Matemática Discreta
Aula 14
Análise Combinatória - Permutação e Combinação

Rosane Rossato Binotto

22/11/2023

Tópicos

- Permutação.
- Combinação.

PERMUTAÇÃO

Permutação Simples

Problema:

De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

- A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos;
- A escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n-1$ modos;
- $\vdots$
- A escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo.
- O número total de possibilidades (cada uma das quais é chamada de uma **permutação simples** dos n objetos) é

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 1 = n!.$$

- Uma **permutação** de um conjunto de objetos distintos é um arranjo ordenado desses objetos.

Permutação

Exemplo 1:

Quantos são os anagramas da palavra CALOR? Quantos começam com consoantes?

- **Solução:** Cada anagrama corresponde a uma permutação dessas 5 letras.
- O número de anagramas é $P_5 = 5! = 120$.
- Para formar um anagrama começado por consoante:

  • A consoante pode ser escolhida de 3 modos;

  • As demais letras podem ser colocadas em qualquer ordem. Logo, há $P_4 = 4! = 24$ possibilidades de ordenação.
- Logo, há $3 \times 24 = 72$ anagramas começados por consoante.

Permutação

Exemplo 2:

De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?

- **Solução:**
- Podemos escolher a ordem das matérias de $3!$ modos.
- Feito isso, há $5!$ modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados, $3!$ modos para os de Estatística e $2!$ modos para os de Física.
- O número total de possibilidades é

$$3!5!3!2! = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640.$$

Permutação

Exercício 1:

i) De quantas maneiras podemos escolher 3 alunos, de um grupo de 5 estudantes, para ficarem em fila para uma foto?

ii) De quantas maneiras podemos organizar todos os 5 estudantes em fila para uma foto?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta de i):** 60 maneiras.
- **Resposta de ii):** 120 maneiras.

Permutação

Definição 1:

Um arranjo ordenado de r elementos de um conjunto é chamado de **r-permutação**.

Exemplo 3:

Seja $S = \{a,\ b,\ c\}$ um conjunto. Encontre todas as 2-permutações de S.

- **Solução:**
- As 2-permutações de S são os arranjos ordenados

$$a, b; \quad a, c; \quad b, a; \quad b, c; \quad c, a \ \text{ e } \ c, b.$$

- O número total de possibilidades é $\mathrm{P}(3{,}2){=}3{\times}2 = 6$.

Permutação

Resultado:

Se n for um número inteiro positivo e r um número inteiro com $1 \leq r \leq n$, então há

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-r+1)$$

r-permutações de um conjunto com n elementos distintos. Observamos que $(n-r+1) = n-(r-1)$.

Permutação

Exercício 2:

Quantas maneiras há para selecionar o primeiro, o segundo e o terceiro lugar a partir de 100 pessoas diferentes que participaram de um concurso?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $P(100, 3) = 970\ 200$.

Permutação

Exercício 3:

Quantas permutações das letras ABCDEFGH contêm a sequência ABC?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** $6! = 720$ permutações.

COMBINAÇÃO

Combinação

Exemplo 4:

Quantos comitês diferentes de 3 estudantes podem ser formados a partir de um grupo de 4 estudantes?

- **Solução:** Encontrar o número de subconjuntos com 3 elementos de um conjunto com 4 elementos.
- Seja $\{A,\ B,\ C,\ D\}$ o conjunto. Os subconjuntos são dados por:

$$\{A, B, C\},\quad \{A, C, D\},\quad \{A, B, D\}\ \text{ e }\ \{B, C, D\}.$$

- Há 4 subconjuntos, ou seja, há 4 maneiras de combinar os elementos do conjunto 3 a 3.

Combinação

Definição 2:

- Uma **r-combinação** de elementos de um conjunto é uma seleção não ordenada de r elementos a partir de um conjunto.
- Então uma r-combinação é um subconjunto do conjunto com r elementos.
- O número de r-combinações de um conjunto com n elementos distintos é dado por

$$C(n,r) = C_n^r = \binom{n}{r}$$

que é um número binomial.

Combinação

Resultado:

De quantos modos podemos selecionar r objetos distintos entre n objetos distintos dados? Equivalentemente, quantos são os subconjuntos com r elementos de um conjunto com n elementos?

- Começamos escolhendo, em ordem, r elementos, o que pode ser feito de $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ modos, sendo $(n-r+1) = \left[n-(r-1)\right]$.
- Deste modo, cada subconjunto com r elementos é contado $r!$ vezes, já que ele aparece em cada ordem possível.

Combinação

- O número de combinações simples de classe r de n objetos é:

$$C_n^r = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \mathbf{(n-r)} \cdot \mathbf{\left[(n-r)-1\right]} \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}}{r! \mathbf{(n-r)} \cdot \mathbf{\left[(n-r)-1\right]} \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}} =$$

$$= \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!},$$

- onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \left[(n-r)+1\right] \cdot (n-r) \cdot \left[(n-r)-1\right] \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ e $(n-r)! = (n-r) \cdot \left[(n-r)-1\right] \cdot \left[(n-r)-2\right] \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$

Combinação

Resultado:

O número de combinações simples de classe r de n objetos distintos (ou r-combinação) é dado por:

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

- Observamos que

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Combinação

Exemplo 5:

Quantas maneiras há para selecionar 5 jogadores de um time de basquete com 10 membros?

- **Solução:**
- Encontrar as 5-combinações de um conjunto com 10 elementos distintos.
- Logo, há

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

modos.

Combinação

Exercício 4:

Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com **exatamente** 3 homens, podem ser formadas?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** 60 comissões.

Combinação

Exemplo 6:

Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com **pelo menos** 3 homens, podem ser formadas?

Combinação

Exemplo 6:

Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com **pelo menos** 3 homens, podem ser formadas?

- **Solução:** Há comissões com: 3 homens e 2 mulheres, 4 homens e 1 mulher, 5 homens.
- A resposta é

$$C_5^3 \cdot C_4^2 + C_5^4 \cdot C_4^1 + C_5^5 = 10 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 1 = 81.$$

Combinação

- **Um erro comum**.
- Começar escolhendo 3 homens, para garantir pelo menos 3 homens (C_5^3 modos).
- A seguir, escolher mais 2 pessoas (C_6^2 modos).
- Logo, há
$$C_5^3 \times C_6^2 = 10 \times 15 = 150$$
comissões **(!)**.

Combinação

Exercício 5:

Quantas cadeias de bits de extensão n têm exatamente r 1s?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** C_n^r.

OUTRAS TÉCNICAS DE CONTAGEM

Permutações com repetições

Exemplo 7:

Quantos são os anagramas da palavra BOTAFOGO?

- **Solução:** Se as letras fossem diferentes a resposta seria $8!$.
- Como as três letras O são iguais, quando as trocamos entre si obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto.
- Isso faz com que na nossa contagem de $8!$ tenhamos contado o mesmo anagrama $3!$ vezes.
- O número de anagramas é

$$\frac{8!}{3!} = 6720.$$

Generalizando

Resultado:

O número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...}$$

Generalizando

Resultado:

O número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$$

Exercício 6:

Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?

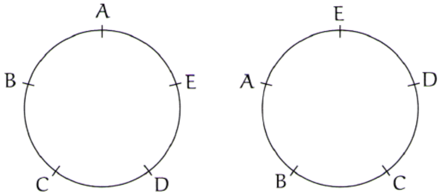
- **Solução:** em aula. Observar que A e E aparecem duas vezes cada na palavra.
- **Resposta:** $\frac{9!}{2!2!}$=90.720 anagramas.

Permutações Circulares

Exemplo 8:

De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda?

- A resposta **não é** $5! = 120$ rodas, porque as rodas *ABCDE* e *EACBD*, por exemplo, são na verdade a mesma roda.



Permutações Circulares

- Como cada roda pode aparecer em 5 posições, a resposta é
$$\frac{120}{5} = 24$$
modos.

Permutações Circulares

- Como cada roda pode aparecer em 5 posições, a resposta é
$$\frac{120}{5} = 24$$
modos.

Resultado:

De modo geral, o número de **permutações circulares** de n elementos é
$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Combinações com repetição - Exemplo 9

Há quantas maneiras possíveis de escolher quatro pedaços de fruta a partir de uma tigela que contém maçãs, laranjas e pêras, se a ordem em que cada pedaço é escolhido não é relevante, apenas o tipo de fruta, e o pedaço individual não é relevante também, sendo que há pelo menos quatro pedaços de cada tipo de fruta na tigela?

Solução: Para resolver esse problema, listamos todas as maneiras possíveis de escolher uma fruta. Há 15 maneiras:

4 maçãs	4 laranjas	4 pêras
3 maçãs, 1 laranja	3 maçãs, 1 pêra	3 laranjas, 1 maçã
3 laranjas, 1 pêra	3 pêras, 1 maçã	3 pêras, 1 laranja
2 maçãs, 2 laranjas	2 maçãs , 2 pêras	2 laranjas, 2 pêras
2 maçãs, 1 laranja, 1 pêra	2 laranjas, 1 maçã, 1 pêra	2 pêras, 1 maçã, 1 laranja

A solução é o número de 4-combinações com repetição de um conjunto de três elementos, $\{maçã, laranja, pêra\}$. ◀

Combinações com repetição

Resultado:

Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p?$$

- Cada solução da equação corresponde a uma forma de escolher p elementos dentre 1, 2, ... n, mas permitindo repetições.
- O número de soluções é representado por CR_n^p.
- Cada solução da equação pode ser representada por uma fila de p sinais $+$ e $n-1$ sinais $|$, que separam as incógnitas.

Combinações com repetição

- Reciprocamente, cada fila desta forma corresponde a uma solução.
- **Por exemplo:** dada a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, onde $p = 5$ e $n = 4$.

$$+ + + \mid + \mid \mid +$$

corresponde à solução (3,1,0,1) dessa equação.

- Para contar a quantidade de tais filas, basta escolher p dentre os $n + p - 1$ lugares para colocar os sinais $+$.
- Logo,

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p.$$

Combinações com repetição

- Voltando ao **Exemplo 9**.

Exemplo 9:

Há quantas maneiras de escolher 4 pedaços de frutas a partir de uma tijela que contém maçãs, laranjas e peras?

- Seja x_1 o número de pedaços de maçãs; x_2 o número de pedaços de laranjas e x_3 o número de pedaços de peras.

- Resolver esse exemplo significa encontrar as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

Combinações com repetição

- Continuação ... $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.
- É uma combinação com repetição.
- Logo,

$$CR_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = 15.$$

- O total de maneiras de escolher as frutas é 15.

Exercício 7:

De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 6 sabores distintos?

Combinações com repetição

Exercício 7:

De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 6 sabores distintos?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** O número de possibilidades é $CR_6^3 = C_8^3 = 56$ modos.

OBJETOS DISTINTOS E CAIXAS DISTINTAS

Exemplo 10:

Quantas maneiras existem de distribuir mãos de 5 cartas para cada um dos 4 jogadores, a partir de um baralho de 52 cartas?

Distribuição de objetos em caixas

OBJETOS DISTINTOS E CAIXAS DISTINTAS

Exemplo 10:

Quantas maneiras existem de distribuir mãos de 5 cartas para cada um dos 4 jogadores, a partir de um baralho de 52 cartas?

- **Solução:** usar o Princípio Multiplicativo.
  • O primeiro jogador pode ter 5 cartas de C_{52}^{5} maneiras.
  • O segundo jogador pode ter 5 cartas de C_{47}^{5} maneiras.

Distribuição de objetos em caixas

- Continuação ...

  • O terceiro jogador pode ter 5 cartas de C_{42}^{5} maneiras.
  • O quarto jogador pode ter 5 cartas de C_{37}^{5} maneiras.

- Assim, o número de maneiras é

$$C_{52}^{5} \times C_{47}^{5} \times C_{42}^{5} \times C_{37}^{5} = \ldots = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}.$$

OBJETOS IDÊNTICOS E CAIXAS DISTINTAS

Exemplo 11:

Há quantas maneiras possíveis de colocar 10 bolas idênticas em 8 caixas distintas?

OBJETOS IDÊNTICOS E CAIXAS DISTINTAS

Exemplo 11:

Há quantas maneiras possíveis de colocar 10 bolas idênticas em 8 caixas distintas?

- **Solução:** combinação com repetição.
- Equivale resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 10$$

cuja solução é

$$CR_8^{10} = C_{10+8-1}^{10} = C_{17}^{10} = \frac{17!}{10!7!} = 19\,448$$

maneiras.

OBJETOS DISTINTOS E CAIXAS IDÊNTICAS

Exemplo 12:

Há quantas maneiras possíveis de colocar de 4 empregados diferentes em 3 escritórios idênticos, em que cada escritório pode conter qualquer número de empregados?

OBJETOS DISTINTOS E CAIXAS IDÊNTICAS

Exemplo 12:

Há quantas maneiras possíveis de colocar de 4 empregados diferentes em 3 escritórios idênticos, em que cada escritório pode conter qualquer número de empregados?

- **Solução:** Enumerar as maneiras possíveis de os empregados serem colocados nos escritórios.
- Nomear os empregados por A, B, C e D.
- Possibilidades:

Distribuição de objetos em caixas

- **i)** Todos na mesma sala - 1 possibilidade pois as salas são idênticas;
- **ii)** 3 empregados em uma sala e um quarto na outra sala - 4 possibilidades:

$$\{\{A, B, C\},\ D\},\ \{\{A, B, D\},\ C\},\ \{\{B, C, D\},\ A\},$$
$$\{\{A, C, D\},\ B\};$$

- **iii)** 2 empregados em cada sala - 3 possibilidades:

$$\Big\{\{A, B\},\ \{C, D\}\Big\},\ \Big\{\{A, C\},\ \{B, D\}\Big\}$$
$$\Big\{\{B, C\},\ \{A, D\}\Big\};$$

Distribuição de objetos em caixas

- **iv)** 2 empregados em uma sala e cada um dos outros 2 em salas diferentes - 6 possibilidades:

$$\Big\{\{A, B\},\ \{C\},\ \{D\}\Big\},\ \Big\{\{A, C\},\ \{B\},\ \{D\}\Big\},$$

$$\Big\{\{A, D\},\ \{B\},\ \{C\}\Big\},\ \Big\{\{B, C\},\ \{A\},\ \{D\}\Big\},$$

$$\Big\{\{B, D\},\ \{A\},\ \{C\}\Big\},\ \Big\{\{C, D\},\ \{A\},\ \{B\}\Big\}.$$

- Total de possibilidades: 14.

Distribuição de objetos em caixas

OBJETOS IDÊNTICOS E CAIXAS IDÊNTICAS

Exemplo 12:

Há quantas maneiras possíveis de empacotar 6 exemplares do mesmo livro em 4 caixas idênticas, em que cada caixa pode conter até 6 livros?

OBJETOS IDÊNTICOS E CAIXAS IDÊNTICAS

Exemplo 12:

Há quantas maneiras possíveis de empacotar 6 exemplares do mesmo livro em 4 caixas idênticas, em que cada caixa pode conter até 6 livros?

- **Solução:** Enumerar todas as maneiras possíveis de empacotar os livros.
- Na tabela, apresentada na sequência, em cada linha lista-se a quantidade de exemplares.

Distribuição de objetos em caixas

Caixa 1	Caixa 2	Caixa 3	Caixa 4
6			
5	1		
4	2		
4	1	1	
3	3		
3	2	1	
3	1	1	1
2	2	2	
2	2	1	1

- Total: 9 maneiras.

Referências

- LIMA, E. L. et al. **A matemática no ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática) (Coleção PROFMAT).
- ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.
- Slides do PROFMAT.