Matemática Discreta
Aulas 1 e 2
Lógica Matemática

Profa. Rosane Rossato Binotto
E-mail: rosane.binotto@uffs.edu.br

16/08/2023 e 23/08/2023

Tópicos

- Plano de Ensino.
- Introdução à lógica, lógica proposicional, conectivos, tabela-verdade e proposições compostas.
- Tautologias e Contradições. Proposições logicamente equivalentes. Exemplos e exercícios.

Introdução

Questões:

- O que é matemática discreta?
- Por que estudar matemática discreta?
- Por que estudar lógica matemática?

Introdução

- Lógica Booleana ou lógica de Boole é o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças (proposições) verdadeiras de falsas.
- É também a construção de novas proposições a partir do que já temos.
- George Boole (1815-1864) matemático inglês, um dos precursores do estudo da lógica.

Lógica Proposicional

Definição 1:

Uma **proposição** é uma sentença declarativa (isto é, que declara um fato), que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Exemplos de sentenças que são proposições:

- **1)** Brasília é a capital do Brasil.
- **2)** Chapecó é a capital de Santa Catarina.
- **3)** $1 + 1 = 2$.
- **4)** $2 + 3 = 4$.

- **Resposta:** As proposições 1 e 3 são verdadeiras, e as proposições 2 e 4 são falsas.

Lógica Proposicional

Exemplos de sentenças que não são proposições:

- **1)** Que horas são?
- **2)** Leia isso com cuidado.
- **3)** $x + 1 = 2$.
- **4)** $x + y = z$.

- **Resposta:**

  • As sentenças 1 e 2 não são proposições porque não são declarativas.

  • As sentenças 3 e 4 não são proposições porque não são nem verdadeiras nem falsas.

Conectivos ou Operadores Lógicos

- Os **conectivos** ou **operadores lógicos** são:

  e, ou, não, se-então e **se-e-somente-se**.

- Eles podem ser utilizados para criar novas proposições a partir de proposições dadas.

- As novas proposições são chamadas de **proposições compostas.**

Conectivos ou Operadores Lógicos

Exemplos de proposições compostas:

- **1)** Windows é um sistema operacional **e** Pascal é uma linguagem de programação.
- **2)** Vou comprar um PC **ou** um Mac.
- **3)** Linux **não** é um software livre.
- **4)** Se eu for eleito, **então** vou diminuir os impostos.
- **5)** Você pode tomar o avião **se e somente se** você comprou uma passagem.

- **OBS:** Nem todas essas proposições são verdadeiras.

Negação de uma Proposição

Definição 2:

- Seja p uma proposição. A **negação de p**, indicada por $\neg p$ ou $\overline{p}$, é a sentença "Não é o caso de p."
- A proposição $\neg p$ é lida "não p".

Negação de uma Proposição

Exemplos:

- **1)** Proposição p: Brasil é um país.

  Negação $\neg p$: Brasil **não** é um país.

- **2)** q: Linux é um software livre.

  $\neg q$: Linux **não** é um software livre.

- **3)** r: $3 + 4 > 5$.
  $\neg r$: **Não** é fato que $3 + 4 > 5$.
  Outra possibilidade para
  $\neg r$: $3 + 4 \leq 5$.

Tabela-Verdade

Conclusão:

- Se p é verdadeira, então $\neg p$ é falsa.
- Se p é falsa, então $\neg p$ é verdadeira.

- **Tabela-Verdade para a negação**

p	$\neg$**p**
V	F
F	V

- Para uma proposição p denotamos por $V(p)$ **o seu valor verdade**, de modo que:
  - $V(p) = V$, se p é verdadeira;
  - $V(p) = F$, se p é falsa.

Conjunção

Definição 3:

Sejam p e q proposições. A **conjunção de p e q**, indicada por $p \wedge q$ é a proposição "p e q".

Exemplo:

- Dadas as proposições: p: Um quadrado tem os quatros lados de mesma medida.
  q: Um retângulo tem os quatros ângulos de mesma medida.
  Assim, $p \wedge q$: Um quadrado tem os quatros lados de mesma medida **e** um retângulo tem os quatros ângulos de mesma medida.

Tabela-Verdade

- São 2 proposições então todas as combinações de V e F são: VV, VF, FV e FF.
- **Tabela-Verdade para a conjunção de duas proposições**

p	**q**	**p** $\wedge$ **q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Definição 4:

Sejam p e q proposições. 4 **disjunção de p e q**, indicada por $p \vee q$ é a proposição "p ou q".

Exemplos:

- **1)** Hoje é segunda-feira **ou** está chovendo.
- **2)** Sopa **ou** salada é servida como entrada.

- O **ou** do Exemplo 1 é **inclusivo**, mas o **ou** do Exemplo 2 é **exclusivo**, isto é, o restaurante anuncia que uma das duas entradas pode ser pedida, mas não ambas.

- **Tabela-Verdade para a disjunção de duas proposições, isto é, para o ou inclusivo**

p	**q**	**p** $\vee$ **q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela-Verdade

- **Tabela-Verdade para o ou exclusivo ou disjunção exclusiva de duas proposições**

p	**q**	**p $\oplus$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposições Condicionais

- A proposição **Se-então** é denominada **proposição condicional**.
- A proposição **Se-e-somente-se** é denominada **proposição bicondicional**.

Proposição Condicional ou Implicação

Definição 5:

Sejam p e q proposições. A **proposição condicional** $p \rightarrow q$ é a proposição "se p, então q".

- Na condicional $p \rightarrow q$, p é chamada de **hipótese** (ou **antecedente** ou **premissa**) e q é chamada de **conclusão** (ou **consequência** ou **tese**).

Exemplo:

- **Se** você tirar 10 no exame final, **então** terá conceito A.

Proposição Condicional ou Implicação

- Algumas formas de expressar a condicional:
  - "Se p, então q";
  - "p é suficiente para q";
  - "uma condição necessária para p é q";
  - "p implica q";
  - "q segue de p";
  - "q sempre p";
  - "q é necessário para p".

Tabela-Verdade - Exemplos

Exemplos:

- **1)** **Se** Windows é um sistema operacional, **então** Pascal é uma linguagem de programação. **Verdadeira.**
- **2)** **Se** Windows é um sistema operacional, **então** Pascal é uma planilha eletrônica. **Falsa**.
- **3)** **Se** Windows é um editor de texto, **então** Pascal é uma linguagem de programação. **Verdadeira.**
- **4)** **Se** Windows é um editor de texto, **então** Pascal é uma planilha eletrônica. **Verdadeira**.

Tabela-Verdade

- **Tabela-Verdade para a condicional de duas proposições**

p	**q**	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Linguagem de Programação

- A construção **se-então** usada em muitas linguagens de programação é diferente da usada em lógica.
- Muitas linguagens usam declarações tais como: **if** p **then** S, onde p é uma proposição e S é um segmento do programa (uma ou mais declarações a serem executadas);
- Quando a execução do programa encontra tal declaração, então:
  - S é executado se p é verdadeira;
  - S não é executado se p é falsa.

Exemplo:

Qual o valor da variável x depois da declaração

$$\textbf{if}\ 2+2=4\ \ \textbf{then}\ x : x = x + 1$$

se $x = 0$ antes da declaração a ser encontrada?

- **Solução:**
- A proposição $p:\ 2+2=4$ é verdadeira, então a declaração $S : x = x + 1$ será executada.
- Como $x = 0$, então o novo valor de x será $0 + 1 = 1$.

Oposta, Contrapositiva e Inversa

- Dada a proposição condicional $p \rightarrow q$. Podemos obter outras proposições, tais como:

  • A proposição $q \rightarrow p$, que é chamada de **oposta** de $p \rightarrow q$.

  • A proposição $\neg q \rightarrow \neg p$, que é chamada de **contrapositiva** de $p \rightarrow q$.

  • A proposição $\neg p \rightarrow \neg q$, que é chamada de **inversa** de $p \rightarrow q$.

Oposta, Contrapositiva e Inversa

- Qual é a contrapositiva, a oposta e a inversa da proposição condicional "O time da casa ganha sempre que está chovendo"?
- Reescrevendo essa proposição: "Se está chovendo, então o time da casa ganha."

  - **Oposta**: Se o time da casa ganha, então está chovendo.

  - **Contrapositiva**: Se o time da casa não ganha, então não está chovendo.

  - **Inversa**: Se não está chovendo, então o time da casa não ganha.

- **Tabela-Verdade**

				Condic.	**Oposta**	**Contrapos.**	**Inversa**
p	**q**	$\neg$ **p**	$\neg$ **q**	**p** $\to$ **q**	**q** $\to$ **p**	$\neg$ **q** $\to$ $\neg$ **p**	$\neg$ **p** $\to$ $\neg$ **q**
V	V	F	F	**V**	V	**V**	V
V	F	F	V	**F**	V	**F**	V
F	V	V	F	**V**	F	**V**	F
F	F	V	V	**V**	V	**V**	V

- Destas 3 proposições apenas a contrapositiva tem o mesmo valor verdade que a condicional dada.
- Dizemos que as proposições $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ são **proposições equivalentes** ou **logicamente equivalentes**.

Bicondicional

Definição 6:

Sejam p e q proposições. A **proposição bicondicional** $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q".

- A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$, significa: $p \rightarrow q$ (proposição de "ida") e $q \rightarrow p$ (proposição de "volta").
- $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
- Algumas formas de expressar a bicondicional:
  - "p é necessária e suficiente para q";
  - "se p então q, e vice-versa".

Exemplos

Exemplos:

- **1)** Windows é um sistema operacional **se e somente se** Pascal é uma linguagem de programação. **Verdadeira.**
- **2)** Windows é um sistema operacional **se e somente se** Pascal é uma planilha eletrônica. **Falsa**.
- **3)** Windows é um editor de texto **se e somente se** Pascal é uma linguagem de programação. **Falsa.**
- **4)** Windows é um editor de texto **se e somente se** Pascal é uma planilha eletrônica. **Verdadeira**.

Tabela-Verdade

- **Tabela-Verdade para a bicondicional de duas proposições**

p	**q**	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Prioridade dos Conectivos

- **Prioridade dos conectivos ou operadores lógicos**

Operador	**Prioridade**
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Tabela-Verdade para Proposições Compostas

Exemplo:

Construa a tabela-verdade para a proposição composta

$$p \ \wedge \ \neg q.$$

- **Solução:**

p	**q**	**¬ q**	**p ∧ ¬ q**
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Tabela-Verdade para Proposições Compostas

Exercício 1:

Construa a tabela-verdade para a proposição composta

$$(p \ \vee \ \neg q) \ \rightarrow \ p.$$

- **Solução:**

p	**q**	$\neg$ **q**	**p** $\vee \neg$ **q**	(**p** $\vee \neg$ **q**) $\rightarrow$ **p**
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

Tabela-Verdade

Observações:

- **1)** $\neg p \wedge q \neq \neg (p \wedge q)$;
- **2)** $\neg p \wedge q = (\neg p) \wedge q$.

Exercício 2:

Mostre a observação 1 construindo a tabela-verdade de

$$\neg p \wedge q \quad \text{e} \quad \neg (p \wedge q).$$

Tabela-Verdade

Exercício 3:

Dadas as proposições p, q e r, construa a tabela-verdade de

$$(\neg p \wedge q) \ \vee \ (p \wedge r).$$

- Comentar resultado geral: a tabela-verdade de n proposições contém 2^n linhas, para n um número natural.
- Por exemplo, para $n = 3$ todas as combinações de V e F são: VVV, VVF, VFV, VFF, FFF, FVV, FVF e FFV.
- Usar essa informação para construir a tabela-verdade.

Tautologia e Contradição

Definição 7:

- Uma proposição que é verdadeira em todas as possibilidades lógicas é dita ser uma **tautologia**.
- Quando ela for falsa para todas as possibilidades lógicas é dita ser uma **contradição**.
- Quando a tabela-verdade da proposição contém V e F ela é dita ser uma **contingência**.

Exemplos:

- **1)** Tautologia: $p \vee \neg p$.
- **2)** Contradição: $p \wedge \neg p$.

Tautologia e Contradição

Exercício 4:

Mostre que

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

é uma tautologia.

- Fazer em aula.

Proposições Logicamente Equivalentes

Definição 8:

Dizemos que duas proposições são **logicamente equivalentes** se elas têm a mesma tabela-verdade, ou seja, elas têm o mesmo valor verdade para cada uma das possibilidades lógicas.

- De modo análogo, duas proposições compostas p e q são logicamente equivalentes se $p \to q$ é uma tautologia.
- A notação $p \equiv q$ indica que p e q são logicamente equivalentes.

Proposições Logicamente Equivalentes

Exemplo:

Já vimos que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg q \to \neg p$ (contrapositiva), isto é, $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$, sendo p e q proposições.

Exercício 5:

Mostre que a redução ao absurdo é uma tautologia, isto é,

$$(p \to q) \to [(p \wedge \neg q) \to F],$$

sendo p e q proposições.

Proposições Logicamente Equivalentes

Exercício 6:

Mostre a lei de Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q),$$

sendo p e q proposições.

- Mostre as demais proporiedades logicamente equivalentes dadas na tabela do próximo slide.

Algumas Equivalências Lógicas

- **Teorema:** Sejam p, q e r proposições. Então:

Propriedade	**Lógica**
Elementos neutros	$p \wedge V \equiv p$; $p \vee F \equiv p$
Denominação	$p \vee V \equiv V$; $p \wedge F \equiv F$
Reflexiva	$p \equiv p$
Dupla negação	$\sim(\sim p) \equiv p$
Comutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p$; $p \vee q \equiv q \vee p$
Associativa	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
De Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Absorção	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
Contrapositiva	$(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$
Regra do condicional	$(p \to q) \equiv (\sim p \vee q)$
Bicondicional	$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Referências

- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. Teoria e Problemas de Matemática Discreta. 2. ed. Bookman, 2004.
- MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. 3. ed. Bookman, 2010.
- ROSEN, K. H. Matemática Discreta e Suas Aplicações. 6. ed. McGraw-Hill, 2009.