Devoir 3

Emeric Laberge
20220275
Sara Haddad
20208373

Dans le cadre du cours
IFT 1575

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal
Canada

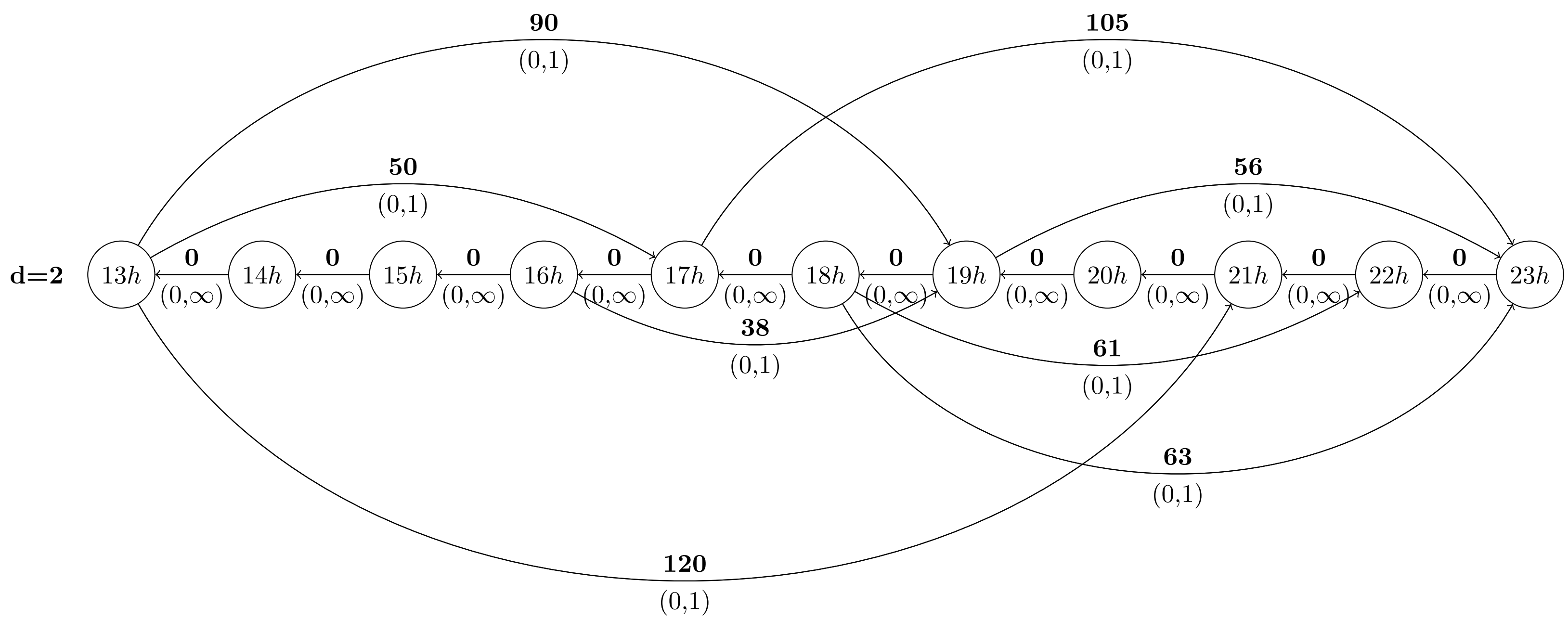
27 mars 2023

Question 1:

Le propriétaire d'un restaurant a besoin de deux serveurs de 13h à 23h le jour de Noël. Le tableau plus bas présente les propositions de 9 serveurs en termes d'horaire de travail et de salaire demandé. Le propriétaire veut savoir quelles propositions doivent être retenues afin de minimiser ses coûts tout en disposant de deux serveurs exactement en tout temps. Il faut noter que le propriétaire peut engager un serveur pour un nombre d'heures moindre que ce qui est proposé, mais il devra quand même payer le salaire complet demandé par le serveur (par exemple, si le propriétaire engage le serveur 1 de 17h à 19h il devra quand même lui verser un salaire de 68$). Définir un réseau permettant de représenter ce problème comme un problème de flot à coût minimal.

serveur	1	2	3	4	5	6	7	8	9
heures	17-21	13-19	16-19	18-22	19-23	13-17	18-23	17-23	13-21
salaire	68$	90$	38$	61$	56$	60$	63$	105$	120$

Le réseau nécessite une page complète et donc se trouve à la prochaine page



d=2
13h
14h
15h
16h
17h
18h
19h
20h
21h
22h
23h
0
(0,∞)
90
(0,1)
105
(0,1)
50
(0,1)
56
(0,1)
38
(0,1)
61
(0,1)
63
(0,1)
120
(0,1)

Question 2

Initialisation: $EM = \{1\}$; $\delta_1 = 0$

Itération 1:

Étape 1:

Les successeurs de 1 sont 2, 3 et 4.
$\lambda_{12} = 10 \quad \lambda_{13} = 25 \quad \lambda_{14} = 16$
$\min \{\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}\} = \min\{10, 25, 16\} = 10 \Rightarrow j_1 = 2$

Étape 2:

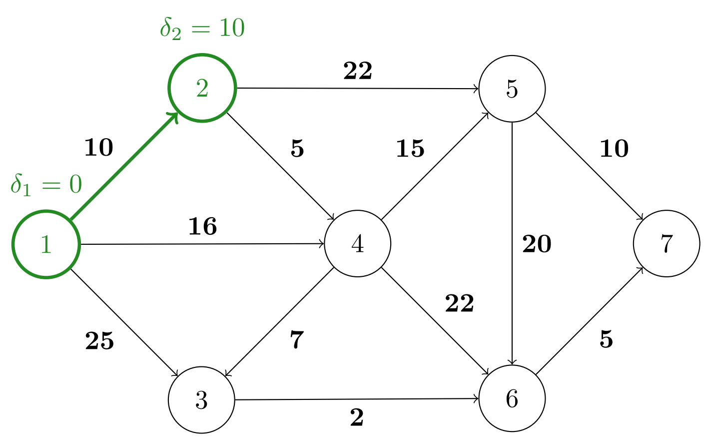
On détermine le chemin le plus court menant de 1 à j_1
$\min \{\delta_1 + \lambda_{12}\} = \min \{0 + 10\} = 10$
marquer $j_1 = 2$ avec $\delta_2 = 10$

Étape 3:

$EM \leftarrow EM \cup \{j_1\}$ avec $\delta_{21} = \delta_1 + \lambda_{12} = 10$
$EM = \{1, 2\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 2:

$EM = \{1, 2\}$

Étape 1:

On identifie le sommet adjacent non marqué situé le plus près de:

1. $\min\ \{\lambda_{13}, \lambda_{14}\} = \min\ \{25, 16\} = 16 \Rightarrow j_1 = 4$

2. $\min\ \{\lambda_{24}, \lambda_{25}\} = \min\ \{5, 22\} = 5 \Rightarrow j_2 = 4$

Étape 2:

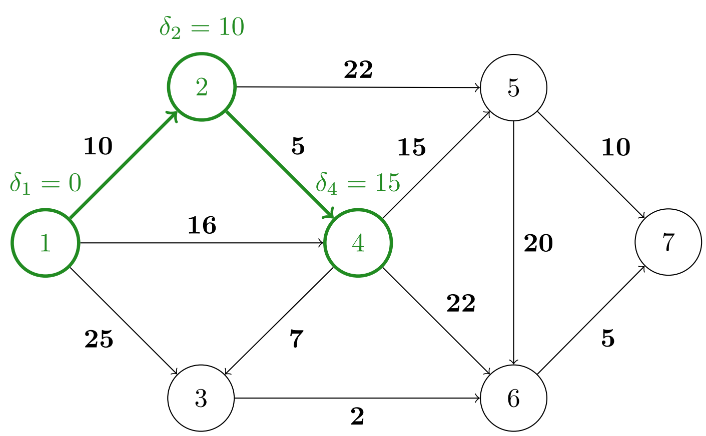
$\min\ \{\delta_1 + \lambda_{14}, \delta_2 + \lambda_{24}\} = \min\ \{0 + 16, 10 + 5\} = 15$
marquer le sommet $j_2 = 4$ avec $\delta_4 = 15$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération $\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 3:

$EM = \{1, 2, 4\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** min $\{\lambda_{13}\} = 25 \Rightarrow j_1 = 3$

- **(2)** min $\{\lambda_{25}\} = 22 \Rightarrow j_2 = 5$

- **(4)** min $\{\lambda_{43}, \lambda_{45}, \lambda_{46},\} = $ min $\{7, 15, 22\} = 7 \Rightarrow j_4 = 3$

Étape 2:

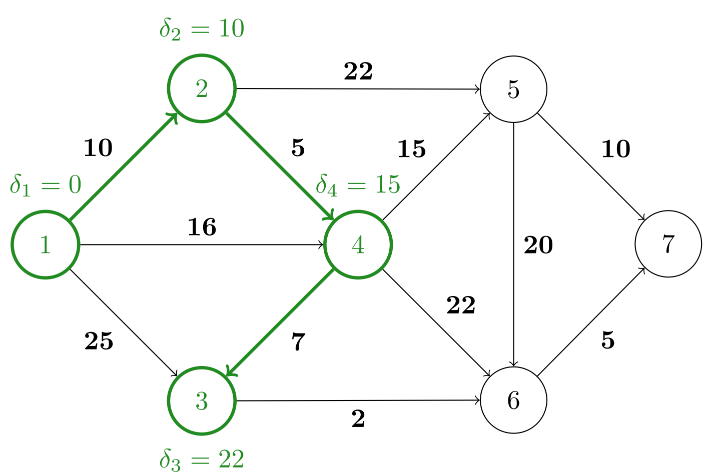
min $\{\delta_1 + \lambda_{13}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{43}\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\} = $ min $\{0 + 25\ ,\ 15 + 7\ ,\ 10 + 22\} = 22$
marquer le sommet $j_4 = 3$ avec $\delta_3 = 22$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 4:

$EM = \{1, 2, 4, 3\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** min $\{\} = \infty$
- **(2)** min $\{22\} \Rightarrow j_2 = 5$
- **(4)** min $\{22, 15\} \Rightarrow j_4 = 5$
- **(3)** min $\{2\} \Rightarrow j_3 = 6$

Étape 2:

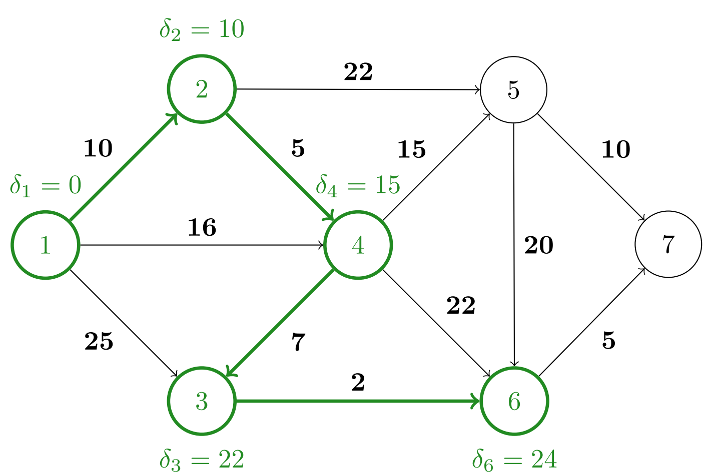
min $\{\infty\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{45}\ ,\ \delta_3 + \lambda_{36}\} =$ min $\{10 + 22\ ,\ 15 + 15\ ,\ 22 + 2\} = 24$
marquer le sommet $j_3 = 6$ avec $\delta_4 = 24$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 5:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** min $\{\} = \infty$
- **(2)** min $\{22\} \Rightarrow j_2 = 5$
- **(4)** min $\{22, 15\} \Rightarrow j_4 = 5$
- **(3)** min $\{2\} \Rightarrow j_3 = 6$
- **(6)** min $\{5\} \Rightarrow j_6 = 7$

Étape 2:

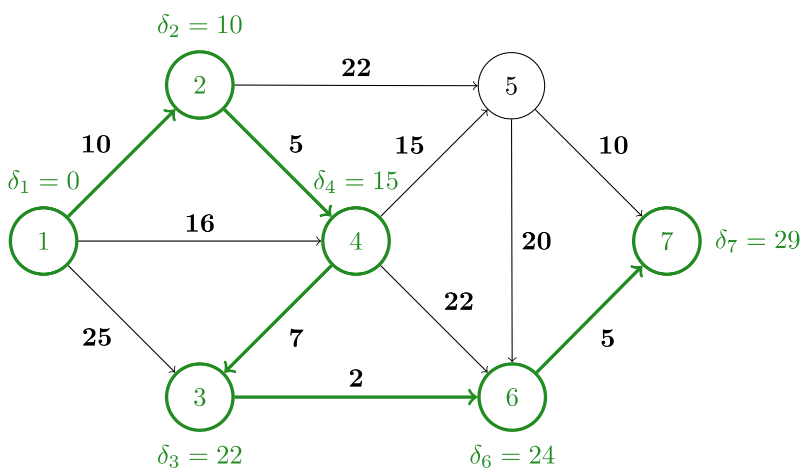
min $\{\infty\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{45}\ ,\ \infty\ ,\ \delta_6 + \lambda_{67}\} = \min\ \{\infty\ ,\ 10 + 22\ ,\ 15 + 15\ ,\ \infty\ ,\ 24 + 5\} = 29$
marquer le sommet $j_6 = 7$ avec $\delta_7 = 29$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6, 7\}$

Étape 4:

$\overline{EM} \neq \emptyset$, alors on effectue un autre itération



Itération 6:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6\}$

Étape 1:

On identifie les sommets adjacents non marqués situé les plus près de:

- **(1)** $\min\{\} = \infty$
- **(2)** $\min\{22\} \Rightarrow j_2 = 5$
- **(4)** $\min\{15\} \Rightarrow j_4 = 5$
- **(3)** $\min\{\} = \infty$
- **(6)** $\min\{\} = \infty$
- **(7)** $\min\{\} = \infty$

Étape 2:

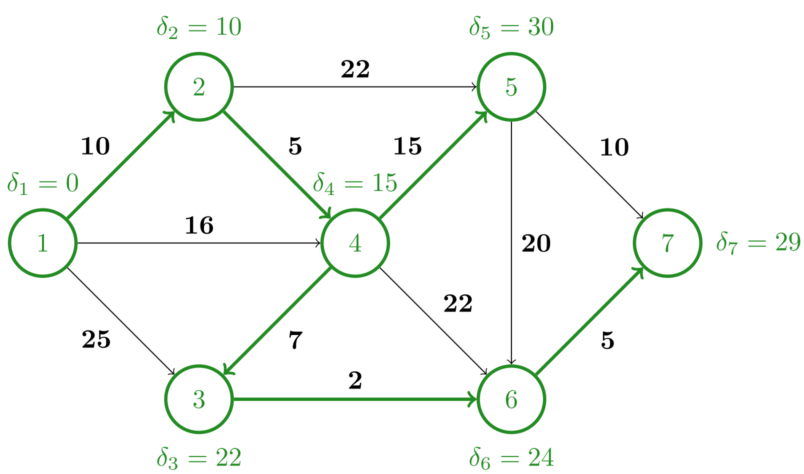
$\min\{\infty\ ,\ \delta_2 + \lambda_{25}\ ,\ \delta_4 + \lambda_{45}\ ,\ \infty\ ,\ \infty\ ,\ \infty\} = \min\{\infty\ ,\ 10 + 22\ ,\ 15 + 15\ ,\ \infty\ ,\ \infty\ ,\ \infty\ ,\ \infty\} = 30$
marquer le sommet $j_4 = 5$ avec $\delta_5 = 30$

Étape 3:

$EM = \{1, 2, 4, 3, 6, 7, 5\}$

Étape 4:

$\overline{EM} = \emptyset$, alors on arrête



Question 3

(a)

Pour trouver la matrice de coût, on utilise la formule suivante:

$$c_{ik} = \sum_{j=1,2,3,4} q_{ij} \times d$$

soit π une matrice de coût de taille 4×4:

$$\pi = \begin{pmatrix} 10\times 50+7\times 30+0\times 70+11\times 100 & 10\times 50+7\times 30+0\times 50+11\times 60 & 10\times 95+7\times 55+0\times 25+11\times 55 & 1180 \\ 2\times 50+30+8\times 70+4\times 100 & 770 & 665 & 695 \\ 4\times 50+9\times 30+6\times 70+0\times 100 & 770 & 1025 & 1095 \\ 3\times 50+5\times 30+2\times 70+7\times 100 & 820 & 995 & 745 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1810 & 1370 & 1940 & 1180 \\ 1090 & 770 & 665 & 695 \\ 890 & 770 & 1025 & 1095 \\ 1140 & 820 & 995 & 745 \end{pmatrix}$$

(b)

Étape 1:

Identifier le coût minimal de chaque ligne et le soustraire de chaque élément de la ligne. On obtient la matrice suivante:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1810 & 1370 & 1940 & 1180 \\ 1090 & 770 & 665 & 695 \\ 890 & 770 & 1025 & 1095 \\ 1140 & 820 & 995 & 745 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 630 & 190 & 760 & 0 \\ 425 & 105 & 0 & 30 \\ 120 & 0 & 255 & 325 \\ 395 & 75 & 250 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 2:

Identifier le coût minimal de chaque colonne et le soustraire de chaque élément de la colonne. On obtient la matrice suivante:

$$\pi = \begin{pmatrix} 630 & 190 & 760 & 0 \\ 425 & 105 & 0 & 30 \\ 120 & 0 & 255 & 325 \\ 395 & 175 & 250 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 510 & 190 & 760 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 255 & 325 \\ 275 & 75 & 250 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 3:

Determiner si une affectation de coût 0 est possible.

$$\begin{pmatrix} 510 & 190 & 760 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 255 & 325 \\ 275 & 75 & 250 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons besoin de 3 lignes pour couvrir tout les 0 et 3 étant inférieur à 4, nous continuons car il est impossible d'obtenir une affectation de coût 0.

Étape 4:

Ajouter des 0 dans la matrice des coûts :

1. Identifier le plus petit coût non affecté couvert par une ligne ou une colonne $\Rightarrow 75$
2. soustraire ce coût à chaque élément non couvert par une ligne ou une colonne
3. Ajouter ce coût à chaque élément couvert par une ligne et une colonne

$$\begin{pmatrix} 510 & 190 & 760 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 255 & 325 \\ 275 & \color{red}{75} & 250 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 435 & 115 & 685 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 105 \\ 0 & 0 & 255 & 400 \\ 200 & 0 & 175 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 5:

Répéter l'étape 3 et 4 jusqu'à ce qu'une affectation de coût 0 soit possible.

$$\begin{pmatrix} 435 & 115 & 685 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 105 \\ 0 & 0 & 255 & 400 \\ 200 & 0 & 175 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons besoin de 4 lignes pour couvrir tout les 0 et 3 étant inférieur à 4, une affectation de coût 0 est possible.

on identifie l'affectation de coût 0 :

$$\begin{pmatrix} 435 & 115 & 685 & 0 \\ 305 & 105 & 0 & 105 \\ 0 & 0 & 255 & 400 \\ 200 & 0 & 175 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne l'affectation suivante dans la matrice des coûts initiale:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1810 & 1370 & 1940 & \color{red}{1180} \\ 1090 & 770 & \color{red}{665} & 695 \\ \color{red}{890} & 770 & 1025 & 1095 \\ 1140 & \color{red}{820} & 995 & 745 \end{pmatrix}$$

- Affecter la machine 1 à l'emplacement d
- Affecter la machine 2 à l'emplacement c
- Affecter la machine 3 à l'emplacement a
- Affecter la machine 4 à l'emplacement b

Coût total = 1180 + 665 + 890 + 820 = 3555

Question 4

Table 1: Temps le plus tard

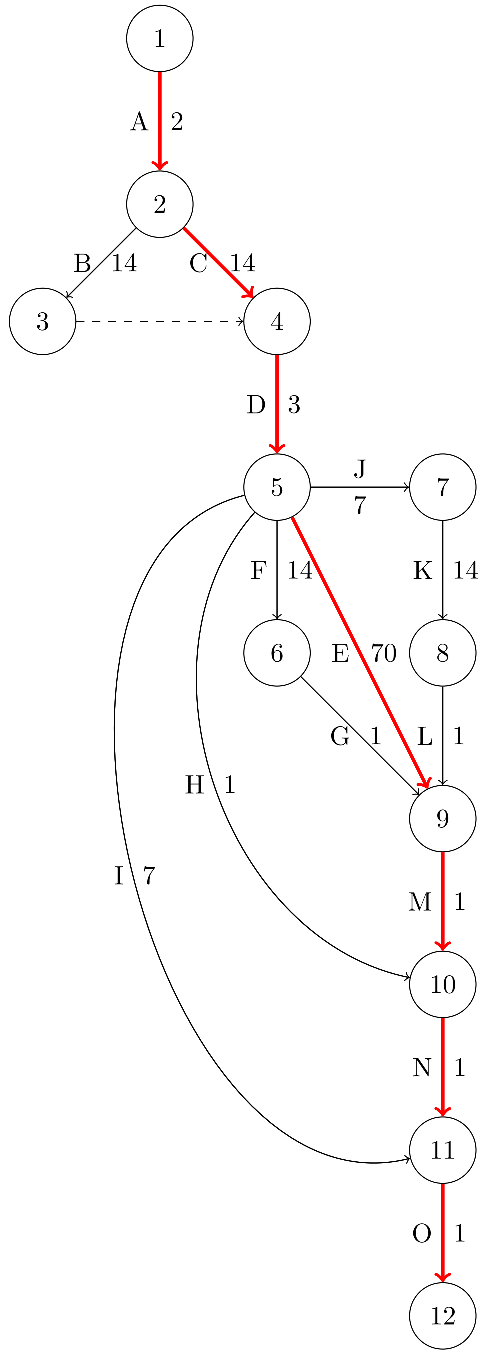
Étape i	$j \in p_i$	$LT_j - t_{ij}$	LT_i
12	-	-	92
11	12	92-1	91
10	11	91-1	90
9	10	90-1	89
8	9	89-1	88
7	8	88-14	74
6	9	89-1	88
5	6	88-14	
	7	74-7	
	9	89-70	19
	10	90-1	
	11	91-7	
4	5	19-3	16
3	4	16-0	16
2	3	16-14	2
2	4	16-14	
1	2	2-2	0

Table 2: Temps le plus tôt

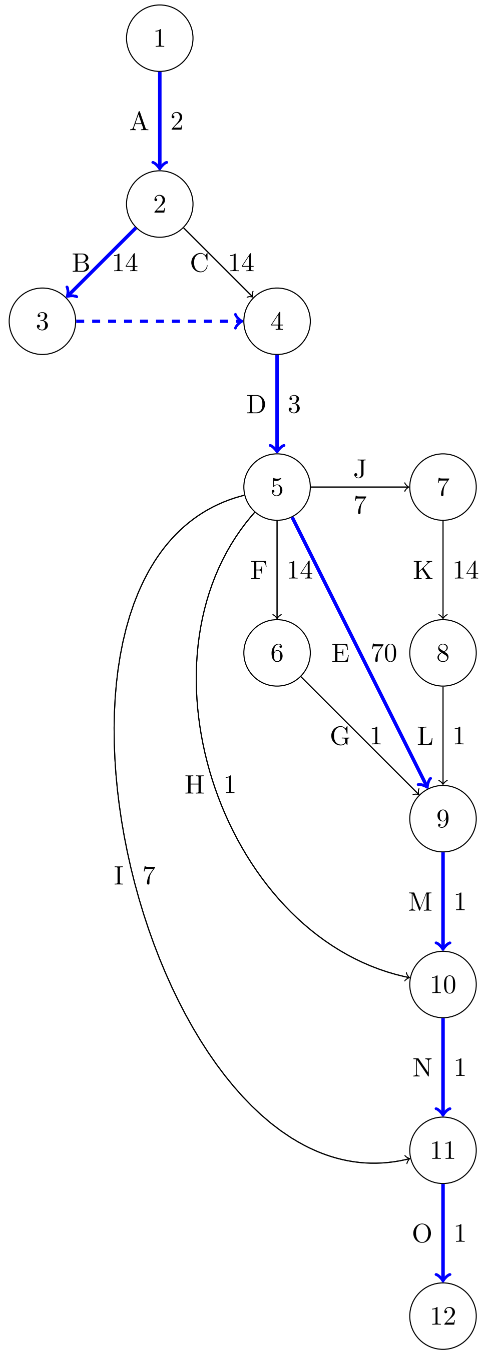
Étape i	$j \in B_i$	$ET_j + t_{ji}$	ET_i
1	-	-	0
2	1	0+12	2
3	2	2+14	16
4	2	2+14	16
	3	2+0	
5	4	16+3	19
6	5	19+14	33
7	5	19+7	26
8	7	26 +14	40
9	5	19+70	89
	6	33+1	
	8	40+1	
10	5	19+1	90
	9	89+1	
11	5	19+7	91
	10	90+1	
12	11	91+1	92

Table 3: Écarts

Tâches	$LT_j - (ET_i + t_{ij})$	Écart
(1,2)	$2 - (0 + 2)$	0
(2,3)	$16 - (2 + 14)$	0
(2,4)	$16 - (2 + 14)$	0
(3,4)	$16 - (16 + 0)$	0
(4,5)	$19 - (16 + 3)$	0
(5,6)	$88 - (19 + 14)$	55
(5,7)	$76 - (19 + 7)$	48
(5,9)	$89 - (19 + 70)$	0
(5,10)	$90 - (19 + 1)$	70
(5,11)	$91 - (19 + 7)$	65
(6,9)	$89 - (33 + 1)$	55
(7,8)	$88 - (26 + 14)$	48
(8,9)	$89 - (40 + 1)$	48
(9,10)	$90 - (89 + 1)$	0
(10,11)	$91 - (90 + 1)$	0
(11,12)	$92 - (91 + 1)$	0



Durée $= 2 + 14 + 3 + 70 + 1 + 1 + 1 = \mathbf{92}$



Durée $= 2 + 14 + 3 + 70 + 1 + 1 + 1 = \mathbf{92}$