Matemática Discreta Aula 15 Binômio de Newton

Rosane Rossato Binotto

29/11/2023

Tópicos

- Binômio de Newton.
- Coeficientes binomiais.
- Triângulo de Pascal.

Introdução

- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potências das expressões binomiais do tipo $x + y$.

Exemplo 1:

Dada a expressão $(x+y)^3$. Sua expansão pode ser encontrada usando-se coeficientes binomiais em vez de multiplicar os três termos.

- **Solução:**

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y) =$$

$$= ... = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Introdução

Teorema 1:

Sejam x e y variáveis e n um número inteiro não negativo ($n \geq 0$). Então,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}\, y^j =$$

$$\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\, y + \binom{n}{2} x^{n-2}\, y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x\, y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

Coeficientes Binomiais

- Os números

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, n$$

são denominados **coeficientes binomiais**.

- Lembramos que:

$$C_n^j = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Exemplo

Exemplo 2:

Qual é o desenvolvimento de $(x+y)^4$?

Exemplo

Exemplo 2:

Qual é o desenvolvimento de $(x+y)^4$?

- **Solução:** A partir do binômio de Newton temos que:

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j =$$

$$\binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 +$$

$$+ \binom{4}{4} y^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Exemplo

- **Observação:** Vale

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \binom{4}{3}.$$

Propriedade:

Sejam n e r números interios não negativos com $r \leq n$. Então,

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

- **Prova:** Imediato.

Binômio de Newton

Exercício 1:

Calcule o desenvolvimento de $(x - 2y)^5$.

- **Solução:** em aula.
- Observar que $(x - 2y)^5 = \big(x + (-2y)\big)^5$.

Exercício 1:

Calcule o desenvolvimento de $(x - 2y)^5$.

- **Solução:** em aula.
- Observar que $(x - 2y)^5 = \big(x + (-2y)\big)^5$.

Exercício 2:

Qual é o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ no desenvolvimento de $(x + y)^{25}$?

- **Solução:** em aula.

Exercício 3:

Qual é o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ no desenvolvimento de $\left(2x + (-3y)\right)^{25}$?

- **Solução:** em aula.

Triângulo de Pascal

Triângulo de Tartaglia-Pascal

C_0^0						
C_1^0	C_1^1					
C_2^0	C_2^1	C_2^2				
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Triângulo de Pascal

Triângulo de Tartaglia-Pascal

- Alternativamente:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^2 & & & \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \\
 & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Relação de Stifel

Relação de Stifel

- $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
C_0^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & & & 1 & 1 & & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

- Por exemplo, $C_4^2 + C_4^3 = C_5^3$.

Triângulo de Pascal

Teorema das linhas

- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
C_0^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & & & 1 & 1 & & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \rightarrow & \boxed{2^4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \rightarrow & \boxed{16} & \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Teorema das linhas

Teorema das linhas:

Considere n como um inteiro não negativo. Então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

- **Solução:** Vamos usar o binômio de Newton, com $x = 1$ e $y = 1$. Assim,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \, 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Combinações Complementares

Combinações complementares

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ (termos de uma mesma linha equidistantes dos extremos são iguais).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^2 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Combinações Complementares

Propriedade:

Mostre que

$$C_n^0 - C_n^1 + C_0^2 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$$

(ou seja, a soma das combinações de taxa par de n elementos é igual a soma das combinações de taxa ímpar).

- **Solução:** Basta usar o binômio de Newton, com $x = 1$ e $y = -1$. Assim,

$$(1-1)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k \; 1^{n-k}.$$

Referências

- LIMA, E. L. et al. **A matemática no ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática) (Coleção PROFMAT).
- ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.
- Slides do PROFMAT.