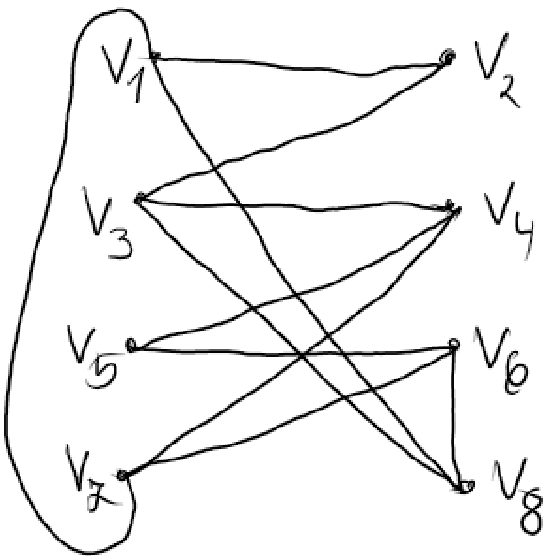
9. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$




Jak widać ten graf nie jest dwudzielny. Usunięcie krawędzi $(v_1, v_7)$ oraz $(v_6, v_8)$ da nam graf dwudzielny i będzie to podgraf dwudzielny G o maksymalnej liczbie krawędzi

Krawędzie te tworzą cykle o nieparzystej długości, podgraf bez tych krawędzi ich nie ma.

Aby w G był cykl Hamiltona trzeba dodać krawędź $(v_7, v_8)$

Aby istniał cykl Eulera należy dodać krawędzie $(v_1, v_4)$, $(v_3, v_6)$, $(v_7, v_8)$

10.

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$K = \{1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 5, 1, 6, 1, 7, 4\}$

Wszystkie liczby parzyste są połączone więc potrzebujemy przynajmniej 7 kolorów. Mamy 5 liczby pierwsze + jedynka (dwójkę liczę w parzystych), więc te wierzchołki możemy pomalować jednym kolorem. Zostają nam do rozpatrzenia liczby 9, 15

9 jest połączona z 3, 6, 12, 15

15 jest połączona z 3, 6, 9, 12

Kolory 3, 6, 12 $\rightarrow$ 1, 3, 6

Więc możemy pokolorować 9 na 2 i 15 na 4

$$\chi(H) = 7$$

11. $E = \{(v_i, v_j) : i-j \bmod 3 \neq 0\}$

W takim razie możemy wierzchołki podzielić na 3 podzbiory względem modulo

$V = A_1 \cup A_2 \cup A_0$

$A_1 = \{v_i : i \bmod 3 = 1\}$

$A_2 = \{v_i : i \bmod 3 = 2\}$

$A_0 = \{v_i : i \bmod 3 = 0\}$

Widzimy stąd że nie istnieje krawędź między wierzchołkami z tego samego podzbioru $A_i$ $(i = \{0,1,2\})$

Tak więc $\chi(G) = 3$

Można zauważyć że z dowolnego wierzchołka $v$ z $A_i$ istnieje krawędź do każdego wierzchołka z dwóch innych podzbiorów $A$.

Aby istniał cykl eulera musi zachodzić warunek $\forall_{v \in V} \deg(v) \bmod 2 = 0$

W grafie $G_n$ ten warunek będzie zachodził tylko dla $n \bmod 3 = 0$

Nie będzie on nigdy dwudzielny dla $n > 2$