

UFFS - Ciência da Computação - Lista 7 -
Análise Combinatória, Binômio de Newton e Princípio das Gavetas
Data: 29/12/2023 - Profa. Rosane R. Binotto

Seção 5.1 - As Bases da Contagem - Livro do Rosen

1. Em uma universidade, há 18 graduados em Matemática e 325 em Ciência da Computação.
 - a) Há quantas maneiras de escolher dois representantes de modo que um seja matemático e o outro um cientista da Computação? **Resposta: 5.850.**
 - b) Há quantas maneiras de escolher um representante que seja matemático ou cientista da Computação? **Resposta: 343.**
2. Um edifício empresarial contém 27 andares, com 37 escritórios em cada andar. Quantos escritórios há no prédio? **Resposta: 999.**
7. Quantas iniciais diferentes com três letras uma pessoa pode ter? **Resposta: 26^3 .**
8. Quantas iniciais diferentes com três letras sem que nenhuma seja repetida uma pessoa pode ter?
9. Quantas iniciais diferentes com três letras que comecem com a letra A são possíveis? **Resposta: 676.**
19. Quantos números inteiros positivos entre 50 e 100
 - a) são divisíveis por 7? Quais números inteiros são esses? **Resposta: sete - 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.**
 - b) são divisíveis por 11? Quais números inteiros são esses? **Resposta: cinco - 55, 66, 77, 88, 99.**
 - c) são divisíveis por 7 e por 11? Quais números inteiros são esses? **Resposta: um - 77.**
21. Quantos números inteiros positivos entre 100 e 999, incluindo este último,
 - a) são divisíveis por 7? **Resposta: 128.**
 - b) são ímpares? **Resposta: 450.**

- c) têm os três dígitos iguais? **Resposta: 9.**
 - d) não são divisíveis por 4? **Resposta: 675.** e) são divisíveis por 3 ou por 4? **Resposta: 450.**
 - f) não são divisíveis nem por 3 nem por 4? **Resposta: 450.**
 - g) são divisíveis por 3, mas não por 4? **Resposta: 225.**
 - h) são divisíveis por 3 e por 4? **Resposta: 75.**
- 23.** Quantas sequências de três dígitos decimais
- a) não são formadas pelo mesmo dígito três vezes? **Resposta: 990.**
 - b) começam com um dígito ímpar? **Resposta: 500.**
 - c) têm exatamente dois dígitos que são o número 4? **Resposta: 27.**
- 26.** Quantas placas de identificação de veículos podem ser feitas usando-se três dígitos seguidos de três letras ou três letras seguidas de três dígitos?
- 27.** Quantas placas de identificação de veículos podem ser feitas usando-se duas letras seguidas de quatro dígitos ou dois dígitos seguidos de quatro letras?
Resposta: 52 457 600.
- 33.** Quantas funções injetoras são possíveis a partir de um conjunto com 5 elementos para os conjuntos com os seguintes números de elementos?
- a) 4 **Resposta: 0.**
 - b) 5 **Resposta: 120.**
 - c) 6 **Resposta: 720.**
 - d) 7 **Resposta: 2520.**
- 49.** Suponha que uma senha para um sistema computacional deva ter pelo menos 8, mas não mais de 12 caracteres, em que cada caractere na senha é uma letra minúscula, uma letra maiúscula, um dígito ou um dos seis caracteres especiais *, >, <, !, + e = .
- a) Quantas senhas diferentes estão disponíveis para esse sistema?
 - b) Quantas dessas senhas contêm pelo menos uma ocorrência de pelo menos um dos seis caracteres especiais?
 - c) Se demora um nanossegundo para um hacker checar se cada senha possível é a sua senha, quanto tempo demoraria para o hacker tentar todas as senhas

possíveis?

Seção 5.2 - O Princípio da Casa dos Pombos - Livro do Rosen

1. Mostre que em qualquer conjunto de seis aulas, no qual cada encontro acontece regularmente uma vez na semana em um determinado dia da semana, deve haver dois desses encontros no mesmo dia, supondo que não haja aula nos finais de semana. **Resposta:** as aulas são os objetos e os dias da semana são as gavetas.
3. Uma gaveta contém 12 meias marrons e 12 meias pretas, todas únicas. Um homem pega as meias aleatoriamente no escuro.
 - a) Quantas meias deverão ser pegas para se ter certeza de que pelo menos duas são da mesma cor? **Resposta:** 3.
 - b) Quantas meias deverão ser pegas para se ter certeza de que pelo menos duas são pretas? **Resposta:** 14.
9. Qual é o número mínimo de estudantes, vindos dos 50 estados americanos, que devem ser escritos em uma universidade para garantir que pelo menos 100 venham do mesmo estado? **Resposta:** 4.951.
15. Quantos números devem ser selecionados do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para garantir que pelo menos um par destes números some 7? **Resposta:** 4.
17. Uma companhia armazena os produtos em um depósito. O armazenamento de caixas nesse depósito é especificado por seus corredores, localização nos corredores e prateleiras. Há 50 corredores, 85 localizações horizontais, em cada corredor e 5 prateleiras no depósito. Qual é o menor número de produtos que a companhia pode ter para que pelo menos dois produtos sejam estocados na mesma caixa?
19. Suponha que todo estudante em uma classe de Matemática Discreta de 25 alunos seja um calouro, um veterano ou um aluno júnior.
 - a) Mostre que há pelo menos 9 calouros, 9 veteranos ou 9 juniores na sala.

Resposta: Se fosse menos do que 9 calouros, 9 veteranos ou 9 juniores deveria ser 8, 8 ou 8, o que dá um total de 24 alunos, o que é um absurdo.

b) Mostre que há pelo menos 3 calouros, 19 veteranos ou 5 juniores na sala.

25. Mostre que em um grupo de 10 pessoas (em que duas pessoas são amigas ou inimigas) há três amigos mútuos ou quatro inimigos mútuos, e que há três inimigos mútuos ou quatro amigos mútuos.

Seção 5.3 - Permutações e Combinações - Livro do Rosen

1. Liste todas as permutações de $\{a, b, c\}$. **Resposta: 6.**
4. Considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 - a) Liste todas as 3-permutações. **Resposta: 60.**
 - b) Liste todas as 3-combinações. **Resposta: 10.**
7. Encontre o número de 5-permutações de um conjunto com nove elementos. **Resposta: 15.120.**
8. Em quantas ordens diferentes cinco atletas podem terminar uma corrida sem empates? **Resposta: 120.**
11. Quantas cadeias de bits de extensão 10 contêm
 - a) exatamente quatro 1s? **Resposta: 210.**
 - b) no máximo quatro 1s? **Resposta: 386.**
 - c) pelo menos quatro 1s? **Resposta: 848.**
 - d) um número igual de 0s e 1s? **Resposta: 252.**
13. Um grupo contém n homens e n mulheres. há quantas maneiras possíveis de organizar essas pessoas em uma fila se os homens e as mulheres devem ficar alternados? **Resposta: $2(n!)^2$.**
17. Um conjunto com 100 elementos pode ter quantos subconjuntos com mais de dois elementos?

19. Uma moeda é jogada 10 vezes, e em cada lançamento tem-se cara ou coroa. Quantos resultados são possíveis
- a) no total? **Resposta: 1.024.**
 - b) com exatamente duas caras? **Resposta: 45.**
 - c) com no máximo três coroas? **Resposta: 176.**
 - d) com o mesmo número de caras ou coroas? **Resposta: 252.**
21. Quantas permutações das letras $ABCDEFGH$ contêm
- a) a sequência BCD ? **Resposta: 120.**
 - b) a sequência $CFGA$? **Resposta: 24.**
 - c) as sequências BA e GF ? **Resposta: 120.**
 - d) as sequências ABC e DE ? **Resposta: 24.**
 - e) as sequências ABC e CDE ? **Resposta: 6.**
 - f) as sequências CBA e BED ? **Resposta: 0.**
23. Há quantas maneiras possíveis para que oito homens e cinco mulheres fiquem em uma fila, de modo que haja duas mulheres uma ao lado da outra? [*Dica: Primeiro posicione os homens e depois considere as posições possíveis para as mulheres*].
25. Cem bilhetes numerados de 1, 2,..., 100, são vendidos a 100 pessoas diferentes para uma atração. Quatro prêmios diferentes são disputados, inclusive o grande prêmio. há quantas maneiras possíveis de ganhar os prêmios, se
- a) não há restrições?
 - b) a pessoa com o bilhete 47 ganhar o prêmio?
 - c) a pessoa com o bilhete 47 ganhar um dos prêmios?
 - d) a pessoa com o bilhete 47 não ganhar um prêmio?
 - e) as pessoas com os bilhetes 19 e 47 ganharem prêmios?
 - f) as pessoas com os bilhetes 19, 47 e 73 ganharem prêmios?
 - g) as pessoas com os bilhetes 19, 47, 73 e 97 ganharem prêmios?
 - h) nenhuma das pessoas com os bilhetes 19, 47, 73 e 97 ganharem prêmios?
 - i) o vencedor do grande prêmio for uma pessoa com o bilhete 19, 47, 73 ou 97?
 - j) as pessoas com os bilhetes 19 e 47 ganharem prêmios, mas as pessoas com

os bilhetes 73 e 97 não ganharem?

27. Um clube tem 25 membros.
- Quantas maneiras de escolher quatro membros do clube para servir no comitê executivo são possíveis? **Resposta: 12.650.**
 - Quantas maneiras de escolher um presidente, vice-presidente, secretário e tesoureiro do clube, em que nenhuma pessoa pode ter mais que uma função, são possíveis? **Resposta: 303.600.**
33. Suponha que um departamento tenha 10 homens e 15 mulheres. Quantas maneiras de formar um comitê com seis membros são possíveis, se ele deve ter o mesmo número de homens e mulheres? **Resposta: 54.600.**
34. Suponha que um departamento tenha 10 homens e 15 mulheres. Quantas maneiras de formar um comitê com seis membros são possíveis, se ele deve ter mais mulheres do que homens?
39. Quantas placas de identificação de carro são possíveis considerando-se que elas são compostas por três letras seguidas de três dígitos, sendo que nenhuma letra ou dígito aparece duas vezes? **Resposta: 11 232 000.**

Seção 5.4 - Coeficientes Binomiais - Livro do Rosen

- Encontre o desenvolvimento de $(x + y)^4$
 - usando o raciocínio combinatório.
 - usando o binômio de Newton.
- Encontre o desenvolvimento de $(x + y)^6$.
- Encontre o coeficiente de x^5y^8 em $(x + y)^{13}$.
- Quanto termos haverá no desenvolvimento de $(x + y)^{100}$, depois que os termos semelhantes forem agrupados?
- A linha do triângulo de Pascal que contém os coeficientes binomiais $\binom{10}{k}$, $0 \leq k \leq 10$, é: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1.

Use a identidade de Pascal para produzir a linha imediatamente subsequente a esta linha no triângulo de Pascal.

13. Qual é a linha do triângulo de Pascal que contém o coeficiente binomial $\binom{9}{k}$, $0 \leq k \leq 9$?

Seção 5.5 - Permutações e Combinações com repetição - Livros Judith e Rosen

1. a) Quantas permutações distintas existem das letras na palavra HAVAIANO?
Resposta: $\frac{8!}{3!}$
 b) Quantas delas começam com a letra H? **Resposta:** $\frac{7!}{3!}$
2. a) Quantas permutações distintas existem das letras na palavra APALACHICOLA?
Resposta: $\frac{12!}{4!2!2!}$
 b) Quantas delas têm os dois L juntos? **Resposta:** $\frac{11!}{4!2!}$
3. Quantas permutações distintas existem das letras na palavra MISSISSIPI?
Resposta: $\frac{10!}{4!4!}$
4. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens podem, ser formadas?
Resposta: 60 comissões.
5. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens podem, ser formadas?
Resposta: 81 comissões.
6. Um joalheiro ao projetar, um broche decidiu usar 5 pedras preciosas escolhidas entre diamantes rubis e esmeraldas. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidas as pedras? **Resposta:** 21.

Seção 5.5 - Permutações e Combinações Generalizadas - Livro do Rosen

1. De quantas maneiras 5 elementos podem ser selecionados em ordem a partir de um conjunto com 3 elementos, com repetição? **Resposta: 243.**
3. Quantas sequências de 6 letras existem? **Resposta: $(26)^6$.**
7. Há quantas maneiras possíveis de selecionar 3 elementos não ordenados a partir de um conjunto com 5 elementos, com repetição. **Resposta: 35.**
11. Há quantas maneiras possíveis de selecionar 8 moedas de um cofrinho que contém 100 moedas de 10 centavos e 80 moedas de 5 centavos. **Resposta: 9.**
13. Uma editora tem 3000 cópias de um livro de Matemática Discreta. há quantas maneiras possíveis de estocar livros se há três armazéns e as cópias são idênticas?
14. Há quantas soluções possíveis para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17,$$

em que x_1, x_2, x_3 e x_4 são números inteiros não negativos. **Resposta: 1.140.**

21. Há quantas maneiras possíveis de distribuir 6 bolas idênticas em 9 caixas distintas? **Resposta: 3.003.**
23. Há quantas maneiras de distribuir 12 objetos distintos em 6 caixas distintas, tal que dois objetos sejam colocados em cada caixa? **Resposta: 7 484 400.**
29. Quantas cadeias de bits diferentes podem ser transmitidas se a cadeia deve começar com um bit 1, deve incluir três bits 1 adicionais (para que tenha quatro bits 1 enviados), deve incluir um total de 12 bits 0 e deve ter pelo menos dois bits 0 depois de cada bit 1? **Resposta: 35.**