

Teoria da Probabilidade

Disciplina: Probabilidade e Estatística
Curso: Ciência da Computação
Professor: Leandro Bordin

✓ **Recapitulando...**



✓ **Definição de estatística**

- ✓ **A estatística está interessada nos métodos científicos para coleta, organização, resumo, apresentação e análise de dados, bem como na obtenção de conclusões válidas e na tomada de decisões razoáveis baseadas em tais análises**



✓ **Recapitulando...**

✓ **Ramos da estatística**

- ✓ **Estatística Descritiva** – compreende o manejo de dados com a intenção de resumí-los ou descrevê-los por meio de tabelas e gráficos; engloba a organização, o resumo e a simplificação de informações que podem ser muito complexas
- ✓ **Inferência Estatística** – refere-se ao processo de generalização a partir de resultados particulares (amostra); como essa inferência pode não ser absolutamente certa, a probabilidade é muitas vezes usada no estabelecimento das conclusões

✓ **Recapitulando...**

✓ **Ramos da estatística**

- ✓ **Probabilidade** – proporciona uma base racional para lidar com situações influenciadas por fatores relacionados com o acaso, assim como estimar erros

Tem-se, então, três áreas entrelaçadas de interesse para a estatística: a descrição e resumo de dados, a análise e interpretação de dados amostrais e a probabilidade



**OBJETO DE ESTUDO
DA AULA**

✓ **História da probabilidade**

- ✓ **A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta**

- ✓ **Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade**



Pierre Simon Laplace é considerado o fundador da teoria das probabilidades

✓ **História da probabilidade**

- ✓ **Independente de qual seja a aplicação em particular, a utilização da probabilidade indica a existência de um grau de incerteza, um elemento do acaso, quanto à ocorrência ou não de um evento futuro**
- ✓ **A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um evento em um experimento aleatório**

✓ **Experimento aleatório**

✓ É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

✓ É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ex:

- ✓ 1) Lançar uma moeda
- ✓ 2) Lançar um dado
- ✓ 3) Lançar duas moedas

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

✓ É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ex:

- ✓ 1) Lançar uma moeda – $S = \{K, C\}$
sendo K = cara; C = coroa
- ✓ 2) Lançar um dado – $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ✓ 3) Lançar duas moedas – $S = \{KK, KC, CC, CK\}$

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

- ✓ 4) Lançar dois dados

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

- ✓ 4) Lançar dois dados

$$S = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Evento (E)**

✓ São os resultados de um experimento; um evento, também, pode ser definido como qualquer subconjunto do espaço amostral. Ex:

- 1) Experimento: Lançar um dado
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $E = \text{ocorrência de números pares}$

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Evento (E)**

✓ São os resultados de um experimento; um evento, também, pode ser definido como qualquer subconjunto do espaço amostral. Ex:

1) Experimento: Lançar um dado

S = {1,2,3,4,5,6}

E = ocorrência de números pares = {2,4,6}

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Evento (E)**

1) Experimento: Lançar dois dados

$$S = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

E = soma sete =

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Evento (E)**

1) Experimento: Lançar dois dados

$$S = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

E = soma sete = {(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)}

✓ **Noção intuitiva de probabilidade**

✓ Suponha que um evento possa ocorrer de **h** maneiras diferentes, em um total de **n** modos possíveis, igualmente prováveis

✓ Então, a probabilidade de ocorrência do evento (denominada sucesso) é definida por:

$$p = P(E) = \frac{h}{n}$$

sendo:

h = número de casos favoráveis a um acontecimento

n = número total de casos possíveis

✓ **Noção intuitiva de probabilidade**

$$p = P(E) = \frac{h}{n}$$



$$P(E) = \frac{\text{número_de_casos_favoráveis_n}(E)}{\text{número_de_casos_possíveis_n}(S)}$$

✓ **Noção intuitiva de probabilidade**

$$P(E) = \frac{\text{número_de_casos_favoráveis_n}(E)}{\text{número_de_casos_possíveis_n}(S)}$$



Para utilizar a probabilidade é preciso conhecer o número total de resultados possíveis de um experimento; em geral empregam-se técnicas de contagem para calcular esse número, as quais são estudadas na Análise Combinatória (princípio fundamental da contagem, arranjo, permutação e combinação)

✓ **Noção intuitiva de probabilidade**

✓ A probabilidade de não ocorrência do evento (denominada insucesso) é definida por:

$$q = P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

✓ **Axiomas de probabilidade**

✓ Para todo evento A contido no espaço amostral (S)
 $0 \leq P(A) \leq 1$

✓ O espaço amostral tem probabilidade 1
 $P(S) = 1$

✓ Disso decorre:

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

$$P(\Phi) = 0$$

Os teoremas de base das probabilidades podem ser demonstrados a partir dos axiomas das probabilidades e da teoria dos conjuntos

✓ **Exemplos**

1. No lançamento de um dado qual a probabilidade de:

- a) ocorrer o nº 3;
- b) ocorrer o nº 4 ou 5;
- c) não ocorrer o nº 3;
- d) não ocorrer o nº 4 ou 5;

✓ **Exemplos**

1. No lançamento de um dado qual a probabilidade de:

- a) ocorrer o nº 3; $P(3) = 1/6 = 16,67\%$
- b) ocorrer o nº 4 ou 5; $P(4 \text{ ou } 5) = 2/6 = 33,33\%$
- c) não ocorrer o nº 3; $P(\bar{3}) = 100\% - 16,67 = 83,33\%$
 $P(3) = 5/6 = 83,33\%$
- d) não ocorrer o nº 4 ou 5; $P(\overline{4 \text{ ou } 5}) = 100 - 33,33 = 66,67\%$
 $P(4 \text{ ou } 5) = 4/6 = 66,67\%$

✓ **Exemplos**

2. No lançamento de dois dados qual a probabilidade de ocorrer:

- a) soma 7;
- b) soma 5.

✓ **Exemplos**

2. No lançamento de dois dados qual a probabilidade de ocorrer:

- a) soma 7; $P(\text{soma } 7) = 6/36 = 16,67\%$
- b) soma 5. $P(\text{soma } 5) = 4/36 = 11,11\%$

Soma 5

Soma 7

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

S=

✓ Exemplos

3. Uma carta é retirada de um baralho (52 cartas). Qual a probabilidade desta carta:

- a) ser Rei;
- b) ser As;
- c) não ser Rei;
- d) não ser As.

4. Uma caixa é composta de 5 bolas brancas, 8 pretas e 7 azuis. Uma bola é retirada. Qual a probabilidade dela:

- a) ser azul;
- b) não ser branca.

✓ Exemplos

5. Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Considerando a retirada aleatória de uma peça, determinar a probabilidade de a peça retirada:

- a) ser defeituosa;
- b) não ser defeituosa.

6. 8 casais participam de uma reunião. Escolhendo 2 pessoas aleatoriamente qual a probabilidade de que sejam casados?

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Eventos independentes - dois ou mais eventos são independentes se a ocorrência de um não influencia a ocorrência do(s) outro(s).

✓ Eventos dependentes - dois ou mais eventos são dependentes se a ocorrência de um influencia a ocorrência do(s) outro(s)

✓ Eventos mutuamente exclusivos - são eventos que não podem ocorrer simultaneamente (não tem elemento em comum)

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Regra da adição de eventos ($A \cup B$)

✓ Eventos mutuamente exclusivos

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

✓ Eventos não mutuamente exclusivos

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Regra da adição de eventos ($A \cup B$)

✓ Exemplos

1. As probabilidades de um consumidor classificar um novo produto como muito ruim, ruim, razoável, bom, muito bom ou excelente são, respectivamente: 6%, 13%, 17%, 32%, 22% e 10%. Qual a probabilidade do novo produto ser classificado como

- a) muito ruim, ruim, razoável ou bom
- b) bom, muito bom ou excelente

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Regra da adição de eventos ($A \cup B$)

✓ Exemplos

1. As probabilidades de um consumidor classificar um novo produto como muito ruim, ruim, razoável, bom, muito bom ou excelente são, respectivamente: 6%, 13%, 17%, 32%, 22% e 10%. Qual a probabilidade do novo produto ser classificado como

a) muito ruim, ruim, razoável ou bom

$$P() = 6\% + 13\% + 17\% + 32\% = 68\%$$

b) bom, muito bom ou excelente

$$P() = 32\% + 22\% + 10\% = 64\%$$

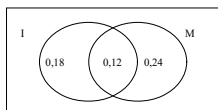
✓ Álgebra da probabilidade

✓ Regra da adição de eventos ($A \cup B$)

✓ Exemplos

2. O diagrama abaixo refere-se à procura de emprego de um recém graduado de uma escola de Administração. As letras I e M denotam a aceitação de um emprego oferecido por uma corretora de investimentos ou por uma empresa especializada em Marketing. Determinar:

- a) $P(I)$;
b) $P(M)$;
c) $P(I \cup M)$.

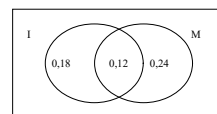


✓ Álgebra da probabilidade

✓ Regra da adição de eventos ($A \cup B$)

✓ Exemplos

2.



a) $P(I) = 0,18 + 0,12 = 30\%$

b) $P(M) = 0,24 + 0,12 = 36\%$

c) $P(I \cup M) = P(I) + P(M) - P(I \cap M)$
 $= 0,30 + 0,36 - 0,12 = 54\%$

$P(I \cup M) = 0,18 + 0,12 + 0,24 = 54\%$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

Se A e B são dois eventos, a probabilidade de B ocorrer depois de A ter acontecido é definida por $P(B|A)$ ou por $P(B \text{ dado } A)$, e é denominada probabilidade condicional

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

1. Numa certa cidade, 40% da população tem cabelos castanhos, 25% olhos castanhos e 15% olhos e cabelos castanhos. Uma pessoa da cidade é escolhida aleatoriamente.

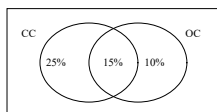
- a) Se ela tem cabelos castanhos, determinar a probabilidade de ter também olhos castanhos;
b) Se ela tem olhos castanhos, determinar a probabilidade não ter cabelos castanhos

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

1.



a) Se ela tem cabelos castanhos, determinar a probabilidade de ter também olhos castanhos

$P(OC|CC) = \frac{P(OC \cap CC)}{P(CC)} = \frac{0,15}{0,40} = 37,5\%$

b) Se ela tem olhos castanhos, determinar a probabilidade não ter cabelos castanhos

$P(\overline{CC}|OC) = \frac{10}{25} = 40\%$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

2. Há 80 candidatos a uma franquia de fast-food. Alguns deles têm diploma de curso superior, outros não. Alguns já têm experiência anterior no ramo, outros não. Os dados são:

	Com curso superior	Sem curso superior
Com experiência	24	36
Sem experiência	12	8

...

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

2.

... Se a ordem em que os candidatos são entrevistados é aleatória, G é o evento “o primeiro entrevistado tem curso superior” e E é o evento “o primeiro candidato tem experiência anterior”, determinar as seguintes probabilidades:

- a) $P(G)$;
- b) $P(E)$;
- c) $P(\bar{E})$;
- d) $P(E \cap G)$;
- e) $P(E \cup G)$;
- f) $P(E|G)$;
- g) $P(\bar{E} | \bar{G})$;
- h) $P(\bar{G} | \bar{E})$.

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

	G	\bar{G}	
E	24	36	$\Sigma=60$
\bar{E}	12	8	$\Sigma=20$
	$\Sigma=36$	$\Sigma=44$	

- a) $P(G) = 36/80 = 45\%$
- b) $P(E)$;
- c) $P(\bar{E})$;
- d) $P(E \cap G)$;
- e) $P(E \cup G)$;
- f) $P(E|G) = 24/36 = 66,67\%$
- g) $P(\bar{E} | \bar{G})$;
- h) $P(\bar{G} | \bar{E})$.

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Eventos independentes

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

✓ Eventos dependentes

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

1. Determinar a probabilidade de se obter 2 caras em duas jogadas de uma moeda.

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

1. Determinar a probabilidade de se obter 2 caras em duas jogadas de uma moeda.

$$P(\text{cara e cara}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

2. Determinar a probabilidade de se obter dois Reis em seguida quando se extraem duas cartas de um baralho comum de 52 cartas, se:

a) a 1ª carta é reposta no baralho antes da extração da 2ª;

b) a 1ª carta extraída não é reposta antes da extração da 2ª

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

2. Determinar a probabilidade de se obter dois Reis em seguida quando se extraem duas cartas de um baralho comum de 52 cartas, se:

a) a 1ª carta é reposta no baralho antes da extração da 2ª;

$$P(\text{rei e rei}) = 4/52 \cdot 4/52 = 16/2704 = 0,59\%$$

b) a 1ª carta extraída não é reposta antes da extração da 2ª

$$P(\text{rei e rei}) = 4/52 \cdot 3/51 = 12/2652 = 0,45\%$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

3. Se há 0,70 de probabilidade de uma pessoa entrevistada em um shopping ser contra o rezoneamento de certo quarteirão para desenvolvimento industrial, determinar a probabilidade de as 3 primeiras pessoas entrevistadas serem contra, mas a 4ª ser a favor.

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

3. Se há 0,70 de probabilidade de uma pessoa entrevistada em um shopping ser contra o rezoneamento de certo quarteirão para desenvolvimento industrial, determinar a probabilidade de as 3 primeiras pessoas entrevistadas serem contra, mas a 4ª ser a favor.

$$P() = 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,30 = 10,29\%$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos

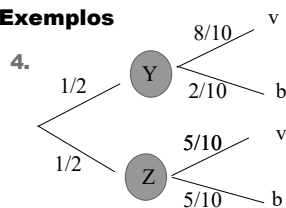
4. Suponha duas caixas, Y e Z, com fichas. A primeira contém 8 fichas vermelhas e 2 brancas. A segunda contém 5 vermelhas e 5 brancas. Determinar a probabilidade de escolher:

- a) uma ficha vermelha na urna Y
- b) uma ficha vermelha

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ Exemplos



a) uma ficha vermelha na urna Y

$$P(v \cap Y) = P(Y) \cdot P(v|Y) = (1/2) \cdot (8/10) = 40\%$$

b) uma ficha vermelha

$$P(v) = (1/2) \cdot (8/10) + (1/2) \cdot (5/10) = 65\%$$

e ou e

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Resumo

$$p = P(E) = \frac{h}{n}$$

$$\text{ou} = +$$

$$e = x$$

✓ **Exercícios**

1. Descrever o espaço amostral do experimento "Lançamento simultâneo de 2 moedas e 1 dado" e expressar o evento "aparecem duas caras e um número par".

2. Escolhendo ao acaso uma letra da palavra **ESTATISTICA**, qual a probabilidade de a letra escolhida ser:

- a) E; R.: 9,09%
- b) A; R.: 18,18%
- c) T. R.: 27,27%

✓ **Exercícios**

3. No lançamento de um dado 3 vezes, qual a probabilidade de ocorrer:

- a) o número 2 nas 3 vezes; R.: 0,46%
- b) um número ímpar nas 3 vezes. R.: 12,5%

4. Uma moeda é viciada de modo que as caras são três vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas. Encontrar:

- a) P(cara); R.: 75%
- b) P(coroa). R.: 25%

✓ **Exercícios**

5. Um dado é viciado de modo que cada número par tem duas vezes mais probabilidade de aparecer do que qualquer número ímpar. Determinar a probabilidade de ocorrer:

- a) um número par; R.: 66,67%
- b) um número ímpar. R.: 33,33%

6. Lança-se dois dados. Se a soma dos números é 6, qual a probabilidade de ter ocorrido o número 2 em um dos dados? R.: 40%

✓ **Exercícios**

7. São dadas duas urnas. A urna A contém 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 8 azuis. A urna B contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas. Lança-se um dado não viciado: se aparecer 3 ou 6, uma bola é escolhida de B, caso contrário uma bola é escolhida de A. Determinar a probabilidade de:

- a) uma bola vermelha ser escolhida; R.: 33,33%
- b) uma bola branca ser escolhida; R.: 33,33%
- c) uma bola azul ser escolhida. R.: 33,33%

✓ **Exercícios**

8. As falhas de diferentes máquinas são independentes umas das outras. Se há quatro máquinas e se suas respectivas probabilidades de falha são 1%, 2%, 5% e 10% em um determinado dia, calcular a probabilidade de:

- a) todas falharem em um determinado dia; R.: 0,0001%
- b) nenhuma falhar. R.: 82,95%

✓ **Exercícios**

9. Uma fábrica tem um processo de inspeção com 4 etapas. A probabilidade de uma peça defeituosa passar numa etapa de inspeção sem ser detectada é de 20%. a) Determinar a probabilidade de uma peça defeituosa passar pelas 4 etapas de inspeção sem ser detectada. (R.: 0,16%). b) Qual seria sua resposta se fosse acrescentada uma quinta etapa de inspeção com 50% de probabilidade de detectar peças defeituosas (R.: 0,08%).

✓ Exercícios

10. Se 3 lotes de peças contêm cada um 10% de peças defeituosas, qual a probabilidade de um inspetor não encontrar nenhuma peça defeituosa ao inspecionar uma peça de cada um dos 3 lotes? R.: 72,9%

✓ Exercícios

11. Leia a tirinha abaixo



<http://www.meninomalquinho.com.br/PaginaTirinha/default.asp>

Lúcio está certo: desde o dia 07/07/2007, existem dois grupos de 7 Maravilhas do Mundo: as 7 do Mundo Antigo e as 7 do Mundo Moderno e nenhuma pertence a ambos os conjuntos. Suponha que se escolham, aleatoriamente, duas entre essas 14 Maravilhas. Determine a probabilidade de ambas estarem em um mesmo grupo.

✓ Exercícios

12. O jogo de dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por uma certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma a seis. O número total de combinações possíveis é de 28 peças. Se pegarmos uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face?

✓ Exercícios

13. Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. a) Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol? (R.: 40%) b) Selecionando-se um estudante do curso de espanhol qual a probabilidade dele não estar cursando inglês (R.: 33,33%)?

✓ Exercícios

14. Dos 10 alunos de uma turma, 3 têm olhos azuis. Se 2 alunos são escolhidos ao acaso, determinar a probabilidade de:
a) ambos terem olhos azuis; R.: 6,67%
b) nenhum ter olhos azuis. R.: 46,67%