Matemática Discreta
Aulas 4 e 5
Demonstração

Profa. Rosane Rossato Binotto

05/09/2023 e 13/09/2023

Tópicos

- Introdução ao assunto.
- Tipos de demonstração:
  - Demonstração direta.
  - Demonstração por contraposição.
  - Demonstração por contradição.
  - Demonstração por exaustão e casos.
  - Indução matemática.

Introdução

- O que são: axiomas ou postulados, definições, proposições, lemas, teoremas e corolários, ...?
- **Teorema** é uma sentença declarativa que se pode demonstrar que é verdadeira. Em Matemática os teoremas são os resultados mais importantes.
- **Proposições** são os resultados (teoremas) menos importantes.
- **Demonstração (ou prova)** é um argumento válido que estabelece a verdade de um teorema (ou proposição, lema, ...).

Introdução

- **Exemplo de proposição:** Se um triângulo é isósceles então ele possui dois ângulos iguais.

Introdução

- **Exemplo de proposição:** Se um triângulo é isósceles então ele possui dois ângulos iguais.
- **Exemplo - Teorema de Pitágoras:** Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Introdução

- **Exemplo de proposição:** Se um triângulo é isósceles então ele possui dois ângulos iguais.
- **Exemplo - Teorema de Pitágoras:** Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- **Definição** é um enunciado que descreve o significado de um termo.

Introdução

- **Exemplo de proposição:** Se um triângulo é isósceles então ele possui dois ângulos iguais.
- **Exemplo - Teorema de Pitágoras:** Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- **Definição** é um enunciado que descreve o significado de um termo.
- **Exemplo de definição:** Um número é primo se os seus únicos divisores são 1 e ele mesmo.

Introdução

- **Axiomas** ou **postulados** são verdades incontestáveis que não precisam de uma prova.

Introdução

- **Axiomas** ou **postulados** são verdades incontestáveis que não precisam de uma prova.
- **Exemplo de axioma:** Por dois pontos distintos no plano euclidiano passa uma única reta.

Introdução

- **Axiomas** ou **postulados** são verdades incontestáveis que não precisam de uma prova.
- **Exemplo de axioma:** Por dois pontos distintos no plano euclidiano passa uma única reta.
- **Lemas** são afirmações provadas que ajudam a demonstrar afirmações mais importantes (teoremas). Um lema é normalmente um teorema auxiliar utilizado para provar outros teoremas.

Introdução

- **Corolário** é um teorema que pode ser estabelecido diretamente do teorema que foi provado.
- Quando um teorema nos ajuda a concluir facilmente que outras afirmações são verdadeiras chamamos estas últimas de corolários do teorema.

Introdução

- **Corolário** é um teorema que pode ser estabelecido diretamente do teorema que foi provado.
- Quando um teorema nos ajuda a concluir facilmente que outras afirmações são verdadeiras chamamos estas últimas de corolários do teorema.
- Prova x argumento. Qual a diferença?

Algumas Definições

- **Definição 1:** Um número inteiro a é **par** se $a = 2n$ para algum número inteiro n.

Algumas Definições

- **Definição 1:** Um número inteiro a é **par** se $a = 2n$ para algum número inteiro n.
- **Definição 2:** Um número inteiro b é **ímpar** se $b = 2m + 1$ para algum número inteiro m.

Algumas Definições

- **Definição 1:** Um número inteiro a é **par** se $a = 2n$ para algum número inteiro n.
- **Definição 2:** Um número inteiro b é **ímpar** se $b = 2m + 1$ para algum número inteiro m.
- **Definição 3:** Um número inteiro positivo x é um **quadrado perfeito** se $x = s^2$ para algum s inteiro.

Algumas Definições

- **Definição 1:** Um número inteiro a é **par** se $a = 2n$ para algum número inteiro n.
- **Definição 2:** Um número inteiro b é **ímpar** se $b = 2m + 1$ para algum número inteiro m.
- **Definição 3:** Um número inteiro positivo x é um **quadrado perfeito** se $x = s^2$ para algum s inteiro.
- **Definição 4:** Um número inteiro a é **divisível** por b (ou b divide a), se existe algum q inteiro tal que $a = bq$.

Demonstração Direta

- Dada uma proposição do tipo

$$p \rightarrow q.$$

- Na prova direta assumimos a hipótese p verdadeira e provamos que vale a tese q.

Demonstração Direta

- Dada uma proposição do tipo

$$p \rightarrow q.$$

- Na prova direta assumimos a hipótese p verdadeira e provamos que vale a tese q.

Exemplo 1:

Se a é um número inteiro ímpar, então a^2 é ímpar.

- **Demonstração:** em aula.

Demonstração Direta

Exemplo 2:

Se m e n são quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ é um quadrado perfeito.

Demonstração Direta

Exemplo 2:

Se m e n são quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ é um quadrado perfeito.

- **Demonstração:** Sejam m e n são quadrados perfeitos, então

$$\exists s,\ \exists t,\ \text{números inteiros, tais que } m = s^2 \text{ e } n = t^2.$$

- Logo,

$$m \cdot n \;=\; s^2 \cdot t^2 \;=\; (s \cdot t)^2$$

que é um quadrado perfeito, como queríamos demonstrar.

Demonstração por Contraposição

- Temos que

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p,$$

onde $\sim q \rightarrow \sim p$ é a contrapositiva de $p \rightarrow q$.

- Para provar que $p \rightarrow q$ em um tipo de prova indireta, assumimos que vale $\sim q$ e provamos que vale $\sim p$.

Demonstração por Contraposição

- Temos que

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p,$$

onde $\sim q \rightarrow \sim p$ é a contrapositiva de $p \rightarrow q$.

- Para provar que $p \rightarrow q$ em um tipo de prova indireta, assumimos que vale $\sim q$ e provamos que vale $\sim p$.

Exemplo 3:

Se n é um número inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

- **Demonstração:** em aula.

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4:

Mostre que se n é um número inteiro e n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4:

Mostre que se n é um número inteiro e n^2 é ímpar, então n é ímpar.

- **Demonstração:** Vamos provar que n par implica n^2 par, ou seja, a contrapositiva.
- De fato, se n é par, então

$$\exists s \text{ número inteiro tal que } n = 2s.$$

- Assim,

$$n^2 = (2s)^2 = 4s^2 = 2(2s^2)$$

o que implica que n^2 é um número par, como queríamos demonstrar.

Demonstração por Contraposição

Exercício 1:

Mostre que se n^2 é um número inteiro par, então n é par.

- **Demonstração:** Usar a contrapositiva.

Demonstração por Contradição

- **i) Demonstração de proposições p por contradição.**
- Uma proposição é uma contradição se sua tabela verdade é sempre falsa.
- Queremos demonstrar que uma sentença p é sempre verdadeira. Suponhamos que podemos encontrar uma contradição q tal que a condicional $\sim p \to q$ é sempre verdadeira.
- Como $\sim p$ é falsa e $\sim p \to q$ é verdadeira, podemos concluir que p é verdadeira.
- Como podemos encontrar essa contradição?

Demonstração por Contradição

Exemplo 5:

Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Exemplo 5:

Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

- **Demonstração:**
- Suponhamos por absurdo que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, sendo p e q inteiros sem fator comum, ou seja, primos entre si.
- Assim,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{o} \quad \text{que equivale} \quad \text{a} \quad p^2 = 2q^2. \qquad (1).$$

- Logo, p^2 é par, o que implica p par.

Demonstração por Contradição

- Sendo p par, então $p = 2k$ para algum k inteiro.
- Substituindo $p = 2k$ na equação (1), obtemos

$$2q^2 = p^2 = 4k^2, \text{ ou seja, } q^2 = 2k^2,$$

  o que nos dá q par.
- Uma contradição pois p e q são primos entre sim.
- Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por Contradição

Exercício 2:

Mostre que $\sqrt{3}$ é um número irracional.

- **Demonstração:** Passos:
- **1)** Suponha que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ com p e q primos entre si.
- **2)** Conclua que $p^2 = 3q^2$.
- **3)** Resultado: x^2 múltiplo de 3 implica x múltiplo de 3 para x um número inteiro.
- Use o resultado citado em **3)** para concluir a demonstração.

Demonstração de Bicondicionais

- Temos que

$$(p \longleftrightarrow q) \equiv \big[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)\big].$$

Demonstração de Bicondicionais

- Temos que

$$(p \longleftrightarrow q) \equiv \big[(p \to q) \wedge (q \to p)\big].$$

Exemplo 6:

Um número inteiro e positivo n é ímpar se e somente se n^2 for ímpar.

- **Demonstração:** em aula.

Contra-exemplos

- Para mostrar que uma sentença é falsa, basta procurar um contra-exemplo.

Contra-exemplos

- Para mostrar que uma sentença é falsa, basta procurar um contra-exemplo.

Exemplo 7:

Todo número inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros.

- **Solução:** esta sentença é falsa.
- Basta apresentar um contra-exemplo.

Demonstração por Casos

- Às vezes não podemos provar um teorema usando um único argumento que satisfaça todos os casos.
- A ideia é utilizar um método de demonstração que considera diferentes casos separadamente.
- Para provar que $\Big(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n\Big) \;\rightarrow\; q$ mostramos que $\Big(p_1 \rightarrow q\Big) \;\wedge\; \Big(p_2 \rightarrow q\Big) \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \Big(p_n \rightarrow q\Big)$ pois essas duas proposições compostas são logicamente equivalentes.
- Esse argumento é chamado de **demonstração por casos**.

Demonstração por Exaustão

- Alguns teoremas podem ser comprovados examinando um número relativamente pequeno de exemplos.
- Essas demonstrações são chamadas de **demonstrações por exaustão**, pois procedem pela exaustão de todas as possibilidades.
- É um tipo especial de demonstração por casos.

Demonstração por Exaustão

- Alguns teoremas podem ser comprovados examinando um número relativamente pequeno de exemplos.
- Essas demonstrações são chamadas de **demonstrações por exaustão**, pois procedem pela exaustão de todas as possibilidades.
- É um tipo especial de demonstração por casos.

Exemplo 8:

Mostre que $(n+1)^2 \geq 3^n$, se n é um número inteiro positivo com $n \leq 2$.

- **Demonstração:** em aula.

Demonstração por Casos

- Uma demonstração por casos deve cobrir todas as possibilidades que aparecem no teorema.

Demonstração por Casos

- Uma demonstração por casos deve cobrir todas as possibilidades que aparecem no teorema.

Exercício 3:

Mostre que, se n é um número inteiro, então $n^2 \geq n$.

- **Demonstração:** Considerar três casos: $n = 0$, $n \geq 1$ e $n \leq -1$.

Somatório e Produtório

- Seja (x_n) uma sequência de elementos de um conjunto com as operações adição e multiplicação.
- O somatório é dado por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \; = \; x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

Exemplo 9:

- **i)** $S_n = \sum_{i=1}^{n} \; i \; = \; 1 \; + \; 2 \; + \; 3 \; + \; \ldots$
- **ii)** $S_n = \sum_{i=1}^{n} \; i^2 \; = \; 1 \; + \; 4 \; + \; 9 \; + \; 16 \; + \; \ldots \; .$

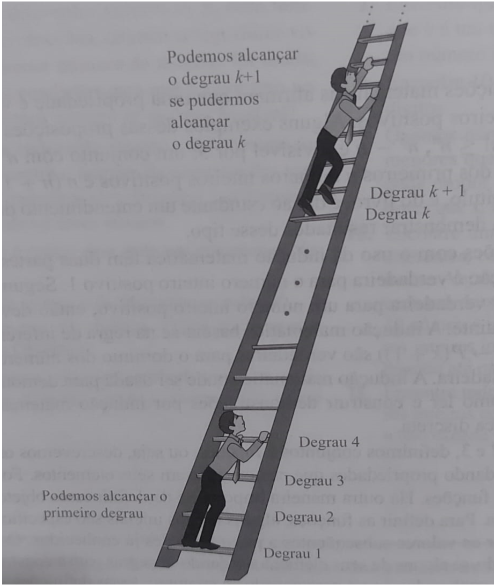
Somatório e Produtório

- Seja (x_n) uma sequência de elementos de um conjunto com as operações adição e multiplicação.
- O produtório é dado por

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \;=\; x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

- Vale: $S_1 = P_1 = x_1, \quad S_{n+1} = S_n + x_{n+1}$ e $P_{n+1} = P_n \cdot x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indução Matemática - Escada Infinita



Indução Matemática

Princípio da Indução Matemática:

- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:
- **i)** $P(1)$ é verdadeira.
- **ii)** Para $k \in \mathbb{N}$, a validade de $P(k)$ implica na validade de $P(k+1)$, onde $k+1$ é o sucessor de k.
- Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Indução Matemática

- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n.
- **Passo base:** $P(1)$ é verdadeira.
- **Hipótese indutiva:** Para $k \in \mathbb{N}$, vale $P(k)$.
- **Passo indutivo:** Vale $P(k+1)$.

Indução Matemática

- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n.
- **Passo base:** $P(1)$ é verdadeira.
- **Hipótese indutiva:** Para $k \in \mathbb{N}$, vale $P(k)$.
- **Passo indutivo:** Vale $P(k+1)$.
- Expressa como uma regra de inferência essa técnica de demonstração pode ser declarada como

$$\Big[P(1) \ \wedge \ \big(\forall k, P(k) \ \rightarrow \ P(k+1)\big)\Big] \ \rightarrow \ \forall n, P(n).$$

Indução Matemática

- Dada $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Temos que executar os seguintes passos na prova por indução:
- **i - Passo base:** Mostrar que $P(1)$ é verdadeira.
- **ii - Hipótese indutiva:** Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, vale $P(k)$.
- **iii - Passo indutivo:** Mostrar que a propriedade vale para $k + 1$, ou seja, vale $P(k + 1)$.
- Logo a propriedade $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

Exemplo 10 - Soma dos n primeiros números naturais:

Mostre a propriedade

$$P(n):\ 1\ +\ 2\ +\ 3\ +\ ...\ +\ n\ =\ \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Demonstração:** em aula.

Exemplos

Exemplo 11:

Mostre a propriedade

$$P(n): \ 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2, \text{ para } n \geq 1.$$

Exemplos

Exemplo 11:

Mostre a propriedade

$$P(n): \;\; 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) \; = \; n^2, \text{ para } n \geq 1.$$

- **Demonstração:**
- **i - Passo base:** Para $n = 1$ temos $1 = 1$ e assim, $P(1)$ é verdadeira;

Exemplos

Exemplo 11:

Mostre a propriedade

$$P(n): \;\; 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, \text{ para } n \geq 1.$$

- **Demonstração:**
- **i - Passo base:** Para $n = 1$ temos $1 = 1$ e assim, $P(1)$ é verdadeira;
- **ii - Hipótese indutiva:** Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, vale $P(k)$, isto é,
  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$.

Exemplos

- **iii - Passo indutivo:** Mostrar que a propriedade vale para $k+1$.
- De fato, para $n = k+1$ obtemos
$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + [2(k+1)-1]$ o que implica
$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1)$
por hipótese de indução, o que implica em:
$1 + 3 + 5 + ... + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$
que é $P(k+1)$.
- Logo, $P(k)$implica em $P(k+1)$.
- Portanto, a propriedade $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Indução Matemática - Começando de um certo natural n_0

Princípio da Indução Matemática:

- Dada $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n.
- **i - Passo base:** Mostrar que $P(n_0)$ é verdadeira.
- **ii - Hipótese indutiva:** Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq n_0$, vale $P(k)$.
- **iii - Passo indutivo:** Mostrar que a propriedade vale para $k + 1$, ou seja, vale $P(k + 1)$.
- Logo a propriedade $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$.

Exemplos

Exemplo 12:

Mostre a propriedade

$$P(n): \; 2^n < n!, \; \forall n \geq 4.$$

- **Demonstração:** em aula (comentar que essa desigualdade é falsa para $n = 1, 2$ e 3).

Exemplos

Exemplo 12:

Mostre a propriedade

$$P(n):\ 2^n < n!,\ \forall n \geq 4.$$

- **Demonstração:** em aula (comentar que essa desigualdade é falsa para $n = 1, 2$ e 3).

Exercício 4:

Mostre a propriedade

$$P(n):\ n < 2^n,\ \forall n \geq 0.$$

Indução Matemática - Mais de um antecessor

Princípio da Indução Matemática:

- Dada $P(n)$ uma propriedade $n \in \mathbb{N}$.
- **i - Passo base:** Mostrar que $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras.
- **ii - Hipótese indutiva:** Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, valem $P(k)$ e $P(k+1)$.
- **iii - Passo indutivo:** Mostrar que a propriedade vale para $k+2$, ou seja, vale $P(k+2)$.
- Logo a propriedade $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 13:

Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses?

Mês	Número de casais do mês anterior	Número de casais recém-nascidos	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
...	...	...	...

A Sequência de Fibonacci

- O número de casais de coelhos em um determinado mês (a partir do terceiro) é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior.
- Se u_n é o número de casais no n-ésimo mês, temos
  - $u_1 = 1$;
  - $u_2 = 1$;
  - $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, para todo n natural.
- Estas relações definem a chamada sequência de Fibonacci.

A Sequência de Fibonacci

- Comentar a relação
  - $u_1 = 1$;
  - $u_2 = 1$;
  - $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, para todo n natural.

A Sequência de Fibonacci

- Comentar a relação
  - $u_1 = 1$;
  - $u_2 = 1$;
  - $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, para todo n natural.
- Comentar a prova por indução de

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

A Sequência de Fibonacci

- Comentar a relação
  - $u_1 = 1$;
  - $u_2 = 1$;
  - $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, para todo n natural.
- Comentar a prova por indução de

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

- O número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033...$ é conhecido como número de ouro.

Indução Matemática Completa

Princípio da Indução Matemática Completa:

- Dada $P(n)$ uma propriedade $n \in \mathbb{N}$.
- **i - Passo base:** Mostrar que $P(1)$ é verdadeira.
- **ii - Hipótese indutiva:** Supor que para todo $1 \leq k \leq n$, vale $P(k)$.
- **iii - Passo indutivo:** Mostrar que a propriedade $P(n+1)$ é válida.
- Logo a propriedade $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Exemplo 14:

Seja a_n uma sequência definida por

$$a_0 = 2 \;\text{ e }\; a_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+2},$$

para cada natural n. Qual é o termo geral de a_n?

- **Demonstração:** em aula.

Exemplo

Exercício 5:

Mostre que se n for um número inteiro maior do que 1, então n é primo ou n pode ser escrito com um produto de números primos.

Exemplo

Exercício 5:

Mostre que se n for um número inteiro maior do que 1, então n é primo ou n pode ser escrito com um produto de números primos.

Exercício 6:

Dado um conjunto A com n elementos. Mostre que o conjuntos das partes de A tem 2^n elementos.

Referências

- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. Teoria e Problemas de Matemática Discreta. 2. ed. Bookman, 2004.
- MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. 3. ed. Bookman, 2010.
- ROSEN, K. H. Matemática Discreta e Suas Aplicações. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.