L3 Z1

Zbiór $\{1, 2, \dots, 2n\}$

Wybieramy $n+1$ liczb

Jako że każdą liczbę naturalną > 0 można rozłożyć na czynniki pierwsze to każdą taką liczbę można zapisać w postaci $2^k \cdot m$ gdzie $k \in \mathbb{N}$ a m jest liczbą nieparzystą.

Ustalmy szufladki kolejno $2^k \cdot 1, 2^k \cdot 3, 2^k \cdot 5, \dots, 2^k \cdot (2n-1)$
Liczb nieparzystych w zbiorze $\{1, 2, \dots, 2n\}$ jest n.
Wsadzenie "kulki" do danej szufladki oznacza że istnieje takie k że "kulka" ma taką postać jak szufladka.

$n+1$ kulek wsadzamy do n szufladek czyli przynajmniej dwie liczby będą mieć postać $2^k \cdot q$ gdzie q dla nich będzie to samo czyli jedna z nich będzie podzielna przez drugą

L3 Z5

Takich sum będzie $n+n+2 = 2n+2$ (n wierszy, n kolumn, 2 przekątne)

Maksymalna suma jąką można otrzymać to n, a minimalna $-n$.

Zbiór wszystkich możliwych sum $\{-n, -n+1, -n+2, \dots, 0, 1, \dots, n-1, n\}$

Elementów w tym zbiorze jest $2n+1$

kulki $= 2n+1$

szufladki $= 2n+2$

Czyli przynajmniej dwie sumy będą te same

L3 Z6

$a_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

Wstawmy do okręgu 1

Zostaje nam 9 cyfr $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) = 54$$

Skoro żadna "trójka" nie jest równa to przynajmniej jedna musi być większa niż $\frac{54}{3} = 18$

L3 Z7

$NWD(a,b) = d$

$a = d \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}$

$b = d \cdot m \quad m \in \mathbb{Z}$

$$NWD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = NWD\left(\frac{dk}{d}, \frac{dm}{d}\right) = NWD(k,m)$$

jako że $d = NWD(a,b)$ to d zawiera wszystkie wspólne czynniki pierwsze a i b, a więc:

$NWD(k,m) = 1$

Czyli $\frac{a}{NWD(a,b)}$ i $\frac{b}{NWD(a,b)}$ są względnie pierwsze

L3 Z10

$$(NWD(a,n)=1 \wedge NWD(b,n)=1) \Rightarrow NWD(ab,n)=1$$

skoro $a \perp n$ to istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ t. że:

$$ax + ny = 1$$

to samo dla $b \perp n$ $\exists\, w, z \in \mathbb{Z}$

$$bw + nz = 1$$

$$\cdot \begin{cases} ax = 1 - ny \\ bw = 1 - nz \end{cases}$$

$$ax \cdot bw = 1 - ny - nz + n^2yz$$

$$abxw + ny + nz - n^2yz = 1$$

$$abxw + n(y + z - nyz) = 1$$

$k = x \cdot w$ $\quad$ $m = y + z - nyz$

$k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $m \in \mathbb{Z}$

$$ab \cdot k + n \cdot m = 1$$