Matemática Discreta
Aula 13
Análise Combinatória - Princípios da Contagem

Rosane Rossato Binotto

08/11/2023

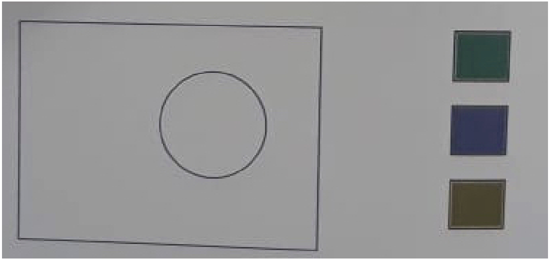
Tópicos

- Princípio Multiplicativo - Princípio Fundamental da Contagem;
- Princípio Aditivo.

Introdução

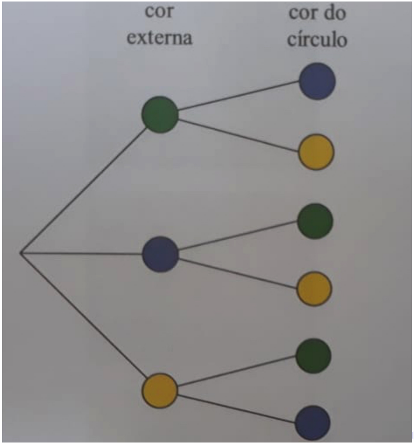
Problema 1:

Uma bandeira, conforme a figura, será pintada utilizando-se duas das cores verde, azul e amarela. Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?



Continuação - Problema 1

- **Solução:** Colorir a bandeira equivale a escolher a cor para a parte externa e a seguir, escolher a cor para a região circular interna.

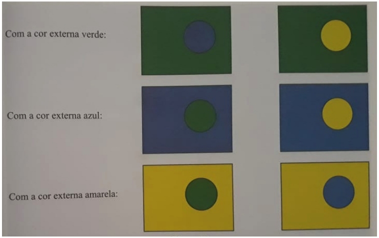


Continuação - Problema 1

- Continuando...
  - Há 3 modos de escolher a cor da parte externa;

e

- a partir daí, 2 modos de escolher a cor da região circular da bandeira.
- A resposta é $3 \times 2 = 6$.



Introdução

Problema 2:

Uma cantina de uma escola possui 4 tipos de suco e 3 tipos de refrigerante. De quantas maneiras uma pessoa pode adquirir apenas um tipo de bebida?

- **Solução:**
  - Tipos de sucos: $s = 4$ possibilidades.
  - Tipos de refrigerantes: $r = 3$ possibilidades.
  - Total de possibilidades de adquirir um suco **ou** um refrigerante:

$$T = r + s = 4 + 3 = 7.$$

- A resposta é 7 maneiras.

Exercícios

Exercício 1:

Quantas sequências de bits com comprimento 7 existem?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $2^7 = 128$ sequências.

Exercícios

Exercício 1:

Quantas sequências de bits com comprimento 7 existem?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $2^7 = 128$ sequências.

Exercício 2:

Há 32 computadores em um centro computacional. Cada computador tem 24 portas. Quantas portas diferentes para um computador existem no centro?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $32 \times 24 = 768$ portas.

Princípio Fundamental da Contagem

- Problemas de contagem são resolvidos explorando o significado das operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

Se há m_1 modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há m_2 modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 **e** D_2 é

$$T = m_1 \cdot m_2.$$

Princípio Fundamental da Contagem

Princípio Multiplicativo - Generalização

Se há m_1 modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há m_2 modos de tomar a decisão D_2, e, assim por diante, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 **e** D_2 **e** ... **e** D_k é

$$T = m_1 \cdot m_2 \cdot \ \ldots \ \cdot m_k.$$

Princípio Aditivo

Princípio Aditivo

Se há n_1 modos distintos de acontecer um evento E_1, n_2 modos distintos de acontecer um evento E_2, sendo os eventos excludentes, então o número de modos de ocorrer **pelo menos um** dos eventos é

$$T = n_1 + n_2.$$

Princípio Aditivo

Princípio Aditivo - Generalização

Se há n_1 modos distintos de acontecer um evento E_1, n_2 modos distintos de acontecer um evento E_2, ..., n_k modos distintos de acontecer um evento E_k, sendo os eventos excludentes, então o número de modos de ocorrer **pelo menos um** dos eventos é

$$T = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Princípio Aditivo

Exercício 3:

Um estudante pode escolher um projeto de computação a partir de 3 listas. As 3 listas contêm 23, 15 e 19 projetos possíveis, respectivamente. Nenhum projeto está em mais de uma lista. Quantos projetos possíveis existem para serem escolhidos?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $23+15+19=57$ projetos.

Exemplo

Exemplo 1:

Quantos são os números de três dígitos distintos?

- Formar o número equivale a escolher cada um de seus dígitos. Lembrando que os dez dígitos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

  • O **primeiro dígito**, da centena, pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0.

  • O **segundo dígito**, da dezena, pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito.

  • O **terceiro dígito**, da unidade, pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígito.

- A resposta é

$$9 \times 9 \times 8 \ = \ 648.$$

Estratégias para resolver um problema de contagem

- **1) Postura.** Colocar-se no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
- **2) Divisão.** Sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
- **3) Não adiar dificuldades.** Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Voltando ao Exemplo 1

- Violando a terceira regra.

Exemplo 1 - novamente:

Quantos são os números de três dígitos distintos?

- **Solução:**
- A escolha mais restrita é a do dígito das centenas, porque ele não pode ser 0.
- O que ocorre se ignoramos este fato e decidimos começar pelo dígito das unidades?

  • O dígito das unidades pode ser escolhido de 10 modos.

  • O das dezenas pode ser escolhido de 9 modos (não pode ser igual ao das unidades).

  • O das centenas pode ser escolhido de ... **depende!** (podem ser 7 ou 8 possibilidades, dependendo do 0 ter ou não ter sido usado nas dezenas ou unidades).

Exemplo 2

Exemplo 2:

Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

- **Solução:**
- Começamos escolhendo o **dígito das unidades**, que é o mais restrito: **há 5 possibilidades (0, 2, 4, 6 ou 8)**.
- A seguir, escolhemos o **dígito das centenas**. O número de possibilidades para esta escolha ... **depende**!
  • Se 0 for o dígito das unidades, há 9 possibilidades para o das centenas (só não pode ser 0).
  • Se 0 não for o dígito das unidades, há 8 possibilidades para o das centenas (não pode ser 0 nem o algarismo das unidades).
- Dividir em casos, contados separadamente, e **somar** os resultados.

Continuação do Exemplo 2

- Dividindo em casos e somando.
- Para os **números que terminam em 0**:
  - Para o dígito das unidades, há apenas 1 possibilidade.
  - Para o das centenas, há 9 possibilidades (só não pode ser 0).
  - Para o das dezenas, há 8 possibilidades (não pode ser os dois já usados).
  - Logo, **há $1 \times 9 \times 8 = 72$ números terminados em 0.**
- Para os **números que não terminam em 0:**
  - Para o dígito das unidades há 4 possibilidades.
  - Para o das centenas, há 8 possibilidades (não pode ser 0 nem o das unidades).
  - Para o das dezenas, há 8 possibilidades (não pode ser os dois já usados).
  - Logo, **há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números não terminados em 0.**
- Portanto, há $72 + 256 = 328$ números pares de três algarismos distintos.

Exemplo 3

Exemplo 3:

- **i)** Quantos divisores inteiros e positivos têm o número 360?
- **ii)** Quantos são pares?
- **iii)** Quantos são ímpares?
- **iv)** Quantos são quadrados perfeitos?

- **Solução: i)** Quantos divisores inteiros e positivos têm o 360?
- 360 pode fatorado, por exemplo, por $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$.
- Assim, os divisores de 360 são da forma:

$$2^\alpha,\ 3^\beta,\ 5^\gamma,\ \text{ com } \alpha \in \{0,1,2,3\},\ \beta \in \{0,1,2\} \text{ e } \gamma \in \{0,1\}.$$

- Logo, podemos escolher α, β e γ dos seguintes modos:

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \text{modos.}$$

- Portanto, 360 tem 24 divisores inteiros e positivos.

Continuação Exemplo

- **ii)** Quantos são pares?
  - Para ser par $\alpha \neq 0$. Assim, há

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

  divisores pares de 360.

- **iii)** Quantos são ímpares?
  - Para ser ímpar $\alpha = 0$. Assim, há

$$1 \times 3 \times 2 = 6$$

  divisores ímpares de 360 ou 24 - 18 $=$ 6.

Continuação Exemplo

- **iv)** Quantos são quadrados perfeitos?

  • Para ser quadrado perfeito α, β e γ têm que ser pares (neste caso podem assumir os valores de 0 e 2).

  • Assim, há
  $$2 \times 2 \times 1 = 4$$
  divisores que são quadrados perfeitos.

  • São eles 1, 4, 9, 36.

Exercícios

Exercício 4:

Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $3 \times 2^6 = 192$ bandeiras.

Exercícios

Exercício 5 - Contando Funções:

Quantas funções existem partindo-se de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos?

- **Solução:** em aula. Comentar um caso particular, $m = 3$ e $n = 5$.
- **Resposta no caso geral:** n^m funções.

Exercícios

Exercício 6:

Quantas funções injetoras existem partindo-se de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos?

- **Solução:** em aula.
- O problema só tem solução se $m \leq n$.
- Comentar um caso particular, $m = 3$ e $n = 5$.
  Resposta: $5 \times 4 \times 3 = 60$ funções injetoras.
- **Resposta no caso geral:**
  $n \times (n - 1) \times \ldots \times (n - m + 1)$ funções.

Referências

- LIMA, E. L. et al. **A matemática no ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática) (Coleção PROFMAT).
- ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.
- Slides do PROFMAT.