Ćwiczenie 3

Ewelina Badeja

1. Treść zadania

Dla funkcji $f(x)$ zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych.
Podobnie jak poprzednio określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby **przedziałów** i dla różnych **warunków brzegowych**.
Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.
Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

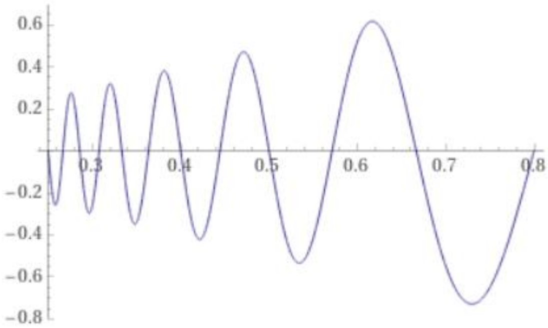
Funkcja, dla której zostały wykonane obliczenia:

1. $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{x}\right)$

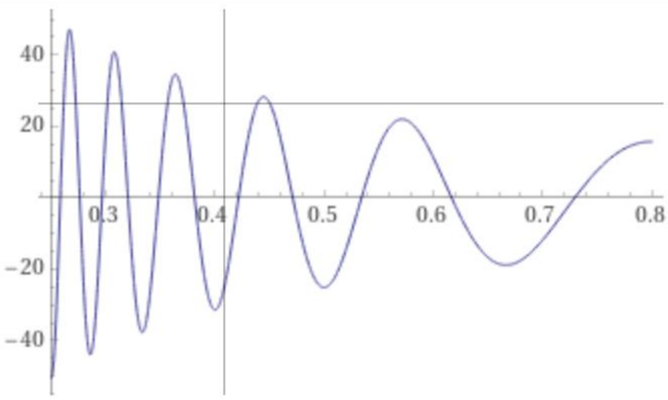
Parametry funkcji:

k=4, [1/4, 0.8]

(W nawiasie kwadratowym podano przedział x). Funkcja i jej pochodna narysowane z pomocą programu wolfram alfa prezentują się tak:



Wykres 1, dana funkcja



Wykres 2, pochodna funkcji

2. Wyprowadzenie wzoru dla interpolacji funkcją kwadratową

Założenia:

I. $s_i(x)$ - funkcja kwadratowa
II. $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$
III. punkty x_n są rozmieszczone równoodlegle
IV. $h = x_{i+1} - x_i$
V. Równania są numerowane w obrębie jednego punktu.

$s_i(x)$ to funkcja kwadratowa, więc jej pochodna jest funkcją liniową, a zatem można korzystać ze wzoru (1) na liniową funkcję sklejaną.

(1) $$y(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_1} y_i + \frac{x \;\; -x_i}{x_{i+1}-x_1} y_{i+1}$$

Dla $x \epsilon < x_i, x_{i+1} >$

(2) $$s'_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h} s'_i(x_i) + \frac{x \;\; -x_i}{h} s'_i(x_{i+1}).$$

Po scałkowaniu (2) otrzymamy

(3) $$s_i(x) = (x_{i+1} - x)^2 \frac{s'_i(x_i)}{2h} + (x - x_i)^2 \frac{s'_i(x_{i+1})}{2h} + c(x - x_i) + d(x_{i+1} - x) \quad ,$$

gdzie *c* i *d* to stałe całkowania. Naszym celem będzie teraz pozbycie się ich. Korzystając z warunków interpolacji (4) i (5), równania (3), do którego będziemy podstawiać potrzebne wartości, oraz założenia IV można skonstruować układ równań (6).

(4) $$s_i(x_i) = y_i$$

(5) $$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

(6) $$\begin{cases} s_i(x_i) = h^2 \frac{s'_i(x_i)}{2h} + dh = y_i \\ s_i(x_{i+1}) = h^2 \frac{s'_i(x_{i+1})}{2h} + ch = y_{i+1} \end{cases}$$

rozwiązując układ (6) otrzymujemy wartości c i d, które po wstawieniu do równania (3) dają

(7) $$s_i(x_i) = \frac{s'_i(x_i)h}{2} + \frac{y_i + y_{i+1}}{h} - s'_i(x_{i+1}) - s'_i(x_i).$$

Teraz oznaczmy $s'_i(x_i)$ = σ. Korzystając z warunku ciągłości (8) oraz podstawiając σ w równaniu (7), uzyskujemy pożądaną postać równania (9).

(8) $$s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i)$$

$$\frac{\sigma_{i-1}h}{2} + \frac{y_i + y_{i+1}}{h} - \sigma_{i-1} - \sigma_i = \frac{\sigma_i h}{2} + \frac{y_i + y_{i+1}}{h} - \sigma_{i+1} - \sigma_i.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

(9) $$\frac{y_i + y_{i+1}}{h} = (1 - \frac{h}{2})\sigma_{i-1} + \frac{h}{2}\sigma_i - \sigma_{i+1}.$$

Z takiej postaci możemy uzyskać n-2 równań. Żeby obliczyć współczynniki, potrzebne są jeszcze 2 (dla pierwszej i ostatniej niewiadomej). Otrzymujemy je, poprzez określenie warunków brzegowych.

3. Warunki brzegowe dla funkcji kwadratowej

Dla funkcji kwadratowej niestety udało mi się wyprowadzić tylko jeden warunek brzegowy.

- **Znana pierwsza pochodna**
  Zakładając, że $s'_i(x_i) = \sigma$ oraz znamy pochodną w pierwszym i ostatnim punkcie, dwa brakujące równania możemy zapisać jako

$$\sigma_1 = f'(x_1)$$

$$\sigma_n = f'(x_n)$$

4. Wyprowadzenie wzoru dla interpolacji funkcją sześcienną

Założenia:

VI. $s_i(x)$ - funkcja sześcienna
VII. $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$
VIII. punkty x_n są rozmieszczone równoodlegle
IX. $h = x_{i+1} - x_i$
X. Równania są numerowane w obrębie jednego punktu.

$s_i(x)$ to funkcja sześcienna, więc jej druga pochodna jest funkcją liniową, a zatem można korzystać ze wzoru (1) na liniową funkcję sklejaną.

$$(1) \qquad y(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_1} y_i + \frac{x \ \ -x_i}{x_{i+1}-x_1} y_{i+1}$$

Dla $x \epsilon < x_i, x_{i+1} >$

$$(2) \qquad s''_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h} s''_i(x_i) + \frac{x \ \ -x_i}{h} s''_i(x_{i+1}).$$

Po dwukrotnym scałkowaniu (2) otrzymamy

$$(3) \qquad s_i(x) = (x_{i+1} - x)^3 \frac{s''_i(x_i)}{6h} + (x - x_i)^3 \frac{s''_i(x_{i+1})}{6h} + c(x - x_i) + d(x_{i+1} - x) \quad ,$$

gdzie *c* i *d* to stałe całkowania. Naszym celem będzie teraz pozbycie się ich. Korzystając z warunków interpolacji (4) i (5), równania (3), do którego będziemy podstawiać potrzebne wartości, oraz założenia VI można skonstruować układ równań i wyliczyć c i d (analogicznie, jak dla funkcji kwadratowej), otrzymując równanie (7).

$$(4) \qquad s_i(x_i) = y_i$$

$$(5) \qquad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$(7) \qquad s_i(x) = (x_{i+1} - x)^3 \frac{s''_i(x_i)}{6h} + (x - x_i)^3 \frac{s''_i(x_{i+1})}{6h} +$$

$$+(\frac{y_{i+1}}{h}-\frac{s''_i(x_{i+1})}{6h})(x-x_i)+(\frac{y_i}{h}-\frac{s''_i(x_i)}{6h})(x_{i+1}-x) \quad .$$

W powyższym wzorze nie znamy s''_i. Skorzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej (8).

$$(8) \qquad s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i)$$

Różniczkujemy więc (7) i otrzymujemy równanie (9).

$$(9) \qquad s_i(x_i) = -\frac{s''_i(x_i)h}{3} - \frac{s''_i(x_{i+1})h}{6} + \frac{y_{i+1}}{h} - \frac{y_i}{h}.$$

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole:

- $\sigma = \frac{s''_i(x_i)}{6}$
- $\Delta = \frac{y_{i+1}}{h} - \frac{y_i}{h}$.

Po wstawieniu ich do równania (9) oraz skorzystania z warunku (8), uzyskujemy pożądaną postać równania (10).

$$(10) \qquad h\sigma_{i-1} + 3h + h\sigma_{i-1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}.$$

Tak jak w przypadku funkcji kwadratowej, z takiej postaci możemy uzyskać n-2 równań i potrzebujemy jeszcze warunków brzegowych.

5. Warunki brzegowe dla funkcji sześciennej

- **Znane ilorazy różnicowe**

Sposób omawiany na wykładzie. Korzystamy ze związku między ilorazami różnicowymi Δ a pochodnymi:

$$\Delta_n = f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^n\,(\eta)}{n!}, \eta\epsilon[x_0, \ldots, x_n]\ (\eta - pewien\ punkt)$$

oraz

$$f''' \approx 6\Delta_i{}^{(3)}.$$

Można w ten sposób przybliżyć trzecią pochodną funkcji dla danego x_i. Kolejnym krokiem będzie zróżniczkowanie $s''_i(x)$, cały czas przyjmując $\sigma = \frac{s''_i(x_i)}{6}$.

$$s'''_i(x) = -\frac{6\sigma_i}{h} + \frac{6\sigma_{i+1}}{h}$$

Podstawiając wybrane x_i otrzymujemy

$$\frac{6}{h}(\sigma_2\text{-}\sigma_1) = 6\Delta_1{}^{(3)}$$

$$\frac{6}{h}(\sigma_n\text{-}\sigma_{n-1}) = 6\Delta_{n-3}{}^{(3)}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy warunki brzegowe

$$\sigma_2\text{-}\sigma_1 = h\Delta_1{}^{(3)}$$

$$\sigma_n\text{-}\sigma_{n-1} = h\Delta_{n-3}{}^{(3)}.$$

- **Znana druga pochodna**

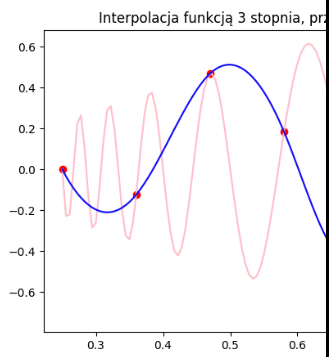
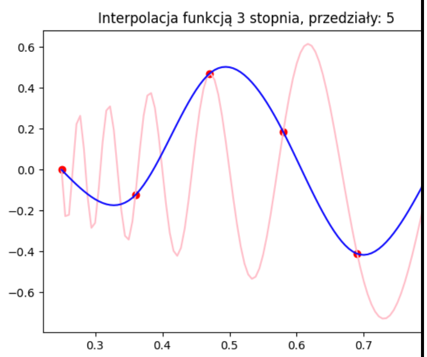
  Zakładając, że $\sigma = \frac{s''_i(x_i)}{6}$ oraz znamy drugą pochodną w pierwszym i ostatnim punkcie, dwa brakujące równania możemy zapisać jako

$$\sigma_1 = \frac{f''(x_1)}{6}$$

$$\sigma_n = \frac{f''(x_n)}{6}$$

6. Analiza interpolacji funkcją trzeciego stopnia

W *tabeli 1* przedstawione są wykresy interpolacji funkcją trzeciego stopnia dla różnej liczby węzłów i różnych warunków brzegowych, a w *tabeli 2* maksymalne błędy tych interpolacji. Spliny były zawsze obliczane dla 100 punktów.

Warunki brzegowe	
Znane ilorazy różnicowe	**Znana druga pochodna**
	

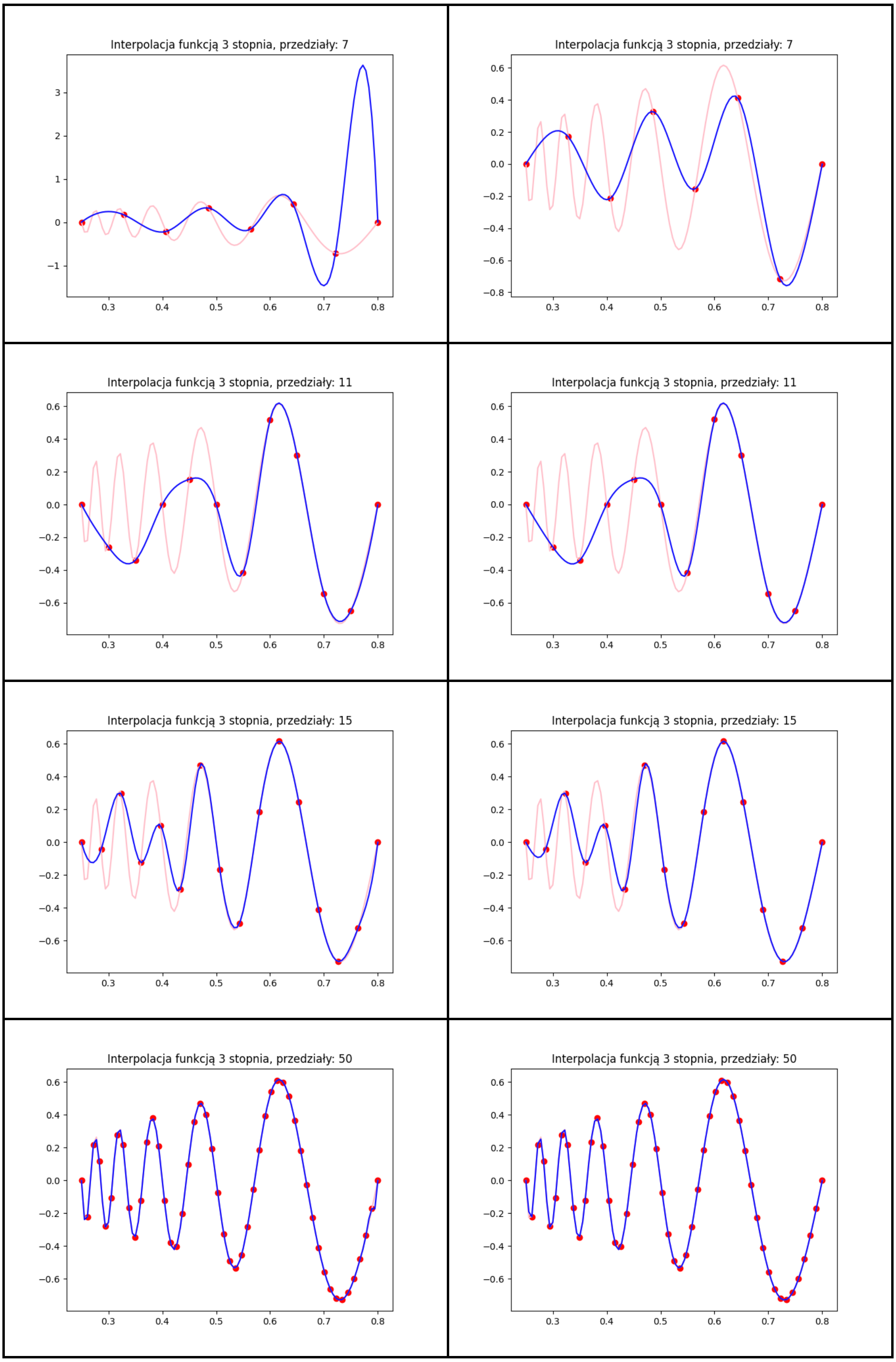


Tabela 1, różne warianty interpolacji funkcją trzeciego stopnia

Przedziały	**Znane ilorazy różnicowe**	**Znana druga pochodna**

5	0.9847895342729345	0.960828299948354
7	4.036086125489362	0.5549291116646042
11	0.6530419602624917	0.654994495891501
15	0.38598449098905274	0.3751500428917653
50	0.08490483801410031	0.03599551373911555

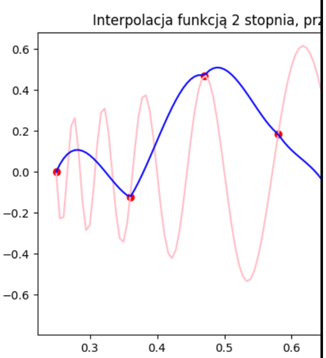
Tabela 2, błąd interpolacji funkcją trzeciego stopnia

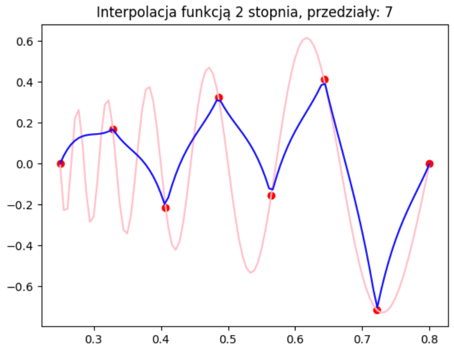
Obserwacje na podstawie *tabel 1* i *2*:

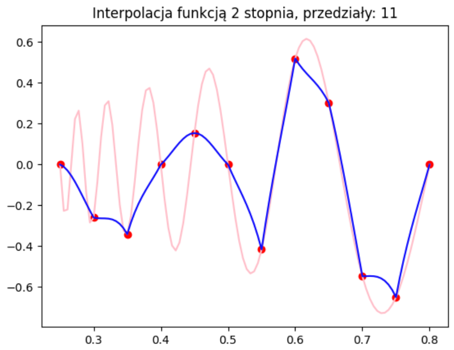
- różne warunki brzegowe wpływają na kształt i maksymalny błąd funkcji wynikowej, zazwyczaj nie są to jednak drastyczne zmiany. Najbardziej widoczne są one dla pięciu i siedmiu przedziałów
- dla siedmiu węzłów wystąpił efekt zbliżony do efektu Rungego, jednak w porównaniu do interpolacji Lagrange'a albo Newtona dla węzłów równoodległych był on dość niewielki
- obliczenia komputerowe nawet dla dużej liczby przedziałów trwały bardzo krótko, przez co łatwo można zadowalająco zmniejszyć błąd maksymalny

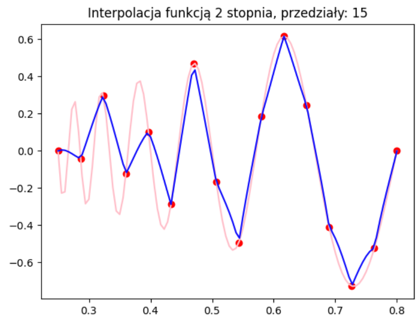
7. Analiza interpolacji funkcją drugiego stopnia

W tabeli 3 przedstawione są wykresy interpolacji funkcją drugiego stopnia dla różnej liczby węzłów, a w tabeli 4 maksymalne błędy tych interpolacji.

Warunki brzegowe	
Znana pierwsza pochodna	**Znana druga pochodna**
	







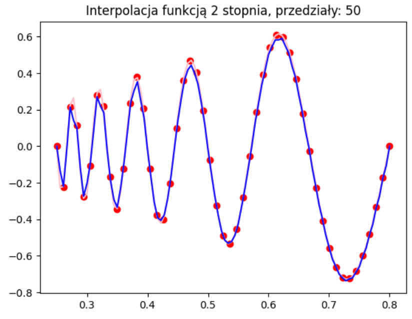


Tabela 3, różne warianty interpolacji funkcją drugiego stopnia

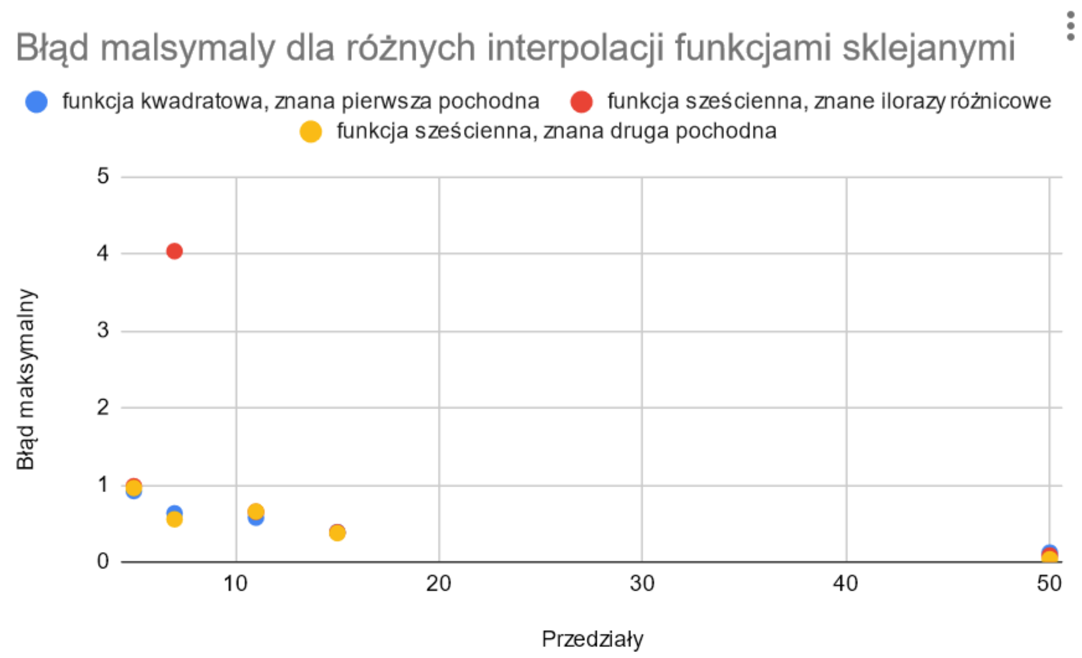
Przedziały	**Znana pierwsza pochodna**	**Znana druga pochodna**

5	0.9217647148541096	
7	0.6320716621430014	
11	0.5754066121810576	
15	0.3873749915475604	
50	0.12225451562793116	

Tabela 4, błąd interpolacji funkcją drugiego stopnia

Obserwacje na podstawie wyników *z tabel 3* i *4*:

- pomimo tego, że interpolacja funkcją drugiego stopnia wygląda gorzej, niż funkcją trzeciego stopnia (bardziej "kanciasta"), to dla mniejszych liczb węzłów ma porównywalne maksymalne błędy
- w przypadku funkcji drugiego stopnia dla dużej liczby węzłów ciężej osiągnąć odpowiednio mały błąd maksymalny, niż dla funkcji trzeciego stopnia



Wykres 3, porównanie błędów

8. Końcowe wnioski

Przykro mi, że nie udało mi się wykonać obliczeń dla drugiego warunku brzegowego dla funkcji kwadratowej, jednak pomimo tego udało się wykonać znaczną część obserwacji.

Jak widać na *wykresie 3*, większość wyników, uzyskanych przez różne sposoby interpolacji funkcjami sklejanymi, jest bardzo podobna dla danej liczby przedziałów. Mimo to uważam, że interpolowanie funkcjami trzeciego stopnia jest lepsze, ponieważ obliczenia komputerowe nie zajmują znacząco więcej czasu, a wyniki wyglądają dużo trafniej (dają dużo lepsze ogólne wyobrażenie o kształcie funkcji).

9. Dane techniczne

- Język programowania: Python 3.10
- Środowisko: PyCharm Professional
- System: Windows Server 2019
- Procesor: Intel Core i7-7700HQ 2.8 GHz