

# Matemática Discreta

## Aula 16

### Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas

Rosane Rossato Binotto

06/12/2023

- Princípio da Casa dos Pombos ou das Gavetas.

## Exemplo 1:

Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, há sempre pelo menos 5 que nasceram no mesmo mês.

- O número médio de pessoas por mês é

$$\frac{50}{12} = 4,1\dots$$

- Logo, em algum mês o número de nascidos nesse mês (que é um número inteiro) é maior do que ou igual a  $4,1\dots$ , ou seja, é maior que ou igual a 5.

# Princípio das Gavetas

## Teorema 1:

Se  $n + 1$  ou mais objetos são colocados em  $n$  ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

O número médio de objetos por gaveta é maior que ou igual a

$$\frac{n + 1}{n},$$

que é maior que 1.

Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1 (ou seja, maior que ou igual a 2).

# Princípio das Gavetas

- **Prova:** Vamos realizar uma demonstração por contraposição.
- Suponha que nenhuma das  $n$  gavetas contenha mais de um objeto.
- Então, o número total de objetos seria no máximo  $n$ .
- Esta é uma contradição pois há pelo menos  $n + 1$  objetos.

## Exercício 1:

Entre 100 pessoas, pelo menos, quantas pessoas nasceram no mesmo mês?

- **Solução:** em aula.
- **Resposta:** 9 pessoas.

# Generalização do Princípio das Gavetas

## Teorema 1:

Se  $N$  objetos são colocados em  $k$  caixas, então há pelo menos uma caixa com  $\left\lceil \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \right\rceil$  objetos, onde  $\left\lceil \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \right\rceil$  representa o *menor inteiro maior que*.

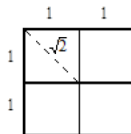
(Por exemplo,  $\left\lceil \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor \right\rceil = \lceil [2, 85] \rceil = 3$ ).

- Voltando ao Exercício 1: Entre 100 pessoas, pelo menos, quantas pessoas nasceram no mesmo mês?
- Há pelo menos  $\left\lceil \left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor \right\rceil = 9$  pessoas que nasceram no mesmo mês.

# Exemplo 2: Princípio das Gavetas

## Exemplo

- ▶ Cinco pontos são tomados sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor que ou igual a  $\sqrt{2}$ .
- ▶ Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados opostos.



- ▶ Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas.
- ▶ Pelo Princípio das Gavetas, alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos no mesmo quadrado de lado 1.
- ▶ A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é  $\sqrt{2}$ .



## Exemplo 3:

Mostre que todo inteiro positivo  $n$  tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.

- **Solução:** Considere os  $n + 1$  primeiros números da sequência 1, 11, 111,... e os restos das divisões desses números por  $n$ .
- Esses restos só podem ser iguais a  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ .
- Pensando nos números como objetos e nos restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas.

# Introdução

- Pelo Princípio das Gavetas, há dois números (objetos) na sequência que dão o mesmo resto (estão na mesma gaveta) quando divididos por  $n$ .
- Sejam estes números  $11 \dots 1$  ( $p$  algarismos) e  $11 \dots 1$  ( $q$  algarismos), com  $p < q$ .
- A diferença desses números é um múltiplo de  $n$  e se escreve  $11 \dots 10 \dots 0$ , com  $p$  algarismos 0 e  $q - p$  algarismos 1.

- LIMA, E. L. et al. **A matemática no ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática) (Coleção PROFMAT).
- ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.
- Slides do PROFMAT.