:

$$W^\perp = \{ \underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \text{ für alle } \underline{w} \in W \}$$

das orthogonale Komplement von W .

! Die Menge W^\perp ist wieder ein Unterraum von V . Jeder Vektor $\underline{v} \in V$ lässt sich somit darstellen als:

$$\underline{v} = \underline{w}(\underline{v}) + (\underline{v} - \underline{w}(\underline{v}))$$

mit $\underline{w}(\underline{v}) \in W$
 und $(\underline{v} - \underline{w}(\underline{v})) \in W^\perp$

Vektor aus
 W^\perp , d.h.
 Vektor orthogonal
 zu \underline{v}

Vektor aus
 W
 orthogonal
 zu $\underline{w} \in W$

Eigenwerte und Eigenvektor Definition:

Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n .

↪ Gilt dann für eine reelle Zahl λ und einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{x} \neq \underline{0}$ die Gleichung

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

so heißt \underline{x} = Eigenvektor zum Eigenwert λ

λ = Eigenwert.

! Zu jedem Eigenwert existiert eine Menge von Eigenvektoren

$$A \cdot \alpha \underline{x} = \lambda \cdot \alpha \underline{x} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

⇒ d.h. $\alpha \underline{x}$ ist auch Eigenvektor von λ wenn \underline{x} Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

⇒ Die Menge von Eigenvektoren zum Eigenwert λ wird als Eigenraum definiert.

Eigenraum: Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in M(n,n)$ gegeben und

$$\text{Eig}(A; \lambda) := \{ \underline{x} \mid A\underline{x} = \lambda \underline{x} \}$$

\Rightarrow Offenbar ist stets $\underline{0} \in \text{Eig}(A; \lambda)$ und $\text{Eig}(A; \lambda)$ ist ein Unterraum von \mathbb{R}^n .

! Nach Definition ist nun λ Eigenwert von A genau dann, wenn $\dim \text{Eig}(A; \lambda) \geq 1$.

\hookrightarrow Da wenn $\dim \text{Eig}(A; \lambda) = 0$, dann ist nur $\underline{0}$ zugelassen was nach Voraussetzung Eigenvektor muss unterschiedlich von $\underline{0}$ sein zu keinem Eigenwert führt.

$\Rightarrow \text{Eig}(A; \lambda)$ heißt nun [Eigenraum] bezüglich λ .
 \hookrightarrow da durch Umformung gilt:

$$\text{Eig}(A; \lambda) = \{ \underline{x} \mid (A - \lambda I) \underline{x} = \underline{0} \}$$

gilt nun $\dim \text{Eig}(A; \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I)$

Charakteristisches Polynom:

Sei $A \in M(n,n)$. Die Zahl

$$P(t) = \det(A - tI)$$

ist ein Polynom n -ten Grades und heißt charakteristisches Polynom.

! Das charakteristische Polynom einer Diagonalmatrix Λ mit Einträgen λ_i auf der Hauptdiagonalen hat somit nach Determinantengesetz die Form:

$$\det(\Lambda - tI) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$$

\nwarrow Produkt.

\hookrightarrow Als elementare Schlussfolgerung von:

siehe Determinanten gesetz

$$A^T - tI = (A - tI)^T$$

\Rightarrow

$$\det(A - tI)^T = \det(A - tI)$$



Somit haben A^T und A das gleiche charakteristische Polynom

! Wichtig: Es gilt nun:

Die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann Eigenwert der Matrix $A \in M(n,n)$, wenn es gilt:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \text{da hier } \text{Im.} \text{Erg}(A; \lambda) \geq 1$$

→ d.h., wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

da

$$\text{rg}(A - \lambda I) <$$

Beachte: Die Determinante ist gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariant, d.h.

→ sind $A, B \in M(n,n)$ ähnlich, so gilt $\det A = \det B$.

! Das charakteristische Polynom und damit auch die Eigenwerte einer Matrix sind gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariant.

Diagonalisierbar:

Eine Matrix $A \in M(n,n)$ heißt diagonalisierbar, wenn eine zu A ähnliche Diagonalmatrix $\Lambda \in M(n,n)$ existiert.



A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und eine Basis des \mathbb{R}^n aus zugehörigen Eigenvektoren x_1, \dots, x_n gibt, so dass:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1} A T \quad \text{mit } T = [x_1, \dots, x_n]$$

gilt.

Symmetrische Matrizen = stets diagonalisierbar !!

$$A \in M(n,n)$$

Beachte: Für diagonalisierbare Matrizen \checkmark folgt sofort, dass

$$\text{det } A = \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

Bemerkung
dies
für
Überprüfung
der korrekte
Berechnung
der Eigenwerte.

Außerdem muss gelten:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n = \text{spur } A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

! Besonders einfach lässt sich A^k berechnen, wenn A diagonalisierbar ist.

Es gilt nämlich:

$$A = T^{-1} A T \quad A = T \Lambda T^{-1}$$

$$\text{somit gilt } A^2 - AA = T \Lambda T^{-1} T \Lambda T^{-1} = T \Lambda^2 T^{-1}$$

$$\text{und für } A^k = T \Lambda^k T^{-1}$$

! Die Eigenwerte von A^k sind somit $(\lambda_j)^k$ für j , die Eigenräume sind hingegen die gleichen wie die von A .

Sei A eine symmetrische Matrix (d.h. $A^T = A$) n -reihige Matrix. Sind λ und μ zwei voneinander verschiedene Eigenwerte von A mit den zugehörigen Eigenvektoren x und y , so sind x und y orthogonal.

! Das charakteristische Polynom einer n -reihigen symmetrischen Matrix A hat, mit ihrer Vielfachheit gezählt (d.h. es können auch gleiche Eigenwerte gleich sein), genau n reelle Nullstellen und es gibt zu diesen Eigenwerten ein Orthonomalsystem von n zugehörigen Eigenvektoren, die dann eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden.

\hookrightarrow A ist folglich diagonalisierbar, d.h., ähnlich zur Diagonalmatrix aus den Eigenwerten.

\hookrightarrow die Ähnlichkeitstransformation erfolgt dann mit der Orthogonalmatrix T (mit also $T^T = T^{-1}$)

Definitheit von Matrizen:

Eine $n \times n$ -reihige symmetrische Matrix A heisst,

1. positiv definit wenn $\underline{v}^T A \underline{v} > 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ gilt
2. positiv semidefinit wenn $\underline{v}^T A \underline{v} \geq 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt
3. negativ definit wenn $\underline{v}^T A \underline{v} < 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ gilt
4. negativ semidefinit wenn $\underline{v}^T A \underline{v} \leq 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt
5. indefinit wenn es keine dieser Eigenschaften gilt.

! Offenbar ist A negativ definit genau dann, wenn $-A$ positiv definit ist.

↳ Analog ist A negativ semidefinit genau dann, wenn $-A$ positiv semidefinit ist.

Seien $A =$ symmetrische Matrix und $B =$ reguläre Matrix.
Bei der von Ordnung n .

↳ dann gilt,

1. A ist pos. definit genau dann, wenn $B^T A B$ positiv definit ist.
2. A ist pos. semidefinit genau dann, wenn $B^T A B$ positiv semidefinit ist.

Somit gilt wegen
 $T =$ Transformationsmatrix
von A

↳ sie ist Orthogonal

$$\Lambda = T^T A T \Rightarrow A = T \Lambda T^T$$

$$y = T^T x$$

$$\Rightarrow 0 < x^T A x = x^T T \Lambda T^T x = y^T \Lambda y$$

$$0 < \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2$$

Analog gilt für $>, \geq, \leq$.

Somit gilt: Eine n -reihige symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist:

1. positiv definit genau dann, wenn $\lambda_j > 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$
2. positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$
3. negativ definit genau dann, wenn $\lambda_j < 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$
4. negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

! Es folgt somit Matrizen die positiv definit oder negativ definit sind haben volchen Rang \Rightarrow regulär.

↳ Somit folgt, dass eine positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit) symmetrische Matrix genau dann positiv definit (negativ definit) ist, wenn sie regulär ist.

\Rightarrow Eine symmetrische Matrix ist genau dann indefinit wenn sie zwei von Null verschiedene Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen besitzt.

Ein analoges Vorgehen um auf Definitheit von n -reihigen symmetrischen Matrizen zu schliessen ist:

A positiv definit genau dann, wenn alle Hauptabschnitts determinanten $\det A^{[k]}$ von A positiv sind.

A ist negativ definit genau dann, wenn die Hauptabschnitts determinanten $\det A^{[k]}$ von A positiv im Falle gerader Ordnung von $A^{[k]}$ aber negativ im Falle von ungerader Ordnung von $A^{[k]}$ sind.

Analysis

Beschränktheit: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt), wenn ein $\bar{k} \in \mathbb{R}$ (bzw. ein $k \in \mathbb{R}$) existiert, so dass $x \leq \bar{k}$ (bzw. $x \geq k$) für alle $x \in M$ gilt.

Eine nach oben und nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt.

! Jede nach oben beschränkte Menge besitzt eine kleinste obere Schranke = Supremum von M .

Jede nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke = Infimum von M .

! Falls nun $\sup M \in M \rightarrow$ dann spricht man von Maximum von M .

! Falls $\inf M \in M \rightarrow$ dann spricht man von Minimum von M .

Konvergenz reeller Folgen:

Eine Folge $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ hat den Grenzwert (auch Limitus) $a^* \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ $\forall k \geq k_0 \quad |a_k - a^*| < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$.

↳ Man schreibt $a^* = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ und sagt kurz $\{a_k\}$ ist konvergent.

! Eine Folge $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ heißt monoton fallend falls $a_{k+1} \leq a_k$, monoton wachsend falls $a_{k+1} \geq a_k$ (im Fall von streng monoton $<$, $>$).

! ↳ Jede monoton, beschränkte Folge ist auch konvergent.

Satz von Bolzano-Weierstrass:

Jede beschränkte Folge $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt, d.h. es existiert eine unendliche Teilfolge von $\{a_k\}$ die konvergiert.

Normäquivalenz:

Sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ irgend zwei unterschiedliche Normen im \mathbb{R}^n so existieren Zahlen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$

Definition:

Sei nun $\|\cdot\|$ irgend eine Norm im \mathbb{R}^n und $z \in \mathbb{R}^n$.

Die Menge $B^o(z, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| < r\}$ ($r > 0$) heißt offene Kugel um $z \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r oder offene r -Umgebung.

Die Menge $B(z, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq r\}$ heißt abgeschlossene Kugel um $z \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r .

! Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von z falls ein $\epsilon > 0 \exists$, so dass $B^o(z, \epsilon) \subset U$

Ein Punkt $z \in M$ einer Teilmenge M von \mathbb{R}^n heißt innerer Punkt von M , falls eine Umgebung U von z existiert, die in M enthalten ist.

↪ Die Menge aller innerer Punkte = $\text{int } M$.

! Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls alle Punkte von M innerer Punkt von M sind, also falls $M = \text{int } M$ gilt.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls die Komplementmenge $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es ein $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $r > 0$ gibt, so dass $M \subset B(x, r)$ gilt.

! U und \cap endlich wieder offener Menge ergibt = offene Menge
 U und \cap endlich vieler abgeschlossener Menge ergibt = abgeschlossene Menge

U ∞ -vieler offener Menge = offene Menge

\cap ∞ -vieler abgeschlossener Menge = abgeschlossene Menge

\cap ∞ -vieler offener Menge muss nicht offen sein
 U ∞ -vieler abgeschlossener Menge muss nicht immer abgeschlossen sein.

↪ z.B. U der einelementige Menge $\left\{\frac{1}{k}\right\}, k \in \mathbb{N}$.

↪ hier gilt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \dots + \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$

Konvergenz!

Man sagt die Folge $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen den Punkt $a^* \in \mathbb{R}^n$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ die Kugel $B^*(a^*, \epsilon)$ fast alle Elemente der Folge $\{x_k\}$ enthält, d.h. falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein m existiert, so dass:

$$\|a_k - a^*\| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq m$$

Dabei heißt a^* Limes oder Grenzelement der Folge $\{a_k\}$ und man schreibt:

$$a^* = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

! Mit anderen Worten: Die Folge $\{a_k\}$ konvergiert genau dann gegen a , wenn $\|a_k - a^*\| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$

sehr wichtig

! Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ ihr Limes auch zu M gehört.

Stetigkeit von Funktionen:

Eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst stetig im Punkt $z \in D$ falls: $\lim_{x \rightarrow z} f(x) = f(z)$
 d.h., falls zu jeder Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(z)$$

! f heisst stetig auf D falls f in jedem Punkt $z \in D$ stetig ist.

! Ist f eine Vektorfunktion (also $m > 1$) bestehend aus den Komponenten f_1, \dots, f_m mit $f_j: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für alle j von 1 bis m , dann bedeutet Stetigkeit von f , dass jede Komponente stetig sein muss.

Verknüpfungen:

Verknüpfungen von stetigen Funktionen sind stetig.

Bei der Verknüpfung f/g muss die Voraussetzung $(g(x))^2 > 0$ erfüllt sein.

! Seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a = \text{Konstante} \subset \mathbb{R}$, dann gilt für die Mengen

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\}$ - offene Menge

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\}$ \cap $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\}$ = abgeschlossene Menge

Definition:

Kompletheit: ✓ Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann heisst M kompaakt, wenn aus jeder Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ausgewählt werden kann, deren Limes x^* ebenfalls zu M gehört.

⇒ Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist M genau dann kompaakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

! Sei nun M kompaakt, dann muss auch $f(M)$ kompaakt sein.

Extremwertsatz von Weierstrass:

Seien M eine nichtleere kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $x^* \in M$ und ein $x^* \in M$, so dass $f(x^*) = \max \{f(x) \mid x \in M\}$ und $f(x^*) = \min \{f(x) \mid x \in M\}$, d.h. die Funktion nimmt auf M sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.

Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Partiell differenzierbar:

Die Funktion $x \mapsto f(x)$ heißt im Punkt x^0 partiell differenzierbar nach x_i , falls der Limes existiert. Dabei ist e^i der i -te Einheitsvektor in \mathbb{R}^n .

$$f_{x_i}(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + t \cdot e^i) - f(x^0)}{t}$$

Gradient:

Als Gradient von f im Punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$ bezeichnen wir den Vektor:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x^0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

! Ist f partiell differenzierbar nach x_i auf D (d.h. in allen Punkten $x \in D$), so heißt die Funktion

$x \in D \rightarrow f_{x_i}(x)$ die partielle Ableitungsfunktion von f nach x_i .

Hesse-Matrix:

Wenn in x^0 zweie partielle Ableitungen von f nach x_i und x_j für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existieren, fasst man sie in der Hesse-Matrix:

$$\nabla^2 f(x^0) = (f_{x_i x_j}(x^0))_{i,j=1,n} \text{ zusammen.}$$

Satz von Schwarz:

Sei f auf einer offenen Umgebung U von $x^0 \in \mathbb{R}^n$ nach x_i und x_j partiell differenzierbar und existiere $f_{x_i x_j}(x)$ für alle $x \in U$. Ist nun die Funktion $f_{x_i x_j}(\cdot)$ stetig auf U , dann existiert auch $f_{x_j x_i}(x)$ und es gilt:

$$f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad \forall x \in U$$

Differenzierbarkeit:

Seien $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, D eine offene Menge und $x^0 \in D$.

f heißt im Punkt x^0 differenzierbar (genauer total differenzierbar) falls:

$$f(x^0 + u) = f(x^0) + \underbrace{\nabla f(x^0)^T u}_{\text{Differential}} + \underbrace{o(u)}_{\text{Fehler}}$$

für $x^0 + u \in D$ gilt. (diese ist die Linearisierungsformel von Weierstraß), wobei es gelten muss:

$$o(u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{o(u)}{\|u\|} \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad \|u\| \rightarrow 0$$