UFFS - Ciência da Computação - Matemática Discreta

Álgebra de Conjuntos

A Álgebra de Conjuntos corresponde as operações definidas sobre todos os conjuntos.

Conjuntos

Definição: Um conjunto é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada.

Geralmente são denotados por letras maiúsculas e as letras minúsculas denotam seus elementos.

Representação: Entre chaves $\{\ \ \}$ ou diagramas de Venn.

Exemplos:

a) $A = \{a, e, i, o, u\}$ conjunto das vogais.

b) Pares $= \{n\ /\ n \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ conjunto dos números pares.

c) $S = \{x^2 \mid x \text{ é inteiro}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$.

d) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, o conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q}$, o conjuntos dos números irracionais $\mathbb{I}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

e) $S = \{x \mid 3 \leq x < 8\} \ = \ [3, 8)$.

Pertinência: Dado um conjunto A, a expressão $x \in A$ significa que x é um elemento do conjunto A.

Se x não é um elemento de A escrevemos $x \notin A$.

Exemplos:

a) $11 \in \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

b) $\dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, conjunto dos números racionais.

c) $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, conjunto dos números irracionais.

Exemplos de conjuntos importantes:

a) Conjunto vazio: é o conjunto sem elementos.
É denotado por { } ou $\emptyset$.
Exemplos:
a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\} = \emptyset$.
b) O conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos.

b) Conjunto unitário: é o conjunto formado por um único elemento.
Exemplos:
a) O conjunto de todos os números inteiros positivos que são pares e primos é $X = \{2\}$.
b) O conjunto dos meses do ano com menos de 30 dias: {fevereiro}.

Conjuntos finitos e infinitos

i) Conjunto finito: um conjunto é finito quando podem ser listados todos os seus elementos.

A cardinalidade de um conjunto é o número de elementos desse conjunto.
Notação: $\#$ ou $|\ |$.

ii) Conjunto infinito: é o contrário, ou seja, é impossível listar todos os seus elementos.

Exemplos:
a) $\emptyset$ é um conjunto finito com cardinalidade 0, isto é, $\#\,\emptyset = 0$.
b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4\} = \{1, 2, 3\}$ é um conjunto finito com $\#A = 3$.
c) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos infinitos.
d) Conjunto dos números pares, conjuntos dos números primos e conjuntos dos números ímpares são exemplos de conjuntos infinitos.
e) $S = \{x \mid -4 \leq x \leq 100\} = [-4,\ 100]$ é um intervalo na reta que é um conjunto infinito.

Subconjuntos

Definição: Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se todo elemento do conjunto A também é de B.
Notação: $A \subseteq B$ quer dizer "A contido em B", ou $B \supseteq A$, isto é, "B contém A".
Também pode ser utilizado $\subset$ como símbolo para continência.
O símbolo $\not\subset$ significa que um conjunto não está contido no outro.

Equivalência lógica: $A \subseteq B \iff \forall x \Big(x \in A \to x \in B\Big)$.

Exemplos:
Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $C = \{-3, 2\}$, temos que $A \subseteq B$ e $C \nsubseteq B$.

Igualdade de conjuntos

Definição: Um conjunto A é igual a um conjunto B, $A = B$, se e somente se possuem exatamente os mesmos elementos.

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Equivalência lógica:

$$A = B \iff (\forall x)\Big[\Big(x \in A \to x \in B\Big) \wedge \Big(x \in B \to x \in A\Big)\Big].$$

Exemplos:
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$.
b) $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$.

Observações:
i) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
ii) Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B, dizemos que A é subconjunto próprio de B.

Propriedades:
i) Reflexiva: $A = A$.
ii) Simétrica $A = B \implies B = A$.
iii) Reflexiva: $A \subseteq A$.

Operações com conjuntos

São classificadas em:
Não-reversíveis: união, interseção e diferença.
Reversíveis: complemento, conjunto das partes, produto cartesiano e união disjunta.

Não-reversíveis

Uma operação é não-reversível quando a partir do resultado não é possível recuperar os operandos originais.

Definição: Sejam A e B conjuntos. A união de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos x tais que x está em pelo menos um dos dois conjuntos A ou B. Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Equivalência lógica:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \ \vee \ x \in B.$$

Observação: Temos que $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.
Exemplos: Em aula.

2) Interseção

Sejam A e B conjuntos. A interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos x tais que x está em ambos os conjuntos A e B. Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Equivalência lógica:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \ \wedge \ x \in B.$$

Observação: Temos que $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.
Exemplos: Em aula.

Definição: Dados dois conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, se $A \cap B = \emptyset$, então A e B são ditos disjuntos.
Exemplos: em aula.

Reversíveis

Uma operação é reversível quando a partir do resultado podemos recuperar os operandos originais.

1) Complemento: é uma operação definida em relação a um conjunto universo $\mathbf{U}$.

Seja $\mathbf{U}$ um conjunto universo. O complemento de $A \subseteq \mathbf{U}$, denotado por A' ou $\sim A$ ou A^c ou $\overline{A}$ é o conjunto definido por

$$\overline{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \notin A\}.$$

Observação: O complemento corresponde à noção de negação $\sim$.
Exemplos: em aula.

2) Diferença (operação não-reversível)

Sejam A e B conjuntos. A diferença entre A e B, denotada por $A \setminus B$ ou $A - B$ é o conjunto formado pelos elementos que estáo em A e não estáo em B. Simbolicamente:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

Vale: $A - B = A \cap \overline{B}$.
Exemplos: em aula.

3) Produto cartesiano

Definição: A n-upla ordenada $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é a coleção ordenada que tem a_1 como seu primeiro elemento, a_2 como segundo elemento,..., a_n como seu n-ésimo elemento.

Sejam A e B conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$ é o conjunto formado por pares ordenados $x = (a, b)$, onde $a \in A$ e $b \in B$. Simbolicamente:

$$A \times B = \Big\{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\Big\}.$$

Exemplos: em aula.

Observação: $(a,b) \neq (b,a)$ e $A \times B \neq B \times A$.

4) União disjunta

Sejam A e B conjuntos. A união disjunta de A e B, denotada por $A+B$ ou $A \sqcup B$ é dada por

$$A + B = \Big\{(a, A) \mid a \in A\Big\} \cup \Big\{(b, B) \mid b \in B\Big\}.$$

Vale: $A + B = \Big\{a_A \mid a \in A\Big\} \cup \Big\{b_B \mid b \in B\Big\}$.

Exemplos: em aula.

Exercício: Numa pesquisa para se avaliar a leitura de três revistas A, B e C, foram obtidos os seguintes dados:

Revista	A	B	C	A e B	B e C	A e C	A, B e C	nenhuma
N° de leitores	108	200	151	30	45	25	10	60

Responda:

i) O número de pessoas consultadas.

ii) O número de pessoas que somente leem a revista A.

iii) O número de pessoas que não leem as revistas A e B.

Observação: O número de elementos da união de dois conjuntos A e B é

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Outra maneira de escrever

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Conjunto das partes

Definição: Dado um conjunto A finito. O conjunto das partes de A é definido por

$$P(A) \ = \ \Big\{X \mid X \subseteq A\Big\}.$$

Exemplos: em aula.

Resultado: Se n é o número de elementos de A, então o número de elementos de $P(A)$ é 2^n. A prova é dada por indução.

Identidades envolvendo conjuntos - Operações sobre conjuntos x Conectivos lógicos

Propriedade	**Teoria de Conjuntos**	**lógica**
Idempotência	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	$p \wedge p \iff p$ $p \vee p \iff p$
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	$p \wedge q \iff q \wedge p$ $p \vee q \iff q \vee p$
Associativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$	$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Negação/ Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$	$\sim\sim p \iff p$ $p \wedge \sim p \iff F$ $p \vee \sim p \iff V$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
Elemento Neutro	$A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$	$p \wedge V \iff p$ $p \vee F \iff p$
Elemento Absorvente	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	$p \wedge F \iff F$ $p \vee V \iff V$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	$p \wedge (p \vee q) \iff p$ $p \vee (p \wedge q) \iff p$

Relações lógicas x relações sobre conjuntos

Relação	**Teoria de Conjuntos**	**lógica**
Continência/ Implicação	$A \subseteq B$	$p \implies p$
Igualdade/ Equivalência	$A = B$	$p \iff p$

Exemplos: Sejam A, B e C conjuntos contidos no conjunto universo $\mathbf{U}$.

1) Prove a identidade $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) Prove a identidade $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3) Prove a identidade $\overline{\big(A \cup (B \cap C)\big)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$.