UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Campus Chapecó

TEORIA DA ESTIMAÇÃO PARA UMA AMOSTRA

Disciplina: Probabilidade e Estatística
Curso: Ciência da Computação
Professor: Leandro Bordin

✓ Definição

- ✓ **A estimação é o processo que consiste em utilizar dados amostrais para estimar os valores de parâmetros populacionais desconhecidos**
- ✓ **Essencialmente, qualquer característica de uma população pode ser estimada a partir de uma amostra aleatória**
- ✓ **Entre os mais comuns, estão a média e a proporção populacional**

✓ Estimativas pontuais e intervalares

- ✓ **As estimativas amostrais são utilizadas como estimadores de parâmetros populacionais**

média amostral → **média populacional**

proporção amostral → **proporção populacional**

- ✓ **Tais estimativas chamam-se estimativas pontuais, porque originam uma única estimativa do parâmetro**

✓ Estimativas pontuais e intervalares

- ✓ **Entretanto, sabe-se que a amostragem aleatória apresenta tendência de gerar amostras em que a média amostral, por exemplo, não é igual à média da população, embora os dois valores em geral sejam próximos**

↓

VARIABILIDADE AMOSTRAL

✓ Estimativas pontuais e intervalares

- ✓ **Em virtude da variabilidade amostral, é usual incluir uma estimativa intervalar para acompanhar a estimativa pontual**
- ✓ **Essa nova estimativa proporciona um intervalo de possíveis valores no qual se admite esteja o parâmetro populacional**

✓ Fundamentos da estimação

- ✓ **A capacidade de estimar parâmetros populacionais por meio de dados amostrais está ligada diretamente ao conhecimento da distribuição amostral da estatística que está sendo usada como estimador**
- ✓ **Sabe-se que a distribuição das proporções amostrais e a distribuição das médias amostrais se aproximam da distribuição normal e (teorema do limite central), desta forma, o estabelecimento de intervalos de confiança obedece a tabela de distribuição normal padronizada**

✓ Fundamentos da estimação

✓ Teorema do Limite Central

✓Se a população sob amostragem tem distribuição normal, a distribuição das médias amostrais será normal para todos os tamanhos de amostra

✓Se a população sob amostragem é não-normal, a distribuição das médias amostrais será aproximadamente normal para grandes amostras (n ⊇ 30)

✓ Fundamentos da estimação

✓ Os principais intervalos de confiança e os correspondentes valores da variável z são:

Grau de confiança	z
90%	1,65
95%	1,96
99%	2,58

✓ Estimativa da média de uma população

✓ As estimativas pontual e intervalar da média populacional são expressas da seguinte forma:

✓ Estimativa pontual $\mu_x = \bar{x}$

✓ Estimativa intervalar $\mu_x = \bar{x} \pm z \frac{sx}{\sqrt{n}}$

μ_x = média populacional
$\bar{x}$ = média amostral
sx = desvio padrão amostral
n = tamanho da amostra
z = desvio padrão normal

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Erro de estimação da média populacional

✓ O erro num intervalo de estimação diz respeito ao desvio (diferença) entre a média amostral e a verdadeira média da população

✓ Como o intervalo de confiança tem centro na média amostral, o erro máximo provável é igual à metade da amplitude do intervalo

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Erro de estimação da média populacional

$$\bar{x} \pm z \frac{sx}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} \pm erro$$

$$e = z \frac{sx}{\sqrt{n}}$$

A fórmula do erro revela que há três determinantes do tamanho ou quantidade de erro: (1) a confiança desejada, representada pelo valor de z; (2) a dispersão dos dados, representada pelo desvio padrão; e (3) o tamanho da amostra

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Observação

✓ Quando o tamanho da amostra for superior a 5% do tamanho da população é necessário aplicar o fator de correção finita para modificar os desvios padrões das fórmulas; o referido fator é expresso da seguinte forma:

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

N = número de elementos da população
n = número de elementos da amostra

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Exemplos

1. Numa determinada semana foi tomada uma amostra aleatória de 30 empregados horistas selecionados de um grande número de empregados de uma fábrica, a qual apresentou um salário médio de R$ 180,00 com um desvio padrão de R$ 14,00. Determinar:
a) a estimativa pontual dos salários médios para todos os empregados horistas;
b) a estimativa dos salários médios para todos os empregados horistas com um grau de confiança de 95%;
c) o erro de estimação associado ao item b.

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Exemplos

1.

$\frac{n}{N} = \frac{30}{?}$ <= 5%   Não usa correção

a) a estimativa pontual dos salários médios para todos os empregados horistas;

$$\mu_x = \bar{x}$$
$$\mu_x = 180{,}00\ R\$$$

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Exemplos

1.
b) a estimativa dos salários médios para todos os empregados horistas com um grau de confiança de 95%;

$$\mu_x = \bar{x} \pm z\frac{sx}{\sqrt{n}}$$
$$\mu_x = 180 \pm 1{,}96\frac{14}{\sqrt{30}}$$
$$\mu_x = 180 \pm 5{,}01$$
$$\mu_x = 174{,}99\ a\ 185{,}01\ R\$$$

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Exemplos

1.
c) o erro de estimação associado ao item b.

$$e = z\frac{sx}{\sqrt{n}}$$
$$e = 1{,}96\frac{14}{\sqrt{30}}$$
$$e = 5{,}01\ R\$$$

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Exemplos

2. Um analista de mercados obtém dados de uma amostra de 100 consumidores de um total de 400 que adquiriram um pacote promocional de viagens. As 100 pessoas gastaram uma média de R$ 2.457,00 com um desvio padrão de R$ 66,00.
a) determinar a estimativa pontual da verdadeira média;
b) usando um intervalo de confiança de 95%, estimar:
b1)o valor médio da despesa com a compra do pacote promocional para os 400 clientes;
b2) o valor total dos gastos dos 400 clientes;
c) o erro de estimação associado ao item b1.

✓ Estimativa da média de uma população

✓ Exemplos

2.

$\frac{n}{N} = \frac{100}{400}$ = 25% >5%   Usa correção

a) determinar a estimativa pontual da verdadeira média;

$$\mu_x = \bar{x}$$
$$\mu_x = 2457{,}00\ R\$$$

✓ Estimativa da média de uma população

- ✓ **Exemplos**

2.
b) usando um intervalo de confiança de 95%, estimar:
b1)o valor médio da despesa com a compra do pacote promocional para os 400 clientes;

$$\mu_x = \bar{x} \pm z \frac{sx}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\mu_x = 2457 \pm 1{,}96 \frac{66}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{400-100}{400-1}}$$

$$\mu_x = 2457 \pm 11{,}22$$

$$\mu_x = 2445{,}78 \; a \; 2468{,}22 \; R\$$$

✓ Estimativa da média de uma população

- ✓ **Exemplos**

2.
b) usando um intervalo de confiança de 95%, estimar:
b2) o valor total dos gastos dos 400 clientes;

Valor total = 400 (2445,78 a 2468,22)

Valor total = 978312,00 a 987288,00 R$

c) o erro de estimação associado ao item b1.

$$e = 1{,}96 \frac{66}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{400-100}{400-1}}$$

$$e = 11{,}22 \; R\$$$

✓ Estimativa da proporção numa população

- ✓ **As estimativas pontual e intervalar de proporções populacionais são expressas da seguinte forma:**
  - ✓ **Estimativa pontual** $p = \bar{p} = \frac{x}{n}$
  - ✓ **Estimativa intervalar** $p = \bar{p} \pm z \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$

p = proporção populacional
$\bar{p}$ **= proporção amostral**
x = número de itens na amostra
n = tamanho da amostra
z = desvio padrão normal

✓ Estimativa da proporção numa população

- ✓ **Erro de estimação da média populacional**
  - ✓ **De forma análoga, o erro de estimação para a proporção populacional é igual à metade da amplitude do intervalo. Assim:**

$$e = z \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

✓ Estimativa da proporção numa população

- ✓ **Observação**
  - ✓ **Quando o tamanho da amostra for superior a 5% do tamanho da população é necessário aplicar o fator de correção finita para modificar os desvios padrões das fórmulas; o referido fator é expresso da seguinte forma:**

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

N = número de elementos da população
n = número de elementos da amostra

✓ Estimativa da proporção numa população

- ✓ **Exemplos**

1. Em uma grande área metropolitana em que estão localizados 800 postos de gasolina, foi selecionada uma amostra aleatória de 36 postos e constatou-se que 20 comercializam um determinado óleo lubrificante. Com base nestes dados, determinar:
a) a estimativa pontual da proporção populacional;
b) um intervalo de confiança de 95% para a proporção de postos de gasolina daquela área metropolitana que comercializam o referido óleo lubrificante;
c) o número total de postos de gasolina que comercializam o óleo;
d) o erro de estimação associado ao item b.

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

1.

$$\frac{n}{N} = \frac{36}{800} = 4{,}5\% < 5\% \quad \text{Não usa correção}$$

a) a estimativa pontual da proporção populacional;

$$p = \bar{p} = \frac{x}{n}$$

$$p = \bar{p} = \frac{20}{36}$$

$$p = 56\ \%$$

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

1.
b) um intervalo de confiança de 95% para a proporção de postos de gasolina daquela área metropolitana que comercializam o referido óleo lubrificante;

$$p = \bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$p = 0{,}56 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}56(1-0{,}56)}{36}}$$

$$p = 0{,}56 \pm 0{,}16$$

$$p = 40\ a\ 72\ \%$$

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

1.
c) o número total de postos de gasolina que comercializam o óleo;

Número de postos = 800 (0,40 a 0,72)

Número de postos = 320 a 576 postos de gasolina

d) o erro de estimação associado ao item b.

$$e = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}56(1-0{,}56)}{36}}$$

$$e = 16\ \%$$

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

2. Uma empresa de pesquisa de mercado fez contato com uma amostra de 100 clientes, de um total de 500, e verificou que uma proporção de 40% na amostra prefere o produto A ao produto B. Determinar:
a) a estimativa pontual da proporção populacional;
b) um intervalo de confiança de 99% para a proporção de todos os clientes que preferem o produto A;
c) o erro de estimação associado ao item b.

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

2.

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{500} = 20\% < 5\% \quad \text{Usa correção}$$

a) a estimativa pontual da proporção populacional;

$$p = \bar{p}$$

$$p = 40\ \%$$

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

2.
b) um intervalo de confiança de 99% para a proporção de todos os clientes que preferem o produto A;

$$p = \bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$p = 0{,}40 \pm 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{100}}\ \frac{\sqrt{500-100}}{500-1}$$

$$p = 0{,}40 \pm 0{,}11$$

$$p = 29\ a\ 51\ \%$$

✓ Estimativa da proporção numa população

✓ Exemplos

2.

c) o erro de estimação associado ao item b.

$$e = 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{100}}\sqrt{\frac{500-100}{500-1}}$$

$e = 11$ %

✓ Resumo das fórmulas

	População	
	Infinita	Finita (n ⊇ 5%N)
Estimativa de médias		
Pontual	$\mu x = \bar{x}$	$\mu x = \bar{x}$
Intervalar	$\mu x = \bar{x} \pm z\frac{sx}{\sqrt{n}}$	$\mu x = \bar{x} \pm z\frac{sx}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
Erro	$e = z\frac{sx}{\sqrt{n}}$	$e = z\frac{sx}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
Estimativa de proporções		
Pontual	$p = \bar{p} = \frac{x}{n}$	$p = \bar{p} = \frac{x}{n}$
Intervalar	$p = \bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$p = \bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
Erro	$e = z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$e = z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

✓ Resumo das fórmulas

OBS: A estimativa intervalar da média e da proporção populacional se baseia na hipótese de que a distribuição das médias amostrais e das proporções amostrais é normal (normalmente distribuída). Para grandes amostras isto não representa dificuldade, pois se aplica o Teorema do Limite Central. Todavia, para amostras de 30 elementos ou menos, é importante saber se a população submetida a amostragem tem distribuição normal, ou ao menos aproximadamente normal. De outra forma, essas técnicas não podem ser utilizadas.

✓ Exercícios

1. Uma empresa emprega 350 vendedores externos. Numa amostra aleatória de 15 notas de despesa numa semana de dezembro, um auditor constatou uma despesa média de R$ 220,00, com desvio padrão de R$ 0,20. Sabendo que a variável considerada é normalmente distribuída, determinar:
a) a estimativa pontual da quantia média (R.: R$220);
b) a estimativa pontual do total para todos os 350 vendedores (R.: R$77000,00;
c) um intervalo de 99% de confiança para a quantia média dos 350 vendedores (R.: R$219,87 a R$220,13).

✓ Exercícios

2. Uma amostra aleatória de 40 contas não-comerciais de um banco acusou saldo médio de R$ 140,00, com desvio padrão de R$ 30,00. Com base nestes dados, construir:
a) um intervalo de 95% de confiança para o saldo médio de todas as contas (R.: R$130,70 a R$149,30);
b) um intervalo de 99% de confiança para o saldo médio de todas as contas (R.: R$127,76 a 152,24);
c) o erro de estimação associado a cada um dos itens anteriores (R.: R$9,30; R$12,24).

✓ Exercícios

3. Um auditor toma uma amostra aleatória de 30 de um conjunto de 150 contas a receber. A média amostral é de R$ 250,00, com um desvio padrão de R$ 55,00. Com base nestes dados, determinar:
a) a estimativa pontual da média das 150 contas a receber (R.: R$250,00);
b) um intervalo de confiança de 99% para a média das 150 contas a receber (R.: R$226,75 a 273,25);
c) o erro de estimação associado ao item b (R.: R$23,25).

✓ Exercícios

4. Um analista financeiro toma uma amostra de 30 entre 300 contas. A média amostral é de R$ 138,00, com desvio padrão de R$ 35,75. Com base nestes dados, determinar:
a) a estimativa pontual da média populacional (R.: R$138,00);
b) um intervalo de confiança de 90% para a média populacional (R.: R$127,77 a R$148,23;
c) o erro de estimação associado ao item b (R.: R$10,23).

✓ Exercícios

5. O administrador de uma universidade coleta dados sobre uma amostra aleatória de âmbito nacional de 230 alunos de cursos de Administração e encontra que 54 de tais estudantes têm diplomas de Técnico em Contabilidade. Com base nestas informações, determinar:
a) a estimativa pontual da proporção populacional (R.: 23,5%);
b) um intervalo de confiança de 90% para a proporção nacional de estudantes que possuem diplomas de Técnico em Contabilidade (18,9% a 28,1%);
c) o erro de estimação associado ao item b (R.: 4,6%).

✓ Exercícios

6. Uma amostra aleatória de 40 operários trabalhando num grande projeto de construção revelou que 6 não estavam usando capacetes protetores.
a) construir um intervalo de 90% de confiança para a verdadeira proporção dos que não estão usando capacetes nesse projeto (R.: 6% a 24%;
b) se há 1000 operários trabalhando no projeto, converter o intervalo de confiança de porcentagens para número de operários (R.: 60 a 240 operários).

✓ Exercícios

7. Um pequeno fabricante comprou um lote de 200 peças eletrônicas de um saldo de estoques de um grande empresa. Para uma amostra aleatória de 50 dessas peças, constatou-se que 5 eram defeituosas. Com base nestes dados, determinar:
a) a estimativa pontual da proporção populacional (R.: 10%);
b) um intervalo de confiança de 95% para a proporção de todas as peças que são defeituosas no carregamento (R.: 3% a 17%);
c) o erro de estimação associado ao item b (R.: 7%).

✓ Exercícios

8. Das 2000 peças produzidas numa linha de produção diariamente, selecionou-se aleatoriamente 400 itens para um teste de qualidade. Destas, 40 apresentaram algum tipo de defeito. Determinar:
a) a estimativa pontual da proporção populacional de peças defeituosas (R.: 10%);
b) um intervalo de confiança de 95% para a porcentagem populacional de peças defeituosas (R.: 7,4% a 12,6%);
c) o erro de estimação associado ao item b (R.:2,6%).