**Симплекс-метод**.  
Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.  
Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 8x1+5x2 при следующих условиях-ограничений.  
6x1+3x2≤30  
9x1+4x2≤45  
Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).  
В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x3. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x4.   
Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 6 | 3 | 1 | 0 | | 9 | 4 | 0 | 1 | |  | |

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.  
**Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.  
Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x3, x4  
Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:  
X0 = (0,0,30,45)  
**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x3 | 30 | 6 | 3 | 1 | 0 |
| x4 | 45 | 9 | 4 | 0 | 1 |
| F(X0) | 0 | -8 | -5 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.  
**Итерация №0**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1  
и из них выберем наименьшее:  
min (30 : 6 , 45 : 9 ) = 5  
Следовательно, 1-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | min |
| x3 | 30 | **6** | 3 | 1 | 0 | **5** |
| x4 | 45 | 9 | 4 | 0 | 1 | 5 |
| F(X1) | 0 | **-8** | -5 | 0 | 0 |  |

Поскольку в последнем столбце присутствует несколько минимальных элементов 5, то номер строки выбираем по **правилу Креко**.  
Метод Креко заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения min=5, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.  
**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x4 в план 1 войдет переменная x1.  
Строка, соответствующая переменной x1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x4 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=6. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x1 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x1 и столбец x1. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.  
НЭ = СЭ - (А\*В)/РЭ  
СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (6), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 30-(45 • 6):9 | 6-(9 • 6):9 | 3-(4 • 6):9 | 1-(0 • 6):9 | 0-(1 • 6):9 |
| 45 : 9 | 9 : 9 | 4 : 9 | 0 : 9 | 1 : 9 |
| 0-(45 • -8):9 | -8-(9 • -8):9 | -5-(4 • -8):9 | 0-(0 • -8):9 | 0-(1 • -8):9 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x3 | 0 | 0 | 1/3 | 1 | -2/3 |
| x1 | 5 | 1 | 4/9 | 0 | 1/9 |
| F(X1) | 40 | 0 | -13/9 | 0 | 8/9 |

**Итерация №1**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2  
и из них выберем наименьшее:  
min (0 : 1/3 , 5 : 4/9 ) = 0  
Следовательно, 1-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (1/3) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | min |
| x3 | 0 | 0 | **1/3** | 1 | -2/3 | **0** |
| x1 | 5 | 1 | 4/9 | 0 | 1/9 | 45/4 |
| F(X2) | 40 | 0 | **-14/9** | 0 | 8/9 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x3 в план 2 войдет переменная x2.  
Строка, соответствующая переменной x2 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x3 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=1/3. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x2 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x2 и столбец x2. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 0 : 1/3 | 0 : 1/3 | 1/3 : 1/3 | 1 : 1/3 | -2/3 : 1/3 |
| 5-(0 • 4/9):1/3 | 1-(0 • 4/9):1/3 | 4/9-(1/3 • 4/9):1/3 | 0-(1 • 4/9):1/3 | 1/9-(-2/3 • 4/9):1/3 |
| 40-(0 • -14/9):1/3 | 0-(0 • -14/9):1/3 | -14/9-(1/3 • -14/9):1/3 | 0-(1 • -14/9):1/3 | 8/9-(-2/3 • -14/9):1/3 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x2 | 0 | 0 | 1 | 3 | -2 |
| x1 | 5 | 1 | 0 | -4/3 | 1 |
| F(X2) | 40 | 0 | 0 | 13/3 | -2 |

**Итерация №2**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x4, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai4  
и из них выберем наименьшее:  
min (- , 5 : 1 ) = 5  
Следовательно, 2-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | min |
| x2 | 0 | 0 | 1 | 3 | -2 | - |
| x1 | 5 | 1 | 0 | -4/3 | **1** | **5** |
| F(X3) | 40 | 0 | 0 | 13/3 | **-2** |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x1 в план 3 войдет переменная x4.  
Строка, соответствующая переменной x4 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x1 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=1. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x4 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x4 и столбец x4. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 0-(5 • -2):1 | 0-(1 • -2):1 | 1-(0 • -2):1 | 3-(-11/3 • -2):1 | -2-(1 • -2):1 |
| 5 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | -11/3 : 1 | 1 : 1 |
| 40-(5 • -2):1 | 0-(1 • -2):1 | 0-(0 • -2):1 | 41/3-(-11/3 • -2):1 | -2-(1 • -2):1 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x2 | 10 | 2 | 1 | 1/3 | 0 |
| x4 | 5 | 1 | 0 | -4/3 | 1 |
| F(X3) | 50 | 2 | 0 | 5/3 | 0 |

**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.  
Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x2 | 10 | 2 | 1 | 1/3 | 0 |
| x4 | 5 | 1 | 0 | -4/3 | 1 |
| F(X4) | 50 | 2 | 0 | 5/3 | 0 |

Оптимальный план можно записать так:  
x1 = 0, x2 = 10  
F(X) = 8•0 + 5•10 = 50  
**Анализ оптимального плана**.  
В оптимальный план вошла дополнительная переменная x4. Следовательно, при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы 2-го вида в количестве 5.  
Значение *2> 0* в столбце x1 означает, что использование x1 - не выгодно.  
Значение *0* в столбце x2 означает, что использование x2 - выгодно.  
Значение 12/3 в столбце x3 означает, что теневая цена (двойственная оценка) равна y1=12/3.  
Значение 0 в столбце x4 означает, что теневая цена (двойственная оценка) равна y2=0.  
**Примечание**:  
**1. По какому методу пересчитываются симплекс-таблицы?**  
Используется правило прямоугольника (метод жордановских преобразований).  
**2. Обязательно ли каждый раз выбирать максимальное значение из индексной строки?**  
Можно не выбирать, но это может привести к зацикливанию алгоритма.  
**3. В индексной строке в n-ом столбце нулевое значение. Что это означает?**  
Нулевые значения должны соответствовать переменным, вошедшим в базис. Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, **не вошедшей** в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов.  
Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.