Devoir 2

Emeric Laberge
Arpad Botond Rigo

Dans le cadre du cours
IFT 1575

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal
Canada
21 février 2023

Question 1

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & z = -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujet à} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & z = -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujet à} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_3	1	3	1			6
x_4	3	2		1		6
$-z$	-2	-3			1	0

Le point (0,0) donne un z de 0

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_1	$1/3$	1	$1/3$			2
x_4	$7/3$		$-2/3$	1		2
$-z$	-1		1		1	6

Le point (0,2) donne un z de -6

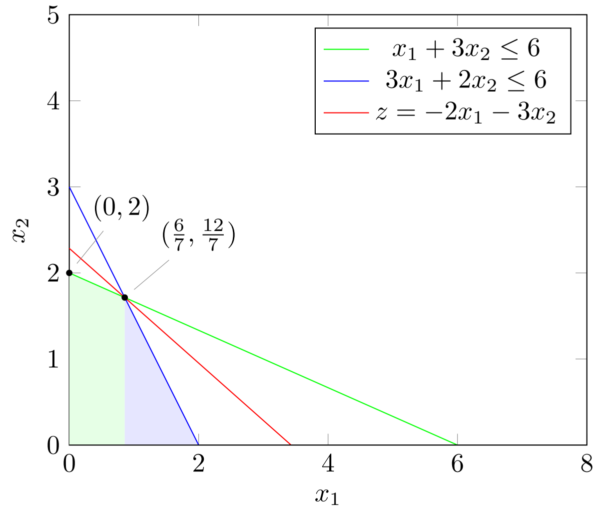
v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_1	0	1	$3/7$	$-1/7$		$12/7$
x_2	1		$-2/7$	$3/7$		$6/7$
$-z$			$5/7$	$3/7$	1	$41/42$

Le point $(\frac{6}{7}, \frac{12}{7})$ donne un z de $\frac{-48}{7}$

Ceci est la solution optimale

(b)

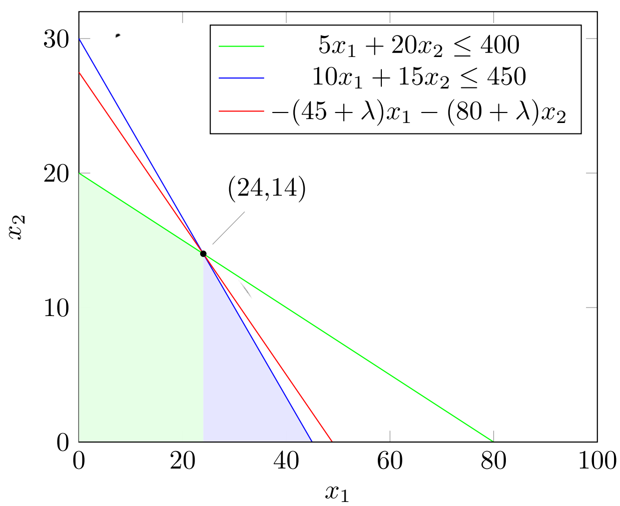
$$\begin{aligned}
\text{minimiser} \quad & z = -(45+\lambda)\,x_1 - (80+\lambda)\,x_2 \\
\text{sujet à} \quad & 5x_1 + 20x_2 \leq 400 \\
& 10x_1 + 15x_2 \leq 450 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



Question 2

(a)

$$\begin{aligned}
&\text{minimiser} && z = -(45+\lambda)\,x_1 - (80+\lambda)\,x_2 \\
&\text{sujet à} && 5x_1 + 20x_2 \leq 400 \\
& && 10x_1 + 15x_2 \leq 450 \\
& && x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



(b)

Pour avoir la même solution optimale, on voit que la condition à respecter est que la pente de la droite à minimiser doit être supérieure à celle de la droite bleue ($5x_1 + 20x_2 \leq 400$) et inférieure à celle de la droite verte ($10x_1 + 15x_2 \leq 450$).
Nous pouvons donc résoudre deux systèmes d'inéquations pour avoir la borne inférieure et la borne supérieure de la variable λ

$$
\begin{aligned}
\frac{-(45+\lambda)x_1}{80+\lambda} &< \frac{-5x_1}{20} & \frac{-10x_1}{15} &< \frac{-(45+\lambda)x_1}{80+\lambda} \\
\frac{45+\lambda}{80+\lambda} &> \frac{1}{4} & \frac{2}{3} &> \frac{45+\lambda}{80+\lambda} \\
45+\lambda &> \frac{1}{4}(80+\lambda) & \frac{2}{3}(80+\lambda) &> 45+\lambda \\
45+\lambda &> 20+\frac{\lambda}{4} & \frac{160}{3}+\frac{2\lambda}{3} &> 45+\lambda \\
\frac{3\lambda}{4} &> -25 & \frac{25}{3} &> \frac{\lambda}{3} \\
\lambda &> \frac{-100}{3} & 25 &> \lambda
\end{aligned}
$$

Nous avons donc que $\lambda = [\frac{-100}{3}, 25]$

Question 3

(a)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} c_j x_j + c_k u_k - c_k v_k \\
\text{sujet à} & \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{ij} x_j + a_{ik} u_k - a_{ik} v_k = b_i,\ i = 1, ..., m \\
& x_j \geq 0, \quad 1, ..., n,\ j \neq k \\
& u_k, v_k \geq 0
\end{array}
$$

Le modèle résolu, on obtient la solution optimale $x_j^*, j = 1, ..., n, j \neq k, u_k^*, v_k^*,$ avec $x_k^* = u_k^* - v_k^*$ Si $a_{ik} = 0$ i=1, ..., m et si $c_k \neq 0$, alors la valeur de a_{ik} étant de 0 fait en sorte que la valeur de u_k et v_k n'ont aucune influence sur le respect des contraintes.

Cela étant dit , nous savons également la valeur de coefficient de $c_k \neq 0$ et donc , nous pouvons "pomper" au maximum u_k et faire en sorte que $v_k = 0$ dans le cas où $c_k < 0$.Inversement nous pouvons "pomper" au maximum v_k et faire en sorte que $u_k = 0$ dans le cas où $c_k > 0$

Le but de la manoeuvre étant que malgré le fait que ceci n'ait aucun impact sur les contraintes , l'effet sur l'objectif est tel que il est impossible de borner inférieurement le problème car plus on augmente u_k ou v_k dans les cas respectifs , plus on minimise l'objectif.

Sachant que u_k et v_k ne sont pas borné supérieurement , la réponse optimale implique d'avoir un coefficient infini à un des deux coefficients et donc le problème n'est pas borné inférieurement car on peut toujours plus minimiser.

(b)

Considérant à nouveau la situation évoquée au point (a) où $a_{ik} = 0$, i = 1, ..., m et $c_k \neq 0$, la conclusion demeure-t-elle la même si on ajoute la contrainte $x_k \geq 0$?

En rajoutant la contrainte $x_k \geq 0$ on se retrouve borner inférieurement le problème dans le cas où $c_k > 0$, car dans ce cas, la solution en (a) ne va pas respecter $x_k \geq 0$ néanmoins , dans le cas où $c_k < 0$, le problème n'est pas borné inférieurement car la solution en (a) respecte la condition $x_k^* = u_k^* - v_k^* \geq 0$ et cette solution n'est pas bornée inférieurement.

Question 4

(a)

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d
x_5	1	2	1	1				43
x_6	3		2		1			46
x_7	1	4				1		42
$-z$	-3	-2	-5				1	0

$$x_b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} \; x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \; c_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \; c_R = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 43 \\ 46 \\ 42 \end{pmatrix} \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 43 \\ 46 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -2, & -5, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & -2, & 0 \end{pmatrix}$$

$$c^T - \pi^T A = \begin{pmatrix} -3, & -2, & -5, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1, & -2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T - \pi^T A = \begin{pmatrix} -3, & -2, & -5, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7, & -2, & -5, & -1, & -2, & 0 \end{pmatrix}$$

$$c^T - \pi^T A = \begin{pmatrix} 4, & 0, & 0, & 1, & 2, & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\pi^T b = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 43 \\ 46 \\ 42 \end{pmatrix} = 135$$

v.d	$x_1 ... x_n$	$-z$	t.d
x_B	$B^{-1}A$		$B^{-1}b$
$-z$	$c^T - \pi^T A$	1	$-\pi^T b$

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d
x_2	$-1/4$	1		$1/2$	$-1/4$			10
x_3	$3/2$		1		$1/2$			23
x_6	2			-2	1	1		2
$-z$	4			1	2		1	135

(b)

$$\tilde{b} = b + \Delta b = \begin{pmatrix} 43 \\ 46 \\ 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 + \Delta \\ 46 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\tilde{b}} = B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 43 + \Delta \\ 46 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + \Delta/2 \\ 23 \\ 2 - 2\Delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 10 + \dfrac{\Delta}{2} \geq 0 & 2 - 2\Delta \geq 0 \\ \dfrac{\Delta}{2} \geq -10 & -2\Delta \geq -2 \\ \Delta \geq -20 & \Delta \leq 1 \end{array}$$

L'interval de variation de b_1 est $-20 \leq \Delta \leq 1$ et donc:

$43 - 20 \leq b_1 + \Delta \leq 43 + 1$

$23 \leq b_1 \leq 44$

$b_1 = [23, 44]$

(c)

$$\bar{\tilde{b}} = B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 \\ 50 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/2 \\ 25 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0$$

La base reste donc optimale et nous avions déjà trouvé que $\pi^T = \begin{pmatrix} -1, & -2, & 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\bar{\tilde{z}} = \pi^T \tilde{b} = \begin{pmatrix} -1, & -2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 \\ 50 \\ 41 \end{pmatrix} = -144$$

La solution optimale est donc

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d
x_2	$-1/4$	1		$1/2$	$-1/4$			$19/2$
x_3	$3/2$		1		$1/2$			25
x_6	2			-2	1	1		3
$-z$	4			1	2		1	144

(d)

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d
x_2	$-1/4$	1		$1/2$	$-1/4$			10
x_3	$3/2$		1		$1/2$			23
x_6	2			-2	1	1		2
$-z$	4	Δc_2		1	2		1	135

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d
x_2	$-1/4$	1		$1/2$	$-1/4$			10
x_3	$3/2$		1		$1/2$			23
x_6	2			-2	1	1		2
$-z$	$4+\frac{\Delta c_2}{4}$			$1-\frac{\Delta c_2}{2}$	$2+\frac{\Delta c_2}{4}$		1	135

$$\begin{array}{ccc}
4+\dfrac{\Delta c_2}{4} \geq 0 & 1-\dfrac{\Delta c_2}{2} \geq 0 & 2+\dfrac{\Delta c_2}{4} \geq 0 \\
\dfrac{\Delta c_2}{4} \geq -4 & \dfrac{\Delta c_2}{2} \leq 1 & \dfrac{\Delta c_2}{4} \geq -2 \\
\Delta c_2 \geq -16 & \Delta c_2 \leq 2 & \Delta c_2 \geq -8
\end{array}$$

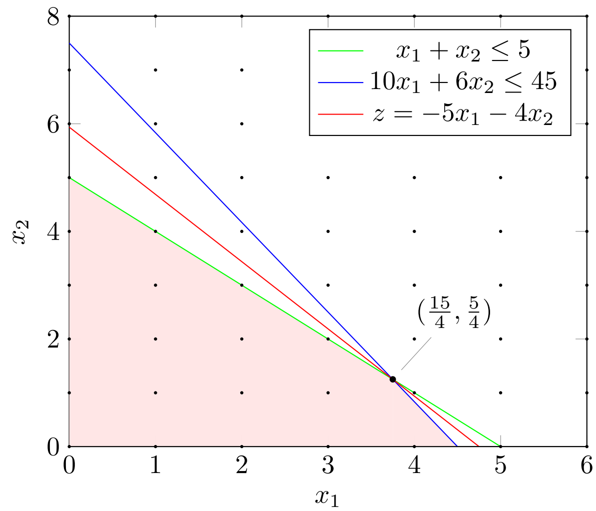
L'interval de variation de c_2 est $-8 \leq \Delta c_2 \leq 2$ et donc:

$$\Delta c_2 = [-8, 2]$$

Question 5

$$\begin{aligned} &\text{minimiser} && z = -5x_1 - 4x_2 \\ &\text{sujet à} && x_1 + x_2 \leq 5 \\ & && 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entier} \end{aligned}$$

Figure 1



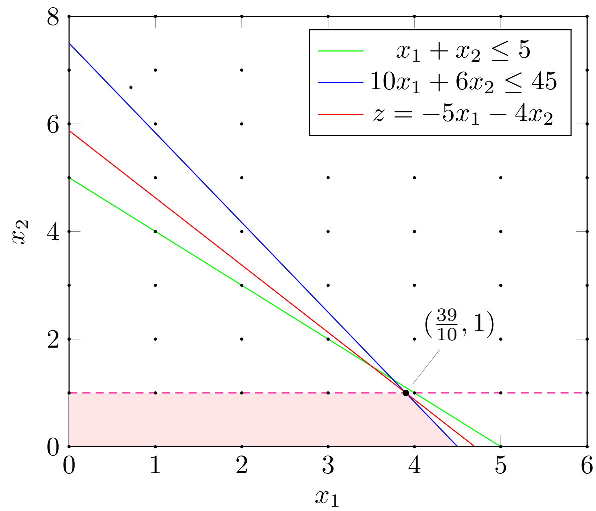
Le point trouvé est $(\frac{15}{4}, \frac{5}{4})$ avec un z de valeur -23.75

En branchant sur la variable x_2, nous avons $x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$

$$x_2 = \frac{-5x_1}{4} - \frac{z}{4}$$

minimiser	$z = -5x_1 - 4x_2$
sujet à	$x_1 + x_2 \leq 5$
	$10x_1 + 6x_2 \leq 45$
	$x_2 \leq 1$
	$x_1, x_2 \geq 0$ et entier

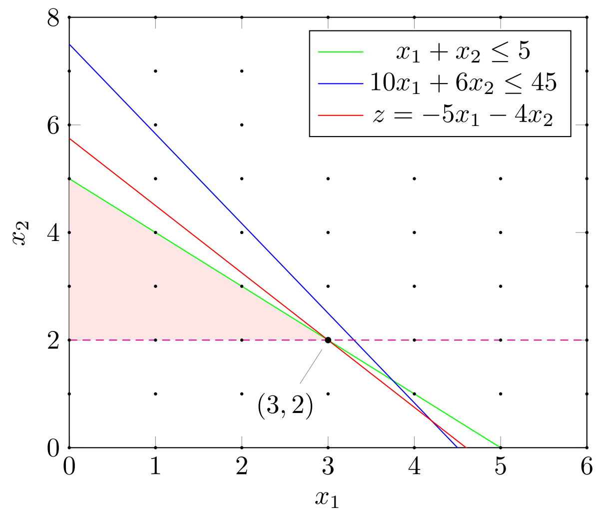
Figure 2



Le point trouvé est $(\frac{39}{10}, 1)$ avec un z de valeur -23.5
Le point n'est pas entier donc nous introduisons $x_1 \leq 3$ et $x_1 \geq 4$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & z = -5x_1 - 4x_2 \\
\text{sujet à} & x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entier}
\end{array}
$$

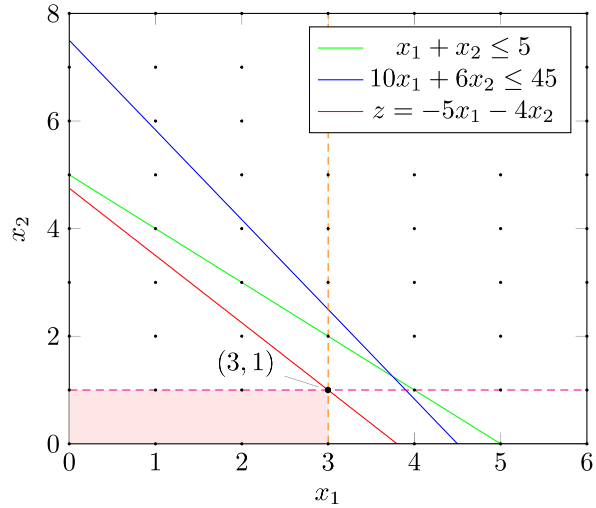
Figure 3



Le point trouvé est $(3, 2)$ avec un z de valeur -23
Le point est un entier donc nous ne branchons pas

$$
\begin{aligned}
\text{minimiser} \quad & z = -5x_1 - 4x_2 \\
\text{sujet à} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entier}
\end{aligned}
$$

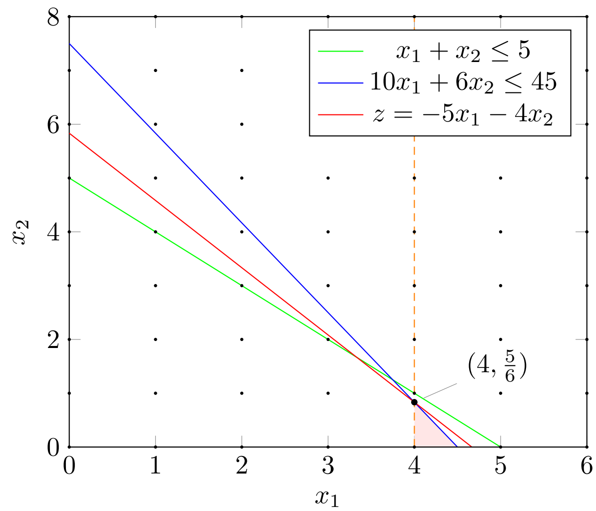
Figure 4



Le point trouvé est $(3, 1)$ avec un z de valeur -19
Le point est un entier donc nous ne branchons pas

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & z = -5x_1 - 4x_2 \\
\text{sujet à} & x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entier}
\end{array}
$$

Figure 5



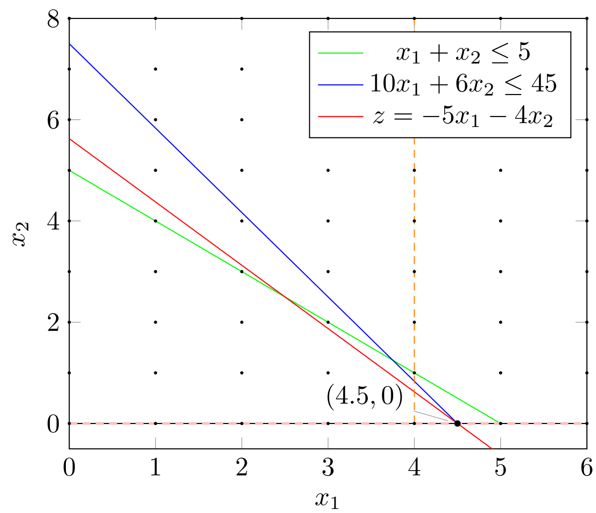
Le point trouvé est $(4, \frac{5}{6})$ avec un z de valeur -23.33

Le point n'est pas entier donc nous introduisons $x_2 \leq 0$ et $x_2 \geq 1$

$x_2 \geq 1$ **n'est pas réalisable**

minimiser	$z = -5x_1 - 4x_2$
sujet à	$x_1 + x_2 \leq 5$
	$10x_1 + 6x_2 \leq 45$
	$x_2 \leq 1$
	$x_1 \geq 4$
	$x_2 \leq 0$
	$x_1, x_2 \geq 0$ et entier

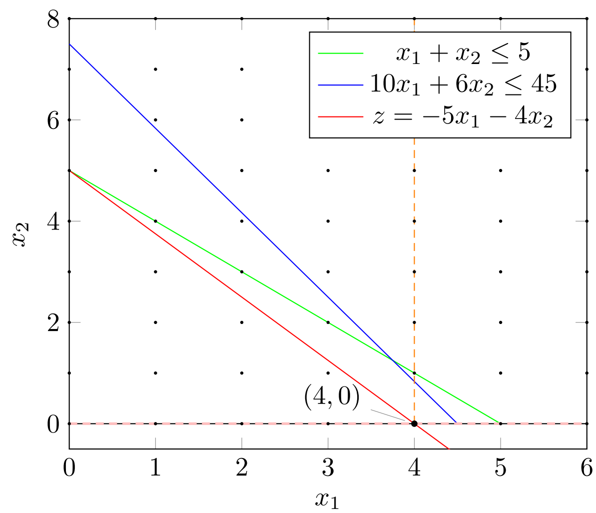
Figure 6



Le point trouvé est $(4.5, 0)$ avec un z de valeur -22.5
Le point n'est pas entier donc nous introduisons $x_1 \leq 4$ et $x_1 \geq 5$
$x_1 \geq 5$ **n'est pas réalisable**

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & z = -5x_1 - 4x_2 \\
\text{sujet à} & x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entier}
\end{array}
$$

Figure 7



Le point trouvé est $(4, 0)$ avec un z de valeur -20
Le point est un entier donc nous ne branchons pas

Analyse

On peut voir que la solution entière la plus optimale est (3,2) avec $z = -23$
Les autres solutions entières étant (3,1) et (4,0) avec un z de valeur -19 et -20 respectivement