Matematyka Dyskretna (L) Lista 2

Dominik Budzki

22 października 2020

1 Zadanie 1

Dla $k \geqslant 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Rozwiazanie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Dowod Kombinatoryczny: Przekształcmy sobie te tozsamosc na:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Wyobrazmy sobie zespol informatyczny zlozony z n osob, chcemy z nich wybrac k osob do jakiegos zadania i wsrod nich wybrac lidera zespolu. Po lewej stronie wybieramy ten zespol $\binom{n}{k}$ a potem wsrod nich lidera na k sposobow. Po prawej stronie najpierw wybieramy lidera na n sposobow, a potem dobieramy mu zespol na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobow

2 Zadanie 4

Udowodnij przez indukcje, ze dla kazdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Rozwiazanie:

1°Podstawa indukcji:

Wezmy $n = 0$

$$(a+b)^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{0} a^i b^{-i}$$

$$1 = \binom{0}{0}$$

$$1 = 1$$

2°Krok indukcyjny:
Zalozenie indukcyjne: dla n zachodzi $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$
Teza indukcyjna: dla kazdego n+1 zachodzi

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$$

Rozpiszmy lewa strone.

$$L = (a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} =$$

$$= a \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{0} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i})a^i b^{n+1-i} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i}$$

■

$$(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}+\frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!\cdot i}{(i)!(n-i+1)!}+\frac{n!\cdot(n-i+1)}{i!(n-i+1)!} =$$

$$\frac{n!(i+n-i+1)}{i!(n-(i-1))!} = \frac{(n+1)!}{i!((n+1)-i)!} = \binom{n+1}{i}$$

3 Zadanie 8

Sprawdz prawdziwosc nastepujacych relacji:

1. $n^2 \in O(n^3)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 \checkmark$$

2. $n^3 \in O(n^{2.99})$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^{2.99}} = \infty \text{✗}$$

3. $2^{n+1} \in O(2^n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \checkmark$$

4. $(n+1)! \in O(n!)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{x\to\infty} n+1 = \infty \text{✗}$$

5. $log_2 n \in O(\sqrt{n})$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log_2 n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{nln2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{nln2} = \frac{2}{ln2} \lim_{n\to\infty} \frac{sqrtn}{n} = 0 \checkmark$$

6. $\sqrt{n} \in O(log_2 n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{nln2}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{nln2}{2\sqrt{n}} = \frac{ln2}{2} \lim_{n\to\infty} sqrtn = \infty \text{✗}$$

4 Zadanie 9

Niech f; g; h : N → R. Pokaz,ze:

(a) jesli f(n) = O(g(n) i g(n) = O(h(n)), to f(n) = O(h(n)),
(b) f(n) = O(g(n)) wtedy i tylko wtedy, gdy g(n) = Ω(f(n)),
(c) f(n) = Θ(g(n)) wtedy i tylko wtedy, gdy g(n) = Θ(f(n)).

(a) Zał. f(n) = O(g(n) i g(n) = O(h(n)) Udowodnij ze f(n) = O(h(n))

$$f(n) \leqslant c_1 \cdot g(n)$$

$$g(n) \leqslant c_2 \cdot h(n)$$

Jezeli f jest co najwyzej rzedu g oraz g jest co najwyzej rzedu h to f musi byc co najwyzej rzedu h

(b) f(n) = O(g(n)) wtedy i tylko wtedy, gdy g(n) = Ω(f(n)),

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \leqslant c \cdot g(n)$$

$$g(n) = \Omega(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \geqslant c \cdot f(n)$$

Skoro f jest co najwyzej rzedu g, a g jest co najmniej rzedu f to

$$f(n) \leqslant c_1 \cdot g(n) \Leftrightarrow g(n) \geqslant c_2 \cdot f(n)$$

(c) f(n) = Θ(g(n)) wtedy i tylko wtedy, gdy g(n) = Θ(f(n)).

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)$$

Czyli f jest dokladnie tego samego rzedu co g, czyli g jest tego samego rzedu co f czyli dziala

5 Zadanie 10

Niech f i g beda dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, ze k < l. Pokaz, ze wowczas $f(n) = o(g(n)$.

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} =$
$=$ ..uzywamy l razy reguly De l'Hospitala.. $=$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{g^{(l)}(n)} = 0$
Koniec dowodu ■