Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso de Ciência da Computação
Campus Chapecó

GEX208 - Informática Básica
Sistemas de Numeração

Prof. Luciano L. Caimi
lcaimi@uffs.edu.br

Sistemas de Numeração

O número é um conceito abstrato que representa a ideia de quantidade

Um **Sistema de Numeração (SN)** é o conjunto de símbolos utilizados para a representação de quantidades e as regras que definem a forma de representação. Um SN pode ser:

- Não posicional
- Posicional

Sistemas de Numeração

Sistema de Numeração Não Posicional

Cada símbolo representa um valor fixo, independente de sua posição relativa no número

Exemplo: Sistema de algarismos romanos

Símbolos: I, V, X, L, C, D, M

Regras:

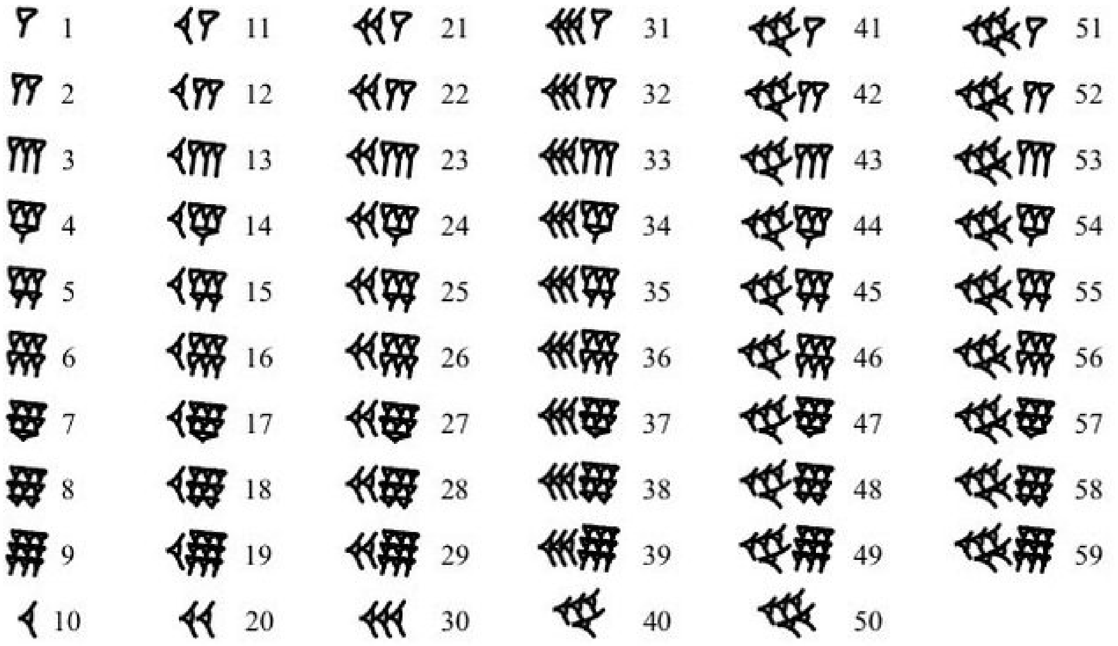
- Cada símbolo colocado à direita de um maior é adicionado a este
- Cada símbolo colocado à esquerda de um maior tem o seu valor subtraído do maior

Sistemas de Numeração

Sistema de Numeração Não Posicional

Cada símbolo representa um valor fixo, independente de sua posição relativa no número

Exemplo: Sistema Babilônico



Sistemas de Numeração

Sistema de Numeração Posicional

O **valor** de cada símbolo é determinado **de acordo com a sua posição** no número

Um sistema de numeração é determinado fundamentalmente pela BASE, que indica a quantidade de símbolos e o valor de cada símbolo

Todos os sistemas posicionais, **independente da BASE**, possuem as mesmas regras de formação, contagem e operações aritméticas básicas

Sistemas de Numeração

Teorema Fundamental da Numeração

O teorema fundamental da numeração expressa a característica principal dos sistemas posicionais:

$$N^o = \sum_{i=-d}^{n} (digito)_i * (base)^i$$

expandindo

$$\ldots + a_3 * B^3 + a_2 * B^2 + a_1 * B^1 + a_0 * B^0 + a_{-1} * B^{-1} + \ldots$$

Onde:

i = posição em relação à vírgula,

d = nº de dígitos à direita da vírgula,

n = nº de dígitos à esquerda da vírgula –1,

dígito = cada um símbolos dos que compõem o número

Teorema Fundamental da Numeração

O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo (decimal)

$$\boxed{735 = 700 + 30 + 5}$$

O algarismo 5 representa 5 unidades, o algarismo 3 representa 3 dezenas, e por último que o algarismo 7 representa 7 centenas ...

$$\boxed{573 = 500 + 70 + 3}$$

Já no 2º exemplo é diferente

Sistemas de Numeração

Base Decimal: 10 símbolos

Símbolos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Contagem:

00
01 “encheu a casa menos significativa:
02 reinicia a contagem nesta casa e usa o
03 próximo símbolo na casa a sua esquerda”
04 assim:
05 10 20 100
06 11 21
07 ... ...
08 19 99
09

Esta “regra” é válida independente da base de numeração utilizada

Sistemas de Numeração

Base Decimal

Cada casa decimal possui um peso 10 vezes maior do que a casa a sua direita

...	100	10	1

Considerando um número com N dígitos (ou casas) teremos capacidade de representar

B^N valores diferentes (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos decimais teremos:

$10^3 = 1000$ valores

Sistemas de Numeração

Base Decimal

O maior valor a ser representado com N dígitos será:

$B^N - 1$ (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos decimais teremos:

$10^3 - 1 = 999$

Considerando o maior símbolo possível

9	9	9

Sistemas de Numeração

Base Decimal:

Adição: quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1

Exemplo:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 1 & \\ & 2 & 4 & 5 & 3 \\ + & & 9 & 7 & 9 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

$3+9=12= 10+2$

$5+7+1=13=10+3$

$1+4+9=14=10+4$

Sistemas de Numeração

Base Decimal

Subtração: quando uma determinada casa necessita "pedir emprestado" a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base (10)

Exemplo:

		9		
	0	10	10	
	1	0	5	2
-	0	4	8	1
	0	5	7	1

→ 10+5=15 ⇒ 15-8 = 7

Sistemas de Numeração

Base Binária

Símbolos: 0,1

Contagem:

000 “encheu a casa menos significativa:
001 reinicia a contagem nesta casa e usa o
010 próximo símbolo na casa a sua esquerda”
011
100
101
110
111

Sistemas de Numeração

Base Binária

- Cada casa ou dígito binário é chamado de bit (do inglês **Bi**nary **D**igit)
- Um agrupamento de 8 bits é chamado de Byte
- Pelo T.F.N. cada casa binária possui um peso <u>2 vezes maior</u> do que a casa a sua direita

...	**8**	**4**	**2**	**1**

Sistemas de Numeração

Com n bits podemos representar: $B^n \Rightarrow 2^n$

Para 3 casas binárias (ou 3 bits) teremos:

$2^3 = 8$ valores

O maior valor a ser representado com N dígitos será: $B^n - 1$

Para 5 bits teremos:

$2^5 - 1 = 31$

Considerando o maior símbolo possível:

1	1	1	1	1

$\Rightarrow 31$

Sistemas de Numeração

Base Binária

Adição: quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1

Exemplo:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 &   & 1 & 0 & 1 & 1 \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2=2+0 \\
3=2+1
\end{array}
$$

Base Binária

Subtração: quando uma determinada casa necessita "pedir emprestado" a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base(2)

Exemplo:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
 & 0 & 2 & 2 & & \longrightarrow 2+0=2 \Rightarrow 2-1 = 1 \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
- & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Sistemas de Numeração

Considerando o peso de cada casa teremos:

$2^0 = 1$	$2^{10} = 1024 = 1K$	$2^{20} = 1024K = 1M$
$2^1 = 2$	$2^{11} = 2048 = 2K$	$2^{21} = 2048K = 2M$
$2^2 = 4$	$2^{12} = 4096 = 4K$	$2^{22} = 4096K = 4M$
$2^3 = 8$	$2^{13} = 8192 = 8K$	$2^{23} = 8M$
$2^4 = 16$	$2^{14} = 16K$	$2^{24} = 16M$
$2^5 = 32$	$2^{15} = 32K$	$2^{25} = 32M$
$2^6 = 64$	$2^{16} = 64K$	$2^{26} = 64M$
$2^7 = 128$	$2^{17} = 128K$	$2^{27} = 128M$
$2^8 = 256$	$2^{18} = 256K$	$2^{28} = 256M$
$2^9 = 512$	$2^{19} = 512K$	$2^{29} = 512M$

Para valores entre 2^{30} e 2^{39}: Giga

entre 2^{40} e 2^{49}: Tera

Sistemas de Numeração

Conversões:

$$\begin{tikzcd} \text{bit} \arrow[rr, bend right, "/8"'] & & \text{byte} \arrow[ll, bend right, "*8"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, bend right, "/1024"'] & & M \arrow[ll, bend right, "*1024"'] \arrow[rr, bend right, "/1024"'] & & G \arrow[ll, bend right, "*1024"'] \end{tikzcd}$$

Sistemas de Numeração

Exemplos de conversão

Considerando que 1 byte é um agrupamento de 8 bits teremos:

a) 56 bits = ? Bytes ⇒ 56/8 Bytes = 7 Bytes

b) 9 Bytes = ? bits ⇒ 9 x 8 bits = 72 bits

c) 32KBytes = ? bits ⇒ 32 * 8 Kbits

⇒ 256 * 1024 bits

⇒ 262144 bits

d) 131072Kbits = ? MBytes ⇒ 131072/8 KBytes

⇒ 16384 / 1024 KB

⇒ 16 MBytes

Sistemas de Numeração

Base Octal

Símbolos: 0,1,2,3,4,5,6,7

Contagem:

00
01 “encheu a casa menos significativa:
02 reinicia a contagem nesta casa e usa o
03 próximo símbolo na casa a sua esquerda”
04 assim:
05 10 20 100
06 11 21
07 ..
17 77

Sistemas de Numeração

cada casa octal possui um peso 8 vezes maior do que a casa a sua direita

...	64	8	1

Considerando um número com N dígitos (ou casas) teremos capacidade de representar

B^N valores diferentes (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos octais teremos:

$$8^3 = 512 \text{ valores}$$

Sistemas de Numeração

O maior valor a ser representado com N dígitos será:

$B^N - 1$ (onde B é a base de numeração).

Para 4 dígitos octais teremos:

$8^4 - 1 = 4095$

Considerando o maior símbolo possível

7	7	7	7	= 4095

Sistemas de Numeração

Base Octal

Adição: Quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1

Exemplo:

	1	1	1		9=8+1
	5	5	7	4	11=8+3
+	0	6	3	5	
	6	4	3	1	12=8+4

Sistemas de Numeração

Base Octal

Subtração: quando uma determinada casa necessita "pedir emprestado" a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base(8).

Exemplo:

		7		
	5	8	8	
	6	0	0	5
-	0	4	3	2
	0	3	5	3

$8+0=8 \Rightarrow 8-3 = 5$

Sistemas de Numeração

Base Hexadecimal

Símbolos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Contagem:

00			
01	0A		
02	0B		
03	0C	..	
04	0D	19	20
05	0E	1A	21
06	0F	..	..
07	10	1F	2F
08	11		30
09	12		

"**encheu a casa menos significativa:** reinicia a contagem nesta casa e usa o próximo símbolo na casa a sua esquerda"

Sistemas de Numeração

Cada casa hexadecimal possui um peso 16 vezes maior do que a casa a sua direita

...	256	16	1

Considerando um número com N dígitos (ou casas) teremos capacidade de representar

B^N valores diferentes (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos hexadecimais teremos:

$16^3 = 4096$ valores

Sistemas de Numeração

O maior valor a ser representado com N dígitos será:

$B^N - 1$ (onde B é a base de numeração).

Para 4 dígitos hexa, teremos:

$16^4 - 1 = 65535$

Considerando o maior símbolo possível

F	F	F	F

= 65535

Base Hexadecimal

Adição: Quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1

Exemplo:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 1 & \\ & E & B & C & A \\ + & 0 & A & D & 9 \\ \hline & F & 6 & A & 3 \end{array}$$

A+9=10+9 = 19 = 16+3

C+D+1=12+13+1=26

= 16+10 = 16+A

B+A+1=11+10+1=22

=16+6

Sistemas de Numeração

Base Hexadecimal

Subtração: quando uma determinada casa necessita “pedir emprestado” a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base (16)

Exemplo:

		15			
	5	16	16		→ 16+5=21 ⇒ 21-B =21-11
	6	0	5	F	=10 = A
-	0	4	B	B	
	5	B	A	4	

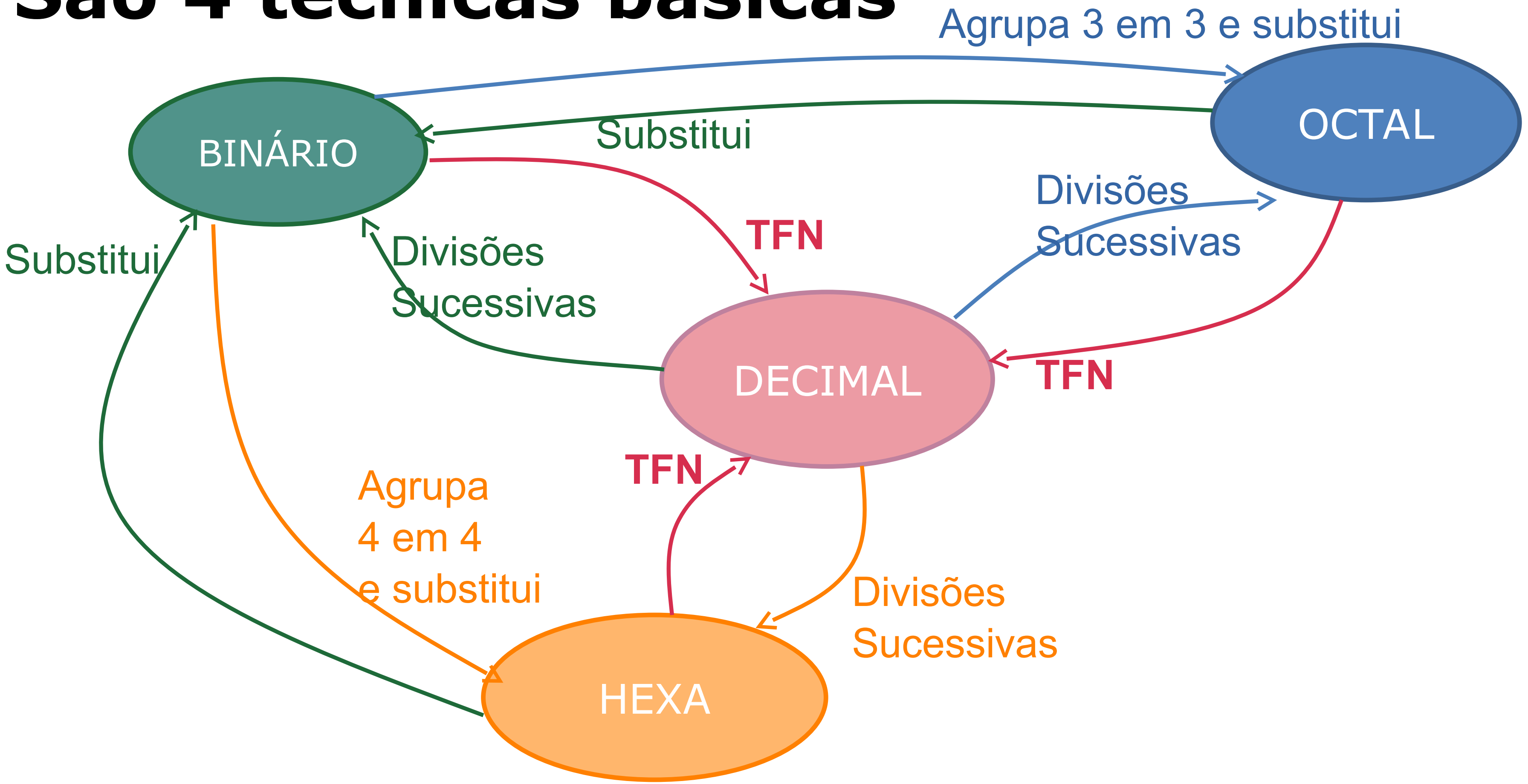
Conversão entre Bases

São 4 técnicas básicas

Base Origem	Base Destino	Técnica
Base Qualquer → Decimal		Teorema Fundamental da Numeração
Decimal → Base Qualquer		Divisões Sucessivas
Octal/Hexa → Binário		Substituir de 3 em 3 / 4 em 4
Binário → Octal/Hexa		Agrupar de 3 em 3 / 4 em 4 e substituir

Conversão entre Bases

- **São 4 técnicas básicas**



Códigos Numéricos

Código BCD (Binary Coding Decimal)

O código BCD é um sistema de representação dos dígitos decimais desde 0 até 9 com um código binário de 4 bits. Esse código BCD usa o sistema de pesos posicionais 8421 do código binário puro

Apesar de usar 4 bits existem apenas dez códigos válidos. Os números binários de 4 bits representando os números decimais desde 10 até 15 são inválidos no sistema BCD

Ex: 238 = 001000111000

Decimal	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Códigos Numéricos

Códigos 2 em 5

Características

Grupo de códigos onde 2 entre 5 dígitos recebem o valor 1

Cada posição tem um peso associado

O zero tem codificação especial

Ex:

804 = 001010110001010

= 100101100001001

Código	2 em 5	
Decimal	01236	74210
0	01100	11000
1	11000	00011
2	10100	00101
3	10010	00110
4	01010	01001
5	00110	01010
6	10001	01100
7	01001	10001
8	00101	10010
9	00011	10100

Códigos Numéricos

Código GRAY

Características

- Palavras adjacentes variam apenas 1 bit
- Cíclico
- Refletido
- Bit mais significativo é igual ao código inário natural

Ex: 237 = 011010100

Decimal	GRAY
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1101
9	1001
10	1111
11	1110
...	