# Matemática Discreta
# Aula 3 - Parte 1
# Predicados, Quantificadores e Quantificadores Agrupados

Profa. Rosane Rossato Binotto

23/08/2023 e 30/08/2023

# Tópicos

- Exemplos de proposições compostas.
- Predicados.
- Quantificadores.
- Quantificadores Agrupados.
- Traduzindo sentenças do português para expressões lógicas e vice-versa.

# Revisando ...

**Exemplo 1:**

Use as leis de Morgan para expressar as negações das proposições:

- **a)** Miguel tem um celular e um laptop.
- **b)** Rodrigo vai ao concerto ou Carlos vai ao concerto.

- **Solução**: fazer na aula.

# Mais exemplos ...

## Exemplo 2:

Mostre que $p \rightarrow q$ e $(\neg p \vee q)$ são logicamente equivalentes. Esta propriedade é chamada condicional.

- **Solução**:

| **p** | **q** | $\neg$**p** | **p** $\rightarrow$ **q** | $\neg$ **p** $\vee$ **q** |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | **V** | **V** |
| V | F | F | **F** | **F** |
| F | V | V | **V** | **V** |
| F | F | V | **V** | **V** |

# Predicados

- **Predicados** são declarações que não são nem verdadeiras nem falsas, quando o valor das variáveis não é especificado.
- São sentenças ou expressões abertas que não são proposições.

**Exemplos:**

- **i)** $x > 2$.
- **ii)** O computador $x$ está funcionando.

- Como torná-las proposições?
  - Usando predicados ou quantificadores.

# Predicados

- Voltando ao exemplo $x > 2$.
  - Sujeito: $x$;
  - Predicado: $> 2$.
- Podemos escrever $P(x) : x > 2$, onde $P$ indica o predicado e $x$ a variável.
- Uma vez atribuído um valor para a variável $x$, a declaração $P(x)$ torna-se uma proposição e tem um valor verdade.
- Por exemplo, $P(0) : 0 > 2$ é uma proposição falsa.
- $P(5) : 5 > 2$ é uma proposição verdadeira.

# Predicados

- Dadas $n$ variáveis $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n$, a sentença indicada por $P(x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n)$ é chamada de **função proposicional** $P$ para a n-úpla $(x_1,\ x_2, ..., x_n)$ e $P$ é chamado de **predicado** n-ário.

**Exemplo 5:**

Dado $Q(x, y) : x = y + 3$. Quais os valores verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

- **Solução:**
- $Q(1, 2) : 1 = 2 + 3$ é falso.
- $Q(3, 0) : 3 = 0 + 3$ é verdadeiro.

# Predicados

## Exemplo 3:

Consideramos a afirmação

$$\text{if } x > 0 \text{ then } x := x + 1.$$

- Neste programa o valor da variável $x$ é inserido em

$$P(x) : x > 0.$$

- Se $P(x)$ é verdadeira para o $x$ em questão, então o comando $x := x + 1$ é executado.

- Continua no próximo slide ...

# Predicados

- Continuação ...

  - Logo o valor de $x$ é incrementado em uma nova unidade.

- Por exemplo, se $x = 3 > 0$ então o novo valor de $x$ é $3 + 1 = 4$.

- Se $P(x)$ é falsa para o $x$ em questão, então o comando $x := x + 1$ não é executado.

  - Portanto, o valor de $x$ não é alterado.

- Por exemplo, se $x = -2 < 0$ então o programa não é executado.

# Quantificadores

**Exemplos:**

- **1)** $P: \; x + y = 5.$
- **2)** $Q$ : Ele é jogador de vôlei.

- $P$ e $Q$ são ditas sentenças abertas ou predicados.
- Podemos gerar novas sentenças abertas utilizando os conectivos: **e, ou, não, se-então** e **se-e-somente-se**.

# Quantificadores

- Maneiras de transformar uma sentença aberta em proposição?
- Utilizando quantificadores:
    - quantificador universal: **para todo e qualquer,** $\forall$;
    - quantificador existencial: **existe,** $\exists$.
- Um quantificador universal necessita de um universo ou domínio de discussão, isto é, uma coleção de objetos para os quais consideramos propriedades.

# Quantificador Universal

## Definição 1:

A **quantificação universal** da proposição $P(x)$ é a afirmação:

$P(x)$ é válida para todos os valores de $x$ do domínio.

Ou ainda,

$$\forall x \; P(x)$$

que se lê "para todo valor de $x$ vale $P(x)$".

- Essa quantificação pode ser lida como: "para todo $x$, P(x)"; "para cada $x$, $P(x)$"; "para qualquer $x$, $P(x)$".

# Quantificador Universal

**Exemplo 4:**

Todos os homens são mortais.

- Universo (ou domínio): coleção de todos os homens.
- Para todo $x$ do universo, $x$ é mortal.
- $P(x)$ : $x$ é mortal.
  - $x$ é o sujeito;
  - $P(x)$ é o predicado.
- $(\forall x)\big(P(x)\big)$.

# Valor Verdade dos Quantificadores

- **Negação da quantificação universal:**

  Existe um elemento $x$ tal que $P(x)$ é falsa.

- Este elemento é chamado contra-exemplo.

- **Valor verdade do quantificador universal**

| **Sentença** | **Quando é verdadeira?** | **Quando é falsa?** |
|---|---|---|
| $\forall x P(x)$ | $P(x)$ é verdadeira para todo $x$. | Existe um $x$ tal que $P(x)$ é falsa. |
| $\exists x P(x)$ | Existe um $x$ tal que $P(x)$ é verdadeira. | $P(x)$ é falsa para todo $x$. |

## Exemplo 5:

Seja $P(x) : x + 1 > x$, para todo $x$ número real.

- **Solução:** $P(x)$ é verdadeira.

## Exemplo 6:

Seja $Q(x) : x < 2$, para todo $x$ número real.

- **Solução:** $Q(x)$ é falsa, pois $Q(3) : 3 < 2$ é falso (é um contra-exemplo).

# Quantificador Existencial

**Definição 2:**

A **quantificação existencial** da proposição $P(x)$ é a afirmação:

Existe um elemento $x$ no domínio tal que $P(x)$.

Ou ainda,

$$\exists x \; P(x)$$

que se lê "existe um valor de $x$ tal que vale $P(x)$".

- Outras maneiras de escrever esse quantificador: "existe $x$, tal que $P(x)$"; "para algum $x$, $P(x)$"; "para no mínimo um $x$, $P(x)$".

# Quantificador Existencial Único

- Quando **existe um único elemento** $x$ no domínio que torna a sentença $(\exists x)(P(x))$ verdadeira, denotamos essa proposição por:

$$(\exists! x)\ (P(x))$$

que se lê "existe um **único** valor de $x$, tal que vale $P(x)$".

# Quantificador Existencial

**Exemplo 7:**

Alguns homens são mortais.

- Existe no mínimo um homem que é mortal.
- Existe no mínimo um valor de $x$ do universo, tal que $x$ é mortal.
- $(\exists x)\big(P(x)\big)$.

# Valor Verdade dos Quantificadores

- Lembrando que ...

| Sentença | Quando é verdadeira? | Quando é falsa? |
|---|---|---|
| $\forall x P(x)$ | $P(x)$ é verdadeira para todo $x$. | Existe um $x$ tal que $P(x)$ é falsa. |
| $\exists x P(x)$ | Existe um $x$ tal que $P(x)$ é verdadeira. | $P(x)$ é falsa para todo $x$. |

- O conjunto de todos os valores que tornam uma proposição $P(x)$ verdadeira é chamado **conjunto dos valores verdade de $P(x)$.**

# Exemplos

## Exemplo 8:

Seja $P(x): x + 1 = 5$, para todo $x$ número real. Qual é o conjunto dos valores verdade de $P(x)$?

- **Solução:**
- $P(4): \; 4 + 1 = 5$ é verdadeira, ou seja, existe um único valor de $x$ tal que $P(x)$ é verdadeira.
- **Conjunto dos valores verdade** de $P(x)$: $\{4\}$.

# Exemplos

**Exemplo 9:**

Seja $Q(x) : \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Qual é o conjunto dos valores verdade de $Q(x)$?

- **Solução:**
- $Q(x)$ é verdadeira para todo e qualquer $x$ real.
- O **conjunto dos valores verdade** de $Q(x)$ é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

# Mais exemplos

**Exemplo 10:**

Seja $R(x) : x + 2 > 10$, com $x \in \mathbb{R}$. Qual é o conjunto dos valores verdade de $R(x)$?

- $R(x)$ é verdadeira para todo $x > 8$.
- O **conjunto dos valores verdade** de $R(x)$ é

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 8\} \ = \ (8, +\infty).$$

# Generalização - Conjunção

- Sejam $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n$, os elementos do domínio das variáveis.
- Então: $(\forall x)\ \big(P(x)\big)$ é o mesmo que a conjunção $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge ... \wedge P(x_n)$ que é **verdadeira** se e somente se $P(x_i)$ é **verdadeira** $\forall i = 1, 2, 3, ..., n$.
- Ou ainda,

$$(\forall x)\ \big(P(x)\big)\ \equiv\ P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge ... \wedge P(x_n).$$

# Exemplo

## Exemplo 11:

Dado $P(x) : x^2 < 10$. Qual o valor verdade de $(\forall x)\ \big(P(x)\big)$, para $x$ inteiro positivo e $x \leq 4$?

- **Solução:** A proposição $(\forall x)\ \big(P(x)\big)$ com $x$ inteiro positivo e $x \leq 4$ é a mesma que
$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4).$$
- Além do mais, $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$ é verdadeira pois cada uma das proposições é verdadeira.
- Porém, como $P(4) :\ 4^2 < 10$ é falsa, então a proposição $P(x) : x^2 < 10$ é falsa para $x$ inteiro positivo e $x \leq 4$.

# Generalização - Disjunção

- Sejam $x_1, \; x_2, \; x_3, ..., x_n$, os elementos do domínio das variáveis.
- Então: $(\exists x) \; \big(Q(x)\big)$ é o mesmo que a disjunção $Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee Q(x_3) \vee ... \vee Q(x_n)$ que é **verdadeira** se e somente se **pelo menos um** dos $Q(x_i)$ é **verdadeira** para $i = 1, 2, 3, ..., n$.
- Ou ainda,

$$(\exists x) \; \big(Q(x)\big) \;\; \equiv \;\; Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee Q(x_3) \vee ... \vee Q(x_n).$$

# Exemplo

## Exemplo 12:

Dado $Q(x) : x^2 > 10$. Qual o valor verdade de $(\exists x)\ (Q(x))$, para $x$ inteiro positivo e $x \leq 4$.

- **Solução:** O domínio de $Q(x)$ é $\{1, 2, 3, 4\}$ e a proposição $(\exists x)\ (Q(x))$ é a mesma que

$$Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4).$$

- Como $Q(4) :\ 4^2 > 10$ é verdadeira, então $(\exists x)(Q(x)) : x^2 > 10$ é verdadeira.

# Prioridade dos Quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional.
- Por exemplo,

$$\forall x \; P(x) \vee Q(x) \equiv \Big(\forall x \; P(x)\Big) \vee Q(x)$$

em vez de $\forall x \big(P(x) \vee Q(x)\big)$.

# Equivalências Lógicas que Envolvem Quantificadores

- Sentenças que envolvem predicados e quantificadores são **logicamente equivalentes** (notação $\equiv$) se e somente se elas têm o mesmo valor verdade quaisquer que sejam os predicados substituídos nessas sentenças e qualquer que seja o domínio para as variáveis nessas funções proposicionais.
- **Exemplo 13:** As expressões dadas são logicamente equivalentes, isto é,

$$\forall x \left(P(x) \ \wedge \ Q(x)\right) \ \equiv \ \forall x\big(P(x)\big) \wedge \forall x\big(Q(x)\big).$$

# Negando Expressões Quantificadas

## Exemplo 14:

Negue a expressão quantificada "Todo estudante desta sala teve aulas de Cálculo I".

- **Solução:** Estamos negando uma proposição com quantificador universal, isto é, $\forall x\big(P(x)\big)$, onde:
- $x$ é estudante desta sala e a declaração $P(x)$ : $x$ teve aulas de Cálculo I.

- **Negação:** **Existe** um estudante desta sala que **não** teve aulas de Cálculo I. $\Big[\exists x\big(\neg P(x)\big)\Big]$.

- **Propriedade:** $\neg\Big[\forall x\big(P(x)\big)\Big] \equiv \exists x\big(\neg P(x)\big)$.

# Negando Expressões Quantificadas

**Exemplo 15:**

Negue a expressão quantificada "Existe um estudante desta sala que teve aulas de Cálculo I".

- **Solução:** Estamos negando uma proposição com quantificador existencial, isto é, $\exists x\big(P(x)\big)$, onde:
- $x$ é estudante desta sala e a declaração $P(x)$ : $x$ teve aulas de Cálculo I.

- **Negação:** **Todo** estudante desta sala **não** teve aulas de Cálculo I. $\Big[\forall x\big(\neg P(x)\big)\Big]$.

- **Propriedade:** $\neg\Big[\exists x\big(P(x)\big)\Big] \equiv \forall x\big(\neg P(x)\big)$.

# Negando Expressões Quantificadas

## Teorema 1: Leis de Morgan para quantificadores

- Dado $P(x)$. A negação dos quantificadores é dada por:
  - **1)** $\sim \left[(\forall x)\ \big(P(x)\big)\right] \equiv (\exists x)\ \big(\sim P(x)\big).$
  - **2)** $\sim \left[(\exists x)\ \big(P(x)\big)\right] \equiv (\forall x)\ \big(\sim P(x)\big).$
- As notações $\neg$ e $\sim$ significam negação.

- **Demonstração:** fazer em aula.

# Exercícios

## Exercício 1:

Negue as proposições dadas na sequência.

- **i)** Existe um político honesto.
- **ii)** Todo brasileiro come churrasco.
- **iii)** $(\forall x)(x^2 > x)$.
- **iv)** $(\exists x)(x^2 = x)$.

# Exercícios

## Exercício 2:

Expresse as sentenças da sequência usando predicados e quantificadores.

- **i)** Algum estudante da classe visitou Florianópolis.
- **ii)** Todo estudante da classe visitou Florianópolis.

**Exercício 3:**

Mostre que

$$\sim \Big[\forall x \ (P(x) \ \rightarrow \ Q(x))\Big] \ \equiv \ \exists x\Big(P(x) \wedge \sim Q(x)\Big).$$

- Lembre que, dadas as proposições $p$ e $q$ vale:

$$\sim (p \ \rightarrow \ q) \ \equiv \ (p \wedge \sim q).$$

# Quantificadores Agrupados

## Definição 3:

Dizemos que dois quantificadores são agrupados quando um está no escopo do outro.

## Exemplo 16:

Sejam $x, \; y \; \in \mathbb{R}$. Então,

$$\forall x \; \forall y \; \big(x + y = y + x\big)$$

nos diz que $x + y = y + x$ para todo $x, \; y \; \in \mathbb{R}$.

# Quantificadores Agrupados

**Exemplo 17:**

Sejam $x,\ y\ \in \mathbb{R}$. Então,

$$\forall x\ \exists y\ \big(x + y = 0\big)$$

nos diz que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.

# Quantificadores Agrupados

- **Observação:** A ordem dos quantificadores não interessa quando eles são todos universais ou existenciais.

**Exemplo 18:**

Sejam $x, \ y \ \in \mathbb{R}$ e $Q(x, y) : x + y = 0$. Quais os valores verdade da quantificação $\exists x \ \exists y \ Q(x, y)$?

- **Solução:** fazer em aula.

# Quantificadores Agrupados

**Exercício 4:**

Sejam $x, \; y, \; z \; \in \mathbb{R}$ e $Q(x, y, z) : x + y = z$. Quais os valores verdade das sentenças

- **i)** $\forall x \; \forall y \; \exists z \; Q(x, y, z)$?
- **ii)** $\exists z \; \forall x \; \forall y \; Q(x, y, z)$?

- **Solução:** fazer em aula.

# Traduzindo Setenças Matemáticas para Sentenças que Envolvem Quantificadores Agrupados

## Exemplo 19:

Traduza para uma expressão lógica a sentença
"A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva".

- **Solução:** sejam $x, y$ números inteiros positivos. Então,

$$\forall x\ \forall y\Big[\big((x > 0) \wedge (y > 0)\big)\ \rightarrow\ (x + y > 0)\Big]$$

- ou

$$\forall x\ \forall y\big(x + y > 0\big).$$

# Mais Exemplos

**Exemplo 20:**

Traduza para uma expressão lógica a sentença
"Todo número real diferente de zero tem um inverso multiplicativo."

- **Solução:** fazer em aula.

# Traduzindo Quantificadores Agrupados para o Português

## Exemplo 21:

Traduza a sentença

$$\forall x \Big[ C(x) \vee \exists y \Big( C(y) \wedge F(x,y) \Big) \Big]$$

para o português em que, $C(x)$ é "$x$ tem um computador", $F(x,y)$ é "$x$ e $y$ são amigos" e o domínio para ambas as variáveis são os estudantes da universidade.

- **Solução:** fazer em aula.

# Traduzindo Quantificadores Agrupados para o Português

## Exercício 5:

Traduza a sentença

$$\exists x \forall y \forall z \Big[ \big( F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z) \big) \ \rightarrow \sim F(y,z) \Big]$$

para o português em que, $F(a,b)$ é "$a$ e $b$ são amigos" e o domínio para ambas as variáveis são os estudantes da universidade.

- **Solução:** fazer em aula.

# Referências


- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. Teoria e Problemas de Matemática Discreta. 2. ed. Bookman, 2004.
- MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. 3. ed. Bookman, 2010.
- ROSEN, K. H. Matemática Discreta e Suas Aplicações. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.