Devoir #2

1. (15 points) Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{Min } z = -2x_1 - 3x_2$$

s.a.

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) (10 points) Après avoir introduit les variables d'écart x_3 et x_4 dans les première et deuxième contraintes afin d'obtenir une forme standard, identifier toutes les solutions de base de ce problème. Évaluer la valeur de l'objectif des solutions de base réalisables et identifier la solution optimale.

(b) (5 points) Localiser explicitement toutes les solutions de base identifiées au point (a) dans une représentation graphique du problème (donc, dans l'espace des variables x_1 et x_2).

2. (20 points) Soit le problème de programmation linéaire suivant, où λ est un paramètre :

$$\text{Min } z = -(45 + \lambda)\, x_1 - (80 + \lambda)\, x_2$$

s.a.

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$10x_1 + 15x_2 \leq 450$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) (10 points) Résoudre graphiquement le problème pour $\lambda = 0$.

(b) (10 points) Déterminer un intervalle de valeurs pour le paramètre λ assurant que la solution optimale du problème énoncé plus haut soit la même que celle obtenue avec $\lambda = 0$.

3. (15 points) Considérons le modèle de programmation linéaire suivant :

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \; j \neq k$$

Puisque la variable x_k n'est pas contrainte à la non négativité, il est possible de remplacer cette variable dans le modèle par $u_k - v_k$, avec $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$. On obtient alors un modèle sous forme standard qui peut être résolu avec l'algorithme du simplexe.

$$\text{Min} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} c_j x_j + c_k u_k - c_k v_k$$

s.a.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{ij} x_j + a_{ik} u_k - a_{ik} v_k = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \; j \neq k$$

$$u_k, v_k \geq 0$$

Après avoir résolu le modèle, on obtient la solution optimale x_j^*, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$, u_k^*, v_k^*, avec $x_k^* = u_k^* - v_k^*$.

En supposant que le domaine réalisable est non vide, démontrer maintenant les résultats suivants :

(a) (10 points) Si $a_{ik} = 0$, $i = 1, \ldots, m$ et si $c_k \neq 0$, alors le problème n'est pas borné inférieurement.

(b) (5 points) Considérant à nouveau la situation évoquée au point (a) où $a_{ik} = 0$, $i = 1, \ldots, m$ et $c_k \neq 0$, la conclusion demeure-t-elle la même si on ajoute la contrainte $x_k \geq 0$? Il faut noter que la transformation évoquée dans l'énoncé de la question ne s'applique plus dans ce cas.

4. (30 points) Soit le tableau initial du simplexe suivant :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d.
x_5	1	2	1	1				43
x_6	3		2		1			46
x_7	1	4				1		42
$-z$	-3	-2	-5				1	0

(a) (15 points) Sachant que les variables de base ou variables dépendantes dans le tableau optimal sont x_2, x_3 et x_6 dans la première, deuxième et troisième ligne du tableau optimal, produire ce tableau optimal directement à partir du tableau initial (donc, sans appliquer l'algorithme du simplexe). Présenter tous les développements mathématiques.

(b) (5 points) Déterminer l'intervalle de variation du terme de droite $b_1 = 43$ dans la première contrainte afin d'assurer que la base optimale pour le problème original demeure optimale pour le problème modifié.

(c) (5 points) Si les termes de droite sont modifiés et deviennent $\tilde{b}_1 = 44$, $\tilde{b}_2 = 50$ et $\tilde{b}_3 = 41$ dans la première, deuxième et troisième contrainte du problème original, est-ce que la base optimale pour le problème original demeure optimale pour le nouveau problème? Si vous répondez oui, identifier ensuite la nouvelle solution optimale et la valeur optimale de l'objectif pour le nouveau problème.

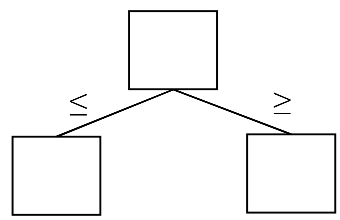
(d) (5 points) Revenant au problème original, déterminer l'intervalle de variation du coût $c_2 = -2$ de la variable x_2 afin d'assurer que le base optimale pour le problème original demeure optimale pour le problème modifié.

5. (20 points) Résoudre le problème de programmation linéaire en nombre entiers suivant avec l'algorithme de branch-and-bound en faisant appel à la méthode graphique pour résoudre chacun des sous-problèmes.

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = -5x_1 - 4x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 5 \\
&\qquad 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0 \text{ et entier}
\end{aligned}$$

Notes. (1) Brancher sur la variable x_2 à la racine.

(2) Parcourir l'arbre de branchement en profondeur, en plaçant les contraintes de type ≤ à gauche et les contraintes de type ≥ à droite, c'est-à-dire :



<u>À remettre au plus tard le lundi 20 février à midi</u>