Matemática Discreta
Aula 12
Recorrências Lineares

Rosane Rossato Binotto

01/11/2023

Tópicos

- Recorrências lineares de primeira, segunda, terceira, ... ordem.
- Recorrências lineares homogêneas e não homogêneas com coeficientes constantes.

Sequências Definidas por Recorrências

- **Sequências definidas por recorrências** são sequências definidas por regras que permitem calcular qualquer termo em função dos anteriores (usualmente do antecessor imediato ou de uma quantidade pequena de antecessores imediatos).

- **Exemplos:**

  • **Exemplo 1:** Uma progressão aritmética de primeiro termo a e razão r:

$$x_1 = a, \; x_{n+1} = x_n + r, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Sequências Definidas por Recorrências

- **Exemplo 2:** Uma sequência dada por

$$a_{n+2} = 3a_n - a_{n+1}, \quad a_1 = 2, \;\; a_2 = -1, \;\; \text{para } n \geq 1.$$

- Não basta dar a lei de recorrência é preciso também fornecer o(s) primeiro(s) termo(s).

A Sequência de Fibonacci

Exemplo 3:

Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses?

Mês	**Número de casais do mês anterior**	**Número de casais recém-nascidos**	**Total**
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
...	...	...	...

A Sequência de Fibonacci

- Se x_n representa o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, temos que
  - $x_1 = 1$;
  - $x_2 = 1$;
  - $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, para todo n natural.
- Temos que

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$$

representa uma recorrência.

Exemplo

Exemplo 4:

Quantas são as sequências de 6 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não têm dois termos consecutivos iguais a 0?

- **Solução:**
- Seja x_n o número de sequências com n termos respeitando as condições do enunciado.

  • Por exemplo, para $n = 1$ temos as seguintes sequências: $a_1 = (0)$, $a_2 = (1)$, $a_3 = (2)$.
  • Todas elas satisfazem a condição dada.

  • Logo, $x_1 = 3$.

Exemplo

- Continuando...
  - Para $n = 2$ temos as seguintes sequências:

$$a_1 = (0,0),\ \mathbf{a_2} = (\mathbf{0},\mathbf{1}),\ \mathbf{a_3} = (\mathbf{0},\mathbf{2}),\ \mathbf{a_4} = (\mathbf{1},\mathbf{0}),\ \mathbf{a_5} = (\mathbf{1},\mathbf{1}),$$

$$\mathbf{a_6} = (\mathbf{1},\mathbf{2}),\ \mathbf{a_7} = (\mathbf{2},\mathbf{0}),\ \mathbf{a_8} = (\mathbf{2},\mathbf{1}),\ \mathbf{a_9} = (\mathbf{2},\mathbf{2}).$$

  Com exceção de $a_1 = (0,0)$ as demais sequências satisfazem a condição dada. Logo, $x_2 = 8$.

  - Para $n = 3$, vejamos algumas sequências:

$$a_1 = (0,0,1),\ \mathbf{a_2} = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1}),\ \mathbf{a_3} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1}),\ \mathbf{a_4} = (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1}),\ \ldots.$$

  Com exceção de $a_1 = (0,0,1)$ as demais sequências satisfazem a condição dada. Qual o valor de x_3?

- Vamos contar separadamente as sequências, de acordo com seu termo inicial, para uma sequência com n termos.

Exemplo

- O número dessas sequências começando por 1 é x_{n-1}:

$$a_n = (1, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{n-1 \text{ termos}});$$

- O número dessas sequências começando por 2 é x_{n-1}:

$$a_n = (2, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{n-1 \text{ termos}});$$

- O número dessas sequências começando por 0 é x_{n-2}, pois:

$$a_n = (0, 1, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{n-2 \text{ termos}}) \quad \text{ou} \quad a_n = (0, 2, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{n-2 \text{ termos}}).$$

- Logo $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$, $n \geq 3$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$.
- Portanto,

$$x_3 = 2x_2 + 2x_1 = 22,$$

e assim sucessivamante.

Recorrências Lineares de Primeira Ordem

- Uma **recorrência de primeira ordem** expressa x_{n+1} em função de x_n.
- Ela é dita **linear** quando essa função for do primeiro grau.
- As recorrências

$$x_{n+1} = 2x_n - n^2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = nx_n$$

  são lineares e a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ não é linear.
- As duas últimas são ditas **homogêneas**, por não possuírem termo independente de x_n.

Exemplo 5:

Resolva a recorrência $x_{n+1} = 4x_n$.

- **Solução:**
  - $x_2 \;=\; 1x_1$
  - $x_3 \;=\; 2x_2$
  - $x_4 \;=\; 3x_3$
  - ... ...
  - $x_n \;=\; (n-1)x_{n-1}$
- Multiplicando em ambos os lados e simplicando obtemos:

$$x_n \;=\; (n-1)! \cdot x_1.$$

- Solução geral:

$$x_n = C \cdot (n-1)!,$$

onde $x_1 = C$ é uma constante.

Exemplo

Exempo 6:

Resolva a recorrência

$$x_{n+1} = x_n + 2^n, \quad x_1 = 1.$$

- **Solução:**
  - $x_2 = x_1 + 2$
  - $x_3 = x_2 + 2^2$
  - $x_4 = x_3 + 2^3$
  - ... ...
  - $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$
- Somando:

$$x_n = x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \;=\; 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$=\; 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \;=\; 1\frac{2^n - 1}{2 - 1} \;=\; 2^n - 1.$$

Exercícios:

Exercício 1:

Seja x_n o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano. Caracterize x_n recursivamente.
Resposta: $x_{n+1} = x_n + (n+1)$, para $n \geq 1$ e $x_1 = 2$.

Exercício 2:

Quantas são as sequências de n termos, pertencentes a $\{0, 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Recorrências lineares de primeira ordem homogêneas com coeficientes constantes

- Recorrências lineares de primeira ordem homogêneas com coeficientes constantes são recorrências da forma

$$x_{n+1} + px_n = 0,$$

com $p \neq 0$.

- A equação característica da recorrência é dada por:

$$r + p = 0$$

- sendo uma equação do primeiro grau que possui somente uma raiz.
- Essa raiz da equação característica desempenha um papel fundamental na expressão da solução geral para a recorrência.
- Como $p \neq 0$, essa raiz não é nula.

Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

- Recorrências lineares de segunda ordem são recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$$

  com $q \neq 0$ (se $q = 0$, a recorrência é, na verdade, de primeira ordem).
- A equação característica da recorrência é:

$$r^2 + pr + q = 0.$$

- Veremos a seguir que as raízes da equação característica desempenham um papel fundamental na expressão da solução geral para a recorrência.
- Como $q \neq 0$, essas raízes são necessariamente não nulas.

Raízes da equação característica e soluções da recorrência

- Se r é raiz da equação
$$r^2 + pr + q = 0,$$
então
$$x_n = r^n$$
é solução da recorrência
$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$
- De fato, substituindo $x_n = r^n$ na recorrência:
$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n = \\ &= r^n(r^2 + pr + q) = r^n \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Raízes da equação característica e soluções da recorrência

Consequência:

Se r_1 e r_2 são raízes distintas de $r^2 + pr + q = 0$, então $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

- Sejam $y_n = r_1^n, \; z_n = r_2^n$ e $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 y_n + C_2 z_n$.
- Assim,

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n =$$

$$= (C_1 y_{n+2} + C_2 z_{n+2}) + p(C_1 y_{n+1} + C_2 z_{n+1}) + q(C_1 y_n + C_2 z_n) =$$

$$= C_1(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) + C_2(z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n) =$$

$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

já que y_n e z_n são soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Resolvendo a recorrência: caso $r_1 \neq r_2$

- De modo geral, se y_n e z_n são soluções de uma recorrência linear homogênea, qualquer combinação linear de y_n e z_n também é solução da recorrência.

Resultado:

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$, com $q \neq 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

são da forma

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Prova do resultado

- **Prova:** Seja (x_n) uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.
- É sempre possível escolher constantes C_1 e C_2 tais que:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 & = & x_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 & = & x_2. \end{cases}$$

  esse sistema sempre tem solução única pois $r_1 \neq r_2$.
- Vamos provar que $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para todo n natural.
- Prova por indução em n.
- A afirmativa vale para $n = 1$ e $n = 2$, já que C_1 e C_2 foram escolhidos de modo que isto ocorra.

Prova do resultado

- Suponhamos válida para naturais n e $n+1$.
- Temos $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.
- Logo,

$$x_{n+2} = -px_{n+1} - qx_n = -p\Big(C_1 r_1^{n+1} - C_2 r_2^{n+1}\Big) - q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) =$$

$$= -C_1 r_1^n \Big(pr_1 + q\big) - C_2 r_2^n \big(pr_2 + q\big).$$

- Somando e subtraindo $C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}$ obtemos:

$$x_{n+2} = -C_1 r_1^n \Big(r_1^2 + pr_1 + q\big) - C_2 r_2^n \big(r_2^2 + pr_2 + q\big) + C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}.$$

- Mas as expressões entre parênteses se anulam, levando a

$$x_{n+2} = C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2},$$

o que completa a prova por indução.

Exemplo

Exemplo 7:

Determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0.$$

- **Solução:** A equação característica

$$r^2 + 3r - 4 = 0,$$

  tem raízes 1 e -4.
- As soluções da recorrência são as sequências da forma

$$x_n = C_1 1^n + C_2(4)^n, \text{isto é},$$

$$x_n = C_1 + C_2(-4)^n,$$

  onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo - Sequência de Fibonacci

Exercício 3:

Determinar as soluções da recorrência - sequência de Fibonacci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

com $F_0 = F_1 = 1$.

- **Solução:**
- Solução geral:

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

- Considerando as condições $F_0 = F_1 = 1$ obtemos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Resolvendo a recorrência: caso $r_1 = r_2$

Resultado:

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$, com $q \neq 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

são da forma

$$x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n,$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

- A prova é análoga ao caso em que $r_1 \neq r_2$.

Raízes da equação característica e soluções da recorrência

- De fato, seja $r_1 = r_2 = r$ raiz da equação característica $r^2 + pr + q = 0$.
- Já mostramos que $y_n = r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ pelo fato de r ser raiz da equação característica.
- Vamos mostrar agora que $z_n = nr^n$ também é solução da recorrência e assim, $x_n = C_1 r^n + C_2 nr^n$ é solução geral da recorrência dada.

Raízes da equação característica e soluções da recorrência

- Assim,

$$z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = (n+2)r^{n+2}+p(n+1)r^{n+1}+qnr^n =$$
$$= nr^n\left(r^2+pr+q\right)+2r^{n+2}+pr^{n+1} = n\cdot 0+r^{n+1}\left(2r+p\right).$$

- O primeiro parênteses é igual a zero pois r é raiz da equação característica.
- Como as raízes da equação característica são $r + r = -\frac{p}{1}$, segue $2r + p = 0$ e o segundo parênteses também é igual igual a zero.
- Logo,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = \ldots = 0.$$

Exemplo

Exemplo 8:

Determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

- **Solução:** A equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

tem raízes $r_1 = r_2 = 2$.

- As soluções da recorrência são as sequências da forma

$$x_n = C_1 2^n + C_2 n(2)^n,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Exercícios

Exercício 4:

Determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0,$$

onde $x_0 = 1$ e $x_1 = 5$.

- **Solução:** em aula.

Exercícios

Exercício 5:

Determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0.$$

- **Solução:** em aula.

Exemplo 9:

Determinar as soluções da recorrência de primeira ordem

$$x_{n+1} - 8x_n = 0.$$

- **Solução:** em aula.

Recorrências não homogêneas

Exemplo 10:

Resolver a recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 7.$$

- Essa recorrência é linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes.
- O termo não homogêneo é a função constante $f(n) = 7$.
- Como resolver uma recorrência não homogênea (ou heterogênea)?

Recorrências não homogêneas

Método:

Dada a recorrência não homogênea

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n). \qquad (*)$$

Toda solução dessa recorrência é da forma

$$x_n = a_n + p_n,$$

onde a_n é uma solução da recorrência homogênea

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

e p_n é uma solução particular de $(*)$.

Recorrências não homogêneas

- Logo, para encontrar a solução geral de uma recorrência não homogênea, "basta" encontrar uma solução particular e somá-la à solução geral da recorrência homogênea.
- De fato, seja x_n a solução geral da recorrência $(*)$ e p_n uma solução particular. Temos que:

$$\begin{cases} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n) \\ p_{n+2} + pp_{n+1} + qp_n = f(n). \end{cases}$$

- Subtraindo:

$$(x_{n+2} - p_{n+2}) + p(x_{n+1} - p_{n+1}) + q(x_n - p_n) = 0.$$

Recorrências não homogêneas

- $$(x_{n+2} - p_{n+2}) + p(x_{n+1} - p_{n+1}) + q(x_n - p_n) = 0.$$
- Logo,
$$a_n = x_n - p_n$$
é uma solução da recorrência homogênea, o que equivale a dizer que
$$x_n = a_n + p_n,$$
onde a_n é solução da recorrência homogênea.

Solução do Exemplo 10

- Voltando ao **Exemplo 10:** Resolver a recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 7. \qquad (*)$$

- Passos para resolver essa recorrência:
  • **(i)** Encontrar a solução da recorrência homogênea associada a $(*)$.

  • **(ii)** Encontrar uma solução particular de $(*)$.

- **Solução:**

Solução do Exemplo 10

- **(i)** Solução da recorrência homogênea associada a $(*)$.
- A recorrência homogênena é dada por:

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \qquad (**)$$

que tem como equação característica:

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

cujas raízes são: $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$.

- Logo, a solução de $(**)$ é dada por

$$a_n = C_1(2)^n + C_2(3)^n, \qquad (1)$$

com C_1 e C_2 constantes.

Solução do Exemplo 10

- **(ii)** Solução particular da recorrência não homogênea $(*)$.

- Uma solução não particular de

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 7 \qquad (*)$$

é do tipo

$$p_n = A,$$

onde A é uma constante.

- Substituindo $p_n = A$ em $(*)$ obtemos

$$A - 5A + 6A = 7 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{7}{2}. \qquad (2)$$

Solução do Exemplo 10

- De (1) e (2) segue que a solução da recorrência não homogênea

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 7$$

é dada por

$$x_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{7}{2},$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

- Comentar a solução quando $x_0 = 1$ e $x_1 = -1$.

Exercícios

Exercício 6:

Determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4^n.$$

- **Solução:** em aula. Usar que $p_n = A \cdot 4^n$.

Exercício 7:

Determinar as soluções da recorrência de primeira ordem

$$x_{n+1} - 3x_n = 3^n,$$

onde $x_1 = 5$.

- **Solução:** em aula. Usar que $p_n = A \cdot n \cdot 3^n$.

Recorrência linear homogênea de terceira ordem

- Uma recorrência linear homogênea de ordem 3 com coeficientes constantes é da forma,

$$x_{n+3} + px_{n+2} + qx_{n+1} + sx_n = 0,$$

- onde $p, \; q, s$ são constantes com $s \neq 0$.
- Resolver uma recorrência de ordem 3 é semelhante ao caso de uma recorrência de ordem 2.

Recorrência linear homogênea de terceira ordem

Exercício 8:

Determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0.$$

- **Solução:** em aula.
- Mostrar que a equação característica é: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-3)(r-1)(r-2)$.
- **Resposta:** $x_n = C_1 1^n + C_2 2^n + C_3 3^n$, onde C_1, C_2 e C_3 são constantes.

Referências

- LIMA, E. L. et al. **A matemática no ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática)
- MORGADO, A. C.; CARVALHO de, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).
- ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.
- Slides do PROFMAT.