1. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.

1. Możemy ustawić wierzchołki optymalnymi kolorami tj: $v_{1_1}, v_{2_1}, v_{3_2}, v_{4_3}, \ldots$

gdzie v_{i_j} - wierzchołek i-ty oznaczony kolorem j

Wtedy algorytm zachłanny łatwo znajdzie optymalne kolorowanie

Algorytm sekwencyjny kolorowania grafu

Niech *Kolory* $= \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$G = (V, E)$
Algorytm sekwencyjny:

1. Ustaw wierzchołki z V w pewien ciąg.
2. Dla każdego wierzchołka v w kolejności dyktowanej przez ciąg wykonaj:
   przypisz wierzchołkowi v najmniejszą liczbę naturalną spośród takich, które nie są przypisane żadnemu sąsiadowi v.

Algorytm sekwencyjny kolorowania grafu

Niech *Kolory* $= \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$G = (V, E)$
Algorytm sekwencyjny:

1. Ustaw wierzchołki z V w pewien ciąg.
2. Dla każdego wierzchołka v w kolejności dyktowanej przez ciąg wykonaj:
   przypisz wierzchołkowi v najmniejszą liczbę naturalną spośród takich, które nie są przypisane żadnemu sąsiadowi v.

Możemy zauważyć że jak ustawimy wierzchołki w taki ciąg jak wyżej, tj. posortowane kolorami rosnąco, to algorytm sekwencyjny zwróci takie same kolorowanie

5. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

5. $\forall_{v \in V} \deg(v) \leq 3$

1. Jeżeli G nie ma krawędzi to można go pokolorować 1 kolorem.

2. (DFS) Sprawdzenie czy G jest dwudzielny. Wtedy można użyć 2 kolorów.

3. Z tw. Brookse'a jeżeli G nie jest kliką ani nieparzystym cyklem to G można pokolorować trzema kolorami

4. Jeżeli wszystko powyżej zawiodło to wtedy z

4. Jeżeli wszystko powyżej zawiodło to wtedy z tw. Brooksa liczba chromatyczna wynosi 4

For any connected undirected graph G with maximum degree Δ, the chromatic number of G is at most Δ, unless G is a complete graph or an odd cycle, in which case the chromatic number is $\Delta + 1$.

zrodlo: Wikipedia

Złożoność:

1. n
2. $n + |E|$ (DFS)
3. $n^2 + n + |E|$ (DFS)
4. 1

$$n^2 + 3n + 2|E|$$

6. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

$G = (A \cup B, E)$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Zbudujmy graf dwudzielny taki że

$(a_i, b_j) \in E \Leftrightarrow i \neq j$

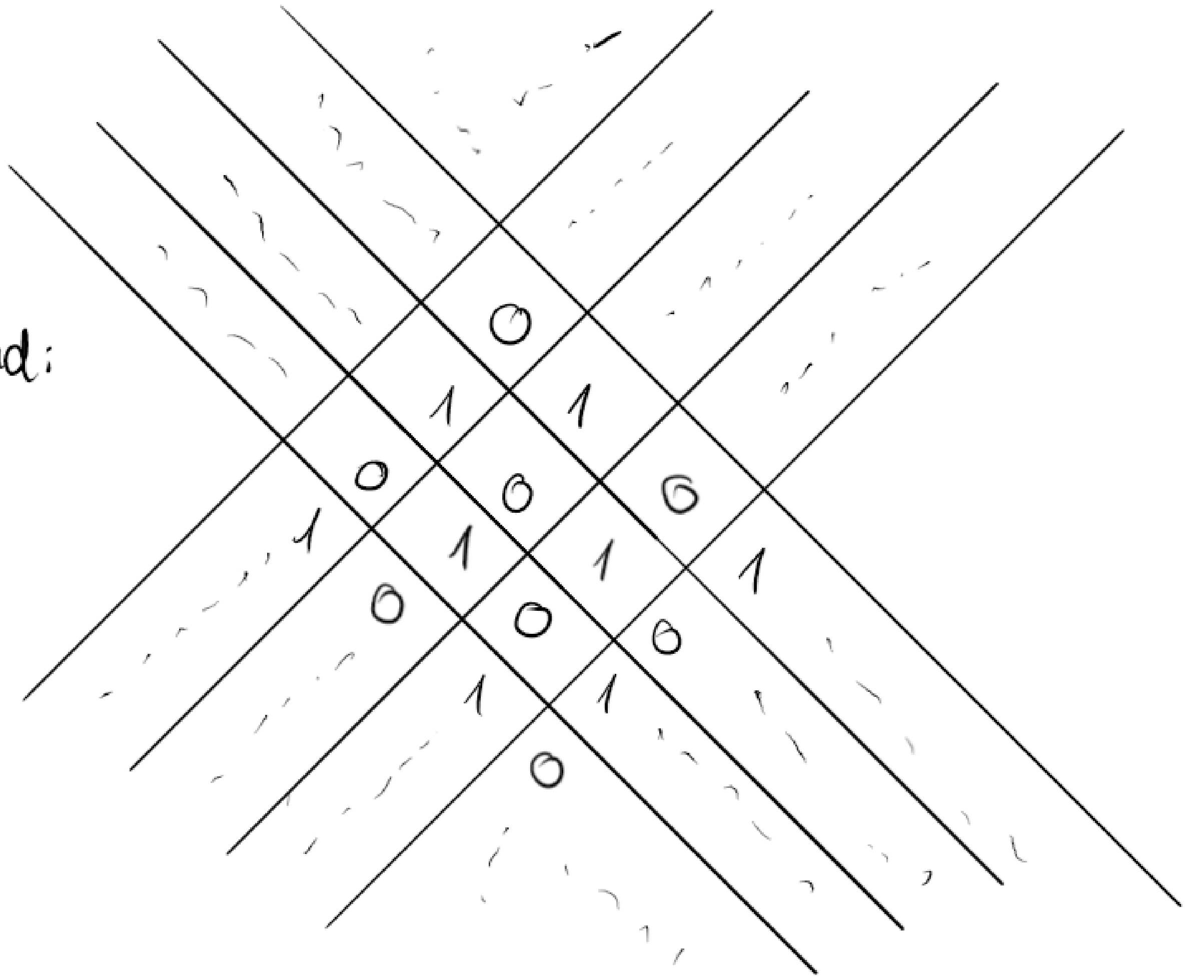
(Crown graph)

Jest to graf dwudzielny czyli $\chi(G) = 2$,

lecz jeśli podczas algorytmu sekwencyjnego ustawimy wierzchołki G w ciąg $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\}$ to użyje on n kolorów, każdym wierzchołkom a_i, b_i przypisze i-ty kolor, ponieważ każdemu sąsiadowi został przypisany kolor od $i-1$ do 1.

7. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy" od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.

Przykład:



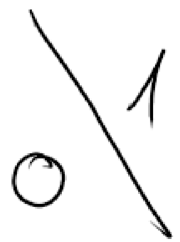
n - liczba prostych

Dowód indukcyjny po n:

n - liczba prostych

Dowód indukcyjny po n:

1° $n=1$



✓

2° Zał. dla n prostych jest możliwe by pokolorować dwoma kolorami obszary.

Pokazać: to samo dla $n+1$

Z płaszczyzny na której jest $n+1$ prostych wybierzmy dowolną prostą p i ją usuńmy.

Z płaszczyzny na której jest $n+1$ prostych wybierzmy dowolną prostą p i ją usuńmy.

Teraz mamy n prostych i kolorowanie obszarów jest poprawne. Wstawmy prostą p z powrotem i zauważmy że dzieli ona płaszczyznę na dwie części.

Na jednej z nich odwróćmy wszystkie kolory (0 na 1, 1 na 0).

Jeżeli dwa obszary nie dzieli prosta p to dalej są dobrze pokolorowane.

Jeżeli jakieś dwa obszary dzieli prosta p to znaczy że przed wstawieniem p "miały" ten sam kolor, jednak po wstawieniu p kolor jednego z nich zmienił się na odwrotny.

(słowo miały jest w cudzysłowie bo przed wstawieniem p to był jeden obszar o jednym kolorze)

A więc na mocy indukcji teza zachodzi.

9. Naszym zadaniem jest zorganizowanie turnieju szachowego między n zawodnikami. W ciągu ilu najmniej dni można zorganizować ten turniej, jeśli każda para zawodników musi rozegrać partię i żaden zawodnik nie może grać dwukrotnie w ciągu jednego dnia? Odpowiedź uzasadnij pokazując jak uzyskać optymalne rozłożenie.

Meczy do rozegrania w całym turnieju jest $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (Ilość krawędzi w pełnym grafie)

Dziennie można rozegrać $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ meczy.
(Jak n jest nieparzyste to jedna osoba nie zagra meczu danego dnia)

Także funkcja opisująca ilość dni potrzebną na rozegranie turnieju wygląda tak:

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Dla n parzystego liczba dni = liczba meczy jakie musi zagrać każdy zawodnik, bo codziennie możemy tak dobrać ich parami by mieć perfekcyjne skojarzenie

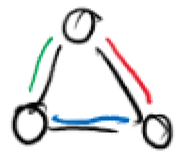
Dla n nieparzystego codziennie jeden zawodnik będzie miał "wolne" więc dziennie można rozegrać tylko $\frac{n-1}{2}$ meczy, stąd podłoga we wzorze

Przykłady
(Kolor oznacza dzień)

$n=2$

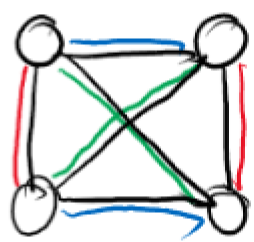
1 dzień

$n=3$



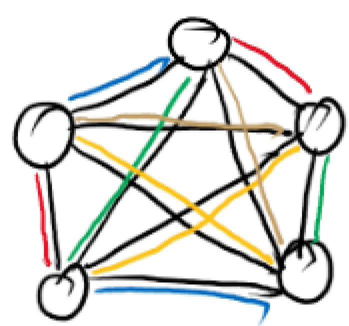
3 dni

4.



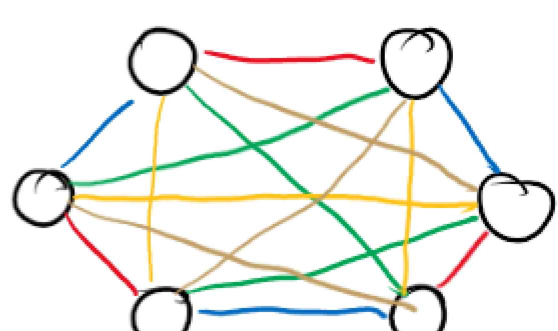
3 dni

5.



5 dni

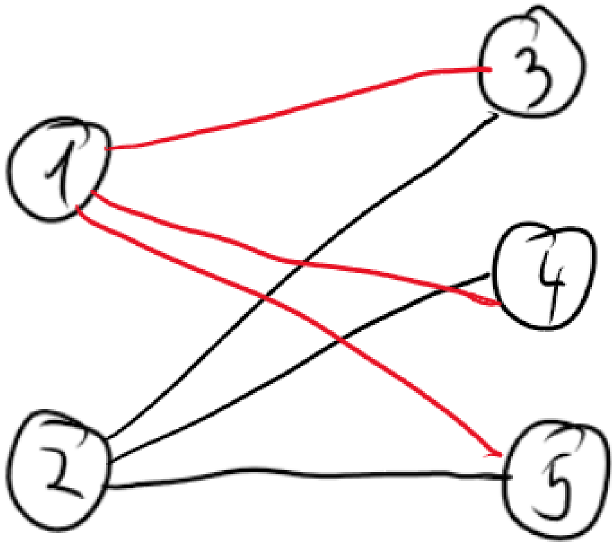
6.



5 dni

10. Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.

10.



$deg(v) \geq \frac{(n-1)}{2}$

$n=5$

$\frac{n-1}{2}=2$

Zgadza się, 2 to najmniejszy stopień w tym grafie

Ten graf nie jest Hamiltonowski bo nie spełnia warunku $|A|=|B|$ który omawialiśmy na ćwiczeniach