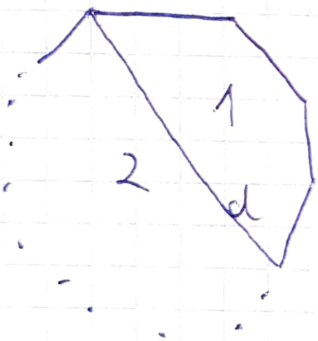
L7 Z1

Dla $n=1$ mamy 3-kąt czyli trójkąt i 0 przekątnych

Czyli nie można go podzielić, mamy 1 sposób

Dla $n=2$ mamy prostokąt / czworokąt i 1 przekątną i możemy podzielić go na dwa sposoby

Dla $(n+2)$-kąta



Przekątna d dzieli nam ten $(n+2)$-kąt na dwie figury które możemy dzielić dalej.
Jeżeli ta przekątna utworzy trójkąt i figurę, ~~nazwijmy ją~~ $(n+1)$-kątną

Czyli

C_{n+2} - sposoby podzielenia $(n+2)$-kąta

$$C_{n+2} = C_3 \cdot C_{n+1} + C_4 \cdot C_n + C_5 \cdot C_{n-1} + \dots + C_{n+1} \cdot C_3$$

Co po przesunięciu o 2 dostajemy liczby Catalana

Czyli

C_{n+2} – sposoby podzielenia $(n+2)$-kąta

$$C_{n+2} = C_3 \cdot C_{n+1} + C_4 \cdot C_n + C_5 \cdot C_{n-1} + \dots + C_{n+1} \cdot C_3$$

Co po presunięciu o 2 dostajemy liczby Catalana

$$\begin{cases} C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot C_{n-i} \\ C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

L7 Z2

Wierzchołek wewnętrzny - wierzchołek który ma synów (w tym przypadku dwoch)

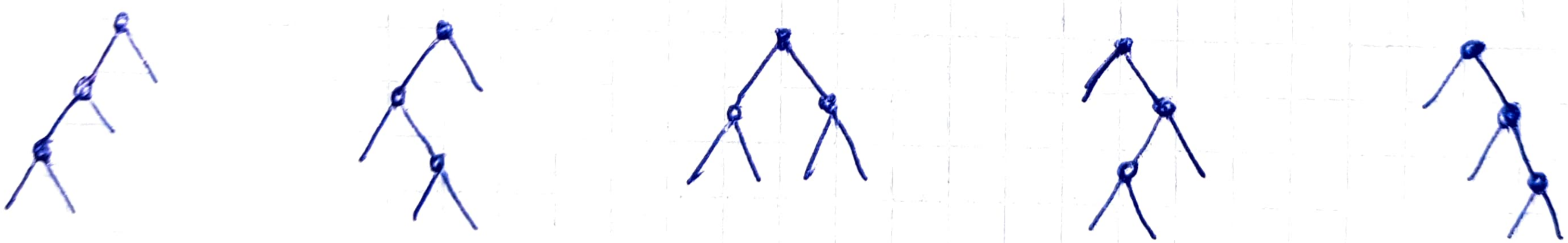
$n=1$

1 drzewo

$n=2$

2 drzewa

$n=3$



5 drzew

L7 Z2

~~Wierz~~

Drewa możemy rozłożyć na lewe i prawe poddrzewo.

~~Za pomocą pr~~ Przykłady pokazują że ilość drew o n wierzchołkach wewnętrznych to suma odpowiednich iloczynów $C_i \cdot C_{n-i}$

C_i - drewo o i wierzchołkach wewnętrznych

Czyli

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0$$

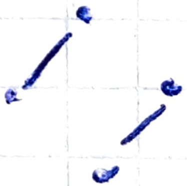
Liczby Catalana określają liczbę tych drew

L7 Z3

n par $n=0$ $U_0=1$

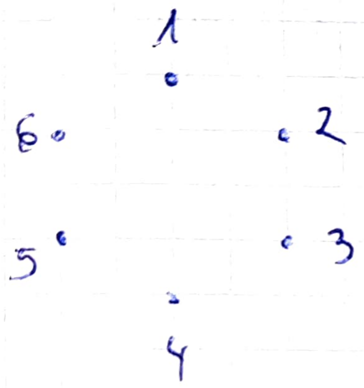
Dla $n=1$ 1 uścisk $U_1=1$

Dla $n=2$ $U_2=2$



Dla $n=3$

Dla $n=3$



Żeby żadna osoba nie została wykluczona to osoba "n" musi uścisnąć dłoń osobie o numerze o przeciwnej parzystości. Możemy też zauważyć że każdy uścisk dłoni "dzieli" stół na dwa inne.

$$U_3 = U_0 \cdot U_2 + U_1 \cdot U_1 + U_2 \cdot U_0 = 2+1+2=5$$

Możemy to teraz uogólnić

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} U_{i-1} \cdot U_{n-i} = C_n$$

C_n - n-ta liczba Catalana

L7 Z5

$(0,0,0,1,3,7,15,31,\dots)$

$(0,1,3,7,15,31,\dots) = \langle 2^n - 1 \rangle \quad n \in \mathbb{N}$

$\langle 2^n \rangle = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \frac{1}{1-2x}$

$\langle -1 \rangle = -1 - x - x^2 - x^3 - \dots = \frac{-1}{1-x}$

$\langle 2^n - 1 \rangle = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$

Biorąc pod uwagę pierwsze 2 zera, przesuwamy o 2:

Odp: $\left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right) \cdot x^2$

L7 Z7

a) $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

b) $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + x^{2i+1}\right)$

c) $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x^i}$

d) $\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^i}\right)$