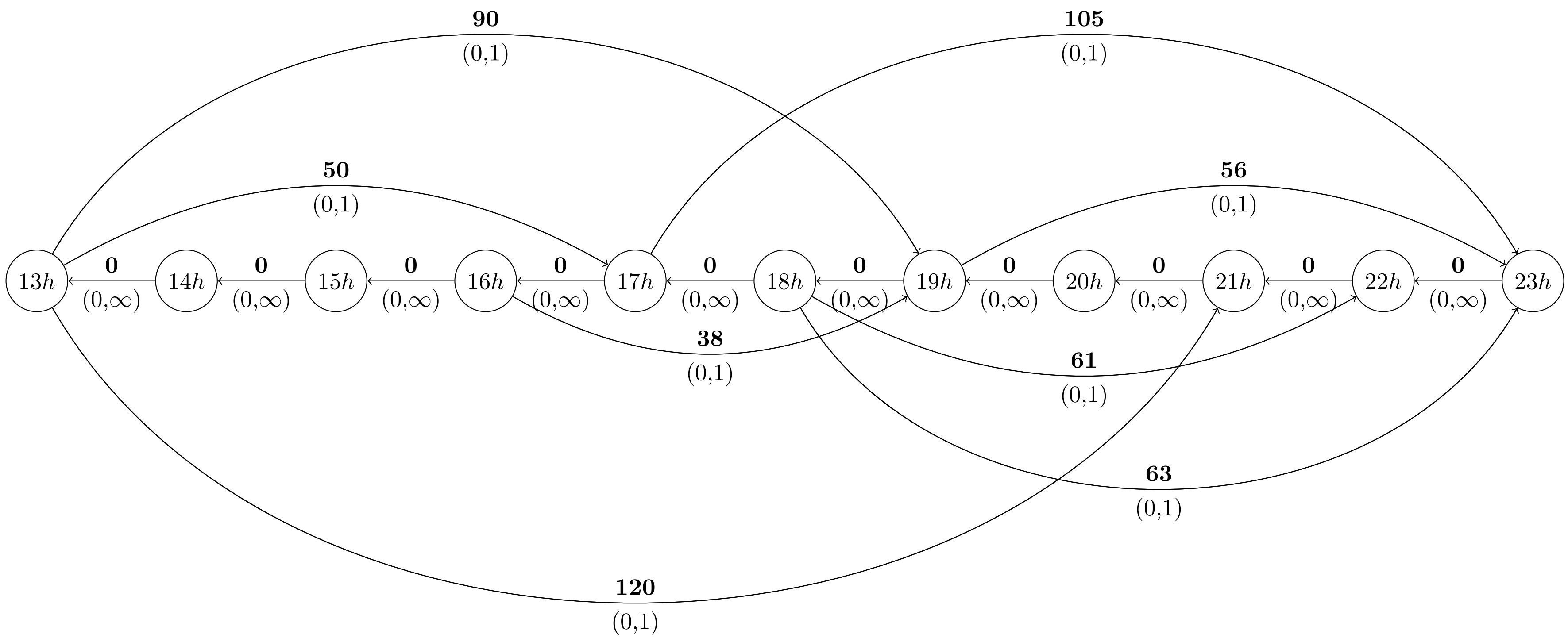
Devoir 3

Emeric Laberge
20220275
Sara Haddad
20208373

Dans le cadre du cours
IFT 1575

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal
Canada
27 mars 2023

d=2


13h
14h
15h
16h
17h
18h
19h
20h
21h
22h
23h
0
(0,∞)
90
(0,1)
105
(0,1)
50
(0,1)
56
(0,1)
38
(0,1)
61
(0,1)
63
(0,1)
120
(0,1)

Question 2

Initialisation: $EM = \{1\}$; $\delta_1 = 0$

Itération 1:

Étape 1:

Les successeurs de 1 sont 2, 3 et 4.
$\lambda_{12} = 10 \quad \lambda_{13} = 25 \quad \lambda_{14} = 16$
min $\{\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}\} = \min\{10, 25, 16\} = 10 \Rightarrow j_1 = 2$

Étape 2:

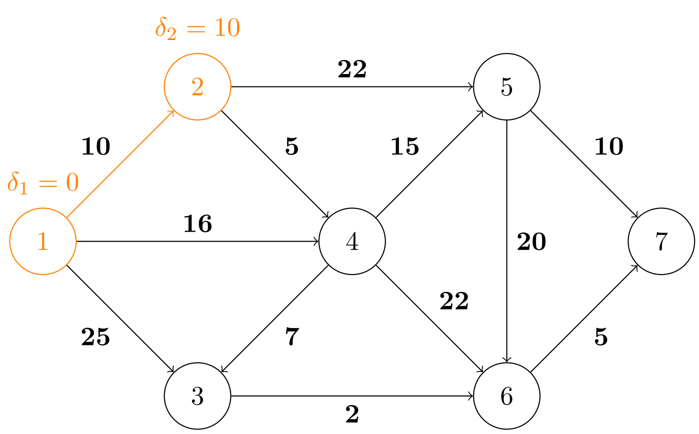
On détermine le chemin le plus court menant de 1 à j_1
min $\{\delta_1 + \lambda_{12}\} =$ min $\{0 + 10\} = 10$
marquer $j_1 = 2$ avec $\delta_2 = 10$

Étape 3:

$EM \leftarrow EM \cup \{j_1\}$ avec $\delta_{21} = \delta_1 + \lambda_{12} = 10$
$EM = \{1, 2\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 2:

$EM = \{1, 2\}$

Étape 1:

On identifie le sommet adjacent non marqué situé le plus près de:

1. $\min \{\lambda_{13}, \lambda_{14}\} = \min \{25, 16\} = 16 \Rightarrow j_1 = 4$

2. $\min \{\lambda_{24}, \lambda_{25}\} = \min \{5, 22\} = 5 \Rightarrow j_2 = 4$

Étape 2:

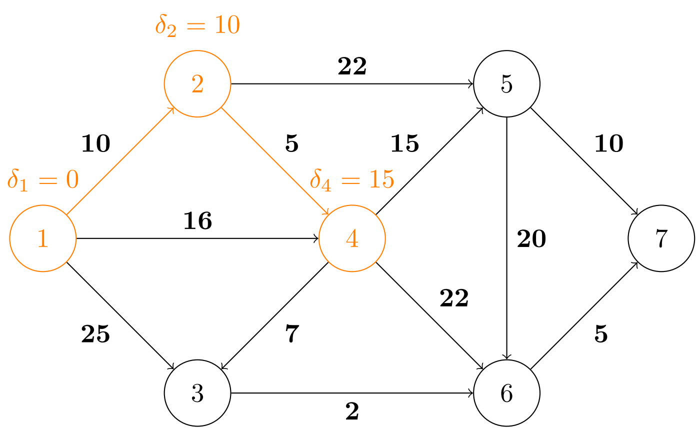
$\min \{\delta_1 + \lambda_{14}, \delta_2 + \lambda_{24}\} = \min \{0 + 16, 10 + 5\} = 15$
marquer le sommet $j_2 = 4$ avec $\delta_4 = 15$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération $\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 3:

$EM = \{1, 2, 4\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** $\min\ \{\lambda_{13}\} = 25\ \Rightarrow j_1 = 3$

- **(2)** $\min\ \{\lambda_{25}\} = 22\ \Rightarrow j_2 = 5$

- **(4)** $\min\ \{\lambda_{43}, \lambda_{45}, \lambda_{46},\} = \min\ \{7, 15, 22\} = 7\ \Rightarrow j_4 = 3$

Étape 2:

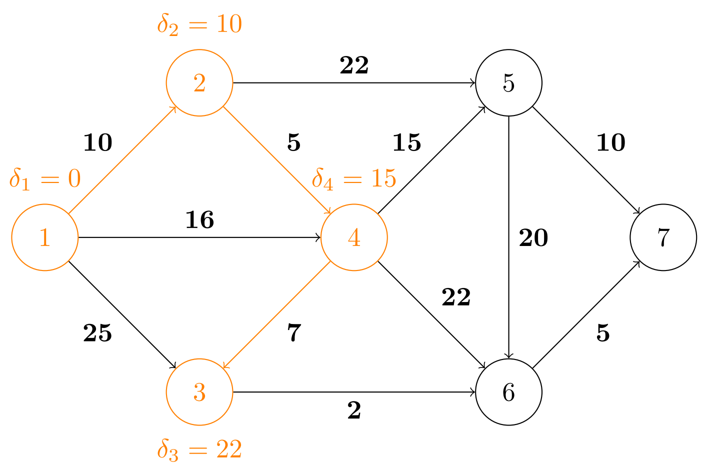
$\min\ \{\delta_1 + \lambda_{13}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{43}\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\} = \min\ \{0 + 25\ ,\ 15 + 7\ ,\ \} = 22$
marquer le sommet $j_4 = 3$ avec $\delta_3 = 22$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 4:

$EM = \{1, 2, 4, 3\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** min $\{\} = \infty$
- **(2)** min $\{22\} \Rightarrow j_2 = 5$
- **(4)** min $\{22, 15\} \Rightarrow j_4 = 5$
- **(3)** min $\{2\} \Rightarrow j_3 = 6$

Étape 2:

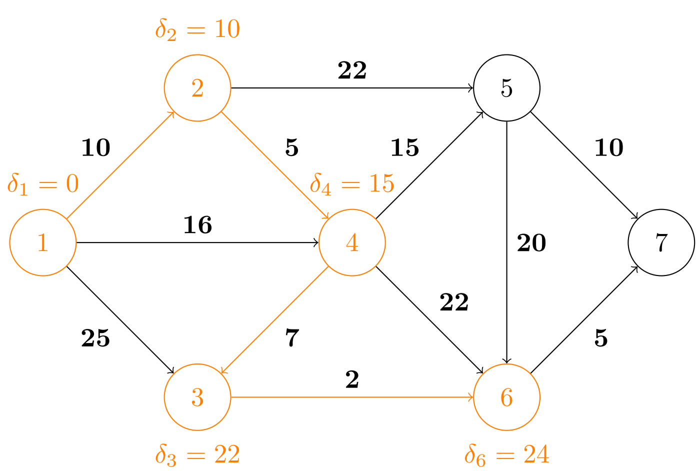
min $\{\infty\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{45}\ ,\ \delta_3 + \lambda_{36}\} =$ min $\{10 + 22\ ,\ 15 + 15\ ,\ 22 + 2\} = 24$
marquer le sommet $j_3 = 6$ avec $\delta_4 = 24$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 5:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** min $\{\} = \infty$
- **(2)** min $\{22\} \Rightarrow j_2 = 5$
- **(4)** min $\{22, 15\} \Rightarrow j_4 = 5$
- **(3)** min $\{2\} \Rightarrow j_3 = 6$
- **(6)** min $\{5\} \Rightarrow j_6 = 7$

Étape 2:

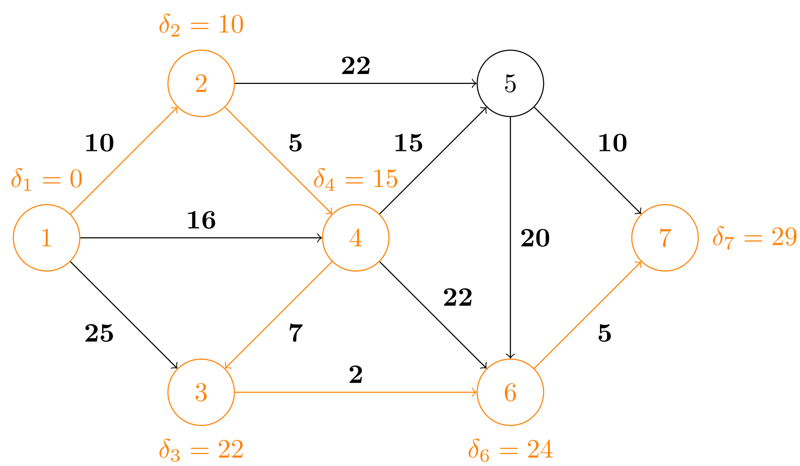
min $\{\infty \, , \, \delta_2 + \lambda_{25} \, , \, \delta_4 + \lambda_{45} \, , \, \infty \, , \, \delta_6 + \lambda_{67}\} =$ min $\{\infty \, , \, 10 + 22 \, , \, 15 + 15 \, , \, \infty \, , \, 24 + 5\} = 29$
marquer le sommet $j_6 = 7$ avec $\delta_7 = 29$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6, 7\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 6:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** min $\{\} = \infty$
- **(2)** min $\{22\} \Rightarrow j_2 = 5$
- **(4)** min $\{22, 15\} \Rightarrow j_4 = 5$
- **(3)** min $\{\} = \infty$
- **(6)** min $\{\} = \infty$
- **(7)** min $\{\} = \infty$

Étape 2:

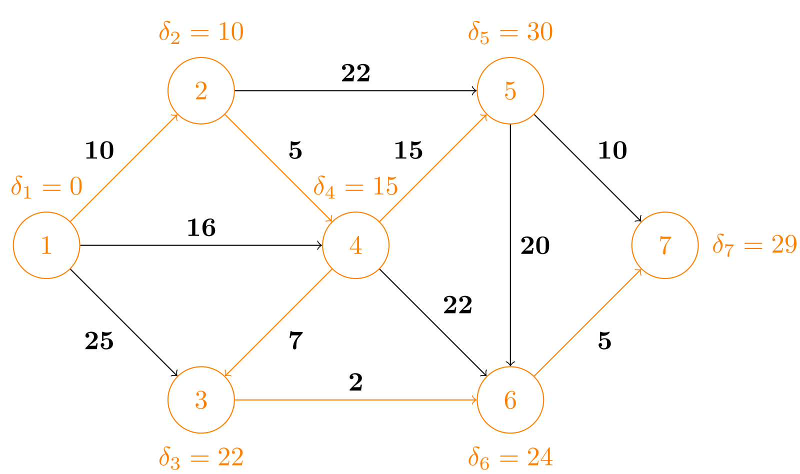
min $\{\infty\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{45}\ ,\ \infty\ ,\ \infty\ ,\ \infty\} = $ min $\{\infty\ ,\ 10 + 22\ ,\ 15 + 15\ ,\ \infty\ ,\ \infty\ ,\ \infty\ ,\ \infty\} = 30$
marquer le sommet $j_4 = 5$ avec $\delta_5 = 30$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6, 7, 5\}$

Étape 4:

$\overline{EM} = \emptyset$, alors on arrête



Question 3

(a)

Pour trouver la matrice de coût, on utilise la formule suivante:

$$c_{ik} = \sum_{j=1,2,3,4} q_{ij} \times d$$

soit π une matrice de coût de taille 4×4:

$$\pi = \begin{pmatrix} 10 \times 50 + 7 \times 30 + 0 \times 70 + 11 \times 100 & 10 \times 50 + 7 \times 30 + 0 \times 50 + 11 \times 60 & 10 \times 95 + 7 \times 55 + 0 \times 25 + 11 \times 55 & 1180 \\ 2 \times 50 + 30 + 8 \times 70 + 4 \times 100 & 770 & 665 & 695 \\ 4 \times 50 + 9 \times 30 + 6 \times 70 + 0 \times 100 & 770 & 1025 & 1095 \\ 3 \times 50 + 5 \times 30 + 2 \times 70 + 7 \times 100 & 820 & 995 & 745 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1810 & 1370 & 1940 & 1180 \\ 1090 & 770 & 665 & 695 \\ 890 & 770 & 1025 & 1095 \\ 1140 & 820 & 995 & 745 \end{pmatrix}$$

(b)

Étape 1:

Identifier le coût minimal de chaque ligne et le soustraire de chaque élément de la ligne. On obtient la matrice suivante:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1810 & 1370 & 1940 & 1180 \\ 1090 & 770 & 665 & 695 \\ 890 & 770 & 1025 & 1095 \\ 1140 & 820 & 995 & 745 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 630 & 190 & 760 & 0 \\ 425 & 105 & 0 & 30 \\ 120 & 0 & 255 & 325 \\ 395 & 75 & 250 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 2:

Identifier le coût minimal de chaque colonne et le soustraire de chaque élément de la colonne. On obtient la matrice suivante:

$$\pi = \begin{pmatrix} 630 & 190 & 760 & 0 \\ 425 & 105 & 0 & 30 \\ 120 & 0 & 255 & 325 \\ 395 & 175 & 250 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 510 & 190 & 760 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 255 & 325 \\ 275 & 75 & 250 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 3:

Determiner si une affectation de coût 0 est possible.

$$\begin{pmatrix} 510 & 190 & 760 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 255 & 325 \\ 275 & 75 & 250 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons besoin de 3 lignes pour couvrir tout les 0 et 3 étant inférieur à 4, nous continuons car il est impossible d'obtenir une affectation de coût 0.

Étape 4:

Ajouter des 0 dans la matrice des coûts :

1. Identifier le plus petit coût non affecté couvert par une ligne ou une colonne $\Rightarrow$ 75
2. soustraire ce coût à chaque élément non couvert par une ligne ou une colonne
3. Ajouter ce coût à chaque élément couvert par une ligne et une colonne

$$\begin{pmatrix} 510 & 190 & 760 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 255 & 325 \\ 275 & \color{red}{75} & 250 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 435 & 115 & 685 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 105 \\ 0 & 0 & 255 & 400 \\ 200 & 0 & 175 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 5:

Répéter l'étape 3 et 4 jusqu'à ce qu'une affectation de coût 0 soit possible.

$$\begin{pmatrix} 435 & 115 & 685 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 105 \\ 0 & 0 & 255 & 400 \\ 200 & 0 & 175 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons besoin de 4 lignes pour couvrir tout les 0 et 3 étant inférieur à 4, une affectation de coût 0 est possible.

on identifie l'affectation de coût 0 :

$$\begin{pmatrix} 435 & 115 & 685 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 105 \\ 0 & 0 & 255 & 400 \\ 200 & 0 & 175 & 0 \end{pmatrix}$$

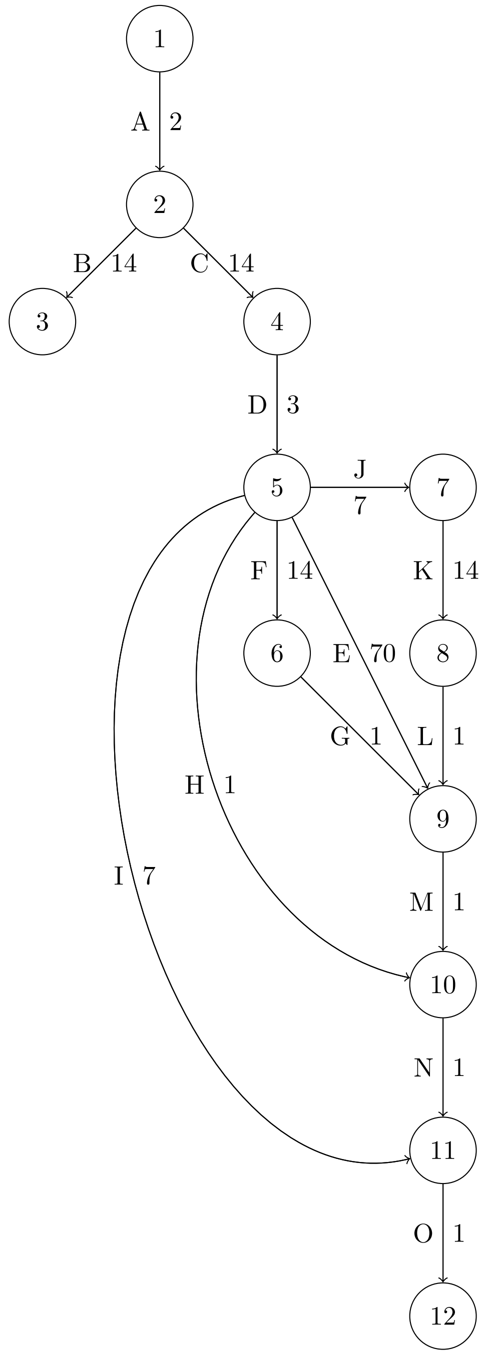
Ceci nous donne l'affectation suivante dans la matrice des coûts initiale:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1810 & 1370 & 1940 & \color{red}{1180} \\ 1090 & 770 & \color{red}{665} & 695 \\ \color{red}{890} & 770 & 1025 & 1095 \\ 1140 & \color{red}{820} & 995 & 745 \end{pmatrix}$$

- Affecter la machine 1 à l'emplacement d
- Affecter la machine 2 à l'emplacement c
- Affecter la machine 3 à l'emplacement a
- Affecter la machine 4 à l'emplacement b

Coût total = 1180 + 665 + 890 + 820 = 3555

Question 4



1
A 2
2
B 14
C 14
3
4
D 3
5
J
7
7
F 14
K 14
6
E 70
8
G 1
L 1
H 1
9
I 7
M 1
10
N 1
11
O 1
12

Table 1: Temps le plus tard

Étape i	$j \in p_i$	$LT_j - t_{ij}$	LT_i
12	-	-	92
11	12	92-1	91
10	11	91-1	90
9	10	90-1	89
8	9	89-1	88
7	8	88-14	74
6	9	89-1	88
5	6	88-14	
	7	74-7	
	9	89-70	19
	10	90-1	
	11	91-7	
4	5	19-3	16
3	4	16-0	16
2	3	16-14	2
2	4	16-14	
1	2	2-2	0

Table 2: Temps le plus tôt

Étape i	$j \in B_i$	$ET_j + t_{ji}$	ET_i
1	-	-	0
2	1	0+12	2
3	2	2+14	16
4	2	2+14	16
	3	2+0	
5	4	16+3	19
6	5	19+14	33
7	5	19+7	26
8	7	26 +14	40
9	5	19+70	89
	6	33+1	
	8	40+1	
10	5	19+1	90
	9	89+1	
11	5	19+7	91
	10	90+1	
12	11	91+1	92

Table 3: Écarts

Tâches	$LT_j - (ET_i + t_{ij})$	Écart
(1,2)	$2 - (0 + 2)$	0
(2,3)	$16 - (2 + 14)$	0
(2,4)	$16 - (2 + 14)$	0
(3,4)	$16 - (16 + 0)$	0
(4,5)	$19 - (16 + 3)$	0
(5,6)	$88 - (19 + 14)$	55
(5,7)	$76 - (19 + 7)$	48
(5,9)	$89 - (19 + 70)$	0
(5,10)	$90 - (19 + 1)$	70
(5,11)	$91 - (19 + 7)$	65
(6,9)	$89 - (33 + 1)$	55
(7,8)	$88 - (26 + 14)$	48
(8,9)	$89 - (40 + 1)$	48
(9,10)	$90 - (89 + 1)$	0
(10,11)	$91 - (90 + 1)$	0
(11,12)	$92 - (91 + 1)$	0