UFFS - Ciência da Computação
Lista 6 - Recorrências Lineares - Data: 08/11/2023
Profa. Rosane R. Binotto

1. Encontre os primeiros cinco termos da sequência definida pelas relações de recorrência e pelas condições iniciais abaixo.

a) $a_{n+1} = 6a_n, \quad a_1 = 2$

b) $a_{n+1} = a_n^2, \quad a_1 = 2$

c) $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n, \quad a_0 = 1$ e $a_1 = 2$

2. Considere $a_n = 2^n + 5.3^n$ para $n = 0, 1, 2....$

a) Encontre a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4.

b) Mostre que $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ e $a_4 = 5a_3 - 6a_2$.

c) Mostre que $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad \forall\, n \in Z$ e $n \geq 2$.

3. Mostre que a sequência $\{a_n\}$ é uma solução da relação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2n - 9,$$

a) $a_n = -n + 2$

b) $a_n = 7.2^n - n + 2$

4. Encontre a solução para cada uma das relações de recorrência e as condições iniciais abaixo.

a) $a_{n+1} = 2a_n - 1, \quad a_0 = 1$

b) $a_{n+1} = a_n + n, \quad a_0 = 1$

c) $a_{n+1} = a_n + 2n + 3, \quad a_0 = 4$

5. Suponha que o número de bactérias triplique a cada hora.

a) Encontre uma relação de recorrência para o número de bactérias depois que se passaram n horas.

b) Se 100 bactérias são usadas para iniciar uma nova colônia, quantas bactérias haverá na colônia depois de 10 horas?

6. Mensagens são transmitidas por meio de um canal de comunicação que usa dois sinais. A transmissão de um sinal requer 1 microssegundo e a transmissão do outro sinal requer 2 microssegundos.

a) Encontre uma relação de recorrência para o número de mensagens diferentes que consistem em sequências desses dois sinais, em que cada sinal na mensagem é seguido imediatamente pelo próximo sinal, que pode ser enviado em n microssegundos.

b) Quais são as condições iniciais?

c) Quantas mensagens diferentes podem ser enviadas em 10 microssegundos usando esses 2 sinais?

7. Determine quais das relações abaixo são relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes. Encontre também seus respectivos graus (ordens).

a) $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1} + 5a_n$

b) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

c) $a_{n+4} = a_{n+3} + a_n$

d) $a_{n+1} = a_n + 2$

e) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

f) $a_{n+1} = na_n$

g) $a_{n+1} = a_n + n$

8. Resolva as relações de recorrência abaixo com as condições iniciais dadas.

a) $a_{n+1} = 2a_n \quad a_0 = 3$

b) $a_{n+1} = a_n \quad a_0 = 2$

c) $a_{n+1} = a_n + n, \quad a_0 = 1$

d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 3, \quad a_0 = 4$

e) $a_{n+1} = 2a_n - 3^n, \quad a_0 = 1.$

9. Quantas mensagens diferentes podem ser transmistidas em n microssegundos, usando os dois sinais descritos no Exercício 6?

10. Resolva as equações a seguir:

a) $a_{n+1} = 6a_{n+1} - 8a_n, \; a_0 = 1$ e $a_1 = 3;$

b) $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \; a_0 = 2$ e $a_1 = -1;$

c) $a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0$;

d) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = n$;

e) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4^n$;

f) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n$;

g) $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = n + 5$, $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$.

11. Mostre uma equação não recorrente para a sequência recorrente $\{a_n\}$ definida por:

$a_{n+3} = -a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n$, se $n \geq 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

Resposta: $a_n = \frac{1}{4}(-2)^n - \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{5}{12}\, 2^n$.