L5 Z1

A_n - liczba podzbiorów zbioru n-elementowego w których nie występują dwie kolejne liczby

$A_0 = 1$

$A_1 = 2$

$\cancel{A_3}$ $A_2 = 3$

$A_3 = 5$

$A_4 = 8$

Oznaczmy kolejne liczby naturalne jako $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Rozpatrzmy dwa przypadki

1° x_n jest w podzbiorze

$$\underbrace{\underset{x_1}{\_}\ \underset{x_2}{\_}\ \underset{x_3}{\_}\ \underset{x_4}{\_}\ \dots\dots}_{A_{n-2}}\ \underset{x_{n-1}}{\times}\ \underset{x_n}{\checkmark}$$

2° x_n nie jest w podzbiorze

$$\underbrace{\underset{x_1}{\_}\ \underset{x_2}{\_}\ \underset{x_3}{\_}\ \underset{x_4}{\_}\ \dots\dots\ \underset{x_{n-1}}{\_}}_{A_{n-1}}\ \underset{x_n}{\times}$$

Czyli

$$A_n = A_{n-1} + A_{n+2}$$

Ciąg Fibonacciego

L5 Z4

$A=\{1,2,3,\dots,n\}$

$|A|=n$

Permutacji zbioru A jest $n!$

d_n - liczba nieporządków utworzonych z n liczb naturalnych

A_i - Permutacja (zbiór) w którym i-ta liczba jest na swoim miejscu

Permutacji A_i jest $(n-1)!$

$$d_n = n! - \left|\bigcup_i^n A_i\right|$$

$$\left|\bigcup_i^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j}^n |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$\left|\bigcup_i^n A_i\right| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\cdot 0!$$

$$\left|\bigcup_i^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)! = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\frac{n!}{i!} =$$

$$= n!\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$

$$d_n = n! - n!\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$

L5 Z6

Podwójna wieża Hanoi - 2n krążków o n rozmiarach

Jako że nie odróżniamy krążków o takich samych rozmiarach to możemy je traktować jak parę. Oznaczmy przez D(n) liczbę kroków potrzebnych do rozwiązania wieży dla 2n krążków

$$\begin{cases} D(1) = 2 & , \text{dla } n=1 \\ D(n) = D(n-1) + 2 + D(n-1) & , \text{dla } n>1 \end{cases}$$

Można zauważyć że podobna rekurencja zachodzi dla zwykłej wieży Hanoi. Tylko że zamiast 2 mamy 1 (krok).

Czyli

$$D(n) = 2T(n)$$

Wiemy (np. z WDI), że $T(n) = 2^n - 1$

$$D(n) = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$$

Wiemy (np. z WDI), że $T(n) = 2^n - 1$

$$D(n) = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$$

D-d przez indukcję

1° Podstawa indukcyjna

$n = 1$

$D(1) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ ✓

2° Krok indukcyjny

Zał. $D(n) = 2^{n+1} - 2$

Pokazać że $D(n+1) = 2^{n+2} - 2$

$$D(n+1) = D(n) + 2 + D(n) = 2^{n+1} - 2 + 2 + 2^{n+1} - 2 = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$$

✓

L5 Z10

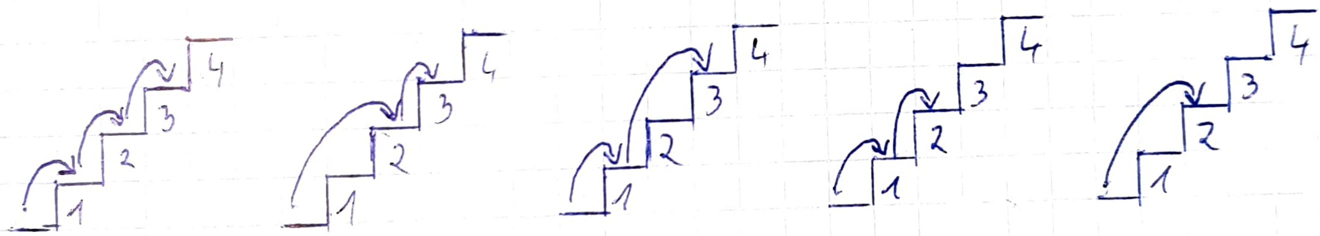
Niech F_n oznacza ilość sposobów wejścia po n stopniach

$F_1 = 1$

$F_2 = 2$

$F_3 = 3 = F_2 + F_1$

Wchodząc po n stopniach robiąc ostatni krok znajdziemy się albo na (n-1) stopniu albo na (n-2) stopniu.



Tak więc sumujemy F_{n-1} i F_{n-2}

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \end{cases}$$

L5 Z11

Ω - zbiór sposobów zaproszenia 3 osób ~~na~~ z 7 na kolejne 7 kolacji

$|\Omega| = \binom{7}{3}^7$

X - zbiór sposobów zaproszenia 3 osób..., ale tak aby przynajmniej jedna nigdy nie była zaproszona

X_i - sposoby zapraszania ..., ale i-ta osoba nigdy nie jest zaproszona

$i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Chcemy $|\Omega| - |\bigcup_i^7 X_i|$

$$|\bigcup_i^7 X_i| = \sum_{i=1}^7 |X_i| - \sum_{i,j}^7 |X_i \cap X_j| + \sum_{i,j,k}^7 |X_i \cap X_j \cap X_k| - \sum_{i,j,k,m}^7 |X_i \cap X_j \cap X_k \cap X_m| =$$

$$= 7 \cdot \binom{6}{3}^7 - \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3}^7 + \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}^7 - \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}^7$$

$$|\Omega| - |\bigcup_i^7 X_i| = \binom{7}{3}^7 - 7 \cdot \binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4} =$$

$= 55\ 588\ 723\ 470$