L9 Z1

Idea: Będziemy "kolorować" wierzchołki na dwa "kolory" i będziemy sprawdzać czy sąsiedzi mają ten sam "kolor".

Algorytm:

Dane: G[][] , |V|

```
int colors[|V|];
  colors.fill(-1)  //-1 wierzchołek "niepokolorowany", kolory: 0,1
List q = new List(); //kolejka FIFO do ~~BFS~~ DFS
q.add(0);

while (q.size != 0) {

    int v = q.get();
    for (int u=0; u<|V|; u++) {

        if (G[v][u]==1 and colors[u]==-1) {
            colors[u] = 1 - colors[v];
            q.add(u);
        }
        else if (G[v][u]==1 and colors[v]==colors[u])
            return false;
    }
}
return true;
```

// Używam "and" zamiast "ampersandów" dla czytelności

Lg Z3

G jest drzewem $\Leftrightarrow$ dla dowolnej pary $u, v \in G$ istnieje tylko jedna ścieżka u-v

$\Rightarrow$ Drzewo jest grafem spójnym więc istnieje $\underbrace{\text{ścieżka}}^{\text{przynajmniej jedna}}$ u-v.

Załóżmy że istnieje inna ścieżka u-v, wtedy te dwie ścieżki tworzyłyby cykl a drzewo jest acykliczne

$\Leftarrow$ Skoro dla każdej $\underbrace{\text{pary}}^{u,v \in G}$ istnieje ścieżka to G jest grafem spójnym.

Skoro dla każdej pary $u, v \in G$ istnieje <u>tylko jedna</u> ścieżka to nie istnieje żaden cykl.

G jest acykliczny i spójny czyli jest drzewem

L9 Z6

Podzielmy wierzchołki na dwa zbiory:

P: zbiór wierzchołków reprezentowanych przez k elementowe ciągi o parzystej ilości jedynek

N: —||— nieparzystej ilości jedynek

Krawędź z u do v istnieje gdy ciąg u różni się od v tylko jednym elementem, czyli jeśli $u \in P$ to ma krawędź tylko z wierzchołkami z N i odwrotnie gdy $u \in N$.

Graf jest więc dwudzielny

Lg Z8

Dowód nie wprost

Załóżmy że w grafie G dwie najdłuższe ścieżki o długości k nie mają wspólnego wierzchołka

$P_1 = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$

$P_2 = \langle u_0, u_1, \ldots, u_k \rangle$

Jako że G jest grafem spójnym to istnieje ścieżka z v_i do u_j dla $i, j \in [1, k]$, Nazwijmy ją P_3

$P_3 = \langle v_i, x_0, x_1, \ldots, x_l, u_j \rangle$, ta ścieżka ma przynajmniej długość 1

Istnieje wtedy ścieżka $v_0 - u_k$ o długości przynajmniej $k+1$ czyli jest dłuższa od P_1 i P_2 co jest sprzeczne z założeniem.

L9 z10

1. Weźmy dowolny wierzchołek, nazwijmy go v_0, $\deg(v_0) = k$
Gdy $k>0$ to istnieje wierzchołek sąsiedni do v_0, nazwijmy go v_1.
Jeśli $k>1$ to v_1 ma sąsiada innego od v_0, np. v_2.
Na tej samej zasadzie mamy v_3.
Uogólniając dochodzimy tym sposobem do wierzchołka v_k z którego istnieje ścieżka do v_0 o długości k.

2. Niech $P = \langle u_0, u_1, \ldots, u_l \rangle$, $l \geq k$, będzie najdłuższą ścieżką w G. Wszyscy sąsiedzi u_0 muszą być w tej ścieżce (inaczej istniałaby dłuższa ścieżka od P). Weźmy sąsiada o największym indeksie j, wiemy że $j \geq k$, czyli istnieje cykl $\langle u_0, \ldots, u_j, u_0 \rangle$ o długości przynajmniej $k+1$