Lista 2 Zadanie 9

Dominik Budzki, nr. indeksu 314625

October 19, 2020

Mozna wykazac, ze przy $x_1 = 2$ ciag

$$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2})}$$

jest zbiezny do π. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciagu przy pomocy komputera moze wystapic zjawisko utraty cyfr znaczacych? Jesli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów tego ciagu pozwalajacy uniknac wspomnianego zjawiska. Przeprowadz odpowiednie testy obliczeniowe.

Rozwiazanie:
Dla k = 29 $x_{29} = 0$, gdyz $\frac{x_{28}}{2^{28}} \approx 0$ bo zostaja uciete znaczace cyfry.
Zeby zapobiec temu mozemy przekształcic fragment tej formuly a dokladnie $1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}$

$$1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2} = \frac{(1-\sqrt{1-(x_k/2^k)^2})(1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2})}{1-\sqrt{1+(x_k/2^k)^2}} =$$
$$= \frac{1-1+(x_k/2^k)^2}{1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2}} = \frac{(x_k/2^k)^2}{1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2}} = \frac{x_k^2}{2^{2k}(1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2})}$$

Wstawmy teraz ten fragment w formule:
$$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2\frac{x_k^2}{2^{2k}(1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2})}} = \sqrt{2\frac{x_k^2}{1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2}}}$$

Teraz dziala poprawnie dla duzych k.