Matemática Discreta
Aula 8
Relações

Profa. Rosane Rossato Binotto

04/10/2023

Tópicos

- Relações:
  - Relações binárias.
  - Relações reflexivas, simétricas e transitivas.
  - Relações de equivalência.
  - Classes de equivalência.
  - Partições.

Relações

Definição 1:

Sejam A e B conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$.

Relações

Definição 1:

Sejam A e B conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$.

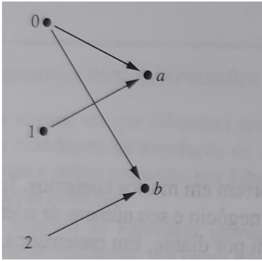
- Uma relação binária de A em B é um conjunto R de pares ordenados em que o primeiro elemento de cada par ordenado vem de A e o segundo vem de B.
- **Notação:** aRb indica que $(a, b) \in R$ e $a \not R b$ para indicar que $(a, b) \notin R$.
- Quando $(a, b) \in R$ dizemos que a está relacionado a b por R.

Relações

Exemplo 1:

Sejam $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ e $B = \{a,\ b\}$ conjuntos. Seja $R = \big\{(0,a),\ (0,b),\ (1,a),\ (2,b)\big\}$ uma relação binária de A em B. Assim,

- $0Ra$, pois $(0,a) \in R$.
- $1 \not R b$, pois $(1,b) \notin R$.



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

Relações

Definição 2:

Uma relação no conjunto A é uma relação de A em A. Em outras palavras, uma relação em um conjunto A é um subconjunto de $A \times A$.

Relações

Exemplo 2:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais pares ordenados estão na relação $R = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$?

- **Solução:**
- Lembrar que: a divide b ou $a|b$ significa que $b = m \cdot a$, para algum m número inteiro.
- A relação R é dada por $R = \Big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\Big\}$.

Relações

Exemplo 3:

Considere estas relações no conjunto dos números inteiros.

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \neq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$.

Quais destas relações contêm cada um dos pares (1,1), (1,2), (2,1), (1,-1) e (2,2)?

- **Solução:** Em aula.

Exemplo 4:

Quantas relações existem em um conjunto com 2 elementos?

- **Solução:** Seja $A = \{a, b\}$. Então, $A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ tem 4 elementos.
- Todas as relações em A são dadas por: $R_1 = \{(a, a)\}$, $R_2 = \{(b, b)\}$, $R_3 = \{(a, b)\}$, $R_4 = \{(b, a)\}$, $R_5 = \{(a, a), (a, b)\}$, $R_6 = \{(a, a), (b, a)\}$, $R_7 = \{(a, a), (b, b)\}$, $R_8 = \{(a, b), (b, a)\}$, $R_9 = \{(a, b), (b, b)\}$, $R_{10} = \{(b, a), (b, b)\}$, $R_{11} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, ...

Relações

- $R_{12} = \{(a,a),(b,a),(b,b)\}$,
  $R_{13} = \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$,
  $R_{14} = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$,
  $R_{15} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ e $R_{16} = \Phi$.
- Total de 16 relações.

Exemplo 5:

Generalizando, um conjunto A com n elementos possui 2^{n^2} relações.

- **Solução:** Se A tem n elementos, então $A \times A$ tem n^2 elementos.
- A quantidade de subconjuntos de $A \times A$ é 2^{n2} elementos.

Propriedades das Relações

- Reflexiva;
- Simétrica;
- Transitiva.

Propriedades das Relações

- Reflexiva;
- Simétrica;
- Transitiva.

Relação reflexiva:

Uma relação R em um conjunto A é chamada **reflexiva** se

$$(a, a) \in R \textit{ para todo elemento } a \in A.$$

- Ou ainda, R é relação reflexiva em A se

$$\forall a \, \big((a, a) \in R\big),$$

- onde A é o conjunto universo.

Relação Reflexiva

Exemplo 6:

Considere as relações em $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

- $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$;
- $R_2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}$;
- $R_3 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,4)\}$;
- $R_4 = \{(3,4)\}$;
- $R_5 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,4)\}$.

Quais destas relações são reflexivas?

- **Solução:** fazer em aula. **Resposta:** R_3 e R_5.

Relação Reflexiva

Exemplo 7:

A relação "divide" no conjuntos dos inteiros positivos é reflexiva?

Relação Reflexiva

Exemplo 7:

A relação "divide" no conjuntos dos inteiros positivos é reflexiva?

- **Solução:** Seja a um número inteiro positivo, isto é, $a > 0$.
- Como $a|a$ sempre que a for um inteiro positivo, então a relação "divide" é reflexiva.

Relação Simétrica

Relação simétrica:

Uma relação R em um conjunto A é chamada **simétrica** se

$$(a, b) \in R \ \text{ implica } \ (b, a) \in R, \ \forall a, b \in A.$$

- Ou ainda, R é relação simétrica se

$$\forall a \, \forall b \, \Big((a, b) \in R \ \rightarrow \ (b, a) \in R \Big),$$

- onde A é o conjunto universo.

Relação Anti-simétrica

Relação anti-simétrica:

Uma relação R em um conjunto A é chamada **anti-simétrica** se

$$(a, b) \in R \text{ e } (b, a) \in R, \text{ implicam } a = b, \ \forall a, b \in A.$$

- Ou ainda, R é relação anti-simétrica se

$$\forall a \, \forall b \, \Big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R \Big) \ \rightarrow \ a = b,$$

- onde A é o conjunto universo.

Exemplos

Exemplo 8:

Considere as relações em $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

- $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$;
- $R_2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}$;
- $R_3 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,4)\}$;
- $R_4 = \{(3,4)\}$;
- $R_5 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,4)\}$

Quais dessas relações são simétricas?

- **Solução:** fazer em aula. **Resposta:** R_2 e R_3.

Exemplos

Exemplo 9:

A relação "divide" no conjuntos dos inteiros positivos é simétrica?

- **Solução:** Essa relação não é simétrica pois $1|2$, isto é, $2 = 2 \cdot 1$, mas $2 \not| 1$, pois não existe número inteiro m, tal que $1 = m \cdot 2$.

Exemplos

Exemplo 10:

A relação "divide" no conjuntos dos inteiros positivos é anti-simétrica?

- **Solução:** se $a|b$ e $b|a$ segue que $b = m \cdot a$ e $a = n \cdot b$, respectivamente, para m e n inteiros.
- Assim,

$$b = m \cdot a = m \cdot (n \cdot b) = (m \cdot n) \cdot b,$$

- o que implica $m \cdot n = 1$.
- Como m e n são inteiros segue $m = n = 1$ e $a = b$.
- Portanto, a relação "divide" é anti-simétrica.

Relação Transitiva

Relação transitiva:

Uma relação R em um conjunto A é chamada **transitiva** se

$(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ implicam $(a, c) \in R, \ \forall a, b, c \in A.$

- Ou ainda, R é relação transitiva se

$$\forall a\, \forall b\, \forall c \Big(\big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \big) \rightarrow (a, c) \in R \Big),$$

- onde A é o conjunto universo.

Exemplos

Exemplo 11:

Considere as relações em $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

- $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$;
- $R_2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}$;
- $R_3 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,4)\}$;
- $R_4 = \{(3,4)\}$;
- $R_5 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,4)\}$

Quais dessas relações são transitivas?

- **Solução:** fazer em aula. **Resposta:** R_2, R_4 e R_5.

Exemplos

Exemplo 12:

A relação "divide" no conjuntos dos inteiros positivos é transitiva?

- **Solução:** Vamos mostrar que $a|b$ e $b|c$ implica que $a|c$.
- De fato, se $a|b$ e $b|c$ segue que $b = m \cdot a$ e $c = n \cdot b$, respectivamente, para m e n inteiros.
- Assim,

$$c = n \cdot b = n \cdot (m \cdot a) = (n \cdot m) \cdot a.$$

- Logo, a divide c.
- Portanto, a relação "divide" é transitiva.

Combinando Relações

Exemplo 13:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
As relações $R_1 = \{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3)\}$ e
$R_2 = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4)\}$ pode ser combinadas para obter:

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 2),\ (3, 3)\}$;
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$;
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2),\ (3, 3)\}$;
- $R_2 - R_1 = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4)\}$;
- $R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2 - (R_1 \cap R_2) =$
  $\{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 2),\ (3, 3)\}$.

Combinando Relações

Exemplo 14:

Seja $R_1 = \{(x, y) \mid x < y\}$ e $R_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$ relação no conjunto dos números reais.
Obtemos as seguintes relações:

- $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid x < y \text{ ou } x > y\} =$
  $= \{(x, y) \mid x \neq y\}$;
- $R_1 \cap R_2 = \Phi$;
- $R_1 - R_2 = R_1$;
- $R_2 - R_1 = R_2$.

Relação de Equivalência

Definição 3:

Uma relação R em um conjunto A é chamada **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva.

Relação de Equivalência

Definição 3:

Uma relação R em um conjunto A é chamada **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 4:

- Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**.
- **Notação:** escrevemos $a \sim b$ para denotar que a e b estão relacionados de acordo com uma relação de equivalência.

Exemplos

Exemplo 15:

A relação $R = \{(a,b) \mid a - b \in \mathbb{Z}\}$ no conjunto dos números reais é uma relação de equivalência.

- **Solução:**
- R é reflexiva pois $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$. Logo, $(a,a) \in R$.
- R é simétrica, pois se $(a,b) \in R$, então $a - b \in \mathbb{Z}$ o que implica que $b - a = -(a-b) \in \mathbb{Z}$. Logo $(b,a) \in R$.
- Sejam $(a,b),(b,c) \in R$, então $a - b = m \in \mathbb{Z}$ e $b - c = n \in \mathbb{Z}$. Assim, $a - c = a - b + b - c = (a-b)+(b-c) = m + n \in \mathbb{Z}$. Logo, $(a,c) \in R$ e R é transitiva.

Exemplos

Exemplo 16 - Congruência Módulo m:

Seja $m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$. Seja

$$R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$$

a relação **congruência módulo m**.
Essa relação é uma relação de equivalência.

- **Solução:**
- Por definição,
  $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se m divide $a - b$ se somente se $a - b = k \cdot m$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

- Alguns casos particulares:
- Seja $m = 2$. Assim,
- $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod 2\} = \{(a, b) \mid a - b = 2k\} = \{(2, 4),\ (8, 2),\ (5, 3),\ (7, 13), \ldots\}$.
- Seja $m = 3$. Assim,
- $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod 3\} = \{(a, b) \mid a - b = 3k\} = \{(2, 5),\ (10, 4),\ (-4, 11),\ (13, 7), \ldots\}$.

Exemplos

- Seja $m = 4$. Assim,
- $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod 4\} = \{(a, b) \mid a - b = 4k\} = \{(10, 2), (10, 6), (-4, 12), (8, 0), ...\}$.

Exemplos

- Seja $m = 4$. Assim,
- $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod 4)\} =$
  $\{(a, b) \mid a - b = 4k\} =$
  $\{(10, 2),\ (10, 6),\ (-4, 12),\ (8, 0), ...\}$.

- Já vimos que a relação $a - b$ em $\mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência. Logo,

  $$R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod m)\} = \{(a, b) \mid a - b = k \cdot m\}$$

  é uma relação de equivalência.

Classes de Equivalência

Exemplo 17:

A relação "divide" em $\mathbb{Z}$ não é uma relação de equivalência, pois não vale a propriedade simétrica.

Classes de Equivalência

Exemplo 17:

A relação "divide" em $\mathbb{Z}$ não é uma relação de equivalência, pois não vale a propriedade simétrica.

- Outros exemplos de relações de equivalência.

Exemplo 18:

- **1)** $R = \{(x, y) \mid x = y \text{ ou } x = -y\}$, sobre qualquer conjunto S;
- **2)** $R = \{(x, y) \mid x + y \text{ é par}\}$, sobre o conjunto $\mathbb{N}$;
- **3)** $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$.

- **Solução:** Exercício.

Classes de Equivalência

Definição 5:

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A.
O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elementos a de A é chamado de **classe de equivalência de a**.
A classe de equivalência de a relativa a R é indicada por $[a]_R$.
Ou ainda, $[a]_R = \{s \mid (a, s) \in R\}$.

Exemplos

Exemplo 19:

Para a relação de equivalência

$$R = \{(a, b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$$

no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, segue que para cada $a \in \mathbb{Z}$, a classe de equivalência de a é dada por:

$$[a] = \{a, -a\}.$$

- Por exemplo, $[7] = \{7, -7\} = [-7]$, $[-2] = \{-2, 2\} = [2]$ e $[0] = \{0\}$.

Exemplos

Exemplo 20:

Quais são as classes de equivalência de 0, 1, 2 e 3 na congruência módulo 4?

- **Solução:**
- A classe de equivalência de 0 na congruência módulo 4 contém todos os números a, tal que $a \equiv 0 (\text{mod } 4)$, ou seja, $a = 4k$, para $k \in \mathbb{Z}$, ou ainda, são todos os números a, que divididos por 4 têm resto 0:

$$[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}.$$

Exemplos

- A classe de equivalência de 1 na congruência módulo 4 contém todos os números a, tais que, $a - 1 = 4k$ o que implica $a = 4k + 1$, ou seja, todos os números a que divididos por 4 têm resto 1:

$$[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}.$$

- De modo análogo obtemos que a classe de equivalência de 2 na congruência módulo 4 contém todos os números a, tais que, $a - 2 = 4k$ o que implica $a = 4k + 2$, ou seja, todos os números a que divididos por 4 têm resto 2:

$$[2] = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}.$$

Exemplos

- Por fim, a classe de equivalência de 3 na congruência módulo 4 contém todos os números *a*, que divididos por 4 têm resto 3:

$$[3] = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}.$$

- Observamos que as demais classes de equivalência coincidem com as quatro classes listadas anteriormente.

Exemplos

Exemplo 21:

Seja n um número inteiro positivo e S um conjunto de sequências.
Seja R_n a relação em S tal que
$s \ R_n \ t$ (s relacionado com t) se e somente se $s = t$ ou tanto s quanto t têm, pelo menos, n caracteres e os primeiros n caracteres de s e t são os mesmos.
R é uma relação de equivalência.

Exemplos

- Seja $n = 3$ e S o conjunto de todas as sequências de bits. Seja R_3 a relação em S tal que
$s\ R_3\ t$ (s relacionado com t) se e somente se $s = t$ ou quando s e t forem sequências de bits de comprimento maior que ou igual a 3 que comecem com os mesmos primeiros 3 bits.
- Alguns exemplos,
$01\ R_3\ 01,\ 101\ R_3\ 101,\ 00111\ R_3\ 00101.$
- Mas, $001\ \not R_3\ 01101$ e $01011\ \not R_3\ 01110$.

Exemplos

- Qual a classe de equivalência de 011 relativa à relação de equivalência R_3?

- **Solução:** As sequências equivalentes a 011 são as sequências de bits com pelo menos três bits que começam com 011.

$$[011]_{R_3} = \{011,\ 0110,\ 0111,\ 01100,$$

$$01101,\ 01110,\ 01111, \ldots\}.$$

Partição

- O que é uma partição de um conjunto?

Exemplo 22:

Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A coleção de conjuntos

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, \; A_2 = \{4, 5\}, \; A_3 = \{6\}$$

forma uma partição de S, pois esses conjuntos são disjuntos (isto é, a interseção dos conjuntos é vazia) e a união é S.

- Como encontrar uma partição de um conjunto?
- Por meio de classes de equivalência.

Partição

Teorema 1:

- Seja R uma relação de equivalência em um conjuto A. As seguintes afirmações são equivalentes:
  - **i)** aRb;
  - **ii)** $[a] = [b]$;
  - **iii)** $[a] \cap [b] \neq \Phi$.

- **Conclusão:** As classes de equivalência de uma relação de equivalência formam uma partição do conjunto.

Exemplos

Exemplo 23:

Quais são os conjuntos na partição dos inteiros que aparecem na congruência módulo 4?

- **Solução:** Relação de equivalência - congruência módulo 4. As quatro classes de equivalência da sequência formam uma partição do conjunto dos números inteiros.
- $[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$;
- $[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$;
- $[2]_4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$;
- $[3]_4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$.

Exemplos

Exemplo 24:

Dado S o conjunto de todas as sequências de bits e a relação de equivalência R_3 em S dada por:
$s\ R_3\ t$ (s relacionado com t) se e somente se $s = t$ ou quando s e t forem sequências de bits de comprimento maior que ou igual a 3 que comecem com os mesmos primeiros 3 bits.
Descreva uma partição para S.

- **Solução:**

Exemplos

- Toda sequência de bits de comprimento menor do que 3 é equivalente apenas a ela própria:

$$[\lambda]_{R_3} = \{\lambda\},\ [0]_{R_3} = \{0\},\ [1]_{R_3} = \{1\},\ [00]_{R_3} = \{00\},$$

$$[01]_{R_3} = \{01\},\ [10]_{R_3} = \{10\},\ [11]_{R_3} = \{11\}.$$

- Toda sequência de bits de comprimento maior ou igual 3 é equivalente a uma das oito sequência de bits

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110 \text{ e } 111.$$

Exemplos

$[000]_{R_3} = \{000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, \ldots\},$

$[001]_{R_3} = \{001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, \ldots\},$

$[010]_{R_3} = \{010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, \ldots\},$

$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\},$

$[100]_{R_3} = \{100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, \ldots\},$

$[101]_{R_3} = \{101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, \ldots\},$

$[110]_{R_3} = \{110, 1100, 1101, 11000, 11001, 11010, 11011, \ldots\}$, e

$[111]_{R_3} = \{111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, \ldots\}.$

Exemplos

- Essas 15 classes de equivalência são disjuntas e toda sequência de bits está exatamente em uma delas.
- Essas 15 classes de equivalência formam uma partição do conjunto de todas as sequências de bits.

Referências

- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. Teoria e Problemas de Matemática Discreta. 2. ed. Bookman, 2004.
- MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. 3. ed. Bookman, 2010.
- ROSEN, K. H. Matemática Discreta e Suas Aplicações. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.