UFFS - Ciência da Computação - Matemática Discreta
Lista 3 - Demonstração - Data: 12/09/2023 - Profa. Rosane R. Binotto

1ª Questão Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

2ª Questão Mostre que o inverso aditivo (ou simétrico), de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

3ª Questão Mostre que se $m+n$ e $n+p$ são números inteiros pares, então $m+p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?

4ª Questão Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números inteiros ímpares é ímpar.

5ª Questão Use uma demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um número racional é irracional.

6ª Questão Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.

7ª Questão Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

8ª Questão Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$, então $\dfrac{1}{x}$ é racional.

9ª Questão Prove que dois números inteiros consecutivos não podem ser ambos pares.

10ª Questão Demonstre que se n é inteiro e $3n+2$ é par, então n é par, usando:
a) uma demonstração por contraposição.
b) uma demonstração por contradição.

11ª Questão Mostre que $\sqrt{3}$ é um número irracional.

12ª Questão Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a+b)^n \geq a^n + b^n$. Mostre que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?

13ª Questão Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se, e somente se, $5n + 6$ for ímpar.

14ª Questão Demonstre que $m^2 = n^2$ se, e somente se, $m = n$ ou $m = -n$.

15ª Questão Mostre que essas três proposições são equivalentes, em que a e b são números reais:
i) $a < b$,
ii) a média de a e b é maior que a e,
iii) a média de a e b é menor que b.

16ª Questão Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x+3} = 3 - x$ estão corretos?
1) $\sqrt{x+3} = 3 - x$ é dado.
2) $x + 3 = x^2 - 6x + 9$, obtido tirando a raiz quadrada de ambos os lados de (1).
3) $0 = x^2 - 7x + 6$, obtido pela subtração de $x + 3$ dos dois lados de (2).
4) $0 = (x - 1)(x - 6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3).
5) $x = 1$ ou $x = 6$, obtido a partir de (4).

17ª Questão Demonstre que $n^2 + 1 \geq 2^n$ quando n é um inteiro positivo com $1 \leq n \leq 4$.

18ª Questão Demonstre por exaustão que se $n \in Z_+$ com $n \leq 2$, então $(n+1)^2 \geq 3^n$.

19ª Questão Demonstre por exaustão que se $n \in Z_+$ com $n \leq 3$, então $n! < 2^n$.

20ª Questão Dados dois números reais positivos x e y, sua média aritmética é $\dfrac{x+y}{2}$ e sua média geométrica é $\sqrt{xy}$. Mostre que $\dfrac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, quando $x \neq y$.
(**Dica:** Comece a demonstração supondo que $(x - y)^2 > 0$, quando $x \neq y$.)

Nos exercícios de 1 a 11, use a indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

1. $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1).$

2. $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1).$

3. $1 + 3 + 6 + ... + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

4. $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$

5. $1\ .\ 3\ +\ 2\ .\ 4\ +\ 3\ .\ 5\ +\ ...\ +\ n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$

6. $1 + a + a^2 + ... + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ para $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

7. $\dfrac{1}{1\ .\ 3} + \dfrac{1}{2\ .\ 3} + \dfrac{1}{3\ .\ 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}.$

8. Prove que $n^2 > 2n + 3$, para $n \geq 3$.
Dica: Use que $2n + 1 > 2$, uma vez que $n \geq 3$.

9. Prove que $n! > n^2$, para $n \geq 4$.
Dica: Use que $n^2 > n + 1$, uma vez que $n \geq 4$.

10. Prove que $2^n < n!$, para $n \geq 4$.
Dica: Use que $2 < n + 1$, uma vez que $n \geq 4$.

11. Prove que $(1\ +\ 2 +\ ...\ +\ n)\ <\ n^2$ para $n > 1$.
Dica: Use que $n < 2n$, uma vez que $n > 1$.