Devoir 3

Emeric Laberge

Dans le cadre du cours
IFT 1575

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal
Canada
24 mars 2023

1. **(25 points)** Le propriétaire d'un restaurant a besoin de deux serveurs de 13h à 23h le jour de Noël. Le tableau plus bas présente les propositions de 9 serveurs en termes d'horaire de travail et de salaire demandé. Le propriétaire veut savoir quelles propositions doivent être retenues afin de minimiser ses coûts tout en disposant de deux serveurs exactement en tout temps. Il faut noter que le propriétaire peut engager un serveur pour un nombre d'heures moindre que ce qui est proposé, mais il devra quand même payer le salaire complet demandé par le serveur (par exemple, si le propriétaire engage le serveur 1 de 17h à 19h il devra quand même lui verser un salaire de 68$). Définir un réseau permettant de représenter ce problème comme un problème de flot à coût minimal.

Serveur	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Heures	17-21	13-19	16-19	18-22	19-23	13-17	18-23	17-23	13-21
Salaire	68$	90$	38$	61$	56$	60$	63$	105$	120$

2. (20 points) Voici une description de l'algorithme de Dijkstra permettant d'identifier un *chemin* plus court d'un sommet *s* à tous les autres sommets dans un graphe orienté G = (N, A) où N est l'ensemble des sommets, A est l'ensemble des arcs et où une longueur $\lambda_{ij} \geq 0$ est associée à chaque arc $(i, j) \in A$. Dans cet algorithme, EM désigne l'ensemble des sommets marqués, $\overline{EM}$ l'ensemble des sommets non marqués et $N_i^+ = \{j \in N \mid (i, j) \in A\}$ l'ensemble des sommets successeurs du sommet $i \in N$.

Étape 0. $EM = \{s\}$, $\delta_s = 0$.

Étape 1. Pour chaque sommet marqué $i \in EM$, déterminer le sommet $j_i \in N_i^+ \cap \overline{EM}$ (successeur de *i* et non marqué) situé le plus près de *i* :

$$\lambda_{ij_i} = \min_{j \in N_i^+ \cap \overline{EM}} \{\lambda_{ij}\}$$

Étape 2. Déterminer le chemin plus court menant à un sommet non marqué :

$$\delta_k + \lambda_{kj_k} = \min_{i \in EM} \left\{\delta_i + \lambda_{ij_i}\right\}$$

Étape 3. $EM \leftarrow EM \cup \{j_k\}$ et $\delta_{j_k} = \delta_k + \lambda_{kj_k}$.

Étape 4. Si $\overline{EM} \neq \varnothing$ aller à l'Étape 1, sinon STOP (tous les sommets sont marqués).

Appliquer cet algorithme afin d'identifier les chemins plus courts du sommet 1 à tous les autres sommets dans le graphe illustré plus bas où les nombres associés aux arcs correspondent à leur longueur.

3. (25 points) Le plancher d'un atelier de fabrication de pièces automobiles est actuellement occupé par quatre machines 1, 2, 3, 4. Quatre emplacements sur le plancher de l'atelier a, b, c, d, ont été identifiés pour l'installation de quatre nouvelles machines I, II, III, IV. Le problème consiste alors à affecter les quatre nouvelles machines aux quatre emplacements disponibles de façon à minimiser le coût total. Pour calculer ce coût, on dispose des informations suivantes :

(i) Le flot ou nombre de pièces q_{ij}, i = I, II, III, IV; $j = 1, 2, 3, 4$, qui seront transportées des nouvelles machines vers les machines actuelles, tel que rapporté dans la matrice Q.

$$Q = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 7 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) La matrice des distances d_{jk}, $j = 1, 2, 3, 4$; k = a, b, c, d, entre l'emplacement des machines actuelles et les emplacements disponibles pour les nouvelles machines, tel que rapporté dans la matrice D.

$$D = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 50 & 95 & 45 \\ 30 & 30 & 55 & 65 \\ 70 & 50 & 25 & 55 \\ 100 & 60 & 55 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le coût d'affectation c_{ik} , i = I, II, III, IV; k = a, b, c, d, de chaque nouvelle machine à chaque emplacement disponible se calcule alors ainsi :

$$c_{ik} = \sum_{j=1,2,3,4} q_{ij} \cdot d_{jk}$$

(a)

4. (30 points) Soit un projet comprenant les tâches suivantes, avec leur durée et leurs relations de précédence :

Tâches	Prédécesseurs immédiats	Durée
A	-	2
B	A	14
C	A	14
D	B, C	3
E	D	70
F	D	14
G	F	1
H	D	1
I	D	7
J	D	7
K	J	14
L	K	1
M	E, G, L	1
N	H, M	1
O	I, N	1