L11 Z3

Weźmy wierzchołek o największej liczbie wychodzących krawędzi. Nazwijmy go v. Sąsiadów v możemy podzielić na dwa podzbiory V.

$$V^- = \{u \in V : (v,u) \in E\}$$
$$V^+ = \{u \in V : (u,v) \in E\}$$

Do wszystkich wierzchołków z V^- istnieje ścieżka o długości 1.

Z V^+ weźmy dowolny wierzchołek u. By istniała ścieżka z v do u, wystarczy że istnieje krawędź skierowana do u z jakiegoś wierzchołka z V^-. Jeżeli taka krawędź nie istnieje to znaczy że z u wychodzi więcej krawędzi niż z v. (Przynajmniej $|V^-|+1$) Jest to sprzeczne z założeniem że v jest wierzchołkiem o największej liczbie wychodzących krawędzi.

W takim razie w turnieju istnieje wierzchołek z którego istnieje ścieżka o długości 2 do każdego innego wierzchołka

L11 Z4

Graf dwudzielny $G=(V,E)$, gdzie $V=A\cup B$

Warunek konieczny by ten graf był Hamiltonowski:

$$|A|=|B|$$

Dowód:

Bez straty ogólności załóżmy że $|A|>|B|$ oraz że w G jest cykl Hamiltona zaczynający się w B. Po przejściu $2 \cdot |B|$ wierzchołków, cykl ten wróciłby do wierzchołka startowego nie odwiedzając $|A|-|B|$ wierzchołków w A. G zatem nie może mieć cyklu Hamiltona

Problem skoczka: Nie, pól jest 25 oraz można zauważyć że skoczek porusza się z białych pól na czarne lub odwrotnie. Traktując planszę jako graf dwudzielny widzimy że nie ma cyklu Hamiltona bo $|A| \neq |B|$ przy $|V|=25$.

L11 Z5

Kostkę możemy interpretować jako graf dwudzielny mający 27 wierzchołków.

Kolorując ten graf załóżmy że wierzchołek startowy oznaczamy jako 1

1	0	1
0	1	0
1	0	1

(Ściana boczna kostki)

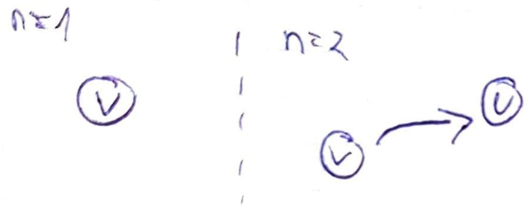
Widzimy że środkowe pole będzie oznaczone poprzez 0.
Jako że graf ma 27 wierzchołków to ścieżka Hamiltona musi mieć koniec w wierzchołku o tym samym kolorze co wierzchołek startowy.

Odp: Nie jest to możliwe

L11 Z6

Silna indukcja po $n = |V|$

1° Dla $n \leqslant 2$ taka ścieżka istnieje.



2°

Załóżmy że ścieżka Hamiltona istnieje $\forall_{k \in N}\ k \leqslant n$.

Pokazać że istnieje ścieżka Ham. dla $n+1$

Weźmy dowolne $v \in V$

Podzielmy wierzchołki połączone z v na wychodzące i wchodzące

$V^+ = \{u \in V : (u, v) \in E\}$

$V^- = \{u \in V : (v, u) \in E\}$

Jako że $|V^+| \leqslant n$ i $|V^-| \leqslant n$ to oba te podgrafy zawierają ścieżkę Hamiltona. Niech H^- będzie ścieżką Hamiltona w V^-, a H^+ w V^+.

Wtedy możemy utworzyć ścieżkę Hamiltona w naszym turnieju konkatenując $\{H^+, v, H^-\}$

L11 z7

Indukcja.

1° $n=1$

0 1

mamy ścieżkę Hamiltona

n-wymiarowa kostka
Wierzchołki opisane jako wektory zerojedynkowe o długości n.
liczba wierzchołków 2^n

2° Zał: ścieżka Hamiltona istnieje dla n,

pokazać: ścieżka Ham. istnieje dla n+1

Podzielmy wierzchołki na dwa zbiory względem pierwszej współrzędnej.

$$A = \{ v \in V : v = \{0, \dots\} \}$$
$$B = \{ v \in V : v = \{1, \dots\} \}$$

Możemy traktować A i B jako n-wymiarowe kostki i wiemy z założenia, że mają ścieżkę Hamiltona.

x_i - wektor o długości n opisujący wierzchołek

$H_A = \{0x_1, 0x_2, \dots, 0x_{2^n}\}$ - ścieżka Ham. w A

$H_B = \{1x_1, 1x_2, \dots, 1x_{2^n}\}$ - —— " —— w B

Teraz wystarczy skleić te dwie ścieżki

$$H = \{0x_1, 0x_2, \dots, 0x_{2^n}, 1x_{2^n}, \dots, 1x_2, 1x_1\}$$