Algumas dicas - Lista 3

1) Sejam $(2s+1)$ e $(2m+1)$ números ímpares.
Assim, $(2s+1)+(2m+1) = \dots = 2(\underbrace{s+m}_{n})+2$
$= 2(n+1)$ que é par

2) Seja x par $\Rightarrow x = 2m$.
Assim, $x+y=0 \iff 2m+y=0 \iff y=-2m$
que é par.

3) $m+n$ e $n+p$ números pares $\Rightarrow$
$m+n = 2s$ e $n+p = 2k \Rightarrow$
$(m+n)+(n+p) = 2s+2k$.
Assim, $m+p = 2s+2k-2n = 2(s+k-n)$ que é par.
Prova direta

4) ok

5) Seja x um número racional e y irracional.
Então $x = \frac{a}{b}$. Supor $x+y$ racional. Então
$x+y = \frac{c}{d} \Rightarrow y = \frac{c}{d} - x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \Rightarrow y$ racional
o que é um absurdo. Logo, y é irracional.

6) ok

7) Falso. Tome $x = y = \sqrt{2}$.

8) ok

9) Sejam n e $n+1$ dois números inteiros consecutivos. Suponhamos por absurdo que n e $n+1$ são pares. Então $n = 2k$ e $n+1 = 2m$.

Assim, $n + (n+1) = 2k + 2m = 2(k+m)$, ou seja

$2n + 1 = 2(k+m)$ o que é uma contradição pois n é par.

(Por exemplo, $n = 4 \Rightarrow 9 = 2(k+m) \rightarrow\leftarrow$)
absurdo.

Portanto, n e $n+1$ não são ambos pares.

10) ok. Verificar slides das aulas.

11) Trabalho

12) $n = 1 \Rightarrow (a+b)^1 = a + b$. Prova direta.

13) ok

14) $m^2 = n^2 \Leftrightarrow m^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 0$

$\Leftrightarrow m - n = 0$ ou $m + n = 0 \Leftrightarrow m = n$ ou $m = -n$.

15) i) $\Leftrightarrow$ iii)

$a<b \Leftrightarrow a+b < b+b \Leftrightarrow a+b < 2b \Leftrightarrow$

$\frac{a+b}{2} < b.$

i) $\Leftrightarrow$ ii) $a<b \Leftrightarrow a+a < b+a \Leftrightarrow a < \frac{a+b}{2}$

$\therefore$ i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii).

16) Não, pois $\sqrt{x+3} = 3-x \Leftrightarrow 3-x>0$

$\Leftrightarrow x<3$ e $x+3>0 \Rightarrow x<3$ e $x>-3$, ou seja, $-3<x<3$.

17) ok Analisar quando $n=1, 2, 3, 4$

18) ok

19) $(x-y)^2>0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2>0 \Leftrightarrow x^2+y^2>2xy$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy > 2xy+2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 > 4xy$

$\Leftrightarrow x+y > \sqrt{4xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} > xy$. com x e y inteiros positivos.

Indução matemática

2. $P(n): 1+5+9+\cdots+4n-3 = n(2n-1)$

Prova:

i) $n=1$. $1(2(1)-1) = 1$ ok

ii) Hipótese de indução: Vale

$1+5+9+\cdots+(4k-3) = k(2k-1)$ para $n=k$

iii) Passo indutivo: seja $n=k+1$.

Assim,

$$\underbrace{1+5+9+\cdots+(4k-3)}_{k(2k-1)}+(4(k+1)-3) = k(2k-1)+4(k+1)$$

$$-3 = 2k^2-k+4k+4-3 = 2k^2+3k+1 =$$

$$= (k+1)[2(k+1)-1].$$

pois $(k+1)[2(k+1)-1] = (k+1)(2k+2)-(k+1)$

$= 2(k+1)(k+1)-(k+1) = 2(k^2+2k+1)-(k+1)$

$= 2k^2+4k+2-k-1 = 2k^2+3k+1.$

Logo, a propriedade $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.