CAMPUS CHAPECÓ

Matemática C

Profa. Janice Teresinha Reichert

Chapecó - SC, 2023

Sumário

Capítulo 1

Noções de lógica e conjuntos numéricos

1.1 Conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é definido como:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Observação 1 *Quando não se considera o zero (0), a notação utilizada é* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$.

1.2 Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros é formado pelos elementos do conjunto dos naturais acrescidos de seus simétricos. A notação utilizada para o conjunto dos números inteiros é $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, , ..\}$.

Observação 2 *No conjunto* $\mathbb{Z}$ *distinguimos três subconjuntos notáveis:*

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$$

(chamado conjunto dos inteiros não negativos)

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não positivos)

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não nulos).

1.2.1 Valor absoluto em $\mathbb{Z}$

Chamamos de módulo ou valor absoluto de um número inteiro, a distância desse número até o zero, na reta numérica inteira. Formalmente definimos:

Definição 1 *Para todo* $a \in \mathbb{Z}$, *o valor absoluto ou módulo de a (notação* $|a|$*) é definido pelas seguintes condições:* $|a| = \begin{cases} a & se \quad a \geq 0 \\ -a & se \quad a < 0 \end{cases}$.

Algumas propriedades são importantes quando falamos em valor absoluto para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$:

(i) $|a| = |-a|$

(ii) $-|a| \leq a \leq |a|$

(iii) $|ab| = |a||b|$

(iv) $|a+b| \leq |a| + |b|$

CUIDADO! Como podemos ver na propriedade (iv) acima $|a+b| \leq |a| + |b|$ e **nem sempre** vale $|a+b| = |a| + |b|$.

Tomamos como exemplo $a = 5$, $b = -3$. Então $|5 + (-3)| < |5| + |-3|$.

1.3 Números Racionais

O conjunto dos números racionais surge com a necessidade de divirmos um número inteiro qualquer a por um número inteiro b diferente de zero, o que não é possível no conjunto dos números inteiros.

Chamamos de conjunto dos números racionais - símbolo $\mathbb{Q}$ - o conjunto:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} |\ a \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Neste conjunto, $\mathbb{Q}$, adotamos as seguintes definições:

(1) igualdade: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

(2) adição: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

(3) multiplicação: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

No conjunto dos números racionais destacamos os seguintes subconjuntos:

- $\mathbb{Q}_+$ é o conjunto dos racionais não negativos
- $\mathbb{Q}_-$ conjunto dos racionais não positivos
- $\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos racionais não nulos

Na fração $\dfrac{a}{b}$, a é o numerador e b o denominador. Se a e b são primos entre si, isto é, $mdc(a,b) = 1$, dizemos que $\dfrac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

1.3.1 Operações no conjunto dos números racionais

As mesmas operações definidas no conjunto dos números inteiros continuam válidas para o conjunto dos números racionais, ou seja, a adição, a mutiplicação e a subtração. Também as propriedades para estas operações continuam valendo. Além destas, ganhamos agora mais um proriedade, a do inverso multiplicativo.

(M4) *simétrico ou inverso para a multiplicação:* para todo $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, onde $\dfrac{a}{b} \neq 0$, existe $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = 1$.

Esta propriedade nos diz que em $\mathbb{Q}$ todo elemento não nulo possui inverso pela operação multiplicação.

1.4 Representação decimal

Além da forma fracionária $\frac{a}{b}$, os números racionais podem ser representados pela forma decimal. Quando o número está na forma fracionária $\frac{a}{b}$, basta dividirmos a por b para que tenhamos sua forma decimal. Por exemplo:

- $\frac{1}{2} = 0,5$
- $\frac{7}{4} = 1,75$

Já na mudança da forma decimal para a forma fracionária, duas situações podem ocorrer:

1. o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, é uma decimal exata. Como exemplo citamos: $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ e $1,23 = \frac{123}{100}$.
2. o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica. Por exemplo. $0,33333\ldots = \frac{1}{3}$, pois se tomarmos $0,3333\ldots = x$, temos que $3,333333\ldots = 10x$. Então $3,333\ldots - 0,333\ldots = 10x - x$, ou seja, $3 = 9x$. Logo $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Exemplo 1 *Como exemplo tomamos* $2,57919191\ldots$. *Fizemos* $2,57919191\ldots = x$. *Para que tenhamos a mesma parte decimal, tomamos* $257,919191\ldots = 100x$ *e* $25791,9191\ldots = 10000x$. *Então* $25791,9191\ldots - 257,919191\ldots = 10000x - 100x$, *ou seja,* $25534 = 9900x$. *Temos que* $x = \frac{25534}{9900}$.

Exemplo 2 *Representar na forma fracionária os números:*

(a) $1,59999...$

(b) $0,325325325...$

1.5 Números Irracionais

Existem números cuja representação decimal não é nem finita nem periódica, consequentemente não podem ser escritos sob a forma de fração. Números como esses são chamados *números irracionais*.

Vamos aos exemplos:

- Da razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro surge o número π, ou seja, $\pi = \frac{C}{2r} = 3,14159265...$, onde C representa o comprimento da circunferência e r o seu raio.
- Da medida da diagonal de um quadrado de lado 1 surge o número irracional $\sqrt{2}$. De forma geral $\sqrt{p}$, p primo, $p > 1$, representa um número irracional.

1.6 Exercícios

1. Quem é maior?

   (a) $\frac{7}{9}$ ou $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{10}$

   (c) $\frac{3}{6}$ ou $\frac{4}{8}$ (d) $\frac{5}{6}$ ou $\frac{3}{3}$

   (e) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{7}{10}$ (f) $\frac{3}{5}$ ou $\frac{2}{3}$

2. Efetue:

   (a) $\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}$ (b) $\dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{5}$

   (c) $\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{4}$ (d) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}$

   (e) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{10}$ (f) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}$

   (g) $\dfrac{2}{3}\cdot 9$ (h) $\dfrac{3}{5}\cdot 7$

   (i) $\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{4}{9}$ (j) $\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{5}{8}$

   (k) $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{6}$ (l) $\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{2}$

   (m) $\dfrac{1}{5}:\dfrac{1}{15}$ (n) $\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{4}$

3. Dados os números racionais $a=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$ e $c=0,12$, coloque-os em ordem crescente. Resposta: $c<b<a$.

4. Efetuando-se a subtração $\frac{2x+3y}{3}-\frac{x+2y}{2}$, obtém-se .... Resposta: $\frac{x}{6}$.

5. O valor da expressão $[\frac{1}{16}\div(\frac{-1}{8})].(\frac{1}{64})+\frac{1}{128}$ é .... Resposta: 0.

6. Resolva as operações:

   (a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

   (b) $\sqrt{2}(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3})$

   (c) $\frac{\sqrt{2}+5}{8}.\frac{\sqrt{3}-5}{8}$

   (d) $\frac{1}{2}-(\frac{-1}{3})$

   (e) $\frac{-2}{5}.(\frac{-5}{6})$

   (f) $\frac{-2}{5}\div(\frac{6}{7})$

   (g) $\frac{-1}{2}\div[-2.(\frac{-2}{3})]$ Resposta: $\frac{-3}{8}$

   (h) $(\frac{1}{7}-1).(\frac{1}{3}-\frac{3}{2})$ Resposta: 1

   (i) $(-2-\frac{1}{4}).(-3+\frac{5}{6}).(\frac{-6}{13})$ Resposta: $\frac{-9}{4}$

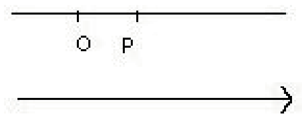
   (j) $2+\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ Resposta: $\frac{7}{3}$

1.7 Números Reais

Estudamos os conjuntos dos números naturais, dos inteiros, dos racionais e dos irracionais. A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é chamada de conjunto dos números reais.

1.7.1 Reta real

O texto escrito nesta seção é uma transcrição de (Ávila, 1994, p. 3-4).



Os números reais têm uma representação simples e muito útil, por meio dos pontos de uma reta. Para isso, tomamos um ponto qualquer de uma reta e a ele associamos o número zero; esse ponto é chamado *origem.* Escolhemos, em seguida, uma unidade de comprimento e marcamos cada ponto P da reta com um número real r, que dá a medida do segmento OP em função da unidade de comprimento escolhida. Os pontos que ficam de um só lado da origem são marcados com números positivos, os do outro lado, com números negativos. O número r que marca o ponto P é chamado *coordenada* de P ou *abscissa* de P. Uma reta em que a cada ponto se associa a sua abscissa pelo processo descrito é chamada *reta numérica*, *eixo real* ou simplesmente *eixo.* Ela fica orientada, pois nela podemos distinguir dois sentidos opostos de percurso: *sentido positivo*, que é o das coordenadas crescentes, e *sentido negativo*, sentido oposto ou das coordenadas decrescentes. Quando só lidamos com um eixo isolado, é costume desenhá-lo na horizontal, tomar o sentido positivo como sendo da esquerda para a direita e indicar esse sentido com uma seta.

As operações, propriedades e as definições vistas no conjunto dos números racionais, continuam valendo para o conjunto dos números reais.

1.7.2 Potenciação e Radiciação

Vamos estudar agora o que acontece com a potenciação e a radiciação no conjunto dos números reais.

Definição 2 *Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então*

$$a^n = \begin{cases} 1 & se \quad n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a & se \quad n > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & se \quad n < 0 \end{cases}.$$

IMPORTANTE:

- Se $a = 0$ então $a^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
- Se $a = 0$ e $n = 0$ (0^0), temos uma indeterminação.

As seguintes propriedades são verdadeiras para $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $m, n \in \mathbb{Z}$:

i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

iv) $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

v) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Se $m, n \in \mathbb{Q}$, as mesmas propriedades são verdadeiras, desde que $a, b \in \mathbb{R}^*_+$.

Por exemplo, $(0,064)^{\frac{1}{3}} = (\dfrac{64}{1000})^{\frac{1}{3}} = (\dfrac{4^3}{10^3})^{\frac{1}{3}} = [(\dfrac{4}{10})^3]^{\frac{1}{3}} = (\dfrac{4}{10})^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \dfrac{4}{10}$.

Definição 3 *Dados $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um número real b, $b \geq 0$, é raiz n-ésima de a se $b^n = a$.*

<u>*Notação:*</u> $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$

Vejamos alguns exemplos: $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, pois $5^2=25$. Note que $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$.

IMPORTANTE: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ para todo $a \geq 0$.

CUIDADO!

- $\sqrt{x^2} = |x|$ - Verdadeiro
- $\sqrt{x^2} = x$ - Falso

Por exemplo, $\sqrt{36} = 6$ e $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Proposição 1 *Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}^*$, temos que:*

i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

ii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *onde* $b \neq 0$

iii) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

iv) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Definição 4 *Dados $a \in \mathbb{R}^*$, e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$), temos que*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Observação 3 *1. Se $\dfrac{p}{q} > 0$ então $0^{\frac{p}{q}} = 0$*

2. Não faz sentido falarmos em $0^{\frac{p}{q}}$ se $\dfrac{p}{q} < 0$

1.8 Exercícios

1. Simplifique as expressões:

   (a) $\left(\dfrac{a^4 \cdot b^3}{a^2 \cdot b}\right)^5$ Resposta: $(ab)^{10}$

   (b) $\dfrac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (a^3 \cdot b^4)^2}{(a^3 \cdot b^2)^3}$ Resposta: $a^5 \cdot b^{14}$

2. Se a e b são números reais, então em que condições $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

3. Calcule:

   (a) $(0,75)^{-2}$
   (b) $\dfrac{1}{2^{-3}}$
   (c) $\dfrac{1}{-2^{-3}}$
   (d) $\dfrac{1}{(0,01)^{-3}}$
   (e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$
   (f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$
   (g) $(4\sqrt{8} - 2\sqrt{18}) : \sqrt[3]{2}$
   (h) $9^{\frac{3}{2}}$
   (i) $(243^{-2})^{-\frac{2}{5}}$
   (j) $(16^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{5}}$

4. Calcule o valor das expressões numéricas:

(a) $(-2)^2 + 2^{-1} - 3^2 - (5^2)^{\frac{1}{2}}$

(b) $5^0 - 3^{-2}.3^3 + 4^{-3}.4^5.4^{d\frac{2}{3}}$

(c) $(3^{-1}.4^2)^{-2}.(3.4^3)^2$

(d) $\dfrac{(-3)^2 + 5.d\frac{1}{5^3}}{-2^3 + 4^{-1}}$

(e) $(-1 + \dfrac{2}{3})^{-2} + 4^{\frac{1}{2}}$

5. Simplifique as expressões quando possível:

(a) $\dfrac{12.10^{-3}.10^{-4}.10^6}{12.10^{-2}.10^{-5}.10}$

(b) $(\frac{a^6.b^{-3}}{a^{-2}.b^2})^3$

(c) $\frac{(x^{-3}.y^4.z^3)^{-2}}{x^2.y^{-1}.z} + \frac{2x^3y}{xy}$

(d) $\frac{(2y)^3.10x}{2x^4y^2} + \frac{2x+2y}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{x}$

6. Expresse as potências sob forma de radicais:

(a) $5^{\frac{2}{3}}$

(b) $7^{\frac{3}{5}}$

(c) $9^{\frac{1}{2}}$

(d) $8^{\frac{1}{3}}$

7. Expresse os radicais sob forma de potência:

(a) $\sqrt[4]{3}$

(b) $\sqrt[3]{7}$

(c) $\sqrt[8]{a^3}$ (com $a \geq 0$)

(d) $\sqrt{5}$

8. Calcular o valor da expressão: $E = 16^{0,5} + 8^{\frac{1}{3}} + (\frac{1}{32})^{-0,2}$ R: 8

9. Calcule o valor da expressão: $A = 8^{\frac{1}{3}} + (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{4}}$ R: $\frac{13}{3}$

10. Sabendo que $a^{10} = 14$ e $a^7 = 3,5$; calcule:

(a) a^{17} R: 49

(b) a^3 R: 4

(c) a^{14} R: 12, 25

(d) a^{-3} R: 0, 25

11. Qual é a metade de 2^{22} R: 2^{21}

12. Calcule o valor de cada expressão numérica:

(a) $\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{48}$

(b) $\sqrt{6} - 3\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{150}$

(c) $\frac{\sqrt{6}.\sqrt{4} + \sqrt{12}.\sqrt{32}}{2}$

(d) $(8\sqrt{2})^2 - \sqrt{18}.\sqrt{2} + 2\sqrt{3^4}$

(e) $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

(f) $(4 + \sqrt{5})(4 - \sqrt{5})$

(g) $(3\sqrt{7} - 1)^2$

1.8.1 Intervalos em $\mathbb{R}$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$

1.8.2 Desigualdades

Definição 5 *Expressões do tipo: $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ são chamadas desigualdades.*

Proposição 2 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.*

(ii) *Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.*

(iii) *Se $a < b$, então $a + c < b + c$.*

(iv) *Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.*

(v) *Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.*

(vi) *Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.*

(vii) *Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $ac < bd$.*

1.8.3 Equações e inequações

Para resolvermos equações e inequações em $\mathbb{R}$ utilizamos os conceitos até aqui estudados. É importante ressaltar que devemos estar atentos às propriedades vistas na **Proposição (2)**.

Exemplo 3 *Estude o sinal da expressão $x - 3$.*

Exemplo 4 *Estude o sinal da expressão $\frac{x+3}{x-2}$.*

Exemplo 5 *Resolva a inequação $\frac{2x+1}{x-4} < 0$.*

Exemplo 6 *Resolva a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geq 5$.*

Definição 6 *Seja x um número real. Definimos o módulo (ou valor absoluto) de x por:*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 7 *Resolva a equação $|2x + 1| = 3$.*

Proposição 3 *Seja $a > 0$. Então:*

(a) $|x| < a$ *se, e somente se,* $-a < x < a$.

(b) $|x| > a$ *se, e somente se,* $x < -a$ *ou* $x > a$.

(c) $|x|$ *representa a distância do ponto x, sobre a reta real, até a origem, assim temos que* $|x|^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 8 *Resolva as inequações utilizando a proposição 3:*

(a) $|x| < 3$

(b) $|2x - 3| > 3$

(c) $|x + 1| < |2x - 1|$

Exemplo 9 *Considerando a definição de módulo de um número, elimine o módulo:* $|x + 1| + |x|$.

Exemplo 10 *Resolva as seguintes inequações:*

$3 + 7x < 8x + 9$

2. $7 < 5x + 3 \leq 9$

3. $\dfrac{1}{x + 7} > -1$

4. $\dfrac{3 + x}{3 - x} \leq 4$

5. $(x+5)(x-3) > 0$

6. $|5x-3| = 7$

7. $|7x-1| = |2x+5|$

8. $|7x-2| < 4$

9. $|x+3| \leq 2|x+1|$

10. $|\dfrac{7-2x}{4+x}| \leq 2;\ x \neq -4$

11. $|\dfrac{3-2x}{2+x}| \leq 4$; $x \neq -2$

1.9 Exercícios

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfaçam as desigualdades abaixo.

   (a) $3 - x < 5 + 3x$ R: $(-\frac{1}{2}, +\infty)$
   (b) $2x - 5 < \dfrac{1}{3} + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1-x}{3}$ R: $(-\infty, \dfrac{68}{19})$
   (c) $2 > -3 - 3x \geq -7$ R: $(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}]$
   (d) $\dfrac{5}{x} < \dfrac{3}{4}$ R: $(-\infty, 0) \cup (\dfrac{20}{3}, +\infty)$
   (e) $x^2 \leq 9$ R: $[-3, 3]$
   (f) $x^2 - 3x + 2 > 0$ R: $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
   (g) $1 - x - 2x^2 \geq 0$ R: $[-1, \dfrac{1}{2}]$
   (h) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3+x}$ R: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
   (i) $x^3 + 1 > x^2 + x$ R: $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$
   (j) $(x^2 - 1)(x + 4) \leq 0$ R: $(-\infty, -4] \cup [-1, 1]$
   (l) $\dfrac{2}{x-2} \leq \dfrac{x+2}{x-2} \leq 1$ R: $(-\infty, 0]$
   (m) $x^4 \geq x^2$ R: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \cup \{0\}$
   (n) $\dfrac{x}{x-3} < 4$ R: $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$
   (o) $\dfrac{\frac{1}{2}x - 3}{4 + x} > 1$ R: $(-14, -4)$
   (p) $\dfrac{3}{x-5} \leq 2$ R: $(-\infty, 5) \cup [\dfrac{13}{2}, +\infty)$
   (q) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$ R: $(2, +\infty)$
   (r) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$ R: $(-\infty, -2] \cup \{1\}$
   (s) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$ R: $(-\infty, -\dfrac{5}{2}) \cup (-1, 2)$
   (t) $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 < 0$ R: $(-\infty, -\dfrac{1}{2})$
   (u) $12x^3 - 20x^2 \geq -11x + 2$ R: $[\dfrac{2}{3}, +\infty) \cup \{\dfrac{1}{2}\}$

2. Resolver as equações em $\mathbb{R}$:

   (a) $|5x - 3| = 12$ R: $\{-\dfrac{9}{5}, 3\}$
   (b) $|-4 + 12x| = 7$ R: $\{-\dfrac{1}{4}, \dfrac{11}{12}\}$
   (c) $|2x - 3| = |7x - 5|$ R: $\{\dfrac{2}{5}, \dfrac{8}{9}\}$
   (d) $\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = 5$ R: $\{\dfrac{4}{3}, 3\}$
   (e) $\left|\dfrac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$ R: $\{\dfrac{4}{11}, 4\}$
   (f) $|3x + 2| = 5 - x$ R: $\{-\dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{4}\}$
   (g) $|9x| - 11 = x$ R: $\{-\dfrac{11}{10}, \dfrac{11}{8}\}$
   (h) $2x - 7 = |x| + 1$ R: $\{8\}$

3. Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

(a) $|x+12|<7$ R: $(-19,-5)$

(b) $|3x-4|\leq 2$ R: $[\frac{2}{3},2]$

(c) $|5-6x|\geq 9$ R: $(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[\frac{7}{3},+\infty)$

(d) $|2x-5|>3$ R: $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

(e) $|6+2x|<|4-x|$ R: $(-10,-\frac{2}{3})$

(f) $|x+4|\leq|2x-6|$ R: $(-\infty,\frac{2}{3}]\cup[10,+\infty)$

(g) $|3x|>|5-2x|$ R: $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$

(h) $\left|\frac{7-2x}{5+3x}\right|\leq\frac{1}{2}$ R: $[\frac{9}{7},19]$

(i) $|x-1|+|x+2|\geq 4$ R: $(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$

(j) $1<|x+2|<4$ R: $(-6,-3)\cup(-1,2)$

(l) $\left|\frac{2+x}{3-x}\right|>4$ R: $(2,\frac{14}{3})-\{3\}$

(m) $\left|\frac{5}{2x-1}\right|\geq\left|\frac{1}{x-2}\right|$ R: $(-\infty,\frac{11}{7}]\cup[3,+\infty)-\{\frac{1}{2}\}$

(n) $|x|+1<x$ R: $\emptyset$

(o) $3|x-1|+|x|<1$ R: $\emptyset$

(p) $|2x^2+3x+3|\leq 3$ R: $[-\frac{3}{2},0]$

(q) $|x-1|+|x-3|<|4x|$ R: $(-\infty,-2)\cup(\frac{2}{3},+\infty)$

(r) $\frac{1}{|x+1||x-3|}\geq\frac{1}{5}$ R: $[-2,4]-\{-1,3\}$

(s) $\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|<1$ R: $(0+\infty)$

(t) $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right|\leq 4$ R: $(-\infty,-\frac{7}{2}]\cup[-\frac{1}{6}+\infty)$

Capítulo 2

Polinômios

Definição 7 *Chamamos de polinômio uma expressão na forma*

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Os números $a_0, a_1, ...a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1 x, ...a_n x^n$ são chamadas termos do polinômio p.

Exemplo 11

1. $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 5x^3$
2. $q(x) = 1 + 7x^4$
3. $g(x) = 5x - 3x^3$.

Valor numérico de p em a: Dados o número a e o polinômio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, chama-se valor numérico o valor que o polinômio assume em a, isto é,

$$p(a) = a_n a^n + \cdots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0.$$

Em particular, se a é um número e p é um polinômio tal que $p(a) = 0$, dizemos que a é uma raiz ou um zero de p.

Polinômio Nulo: dizemos que o polinômio p é nulo (ou identicamente nulo) quando p assume o valor numérico zero para todo $x \in \mathbb{R}$. Em símbolos: $p \equiv 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Polinômios Idênticos: dizemos que os polinômios p e q são idênticos quando possuem os coeficientes correspondentes iguais, ou seja, sejam
$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e
$q(x) = b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$.
Assim, $p = q \Leftrightarrow a_i = b_i$, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

2.1 Operações

Definição 8 *Dados dois polinômios*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

chama-se soma de f com g o polinômio

$$(f+g)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i.$$

Isto é

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$$

Definição 9 *Dados dois polinômios*

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

chama-se produto de f com g o polinômio

$$(fg)(x) = (a_m b_n)x^{m+n} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_0)$$

Isto é, fg é o polinômio

$$h(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

cujo coeficiente c_k pode ser obtido da seguinte forma:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Exemplo 12 1. *Somar $p(x) = 4 + 3x + x^2$ e $q(x) = 5 - 2x + x^2 + x^4$*

2. *Fazer $(p - q)(x)$ onde $p(x) = -3 + x^2 - x^3$ e $q(x) = -2 - x^2 + x^3$*

3. *Multiplicar $p(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ por $q(x) = 4 + 5x + 6x^2$.*

Proposição 1 *Sejam f, g, h polinômios. São válidas as seguintes propriedades:*

(A.1) Associativa para soma: $f + (g + h) = (f + g) + h$

(A.2) Comutativa para soma: $f + g = g + f$

(A.3) Existência do elemento neutro: $f \equiv 0$

(A.4) Existência do inverso aditivo: $f + (-f) = 0$

(M.1) Associativa para multilicação: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$

(M.2) Comutativa para multiplicação: $f \cdot g = g \cdot f$

(M.3) Existência do elemento neutro: $f \equiv 1$

(D) Distributiva: $f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$

2.1.1 Grau do polinômio

Definição 10 *Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, não identicamente nulo, com $a_n \neq 0$, dizemos que o grau do polinômio corresponde a mais alta potência de x presente nesse polinômio e denotamos por $\partial(p(x)) = n$.*

Exemplo 13 *Se $p(x) = 4 + x^2 - 6x^4 + 7x^8$ então $\partial p = 8$.*

Grau da soma: $\partial(p + q) \leq \text{máx}\{\partial p, \partial g\}$

Exemplo 14 *1.* $p(x) = 1 + x$ *;* $\partial p = 1$

2. $q(x) = x^2$ *;* $\partial q = 2$

3. $(p + q)(x) = 1 + x + x^2$ *;* $\partial(p + q) = 2$

Grau do produto: Sejam p e q polinômios não nulos. Então $\partial(p \cdot q) = \partial p + \partial g$

Exemplo 15 *1.* $p(x) = 1 + x$ *;* $\partial p = 1$

2. $q(x) = x^2$ *;* $\partial q = 2$

3. $(p \cdot q)(x) = x^2 + x^3$ *;* $\partial(p \cdot q) = 3$

2.1.2 Divisão

Definição 11 *Dados dois polinômios, p (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir p por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verificam as duas condições seguintes:*

(i) $p = q \cdot g + r$

(ii) $\partial r < \partial g$ *(ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata).*

Observação 4 *: Pode-se efetuar a divisão de polinômios se utilizando de 2 diferentes métodos:*

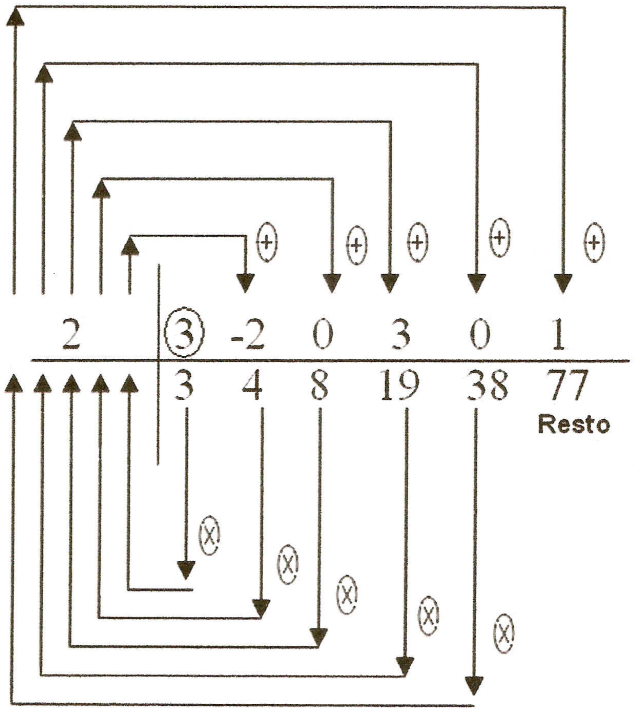
BRIOT-RUFFINI *(Dispositivo Prático): Utilizado quando o divisor for um polinômio do* 1^o *grau da forma* $x-a$ *ou* $x+a$*. Este processo opera apenas com os coeficientes e a raiz dada pelo polinômio de grau 1.*

Escrevemos os coeficientes do polinômio em questão na parte superior de uma linha traçada, sem esquecer os termos nulos(grau zero) apartir do grau do polinômio e também o termo independente da equação.

MÉTODO DAS CHAVES*: Se o divisor não for um polinômio de grau 1, pode-se utilizar esse método. Ao efetuar a divisão de dois polinômios,* $P(x)$ *e* $D(x)(\neq 0)$ *encontraremos* $Q(x)$ *e* $R(x)$*, visto que:*

$P(x) = D(x).Q(x) + R(x).$

Exemplo 16 $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 1$ *dividido por* $D(x) = x - 2$



Obtendo-se então: $Q(x) = 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 19x + 38$ *e* $R(x) = 77$.

Exemplo 17 *Vejamos como obter o quociente e resto da divisão pelo método das chaves do polinômio* $P(x) = 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ *por* $D(x) = x^2 + 2$.

1º- *Dividir o monômio de mais alto grau de P(x) pelo monômio de mais alto grau de D(x)*

2º- *Subtrair do dividendo o produto do divisor D(x) pelo resultado obtido no primeiro passo, obtendo o primeiro resto parcial.*

3º- *Dividimos o monômio de mais alto grau do primeiro resto parcial pelo monômio de mais alto grau do D(x).*

4º- *Subtraimos do primeiro resto parcial o produto do divisor D(x) o resultado obtido no terceiro passo, obtendo o segundo resto parcial.*

E assim sucessivamente, até obter o resto final R(x), que deve obedecer a uma das condições:

$\partial R < \partial D$ *ou* $R(x) \equiv 0$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 & x^2+2 \\
\cline{3-3}
- & 2x^5 \qquad\quad + 4x^3 & 2x^3+4x^2+1 \\
\cline{2-2}
 & 4x^4 \qquad\quad + 9x^2 + 3x + 1 & \\
- & 4x^4 \qquad\quad +8x^2 & \\
\cline{2-2}
 & x^2 + 3x + 1 & \\
- & x^2 \; + 2 & \\
\cline{2-2}
 & 3x - 1 &
\end{array}
$$

Temos então:
$Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1$ e

$R(x) = 3x - 14$

Há casos em que se deseja saber apenas o resto da divisão de um polinômio por outro do primeiro grau. Então utiliza-se o **TEOREMA DO RESTO**:

Teorema 1 (Resto) *O resto da divisão de um polinômio* $P(z)$ *pelo polinômio* $ax+b \quad (a \neq 0)$ *é o valor numérico de* $P(x)$ *para* $x = -\dfrac{b}{a}$*(raiz de* $ax+b$*)*

$$R = P(-\tfrac{b}{a})$$

Observação 5 *Existe uma consequência imediata do Teorema do Resto conhecida como:*

Teorema 2 (D'Alembert) *Um polinômio P(x) é divisível por* $ax + b$ $(a \neq 0)$*, se, e somente se,* $P(-\dfrac{b}{a}) = 0$

Exemplo 18 $2x^3 + 2x^2 - 2x + 4$ *é divisível por* $2x + 4$*?*
$P(\frac{-4}{2}) = P(-2)$
$P(-2) = 2.(-2)^3 + 2.(-2)^2 - 2.(-2) + 4 = 0$

Ou seja, O polinômio em questão é divisível por $2x + 4$

Observação 6 *Divisibilidade pelo produto: Se um polinômio é divisível separadamente pelos binômios* $x - a$ *e* $x - b$*, então* $P(x)$ *é divisível pelo produto* $(x - a).(x - b)$*.*

FAZENDO VOCÊ APRENDE!

---

1) Dados os polinômios: P(x)= $3x^4 + 2x^3 + x - 1$, $Q(x) = 5x^4 + 3x + 7$, $A(x) = 6x^3 + 2x^2 - 3x$, $B(x) = 4x^2 + 5x - 1$ e $C(x) = 9x - 2$, calcule:

(a) $P(x) + Q(x)$ (c) $A(x) + B(x)$ (e) $4A(x)$

(b) $P(x) - Q(x)$ (d) $A(x) - B(x)$ (f) $B(x).C(x)$

(g) $C(x)^2$ (h) $2A(x) - 3B(x)$ (i) $A(x).C(x) + B(x)$

2) Efetue as operações, sendo $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$ e $Q(x) = 4x - 6$

(a) $3P(x)$= $15x^2 - 9x + 6$ (b) $P(x).Q(x) = 20x^3 - 42x^2 + 26x - 12$

3)Utilize os dois métodos citados para encontrar o quociente e confira o resultado do resto pelo teorema do resto.

$P(x) \div D(x)$

$P(x) = x^2 + 6x - 1$; $D(x) = x - 1$

4) Dividindo o polinômio $P(x) = 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ pelo polinômio $D(x)$, obtêm-se o quociente $Q(x) = 3x + 2$ e o resto $R(x) = 11x + 5$. Determine $D(x)$.

5) Três polinômios, $P(x), Q(x)$ e $T(x)$, são tais que,$\partial P = 7, \partial Q = 5, \partial T = 5$. Qual das afirmações seguintes pode ser falsa?

(a) O grau do polinômio $P(x) + Q(x)$ é 7.

(b) O grau do polinômio $P(x) - Q(x)$ é 7.

(c) O grau do polinômio $P(x).Q(x)$ é 12.

(d) O grau do polinômio $Q(x) + T(x)$ é 5.

6) Sendo $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$, para todo x, com $x \in \mathbb{C}$, quais são os valores de a e b?

7) Sejam os polinômios $f = (x+1)^2$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.O polinômio $f.g - h$ é igual a?

Exemplo 19 *1. Dividir $f(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $g = x - 2$.*

2. Dividir $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x + 2$ por $g = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

Observação 7 *1. Dados os polinômios*

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, (a_n \neq 0)$$

e

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, (b_m \neq 0)$$

existem um único polinômio q e um polinômio r tais que $qg + r = p$ e $\partial r < \partial g$(ou $r = 0$).

2. O resto da divisão de um polinômio p por $x - a$ é igual ao valor numérico de p em a.

3. Um polinômio f é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de f (ou seja, $f(a) = 0$).

4. Um polinômio de grau n possui n raízes. Isso não implica que essas raízes sejam todas distintas e reais.

5. Se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $r_1, \cdots, r_n$ são raízes de $p(x)$ então $p(x)$ pode ser fatorado como

$$p(x) = a_n(x - r_1) \cdots (x - r_n).$$

Exemplo 20 *Para fatorar um polinômio, $P(x) = 3x^3 - 20x^2 + 23x + 10$, sabendo que uma de suas raizes é 5, ou seja, este polinômio é divisível por $x - 5$ e $P(x) = (x - 5)Q(x)$.*
Obtem-se o polinômio $Q(x)$ por Briot-Ruffini. Desta forma reduzimos o grau da equação e podemos encontrar as outras 2 raizes.

$$P(x) = (x - 5)(3x^2 - 5x - 2)$$

Fazendo, $x - 5 = 0$ e $3x^2 - 5x - 2 = 0$, encontramos: $x_1 = 5$, $\quad x_2 = 2 \quad, x_3 = \dfrac{-1}{3}$, e pelo teorema da decomposição temos que:

$$P(x) = 3(x - 5)(x - 2)(x + \tfrac{1}{3}).$$

Observação 8 (Multiplicidade de raiz:) *Se uma raiz comparecer k vezes(com $k > 1$), esta é chamada de raiz de multiplicidade k da equação.*

2.1.3 Frações Polinomiais

Definição 12 *Chama-se fração polinomial toda expressão do tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios complexos de variável complexa, com $Q(x) \neq 0$.*

Exemplo 21 *Dado a identidade:*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x+1}{x^2-1}.$$

Encontre as constantes A e B

Solução:

$$\frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x+1}{x^2-1}$$

$$(A + B)x + A - B = 5x + 1$$

e, portanto: $\begin{cases} (I) & A + B = & 5 \\ (II) & A - B = & 1 \end{cases}$

Somando o membro (I) e (II), obtemos

$2A = 6 \rightarrow A = 3.$

Substituindo $A = 3$ em (I), obtemos:

$3 + B = 5 \rightarrow B = 2.$

Exemplo 22 (Você vai utilizar em Cálculo I!!) *Decomponha a fração abaixo em uma soma:*

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2} = \quad \text{Fração 1 + Fração 2}$$

1º Passo) Decompor o denominador! Para isso encontra-se as raizes desse polinômio utilizando Baskhara ou soma e produto (como preferir). Neste caso, as raizes são -1 e -2. Ou seja, $x^2 + 3x + 2$=*(x+1)(x+2)* .

2º Passo) Igualar a fração polinomial a uma soma de frações, cujos numeradores a princípio são desconhecidos, e por isso representa-se por uma incógnita qualquer:

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

3º Passo) Encontrar o MMC dessa soma, de tal modo que torne possível anular os denominadores da igualdade em questão. Obtemos assim a seguinte igualdade:

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+1)(x+2)} \quad (...)$$

$$A(x+1) \ + B(x+2) = x-3$$

4º Passo) Igualar os termos semelhantes da igualdade e montar um sistema para poder descobrir o valor dos numeradores, ou seja, A e B.

$$\begin{cases} Ax & + & Bx = & 1 \\ A & + & 2B = & -3 \end{cases}$$

Sabendo que $A = 5$ e $B = -4$, substituimos esses valores na igualdade montada inicialmente no passo 3:

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2} = \frac{5}{x+2} - \frac{4}{x+1}.$$

FAZENDO VOCÊ APRENDE!

---

(1) Quais são as raizes da equação $(x-2)^3(x-5)(x-4)^2 = 0$ e que multiplicidade apresentam?

(2) Determine as constantes a e b na identidade:

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3} \equiv \frac{3x}{x^2-9}$$

(3) Escreva as frações na forma de uma soma:

(a) $\dfrac{2x-1}{x^2+5x+6}$

(b) $\dfrac{5x+3}{x^2-3x+2}$

(4) Decomponha $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios de 1º grau, em cada um dos seguintes casos:

(a) $P(x) \equiv 4x^2 - x - 3$

(b) $P(x) \equiv x^3 - 8x^2 + 12x$

(5) Sabendo que o polinômio P(x)= $3x^4 - 25x^3 + 59x^2 - 47x + 10$ satisfaz a condição P(1)=P(2)=0, represente P(x) como o produto de uma constante por polinômios do primeiro grau.

IMPORTANTE:

Produtos Notáveis	Exemplos
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(x+3)(x-3) = x^2 - 9$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$
$*\mathbf{(a+b)^3} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$*\mathbf{a^3 + b^3} = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

Observação 9 **Veja como o uso do parêntese muda totalmente o resultado!!*

Exemplo 23 *Fatore os polinômios a seguir:*

(a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 =$

(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 =$

(c) $x^3 + 2x^2 - 3x =$

(d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 =$

(e) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 =$

Respostas:

(a) $(x-1)(x^2+3x+2)$

(b) $(x-1)^2(x^2-x-2)$ *ou* $(x-1)^2(x-2)(x+1)$

(c) $(x-1)(x+3)x$

(d) $(x+3)(x^2-4)$ ou $(x+3)(x+2)(x-2)$

(e) $(x+2)(x^2+4x+3)$ ou $(x+2)(x+3)(x+1)$

2.2 Exercícios

1. Quais das expressões representam um polinômio na variável x?

   (a) $x^5 + x^3 + 2$ (b) $0x^4 + 0x^2$

   (c) 3 (d) $x^{\frac{5}{2}} + 3x^2$

   (e) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$ (f) $x\sqrt{x} + x^2$

   (g) x^{15} (h) $x + 2$

   (i) $x^2 + 2x + 3$ (j) $\dfrac{1}{x^4} + x$

   (k) $x + x^3 + x^6 + x^4$ (l) $(3x^2 - 5x + 3)(7x^3 + 2)$

   R: a, b, c, e, g, h, i, k, l

2. Dado o polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, calcule: $p(-3), p(0), p(1), p(2x), p(x+1)$. R:$p(-3) = -20, p(0) = 1, p(1) = 4, p(2x) = 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1, p(x+1) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$.

3. Determine os reais a, b, c de modo que $p = (a-2)x^3 + (b+2)x + (3-c)$ seja o polinômio nulo. R:$a = 2, b = -2, c = 3$

4. Determine a, b, c de modo que $p(x) = (a+b-5)x^2 + (b+c-7)x + (a+c)$ seja identicamente nulo. R:$a = -1, b = 6, c = 1$.

5. Dados os polinômios $f(x) = (a-1)x^2 + bx + c$ e $g(x) = 2ax^2 + 2bx - c$, qual é a condição para que se tenha a identidade $f(x) \equiv g(x)$? R:$a = -1$ e $b = c = 0$.

6. Dados os polinômios:
$$f(x) = 7 - 2x + 4x^2$$
$$g(x) = 5 + x + x^2 + 5x^3$$
$$h(x) = 2 - 3x + x^4$$
Calcule $(f+g)(x)$, $(g-h)(x)$ e $(h-f)(x)$. R: $(f+g)(x) = 12 - x + 5x^2 + 5x^3$; $(g-h)(x) = 3 + 4x + x^2 + 5x^3 - x^4$; $(h-f)(x) = -5 - x - 4x^2 + x^4$

7. Dados os polinômios:
$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2$$
$$g(x) = 7 + x^2$$
$$h(x) = 2x - 3x^2 + x^3$$
Calcule $(fg)(x)$, $(gh)(x)$ e $(hf)(x)$.

   R: $(fg)(x) = 14 + 21x - 26x^2 + 3x^3 - 4x^4$; $(gh)(x) = 14x - 21x^2 + 9x^3 - 3x^4 + x^5$; $(hf)(x) = 4x - 15x^3 + 15x^4 - 4x^5$

8. Sendo dados os polinômios: $f = x^2$, $g = x^2 + x^4$, $h = x^2 + x^4 + x^6$ e $k = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$, obtenha os números reais a, b, c de modo que se tenha $k = af + bg + ch$. R: $a = 8$, $b = -9$ e $c = 3$.

9. Determine a, b c de modo que se verifique cada identidade:
   (a) $a(x^2 - 1) + bx + c = 0$ R: $a = b = c = 0$
   (b) $a(x^2 + x) + (b + c)x + c = x^2 + 4x + 2$ R: $a = b = 1$ e $c = 2$

10. Determine o grau dos seguintes polinômios:
    (a) $f = x^2 + (x+2)^2 - 4x$
    (b) $g = ax^2 + 2x + 3$, $(a \in \mathbb{R})$

11. Determine o polinômio de primeiro grau tal que $f(1) = 2$ e $f(2) = 5$.

12. Determine o polinômio do segundo grau tal que $f(0) = 1, f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$. R: $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

13. Dado o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$, calcule $\frac{p(2) - 2p(-1)}{p(1/2)}$. R: 38/7

14. Determine o quociente e o resto na divisão de f por g:
    (a) $f = x^2 + 5x + 1$, $g = 2x^2 + 4x - 3$ R: $q = \frac{1}{2}$; $r = 3x + \frac{5}{2}$
    (b) $f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$, $g = x^2 + 2$ R: $q = x^2 + 2x - 1$; $r = 0$
    (c) $f = 5x + 1$, $g = x^3 + 5$ R: $q = 0$; $r = 5x + 1$
    (d) $f = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$, $g = x^3 - x^2 + x - 1$ R: $q = 2x^2 - x + 1$; $r = 4x^2 - 8x + 8$
    (e) $f = 3x^3 + 6x^2 + 9$, $g = 3x^2 + 1$ R: $q = x + 2$; $r = -x + 7$
    (f) $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$ R: $q = 3x^3 + 4x - 1; r = -3x + 2$

15. Seja $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ e $g(x) = 6x^2 + 5x + 4$, determine $(f.g)(x)$ e o grau do produto. $R.: 18x^5 + 27x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 4x$

16. Seja $p(x) = x^4 - 3x^2 - 5$. Calcule o valor de $p(2) - \frac{1}{7}p(3)$. $R: -8$

17. Determine a e b em $p(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$, sabendo que 1 é raiz de $p(x)$ e que p(2)=3. $R: a = 1, b = 2$

18. Determine a, b, c de modo que $(a-1)x^3+(a-b)x^2+(2b-c)x \equiv 4x^3-x^2+5x$. $R: a = 5, b = 6, c = 7$.

19. Sejam os polinômios $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -4 - x$ e $h(x) = x^2 - x + 1$. Determine o polinômio $p(x) = f(x).g(x) + h(x)$. $R: p(x) = -x^2 - 6x + 13$

20. Sejam os polinômios $p(x) = 2x^2 + ax + b$ e $g(x) = cx^2 + (b-1)x - 3$. Determine a, b, c de modo que $p(x) + g(x)$ seja o polinômio nulo. $R: a = -2, b = 3, c = -2$

21. Determine a e b de modo que o resto da divisão de $x^3 - 5x^2 + ax + b$ por $x^2 + 3x$ seja igual a $12x - 7$. $R: a = -12, b = -7$

22. Dividindo $f(x)$ por x^2+x+1, obtemos o quociente $q(x) = x^2-x$ e resto $r(x) = -x+13$. Determine $f(x)$. $R: f(x) = x^4 - 2x + 13$

23. Determine k de modo que o polinômio $x^3 - 2x + k$ seja divisível por $x - 1$. $R: k = 1$

24. Sendo dados os polinômios $f = x$, $g(x) = x + x^3$ e $h(x) = 2x^3 + 5x$, obtenha os números reais a e b tais que $h = af + bg$. $R: a = 3, b = 2$

25. Dividindo o polinômio f por $x^2 - 3x + 5$, obtemos quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine f. $R: x^4 - 3x^3 + 6x^2$

26. Sabendo que -3 é raiz de $p(x) = x^3 + 4x^2 - ax + 1$, calcule o valor de a. $R: a = -10/3$

27. Dividindo $x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por um certo polinômio $q(x)$, obtemos o quociente $x - 1$ e o resto $2x - 1$. Determine $q(x)$. $R.: x^2 - 3x + 2$.

28. Dividindo o polinômio f por $x^3 + x^2 + x + 1$ por $q(x)$, obtemos o quociente $1 + x$ e o resto $x + 1$. Determine $q(x)$. $R: x^2$.

29. Sejam os polinômios $A(x) = x^3-x^2+x-1$ e $B(x) = -3x^2+x+2$. Calcule: $a)A(1/2)-B(-1)$; $R:$ $11/8$; $b)A(0) + B(1)$ $R: -1$.

30. Se $x = -2$ é raiz do polinômio $2x^3 + 7x^2 + 4x + k$, calcule o valor de k. $R: k = -4$.

31. Decomponha o polinômio $x^3 - 3x + 2$. $R: (x-1)^2(x+2)$

32. Sabendo que $\underline{\text{a}}$, $\underline{\text{b}}$ e $\underline{\text{c}}$ são tais que $x^2 - 2x + 1 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$ é uma identidade, qual é o valor de $a + b + c$? $R: -2$.

33. Mostre que $f = (x-1)^2 + (x-3)^2 - 2(x-2)^2 - 2$ é o polinômio nulo.

Capítulo 3

Trigonometria

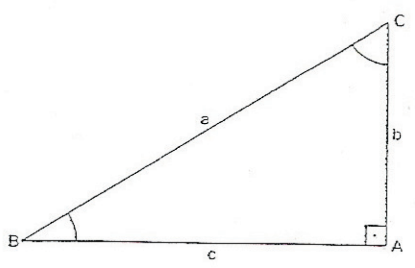
3.1 Introdução à trigonometria

A **Trigonometria**, que é uma palavra de origem grega: **trigono** (triangular) e **metria** (medida), tem por objetivo estabelecer relações entre os elementos básicos (lados e ângulos) de um triângulo.

Observação 10 *As figuras utilizadas nesta seção foram retiradas de [?].*

3.1.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto. Observando o triângulo retângulo ABC, ($\hat{A} = 90^0$), temos:



- $\overline{BC}$ = hipotenusa = a;
- $\overline{AC}$ = cateto = b;
- $\overline{AB}$ = cateto = c;
- $\hat{B} + \hat{C} = \hat{90^0}$;
- $\overline{AC}$ = cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- $\overline{AB}$ = cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$;
- $\overline{AC}$ = cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$;
- $\overline{AB}$ = cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$;

Considerando o que vimos no triângulo retângulo da figura anterior, temos:

- $sen\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \Rightarrow \quad sen\hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} \quad \Rightarrow \quad sen\hat{B} = \frac{b}{a}$
- $\cos\hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$
- $tg\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} \quad \Rightarrow \quad tg\hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{cateto adjacente a } \hat{B}} \quad \Rightarrow \quad tg\hat{B} = \frac{b}{c}$

Teorema 3 (Teorema de Pitágoras) *O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos:*

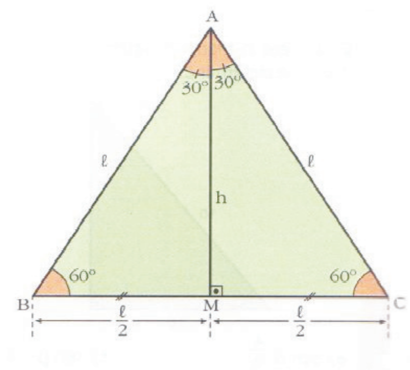
$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.1.2 Ângulos Notáveis: 30^o, 45^o e 60^o

Alguns ângulos, devido ao seu contante uso, merecem um estudo especial. É o caso daqueles que medem 30^o, 45^o e 60^o.

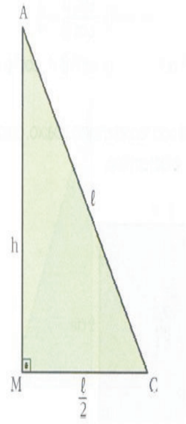
Vamos considerar que num triângulo equilátero a mediana, a altura e a bissetriz relativas a um mesmo ângulo interno coincidem.

Observe o triângulo equilátero ABC, cujos lados medem l e alturas medem h.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMC, podemos calcular a altura h:

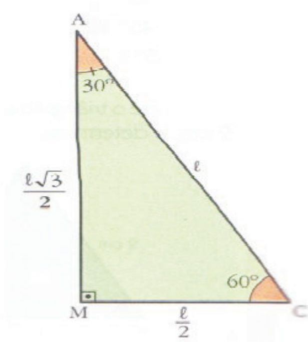
$$h^2 + (\frac{l}{2})^2 = l^2$$
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$
$$h^2 = 3\frac{l^2}{4}$$



$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \tag{3.1}$$

3.1.3 Cálculo do seno, cosseno e tangente de 30^o e 60^o

Observe o triângulo AMC:



$sen\ 30^o{=}\frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$

$cos\ 30^o{=}\frac{l\sqrt{\frac{3}{2}}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

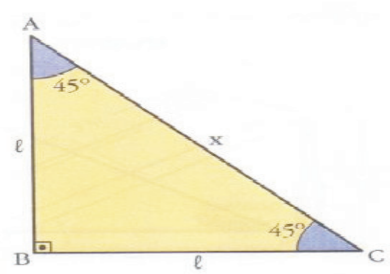
$sen\ 60^o = \frac{l\sqrt{\frac{3}{2}}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$

$tg\ 60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$

3.1.4 Cálculo do seno, cosseno e tangente de 45^o

Vamos considerar um triângulo retângulo e isósceles ABC cujos catetos medem l e a hipotenusa mede x. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:



$$x^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow x^2 = 2l^2 \Rightarrow x = \sqrt{2l^2} \Rightarrow x = l\sqrt{2} \tag{3.2}$$

Vamos agora calcular o seno, cosseno e tangente de 45^o:

$sen\ 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$cos\ 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$tg\ 45^o = \frac{l}{l} = 1$

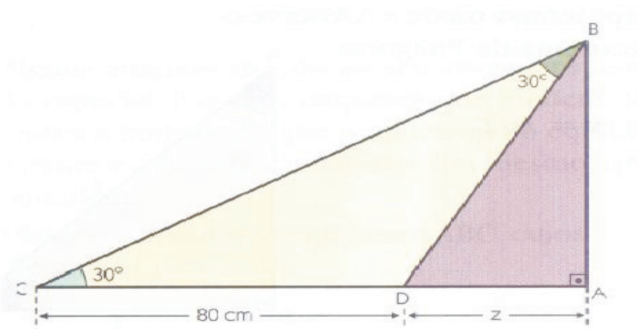
Organizando os resultados, construímos a tabela:

α	30^0	45^0	60^0
$sen\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo 24 1. *Uma pessoa com* $1,80m$ *de altura está distante* $80m$ *da base de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de* 16^0 *em relação à horizontal. Sabendo-se que tg* $16^0 \cong 0,28$*, determine a altura do prédio.*

2. *Um avião levanta vôo num ponto* B*, e sobe fazendo um ângulo constante de* 15^0 *com a horizontal. Sabendo-se que sen* $15^0 \cong 0,26$ *e que tg* $15^0 \cong 0,27$*, determine a que altura estará e qual a distância percorrida quando passar pela vertical que passa por uma igreja situada a 2km do ponto de partida* B*.*

3. *Calcular a medida* z *na figura:*



3.1.5 Comprimento de uma circunferência

Consideremos uma circunferência de raio r. Cortando a circunferência e esticando a linha que a representa, obtemos um segmento AB.

A medida de tal segmento representa o comprimento da circunferência.

Teorema 4 *Seja λ uma circunferência de raio r. Então, o comprimento de λ é:*

$$C(\lambda) = 2\pi r$$

3.1.6 Unidades para medir arcos

Definição 13 (grau) *Grau (símbolo ^{o}) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.*

Então, podemos dizer que uma circunferência, ou arco de uma volta, mede 360^0.

Definição 14 *Tomando-se para unidade de arco (arco unitário) o arco definido por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), temos: "a medida (em graus) de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente".*

Definição 15 (radiano) *O* **radiano** *(rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco.*

Então, como a medida de uma circunferência é dada por $2\pi r$ e $r = 1$ rad, podemos dizer que uma circunferência, ou arco de uma volta, mede 2π rad.

3.1.7 Relação entre grau e radiano

Sabendo que a circunferência (ou arco de uma volta) mede 360^0 ou 2π rad, podemos estabelecer entre as unidades as relações:

$$360^0 \longleftrightarrow 2\pi\ rad \qquad \text{ou} \qquad 180^0 \longleftrightarrow \pi\ rad$$

Exemplo 25

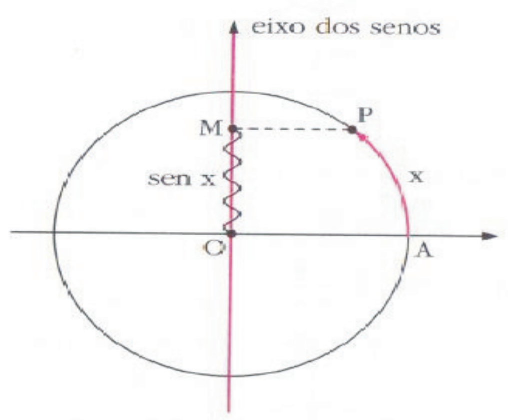
1. *Expressar* 300^0 *em rad.*
2. *Expressar* $\dfrac{\pi}{4}$ *rad em graus.*
3. *Expressar* 2^0 *em rad.*
4. *Expressar* 2π *rad em graus.*

3.1.8 Ciclo trigonométrico

3.1.9 Seno

Consideremos um arco AP, cuja medida é o número real $x \in [0, 2\pi]$, denominamos seno do arco AP o valor da ordenada do ponto P.

No ciclo trigonométrico:



3.1.10 Propriedades do Seno

(1) Se x é do primeiro ou do segundo quadrantes, então $senx$ é positivo. Isto é $x \in [0, \pi]$ então $sen(x) \geq 0$;

(2) Se x é do terceiro ou do quarto quadrante então $sen(x)$ é negativo. Isto é $x \in [\pi, 2\pi]$ então $sen(x) \leq 0$;

(3) Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então $sen(x)$ é crescente;

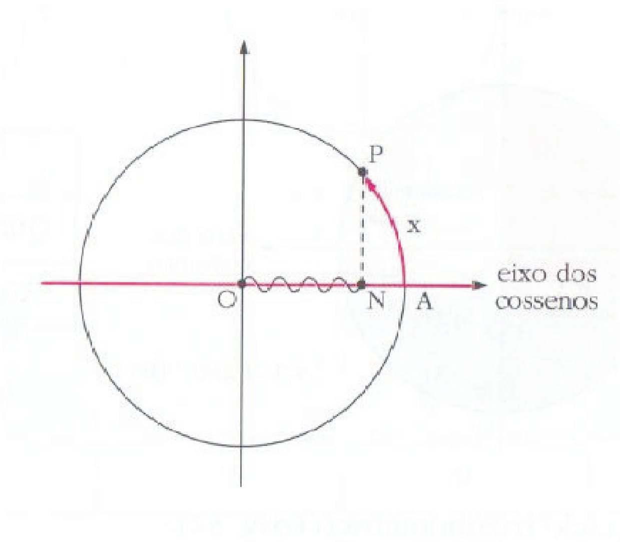
(4) Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então $sen(x)$ é decrescente.

Exemplo 26 *Localize os arcos, e em seguida dê o sinal do seno de cada um deles.*

1. $\frac{\pi}{6}$
2. $\frac{5\pi}{6}$
3. $\frac{7\pi}{6}$
4. $\frac{11\pi}{6}$.

3.1.11 Cosseno

Considerando um arco AP, cuja medida é o número real $x \in [0, 2\pi]$, denominamos cosseno do arco AP o valor da abscissa do ponto P.



3.1.12 Propriedades do Cosseno

(1) Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $cos(x)$ é positivo;

(2) Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $cos(x)$ é negativo;

(3) Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então $cos(x)$ é decrescente;

(4) Se x percorre o terceiro ou quarto quadrante, então $cos(x)$ é crescente.

Exemplo 27 *Qual o sinal do cosseno de cada arco abaixo?*

(a) $\frac{\pi}{3}$

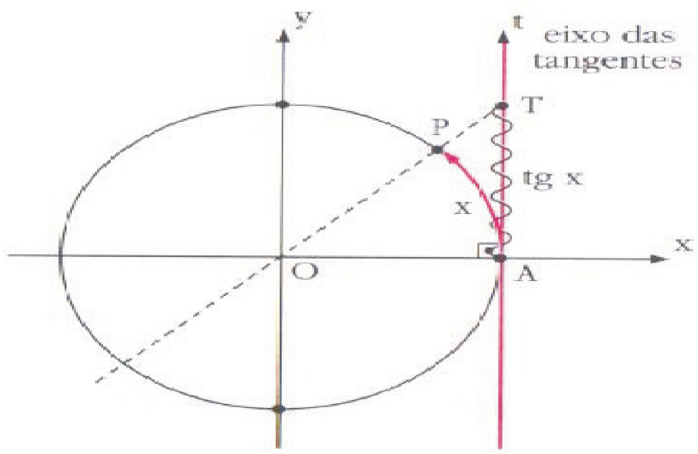
(b) $\frac{4\pi}{3}$

(c) $\frac{7\pi}{8}$

(d) $\frac{\pi}{12}$

3.1.13 Tangente

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$ $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overline{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x $(tg(x))$ a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.



3.1.14 Propriedades da Tangente

(1) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $tg(x)$ é positivo;

(2) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então $tg(x)$ é negativo;

(2) $tg(x)$ é sempre crescente.

Exemplo 28 *(1) Sabendo que* $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$ *e* $tg(\frac{3\pi}{4}) = -1$ *e verificando que* $\frac{\pi}{4}$ *e* $\frac{7\pi}{4}$ *são simétricos em relação ao eixo* x*, assim como* $\frac{3\pi}{4}$ *e* $\frac{5\pi}{4}$*, dê o valor de* $tg(\frac{7\pi}{4})$ *e* $tg(\frac{5\pi}{4})$*.*

(2) Sabendo que $tg(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$*, qual é o valor da tangente de* $\frac{2\pi}{3}$*,* $\frac{4\pi}{3}$ *e* $\frac{5\pi}{3}$*?*

3.1.15 Identidades trigonométricas importantes

Tendo em vista as definições de $sen(x)$, $\cos(x)$ e $tg\ (x)$, apresentadas anteriormente, é fato que:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

Além disso, por definição, temos:

- $\text{cotg}(x) = \dfrac{1}{tg\ x} = \dfrac{\cos x}{sen\ x}$ cotangente do arco x
- $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ secante do arco x
- $\text{cossec}(x) = \dfrac{1}{sen\ x}$ cossecante do arco x

Para finalizar, apresentamos algumas das principais identidades trigonométricas:

- $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ (relação fundamental)
- $sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$
- $sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - sen(b)\cos(a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)$
- $sen(2a) = 2sen(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - sen^2 a$
- $tg^2 x + 1 = sec^2 x$
- $1 + cotg^2 x = cossec^2 x$
- $cos^2 x = \dfrac{1}{1 + tg^2 x}$
- $sen^2 x = \dfrac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$

Exemplo 29 *(1) Sabendo que* $sen(x) = \frac{4}{5}$ *e* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$*, calcule as demais funções circulares de* x*.*

(2) Sabendo que $tg(x) = \frac{12}{5}$ *e* $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$*, calcule as demais funções circulares de* x*.*

3.2 Exercícios

1. Calcule os lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura relativa à hipotenusa é $h = 4$ e um ângulo agudo é $\hat{B} = 30^0$. R: $a = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$; $b = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; $c = 8$

2. Calcule os lados de um triângulo retângulo, sendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma um ângulo de 15^0 com o cateto b.
Dados: $sen\ 75^0 = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ e $cos\ 75^0 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
R: $a = 16$; $b = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$; $c = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

3. Uma escada de bombeiro pode ser estendida até um comprimento máximo de 25 m, formando um ângulo de 70^0 com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo. Qual é a altura máxima que a escada atinge? R: $25,49m$

4. Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60^0. Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ângulo de 45^0. Qual é a altura do prédio? R: $\dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}m$

5. Calcule a distância entre os parapeitos de duas janelas de um arranha-céu, conhecendo os ângulos (α e β) sob os quais são observados de um ponto O do solo, à distância d do prédio. R: $h = d(tg\ \beta - tg\ \alpha)$

6. Observe a figura abaixo e determine a altura b do edifício, sabendo que $\overline{AB}$ mede $25m$ e $cos(\theta) = 0,6$. R: $h = 20m$

7. Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30^o. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 m do solo, qual o valor aproximado, da altura do edifício? R: $117m$

8. Simplificar a expressão: $y = \dfrac{sen\frac{3\pi}{2} + 2cos\pi}{3sen\frac{\pi}{2}}$. R: -1.

9. Calcule a tangente dos arcos cujas medidas são:
   (a) π
   (b) $\frac{5\pi}{4}$
   (c) $\frac{7\pi}{4}$

10. Sabendo que $sen(x) = \frac{3}{5}$ e x está no segundo quadrante, calcular $cos(x)$, $tg(x)$ e $sec(x)$. R: $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{4}$.

11. Sabendo que $cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e que x esta no segundo quadrante, calcule $sec(x)$ e $cotg(x)$. R: $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{3}$.

12. Simplifique as seguintes expressões:

(a) $y = \dfrac{tgx.cotgx}{cosx}$ R: $sec\ x$

(b) $y = (senx + cosx)^2 - 2senx.cosx$ R: 1

(c) $y = \dfrac{tgx + cotgx}{cossecx}$ R: $sec\ x$

13. Sabendo que $sec(x) = 3$, calcule o valor da expressão $y = sen^2x + 2.tg^2x$. R: $\frac{152}{9}$

14. Sabendo que $tg(x) = \frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções circulares de x. R: $cotg(x) = \frac{5}{12}$, $sec(x) = -\frac{13}{5}$, $cos(x) = -\frac{5}{13}$, $sen(x) = -\frac{12}{13}$, $cossec(x) = -\frac{13}{12}$.

15. Sabendo que $cotg(x) = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor da expressão

$$y = \frac{tgx.cosx}{(1 + cosx)(1 - cosx)}$$

R: $-\frac{25}{7}$

16. Dados: $sen(x) = \frac{3}{5}$ e $cos(y) = \frac{5}{13}$, calcule $cos(x+y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$. R: $\frac{56}{65}$

17. Sendo $tg(x) = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $sen(2x)$. R: $\frac{24}{25}$

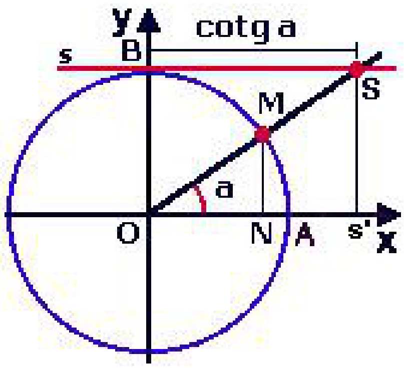
3.3 Mais relações trigonométricas

Para iniciar o conteúdo, de identidades trigonométricas, vamos primeiramente entender o significado de algumas relações:

(a) COTANGENTE:

Seja a reta s tangente à circunferência trigonométrica no ponto B=(0,1). Esta reta é perpendicular ao eixo OY. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intercepta a reta tangente s no ponto S=(s',1). A abscissa s' deste ponto, é definida como a cotangente do arco AM correspondente ao ângulo a.

Observação 11 *A cotangente possui os mesmos sinais da tangente no círculo trigonométrico.*



(b) SECANTE:

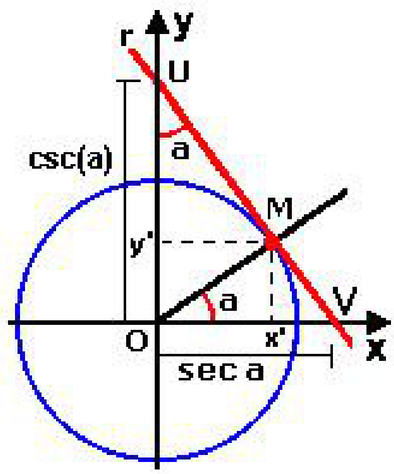
Seja a reta r tangente à circunferência trigonométrica no ponto M=(x',y'). Esta reta é perpendicular à reta que contém o segmento OM. A interseção da reta r com o eixo OX determina o ponto V=(v,0). A abscissa do ponto V, é definida como a secante do arco AM correspondente ao ângulo a.

Observação 12 *A secante possui os mesmos sinais do cosseno no círculo trigonométrico.*

(c) COSSECANTE:

A interseção da reta r com o eixo OY é o ponto U=(0,u). A ordenada do ponto U, é definida como a cossecante do arco AM correspondente ao ângulo a. Então a cossecante do ângulo a é dada pelas suas várias determinações.

Observação 13 *A cossecante possui os mesmos sinais do seno no círculo trigonométrico.*

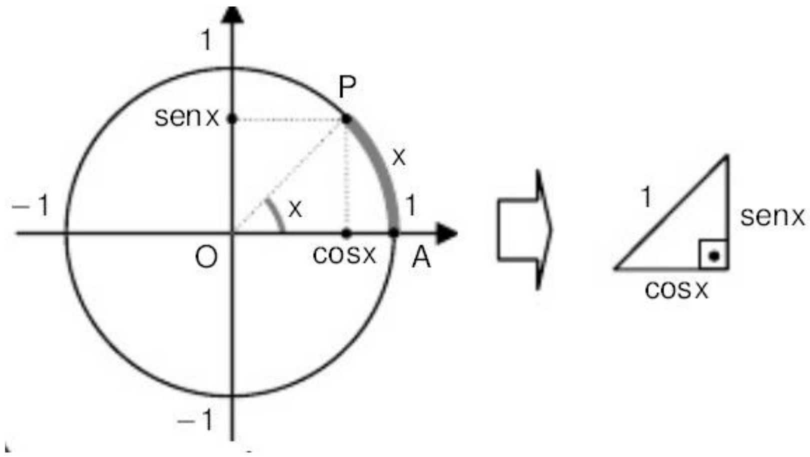


3.3.1 Demonstração de algumas identidades trigonométricas

Abaixo, tem-se as principais indentidades trigonométricas. Os exercicios seguintes serão baseadas nas mesmas. Na sequência, pode-se verificar a demonstração de algumas identidades.

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Demonstração:



Aplicando o teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$,
$1^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$,
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. □

(2) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(3) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

(4) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

(5) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Demonstração:

Dividindo ambos os membros da relação fundamental trigonométrica ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$) por $\cos^2 x$, temos:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\downarrow$$
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

□

Observação 14 *Podemos obter a relação trigonométrica (6), adotando o passo a passo acima, entretanto, ao invés de dividir a relação fudamental trigonométrica por* $\cos^2 x$*, divide-se por* $\sin^2 x$*.*

(6) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

(7) $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

Demonstração:

Através da relação:

$\sin(a \quad + \quad b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, podemos fazer a soma de dois arcos iguais, procedendo da seguinte forma:

$$\sin(a + a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a)$$

$$\downarrow$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$\square$

O mesmo procedimento pode ser adotado para obter as relações (8) e (9), entretanto, muda-se a relação inicial para cada função.

Ou seja, para obter a relaçao (8) $\quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, utiliza-se a relação que faz a soma do cosseno de dois arcos.

Para obter a relação (9) $\quad \tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - tan^2(x)}$, utiliza-se a relação, que faz a soma da tangente de dois arcos.

(8) $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 - 1$

(9) $\quad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - tan^2 x}$

(10) $\quad \sin^2 x = \dfrac{1}{2} + (1 - \cos 2x)$

(11) $\quad \cos^2 x = \dfrac{1}{2} + (1 + \cos 2x)$

(12) $\quad \sin(a \quad \pm \quad b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

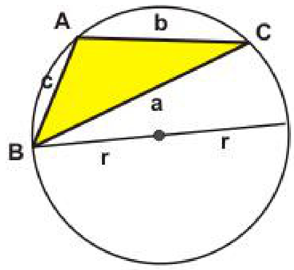
(13) $\quad \cos(a \quad \pm \quad b) = \cos(a)\cos(b) \quad \mp \quad \sin(a)\sin(b)$

(14) $\quad \tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

(15) $\quad \tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

Que tal lembrar das LEI DOS SENOS e COSSENOS e a LEI DA ÁREA de um triângulo ?

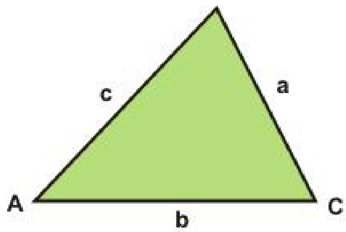
(16)



Lei dos senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2r$$

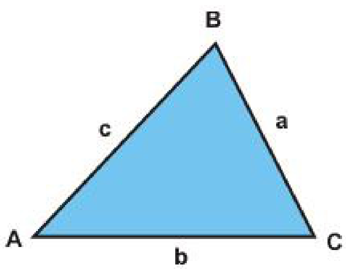
(17)



Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$$

(18)



Lei das Áreas- S

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$
$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$

FAZENDO VOCÊ APRENDE !

1 - Encontre o valor da expressão:

(a) $y = \dfrac{\cos 1305 - \sin 1305}{\sec 1740 + \tan 855}$ (b) $y = \dfrac{\tan 315 \times \csc 1200}{\sin 1560 - \cos 1650}$

2- Determine $\cos \alpha$, sabendo que $\sin \alpha = \dfrac{1}{3}$ e que α corresponde a uma arco do 2^o quadrante.

3- Simplifique as expressões abaixo sob as condições de existência.

(a) E=$(\sec x - \cos x)(\csc x - \sin x)(\tan x + \cot x)$

(b) E=$\dfrac{2\tan(180+\alpha) - \tan(180-\alpha)}{5\tan(360-\alpha)}$ $(\tan \alpha \neq 0)$

4- Para escorar um muro vertical localizado em um terreno plano e horizontal, foi usada uma barra de ferro de 2,6 m de comprimento, reta, apoiada em um ponto P do terreno e em um ponto Q do muro. A medida α do ângulo obtuso que a barra forma com o terreno é tal que $\sec \alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$. Calcule a distância entre o ponto Q e o solo.

5- Dê o conjunto solução de acordo com o intervalo dado para as equações abaixo:

(a) $\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0 \quad [0, \pi]$

(b) $(\tan^2 x - 3)(\sin x + 1) = 0 \quad [0, 2\pi]$

6- Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 5cm e 10,cm e formam entre si um ângulo de 120º. Calcule as medidas das diagonais desse polígono.

7- Determine o valor de x nas figuras a seguir:

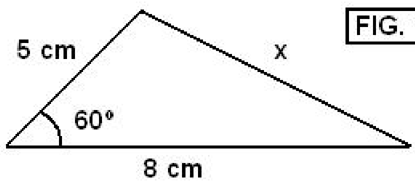


FIG. 1

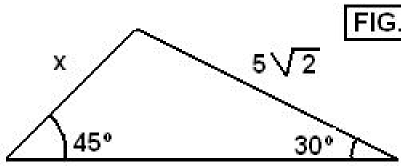


FIG. 2

Capítulo 4

Exponencial e Logaritmo

4.1 Equações e inequações exponenciais

4.1.1 Equações exponenciais

Definição 16 *Chama-se equação exponencial toda equação que contém incógnita no expoente.*

Exemplo 30

1. $2^x = 16$
2. $3^{x-1} = 27$
3. $3^{x+1} + 3^{x-2} = 9$
4. $4^x - 2^x = 8$

Método da redução a uma base comum

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$. O método da redução a uma base comum é baseado no seguinte resultado:

Teorema 5 *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. Então: $a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$.*

Demonstração:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y} = 1 \Leftrightarrow a^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$\square$

Exemplo 31

1. $2^x = 16$

2. $3^{x-1} = 27$

3. $8^x = \dfrac{1}{32}$

4. $100^x = 0,001$

5. $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

6. $5^{2x^2-32} = 1$

7. $4^x - 2^x = 56$

8. $9^x + 3^x = 90$

9. $4^{x+1} - 9 \, . \, 2^x + 2 = 0$

10. $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$

4.1.2 Inequações exponenciais

Definição 17 *Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente.*

Seguem alguns exemplos de inequações exponenciais:

1. $2^x > 32$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{81}$
3. $4^x - 2 > 2^x$

Método da redução a uma base comum

Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências da mesma base a $(0 < a \neq 1)$. Faz-se uso do seguinte resultado:

Teorema 6 *Sejam x e y números reais. Então:*

- *se $a > 1$ tem-se $a^x > a^y \iff x > y$;*
- *se $0 < a < 1$ tem-se $a^x > a^y \iff x < y$.*

Demonstração:
Faremos a demonstração para o caso $a > 1$. O outro caso é análogo.
$a^x > a^y \Leftrightarrow \dfrac{a^x}{a^y} > 1 \Leftrightarrow a^{x-y} > 1 \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow x > y.$

$\square$

Exemplo 32 *Classifique em Verdadeiro ou Falso:*

1. $3^{2,7} > 1$
2. $(0,3)^{0,2} > 1$
3. $\pi^{\sqrt{2}} > 1$
4. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1,5} > 1$

Exemplo 33 *Resolva:*

1. $2^x > 128$

2. $3^{2x+3} > 243$

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

4. $3^x < \frac{1}{27}$

4.2 Logaritmos

Lembremos que no estudo de equações e inequações exponenciais, feito anteriormente, só tratamos dos casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Se queremos resolver a equação

$$2^x = 3,$$

por exemplo, sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$, mas não sabemos qual é esse valor nem o processo para determiná-lo.

A fim de que possamos resolver este e outros problemas, iniciamos o estudo de **logaritmos**.

Definição 18 *Sejam a e b dois números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se* **logaritmo** *de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b, isto é,*

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

Em $\log_a b = x$, dizemos:

- a é a base do logaritmo
- b é o logaritmando
- x é o logaritmo

Exemplo 34

1. $\log_2 8 = 3$, *pois* $2^3 = 8$
2. $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, *pois* $3^{-2} = \frac{1}{9}$
3. $\log_5 5 = 1$, *pois* $5^1 = 5$
4. $\log_7 1 = 0$, *pois* $7^0 = 1$
5. $\log_{81} 3$

6. $\log_{0,25} 32$

7. $\log_{0,5} 8$

8. $\log_2 \sqrt{2}$

Teorema 7 *Sejam $0 < a \neq 1$ e $b > 0$. Então:*

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $a^{\log_a b} = b$
4. $\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c$

Demonstração: Aplicação imediata da definição de logaritmo.

Exemplo 35 1. *Se $A = 5^{\log_5 2}$, determine o valor de A^3.*

2. *Determine o número cujo logaritmo na base a é 4 e na base $\frac{a}{3}$ é 8.*

Notações:

- $\log_{10} x$ é denotado simplesmente por $\log x$ (logaritmo decimal).
- $\log_e x$ é denotado por $\ln x$ (logaritmo neperiano ou natural).

4.2.1 Propriedades dos logaritmos

Teorema 8 (Logaritmo do produto) *Se* $0 < a \neq 1$*,* $b > 0$ *e* $c > 0$*, então*

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a b.c = z$, provemos que $z = x + y$. De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b; \quad \log_a c = y \Rightarrow a^y = c; \quad \log_a b.c = z \Rightarrow a^z = bc.$$

Assim, $a^z = bc \Rightarrow a^z = a^x a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$

□

Teorema 9 (Logaritmo do quociente) *Se* $0 < a \neq 1$*,* $b > 0$ *e* $c > 0$*, então*

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Teorema 10 (Logaritmo da potência) *Se* $0 < a \neq 1$*,* $b > 0$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, então*

$$\log_a (b^\alpha) = \alpha(\log_a b)$$

Corolário 1 *Se* $0 < a \neq 1$*,* $b > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$*, então*

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$$

CUIDADO! $\log_a (x \pm y) \neq \log_a x \pm \log_a y$

Exemplo 36 1. *Se* $m = \dfrac{bc}{d^2}$*, determine* $\log m$*.*

2. *Seja* $x = \dfrac{\sqrt{a}}{bc}$*, determine* $\log x$*.*

3. Se $\log 2 = 0,301,$ *calcule o valor da expressão* $\log 20 + \log 40 + \log 400.$

4. Determine a razão entre os logaritmos de 16 e 4 numa base qualquer.

5. Se $\log_2 (a - b) = m$ *e* $a + b = 8,$ *determine* $\log_2 (a^2 - b^2).$

Teorema 11 (Mudança de base) *Se a, b e c são números reais positivos e a e c são diferentes de 1, então*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração:
Consideremos $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$ e notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.
Provemos que $x = \dfrac{y}{z}$.
De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b; \quad \log_c b = y \Rightarrow c^y = b; \quad \log_c a = z \Rightarrow c^z = a.$$

Assim,

$$(c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow zx = y.$$

□

Corolário 2 *Se a e b são reais positivos e diferentes de 1, então*

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Demonstração:
Usando o teorema da mudança de base e observando que, por hipótese, $b \neq 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

□

Exemplo 37

1. *Sabendo que* $\log_{20} 2 = a$ *e* $\log_{20} 3 = b$, *determine* $\log_6 5$.

2. *Calcule o valor de* $\log_{0,04} 125$.

3. *Determine o valor de:*

$$\log_3 2\ .\ \log_4 3\ .\ \log_5 4\ .\ \log_6 5\ .\ \log_7 6\ .\ \log_8 7\ .\ \log_9 8\ .\ \log 9$$

Exemplo 38 ***Observação 15*** *Resolução de equações exponenciais via logaritmos*

1. $2^x = 3.$

2. $5^{2x-3} = 3.$

3. $7^{\sqrt{x}} = 2.$

4. $3^{2x+1} = 2.$

5. $4^x + 6^x = 2.9^x.$

6. $\log_2(3x-5) = \log_2 7.$

Exemplo 39 ***Observação 16 (resolução de equações logarítmicas)***
Nos exemplos seguintes, sempre observar as condições de existência do logaritmo.

1. $\log_3(2x-3) = \log_3(4x-5).$

2. $\log_2(3x-1)=4.$

3. $\log_3(x^2+3x-1)=2.$

4. $\log_2^2 x - \log_2 x = 2.$

5. $\dfrac{2+\log_3 x}{\log_3 x} + \dfrac{\log_3 x}{1+\log_3 x} = 2.$

4.3 Exercícios

1. Se $3^{2+x} = 8$, calcule 3^{2x}. R: $\frac{64}{81}$

2. Em uma pesquisa realizada, constatou-se que a população (P) de determinada bactéria cresce segundo a expressão $P(t) = 25.2^t$, em que t representa o tempo em horas. Para atingir uma populção de 400 bactérias, qual será o tempo necessário? R: 4 horas.

3. Uma reserva florestal possui 10.000 árvores. Determine em quantos anos a quantidade de árvores estará reduzida à oitava parte, se a função que representa a quantidade de árvores por ano é $y(t) = 10000.2^{-t}$. R: $t = 3$ anos.

4. Resolva as seguintes equações:
   (a) $2^{x-2} = 8$ R: 5
   (b) $64^x = 256$ R: $\frac{4}{3}$
   (c) $9^{2x-1} = 27^{5x+1}$ R: $\frac{-5}{11}$
   (d) $(\frac{3}{2})^x = \frac{27}{8}$ R: 3
   (e) $\sqrt[3]{25^x} = \sqrt{5}$ R: $\frac{3}{4}$
   (f) $2^{x+1} = \dfrac{1}{4}$ R: -3
   (g) $(2^x)^x = 16$ R: $\{-2, 2\}$
   (h) $(5^x)^{x-2} = 25^x$ R: $\{0, 4\}$
   (i) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 27^{\frac{x}{2}}$ R: 0
   (j) $3^{2x} = \sqrt[3]{243}$ R: $\frac{5}{6}$
   (k) $\sqrt[x]{3^{x-2}} = 27$ R: -1
   (l) $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$ R: 5
   (m) $2^{x+1} + 2^{x-2} = \dfrac{9}{2}$ R: 1
   (n) $4^{x-1} + 4^x + 4^{x+3} - 4^{x+2} = \dfrac{197}{4}$ R: 0
   (o) $3^{x+4} - 3^{x+5} + 3^{x+7} = 25$ R: -4
   (p) $2^{x-3} - 2^{x+1} + 2^x = -7$ R: $\oslash$
   (q) $4^{x-1} + 4^{x-2} + 4^{x-3} + 4^{x-4} + 4^{x-5} = 341$ R: 5
   (r) $3^{2x-1} + 1 = 3^x + 3^{x-1}$ R: $\{0, 1\}$
   (s) $3^{2x+2} + 9 = 18 \cdot 3^x$ R: 0
   (t) $2^{1+2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ R: $\{-1, 1\}$
   (u) $25^x - 125 = -20 \cdot 5^x$ R: 1
   (v) $(2^x)^{x+4} = 32$ R: $\{-5, 1\}$

5. Calcule $(x+1)^6$, sabendo que $(0,0625)^{x+2} = 0,25$ R: $\frac{1}{64}$

6. As pesquisas de um antropólogo revelaram que as populações indígenas de duas reservas, A e B, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em anos, e as expressões $f(t)$ e $g(t)$ representam o número de indivíduos dessas reservas, respectivamente. Pergunta-se:
   (a) Daqui a quantos anos as duas reservas terão o mesmo número de indivíduos? R: 5anos

(b) Daqui a 7 anos, qual será o número de indivíduos da reserva A? R: 587 indivíduos

7. O anúncio de certo produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após t dias do início da apresentação desse anúncio, o número y de pessoas que ficam conhecendo o produto é dado por $y = 3 - 3(0,8)^t$, em que y representa o número de pessoas, em milhões. Para que valores de t temos exatamente 1,08 milhão de pessoas conhecendo o produto? R: $t = 2$

8. As indicações R_1 e R_2 na escala Richter, de dois terremotos, estão relacionadas pela fórmula:

$$R_1 - R_2 = log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

em que M_1 e M_2 medem e energia liberada pelos terremotos sob forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve 2 terremotos, um correspondente a $R_1 = 8$ e o outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\dfrac{M_1}{M_2}$.
R: $\dfrac{M_1}{M_2} = 100$

9. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

(a) $log_2\sqrt{2}$ R: $\frac{1}{2}$

(b) $log_{\sqrt{8}}\sqrt{32}$ R: $\frac{5}{3}$

(c) $log_{100}\sqrt[3]{10}$ R: $\frac{1}{6}$

10. Sabendo que $log_b a = 9$, calcule $log_b a^6$. R: 54

11. Sabendo que $log_b a = 9$, calcule $log_b \sqrt[3]{a}$. R: 3

12. A expectativa de lucro de uma pequena empresa é expressa pela lei $L(t) = 2000(1,25)^t$, sendo $L(t)$ o lucro após t meses. Considere $log 4 = 0,602$ e $log 1,25 = 0,097$. Pode-se afirmar, assim, que o lucro atingirá $R\$8.000,00$, no decorrer de que mês? R: 7^o mês.

13. Determine o conjunto verdade da equação $log_{\frac{3}{5}}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}} = x$.
V= $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

14. Calcule o valor de S:

$$S = log_4(log_3 9) + log_2(log_{81} 3) + log_{0,8}(log_{16} 32).$$

S= $-\frac{5}{2}$

15. Se $\sqrt{9^{p+1}} = 3^{\sqrt{2}}$ e $log_2(q-1) = \frac{1}{2}$, então, qual o valor de $p^2 + p.q + q^2$? R: 7

16. Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos (a,b, c são reais positivos):

(a) $log_5\left(\dfrac{5a}{bc}\right)$ R: $1 + log_5 a - log_5 b - log_5 c$

(b) $log_3\left(\dfrac{ab^2}{c}\right)$ R: $log_3 a + 2 \cdot log_3 b - log_3 c$

(c) $log_2\left(\dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right)$ R: $2 \cdot log_2 a + \frac{1}{2} \cdot log_2 b - \frac{1}{3} \cdot log_2 c$

(d) $log_3\left(\dfrac{ab^3}{c\sqrt[3]{a^2}}\right)$ R: $\frac{1}{3} \cdot log_3 a + 3 \cdot log_3 b - log_3 c$

(e) $log_{10}\left(\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2$ R: $3 \cdot log\ a - \frac{11}{9} \cdot log\ b - \frac{2}{9} \cdot log\ c$

17. O pH de uma solução é definido por $pH = log_{10}\left(\frac{1}{H^+}\right)$, em que H^+ é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Determine o pH de uma solução tal que $H^+ = 1,0 \times 10^{-8}$. R: $pH = 8$

18. Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é: (a, b, c são reais positivos)

$$1 + log_2 a - log_2 b - 2log_2 c.$$

R: $log_2 \frac{2a}{bc^2}$

19. A soma dos logaritmos de dois números na base 9 é $\frac{1}{2}$. Determine o produto desses números. R: 3

20. Determine o valor de

$$log_3 2 \cdot log_4 3 \cdot log_5 4 \cdot log_6 5 \cdot log_7 6 \cdot log_8 7 \cdot log_9 8 \cdot log_{10} 9 \cdot$$

R: $log_{10} 2$

21. Simplifique:

(a) $(log_5 3) \cdot (log_3 5)$ R: 1

(b) $(log_2 5) \cdot (log_7 2) \cdot (log_5 7)$ R: 1

(c) $(log_a x^2) \cdot (log_b a) \cdot (log_x b)$ R: 2

22. Calcule $log_{100} 27$ se $log_{10} 3 = 0,48$. R: $0,72$

23. Calcule $log_4 a^3$, se $log_2 a = 1,6$. R: $2,4$

24. Sendo $log\ 2 = 0,3$ e $log\ 3 = 0,4$, calcule $log_8 600$. R: 3

25. Resolver as equações logarítmicas:

(a) $log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 2$ R: $\frac{10}{9}$

(b) $log_2(x^2 + 2x) = 3$ R: $\{2, -4\}$

(c) $log_{3x+2}(2x-1) = 1$ R: $\emptyset$

(d) $log_5[log_4(log_3 x)] = 0$ R: 81

(e) $log_2(x+3) + log_2(x-4) = 3$ R: 5

(f) $log_3(x-1) + log_3(2x+1) - log_3(x-3) = 3$ R: $\{10, 4\}$

(g) $log_x 2 + log_{16} x = \frac{5}{4}$ R: $\{2, 16\}$

Capítulo 5

Funções

No cálculo estaremos constantemente lidando com *funções*. Pode-se dizer que o "objeto" fundamental do Cálculo são as funções. Mas, o que queremos dizer quando falamos a palavra *função*?

No que segue, daremos uma idéia do contexto natural onde as funções surgem e também apresentamos a definição de função.

A primeira noção que aprendemos na escola relativo à funções, é de uma quantidade dependente de outra. Isto constitui uma relação (entre as "quantidades"), e são os principais exemplos em que estaremos interessados. Alguns casos *standards* estão relatados abaixo.

a) Uma relação que expresse a área de um quadrado em função do comprimento do lado.

   Aqui temos duas "quantidades" envolvidas: o comprimento do lado do quadrado (a variável independente) e a área do quadrado (a variável que depende do comprimento do lado). Que lei (regra) pode ser usado para relacionar essas duas variáveis?

b) A área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que conecta r e A é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número real r positivo existe associado um único valor de A, e dizemos que A é uma função de r. As quantidades envolvidas são r (comprimento) e A (área). Que subconjunto dos números reais pode ser usado para representar todos os possíveis "r" que podem ser considerados e que subconjunto dos números reais pode ser usado para representar todos os possíveis valores que A pode assumir?

c) O custo C de enviar uma carta pelo correio depende de seu peso p. Se na tabela exposta nos correios está a seguinte relação entre peso e custo de uma carta:

Peso (em gramas)	Valor de postagem (em reais)
até 100 g (inclusive 100 g)	1
de 100 g até 200 g (inclusive 200 g)	2,7
acima de 200 g	$3 + \frac{p-200}{200}$ (*)

   (*) p é o peso da carta.

   Os dados da tabela acima são suficientes para que você tenha "clareza" a respeito de quanto custará postar uma carta?

   Encontre uma maneira de conectar o custo C e o peso p com base nos dados da tabela acima, usando uma lei (regra ou correspondência).

É importante que sejamos precisos naquilo que queremos dizer. Em matemática não podemos deixar uma expressão com significado dúbio. Isto é uma das coisas mais vitais para uma boa escrita matemática.

Ao responder uma questão (nos exercícios, ou questão de provas), você deve usar uma linguagem adequada, que não deixe dúvidas a respeito do que você está querendo dizer e que não permita outra interpretação a não ser aquela que você "quer" dar.

5.1 O conceito de função

Definição 19 *Uma função consiste de dois conjuntos não vazios X e Y e de uma lei (regra ou correspondência) f que a cada elemento $x \in X$, associa um único elemento $f(x) \in Y$.*

Uma função será simbolizada por

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Definição 20 *Dada uma função $f : X \to Y$, o conjunto X é chamado de domínio da função f, Y é chamado de contradomínio de f, $f(x)$ é chamado de a imagem de $x \in X$ por f.*

Note que o domínio da função f é o conjunto onde a função é definida. Quando X e Y são conjuntos de números reais e $f : X \to Y$ é uma função (dita então função real de uma variável real), dizemos também que $f(x) \in Y$ é o *valor* que f assume em x (ou no ponto x). Neste caso podemos dizer que o contradomínio da função f é o conjunto onde a função f toma valores.

Note que a natureza da lei (ou regra) que nos diz como obter $f(x) \in Y$ quando é dado $x \in X$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

a) não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para *todo* $x \in X$;

b) não deve haver ambigüidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x) \in Y$.

Com o expresso acima, vemos que para verificar se uma função está "bem definida" (ou seja, se a regra f define uma função $f : X \to Y$) devemos mostrar que se $x_1 = x_2$, então $f(x_1) = f(x_2)$.

CUIDADO!

1. Não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função, enquanto que $f(x)$ é a imagem que a função assume em x

2. Não confundir $f(x)$ com $f(X)$: $f(x)$ é *a imagem* de $x \in X$ por f, enquanto $f(X)$ é o conjunto

$$\{f(x) \in Y; x \in X\} \tag{5.2}$$

   que é *a imagem direta de* X por f (ou simplesmente *a imagem* de f).

3. É importante que você tenha claro que o domínio e o contradomínio de uma função podem ser, a princípio, conjuntos que representem quaisquer "objetos", não necessariamente devam ser conjuntos de números (particularmente de número reais). Mas em Cálculo, nós tratamos basicamente de funções definidas em conjuntos de números reais e que toma valores em conjunto de números reais. Assim, quando estamos tratando de funções reais de uma variável real e nos for dado uma lei (regra) ou correspondência f que define uma função, entenderemos por domínio de f, que designaremos aqui por X, como o *domínio maximal* ([1]) de números reais onde f pode ser definida. Neste caso a imagem $f(x)$ de $x \in X$ será necessariamente um número real, e portanto o conjunto imagem $f(X) \subset Y$ será também um conjunto de números reais. Note que f fica bem definida, a princípio, mesmo que o contradomínio contenha apenas $f(X)$ como subconjunto de números reais.

[1] O domínio maximal (também conhecido como domínio natural), grosseiramente falando, pode ser entendido como o "maior conjunto" onde f pode ser definida. Ou seja, X é domínio maximal de f, se para todo conjunto X' onde f está definida, $X' \subset X$.

Exemplo 40 *a)* $f:(0,5]\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

b) $f:(0,5]\to\mathbb{C}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$, *onde* $\mathbb{C}$ *é o conjunto dos números complexos, é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função.Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

d) $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

e) $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

f) $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

g) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

h) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é uma função. Qual é o domínio de* f*? Qual é o contradomínio de* f*? Qual é a imagem de* f*?*

Exemplo 41 *1. As representações abaixo não caracterizam uma função. Explique o motivo pelo qual isto acontece.*

a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{Z}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

2. Quais das leis (regras ou correspondências) abaixo definem uma função? Justifique sua resposta. Quando a regra define uma função indique o domínio (maximal) dela.

a) $y-4+x=0$

b) $g(z)=-z^2+z^2$

c) $y^2+x^2=1$

d) $x=\dfrac{2+z}{z^2-1}$

e) $x^2+2x+y=3$

f) $x=|y|$

g) $|x|=|y|$

h) $h(x)=\begin{cases}-1 & se\quad x\le -1\\ 2+x & se\quad -1<x\le 2\\ x^2 & se\quad x>2\end{cases}$

i) $h(x)=\begin{cases}3 & se\quad x\le -1\\ 2+x & se\quad -1\le x\le 2\\ 1+x^2 & se\quad x>2\end{cases}$

3. Nos exemplos citados até agora, trabalhamos com "quantidades" que podem ser expressas com números reais. Mas, como já ressaltamos, as funções podem relacionar coisas que não necessariamente sejam expressas com números reais. Considere a seguinte situação:

Seja f a regra que associa cada homem casado com sua respectiva esposa. Seja A o conjunto formado pelos homens de minha família e B o conjunto de todas as mulheres do planeta. Como minha família é brasileira, e no Brasil cada homem só pode estar casado com uma única mulher (e vice-versa), quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Justifique sua resposta.

a) Se todos os homens da minha família estiverem casados, então $f : A \to B$ é uma função.

b) Se algum homem da minha família não estiver casado, então $f : A \to B$ não define uma função.

c) Se C é o conjunto das atuais esposas dos homens casados de minha família, e todos os homens da minha família estiverem casados então $f : A \to C$ é uma função.

d) Se minha família fosse da Arábia Saudita, onde um homem pode ter várias esposas, e todos os homens de minha família estiverem casados, então $f : A \to B$ é uma função?

4. *As regras abaixo definem funções reais de uma variável real. Encontre o domínio e a imagem de cada função.*

a) $f(x) = 2 + x^2$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$

d) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$

e) $i(x) = |x|$

f) $j(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq -1 \\ 2 + x & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

5. *Baseado na definição de função, o que devemos verificar para concluir que duas funções*

$$\begin{aligned} f_1 : X_1 &\longrightarrow Y_1 \\ x &\longmapsto f_1(x) \\ f_2 : X_2 &\longrightarrow Y_2 \\ x &\longmapsto f_2(x) \end{aligned} \tag{5.3}$$

são iguais?

6. *Quais pares de funções abaixo são iguais?*

a) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, e f e g funções definidas de A em B por: $f(x) = x - 1$ *e* $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2}$ *e* $g(x) = x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ *e* $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + x}$

7. *Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio (transcrição de [**?**], p. 24).*

a) Um retângulo tem um perímetro de 20 metros. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

b) Um retângulo tem uma área de $16\,m^2$. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

c) *Expresse a área de um triângulo equilátero como uma função do comprimento de um lado.*

d) *Expresse a área superficial de um cubo como uma função de seu volume.*

e) *Uma caixa retangular aberta com volume de $2\,m^3$ tem uma base quadrada. Expresse a área superficial da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.*

5.2 Gráfico de função

Observação 17 *Os gráficos apresentados daqui em diante foram retirados dos livros [**?**] e [**?**]*

Definição 21 *Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a primeira coordenada de p e um objeto y, chamado a segunda coordenada de p.*

Note que dois pares ordenados p e q são iguais, quando a primeira coordenada de p for igual a primeira coordenada de q e a segunda coordenada de p for igual a segunda coordenada de q.

Definição 22 *O produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a X e cuja segunda coordenada y pertence a Y. simbolicamente:*

$$X \times Y = \{(x, y)\,; x \in X,\ y \in Y\}\,. \tag{5.4}$$

CUIDADO!

1. O par $p = (x, y)$ não é a mesma coisa que o conjunto $\{x, y\}$ porque $\{x, y\} = \{y, x\}$ sempre, mas $(x, y) = (y, x)$ somente quando $x = y$.

2. Note que os "objetos" do par ordenado podem, a princípio, ser qualquer coisa. Quando estivermos tratando de conjuntos de números reais, as coordenadas x e y do par ordenado $p = (x, y)$ serão números reais.

O plano numérico $\mathbb{R}^2$

Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e em seguida considere o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathbb{R}^2$ tal conjunto. Note que um ponto $p = (x, y)$ pertence a $\mathbb{R}^2$se, e somente se, x e y pertencem a $\mathbb{R}$. Aprendemos na escola que $\mathbb{R}^2$ é um "plano". No entanto, precisamos ter claro que ponto de vista estamos tomando quando dizemos que $\mathbb{R}^2$ é um plano. Uma idéia melhor de tal contexto pode ser vista abaixo, onde transcrevemos o exposto em [**?**], pp. 82-83 (ver também [**?**], p. 7).

1. Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são, naturalmente, os pares ordenados de números reais. Eles surgem como as coordenadas de um ponto P do plano Π (x = abcissa, y = ordenada) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY, tomados em Π, que se intersectam no ponto O, chamado de a *origem* do sistema de coordenadas.

2. Dado o ponto $P \in \Pi$, a abcissa de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX, enquanto a ordenada de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY. Diz-se que (x, y) é o par de coordenadas do ponto P relativamente ao sistema de eixos OXY. Os eixos OX e OY dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos. No primeiro quadrante, tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro, $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

3. A função $f : \Pi \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto P do plano Π seu par de coordenadas $f(P) = (x, y)$ relativamente ao sistema de eixos OXY, é uma correspondência biunívoca([2]). Ela permite traduzir

[2] uma correspondência biunívoca é o mesmo que uma função bijetora. O conceito de função bijetora é dado adiante neste capítulo.

conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais.

4. Podemos então dizer que $\mathbb{R}^2$ é o modelo aritmético do plano Π enquanto Π é o modelo geométrico de $\mathbb{R}^2$.

5. Do nosso presente ponto de vista, olharemos para $\mathbb{R}^2$ como um plano (o plano numérico), chamaremos seus elementos $P = (x, y)$ de *pontos* e procuraremos, com ajuda dessa linguagem geométrica e dos resultados da Geometria, alcançar um melhor entendimento das propriedades das funções reias que vamos estudar.

A partir do exposto acima, podemos passar a explorar a idéia de *gráfico* de uma função real de uma variável real.

Definição 23 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$. O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^2$, formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in X$ é arbitrário. Ou seja,*

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \, ; \, y = f(x)\} . \tag{5.5}$$

Exemplo 42 *Esboçar os gráficos das seguintes funções reais de uma variável real.*

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = x^2 - x - 6$

c) $f(x) = 4x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Qual o domínio e qual a imagem de cada uma das funções acima?

Ressaltamos que decorre da definição de função (e consequentemente da definição de igualdade de funções) que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Observação 18 *Para que um subconjunto $G \subset X \times Y$, $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$, seja o gráfico de uma função $f : X \to Y$ é necessário e suficiente que, para cada $x \in X$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x.*

Esta condição significa que toda reta paralela ao eixo das ordenadas, traçadas por um ponto de X, deve cortar o gráfico G em um único ponto.

Exemplo 43 *Identifique nos exemplos abaixo, os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que não são gráficos de funções reais de uma variável real.*

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2 + y^2 = 1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x + y = 2\}$

c) $f(t) = (\cos t, t sen(t + 2))$

d) $f(t) = (\ln t, \cos t)$

e) $f(t) = (sen(t), t)$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x = y^2\}$.

O produto cartesiano $X \times Y$, X,Y quaisquer, acha-se intimamente ligado à idéia de relação (mais precisamente da idéia de relação binária). Uma relação (binária) R entre elementos do conjunto X e elementos do conjunto Y é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar, dados $x \in X$ e $y \in Y$, se x está ou não relacionado com y segundo R. No caso afirmativo, escreve-se xRy.

Exemplo 44

1. *Se* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $Y = \{1, 2, 4\}$*, quais são os elementos da relação* $R = \{(x, y) | x < y\}$ *de* X *em* Y*?*

2. *Se* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, quais são os elementos da relação binária* R *de* X *em* Y *assim definida:* $xRy \Leftrightarrow y = x + 2$*?*

Note que as funções $f : X \to Y$ são um exemplo particularmente importante de relação. Neste caso diz-se que o elemento $x \in X$ está relacionado com o elemento $y \in Y$ quando $y = f(x)$. Neste caso, não se costuma escrever xfy como se faria numa outra relação qualquer, mas sim $y = f(x)$.

Definição 24 *O gráfico de uma relação* R *entre dois conjuntos* X *e* Y *é o subconjunto* $G(R)$ *de* $X \times Y$*, formado pelos pares* (x, y) *tais que* xRy*, ou seja,*

$$G(R) = \{(x, y) \in X \times Y ; xRy\} . \tag{5.6}$$

Observação 19 *Note que esta definição inclui o caso particular de gráfico de função. Você provavelmente aprendeu na escola que uma função* $f : X \to Y$ *é um subconjunto do produto cartesiano* $X \times Y$ *que satisfaz a Condição 18. Mas é importante que você olhe para uma função como um correspondência (transformação, dependência de uma grandeza em relação a outra), não como um conjunto de pares ordenados. O que uma função expressa pode ser mais do que "um gráfico" expressa. Em se tratando de gráfico, resumindo, temos que um subconjunto qualquer de* $X \times Y$ *é o gráfico de uma relação de* X *para* Y*. Se esse conjunto cumpre a Condição 18, ele é o gráfico de uma função.*

Exemplo 45

1. *Esboçar o gráfico das seguintes funções:*

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 2x + 1$;

   b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 2x + 1$;

   c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 2x + 1$;

   d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$;

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ 2 + x^2 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$;

   f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

2. *Esboce um possível gráfico da temperatura externa como função do tempo durante um dia típico de primavera em nossa região.*

3. *Considere a seguinte situação: Ponha cubos de gelo em um copo, preencha-o com água gelada e deixe-o sobre uma mesa. Descreva como irá variar no tempo a temperatura da água. Esboce um gráfico da temperatura da água como uma função do tempo decorrido.*

4. *Se "função crescente" para nós, intuitivamente, quer dizer que os valores* $f(x)$ *aumentam quando* x *aumenta (na reta), tente encontrar uma definição que expresse esta idéia de forma a não haver ambigüidades.*

Usando softawares livres para visualizar gráficos de funções reais de uma variável real

Quando plotamos um gráfico de uma função real de uma variável real, em geral o mais conveniente é trabalharmos com coordenadas retangulares. Note também que os recursos gráficos podem mostrar somente uma parte do plano numérico $\mathbb{R}^2$ que aparece na tela. Portanto, o primeiro cuidado a ser tomado ao se plotar um gráfico é determinar qual a região retangular do plano que você deseja ver exposta. Esta região é a *janela de inspeção (ou retângulo de inspeção).* Se a janela de inspeção for $[a, b] \times [c, d]$, então ela se estende entre $x = a$ e $x = b$ na direção x e entre $y = c$ e $y = d$ na direção y. Outro cuidado que devemos ter é com o domínio da função cujo gráfico deseja-se visualizar, se no intervalo de inspeção $[a, b]$ existem pontos que não estejam no domínio de f, em alguns softwares o gráfico não será plotado.

Exemplo 46 *Use um software gráfico para visualizar os gráficos das funções abaixo relacionadas. Encontre também o domínio de cada uma delas. Compare os gráficos das letras g), h) e i) e faça uma análise da transformação sofrida pelos gráficos de h) e i) quando comparados com g).*

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = sen x$

e) $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = x sen\left(\frac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = x^2$

h) $f(x) = x^2 + 2$

i) $f(x) = (x + 1)^2$

5.3 Operações com funções

Na aritmética usual adicionamos, subtraímos, dividimos e multiplicamos números, produzindo novos números. Estas mesmas operações podem ser realizadas com funções. Além disso, novas operações podem ser definidas para funções sem formas análogas para a aritmética usual.

Definição 25 *Dadas as funções f e g e um número real k, sua soma $f + g$, diferença $f - g$, produto fg, quociente $\dfrac{f}{g}$ e multiplicação por escalar kf são definidas por:*

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x);$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x);$

c) $(fg)(x) = f(x)\, g(x);$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)};$

e) $(kf)(x) = kf(x).$

O domínio das funções $f + g$, $f - g$ e fg é a intersecção dos domínios de f e g. Para a função $\dfrac{f}{g}$, o domínio é a intersecção dos domínios de f e g, excluindo-se os pontos onde $g(x) = 0$. Por fim, o domínio de kf coincide com o domínio de f.

Exemplo 47 *1. Dadas as funções* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ *e* $g(x) = x + 2$*, encontre* $f + g$*,* $f - g$*,* fg*,* $\dfrac{f}{g}$ *e* $3f - \frac{1}{2}g$ *e seus respectivos domínios.*

2. *Cite exemplos de duas funções distintas* f *e* g *tais que:*

   a) *o domínio de* $\dfrac{f}{g}$ *seja vazio;*

   b) *o domínio de* fg *seja* $(0, +\infty)$*;*

   c) *a imagem de* $f + g$ *seja* $\{1, 2\}$*.*

3. *O que acontece com o gráfico de uma função (qual o efeito geométrico) quando:*

   a) *multiplicamos a função por uma constante não-negativa;*

   b) *adicionamos à função uma constante não nula;*

   c) *exemplifique as situações acima.*

4. *(Sobre translações e reflexões). Considere* $y = f(x)$ *uma função qualquer e* $c > 0$*:*

   a) *o que fazer para obter o gráfico de* $y = f(x) + c$*?*

   b) *o que fazer para obter o gráfico de* $y = f(x) - c$*?*

   c) *o que fazer para obter o gráfico de* $y = f(x - c)$*?*

   d) *o que fazer para obter o gráfico de* $y = f(x + c)$*?*

   e) *o que fazer para obter o gráfico de* $y = -f(x)$*?*

   f) *o que fazer para obter o gráfico de* $y = f(-x)$*?*

Definição 26 *Dadas as funções* f *e* g*, a* ***composição*** *de* f *e* g*, denotada por* $f \circ g$*, é a função definida por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{5.7}$$

O domínio de $f \circ g$ *consiste dos elementos do domínio de* g *tais que sua imagem está no domínio de* f*, ou seja:*

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \; ; \; g(x) \in D(f)\}. \tag{5.8}$$

Note que esta operação sobre funções não tem análogos em aritmética ordinária.

Exemplo 48 *1. Seja* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = \sqrt{x}$*. Encontre:*

   a) $(f \circ g)(x)$*;*

   b) $(g \circ f)(x)$*.*

2. *Qual é o domínio das composições da questão acima?*

3. *Expresse as funções abaixo como composição de funções:*

   a) $f(x) = (x + 2)^7$*;*

   b) $f(x) = \cos^3 x$*;*

   c) $f(x) = tg\left(x^5\right)$*.*

4. *Encontre duas funções* f *e* g *não constantes tais que:*

   a) $f \circ g$ *seja constante;*

   b) $f \circ g$ *tenha domínio* $(0, +\infty)$*;*

c) $f \circ g = g \circ f$.

CUIDADO!

1. Ao operar com funções, preste atenção especial ao domínio da nova função. Note que, por exemplo, para computar $f(g(x))$, necessita-se x no domínio de g para computar $g(x)$ e então é necessário $g(x)$ no domínio de f para computar $f(g(x))$.

2. Nem sempre $f \circ g = g \circ f$, isso só ocorre em condições muito particulares.

5.4 Funções bijetoras e funções inversas

Em muitas situações nos interessa saber se uma função tem inversa. As perguntas que devemos então são:

Quando uma função possui inversa?

Mas afinal, o que é a função inversa de uma dada função que possui inversa?

Começamos com as seguintes definições:

Definição 27 *Uma função* $f : X \to Y$ *chama-se injetora (biunívoca ou um-a-um) quando, dados* x, y *quaisquer em* X, $f(x) = f(y)$ *implica que* $x = y$. *Em outras palavras: quando* $x \neq y$, *em* X, *implica* $f(x) \neq f(y)$, *em* Y.

Exemplo 49 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x$ *(função identidade) e a função* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt{x}$ *são exemplos triviais de funções injetoras.*

Definição 28 *Uma função* $f : X \to Y$ *chama-se sobrejetora (ou sobre* Y*) quando, para todo* $y \in Y$ *existe pelo menos um* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$.

Exemplo 50

1. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x$ *(função identidade) e a função* $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *dada por* $g(x) = \sqrt{x}$ *são exemplos triviais de funções sobrejetoras.*

2. *A função* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = \sqrt{x}$ *sobrejetora? Justifique sua resposta.*

Definição 29 *Uma função* $f : X \to Y$ *chama-se bijetora (uma bijeção ou uma correspondência biunívoca) se ela é injetora e bijetora.*

Observação 20 *Como podemos deduzir dos exemplos citados acima, as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x$ *(função identidade) e a função* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = \sqrt{x}$ *são exemplos triviais de funções sobrejetoras.*

Exemplo 51

1. *Mostre que:*

   a) *a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$ *não é sobrejetora;*

   b) *a função* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = x^2$ *é sobrejetora;*

   c) *a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$ *não é injetora;*

   d) *a função* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = x^2$ *não é injetora;*

   e) *a função* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$ *é injetora;*

   f) *a função* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *dada por* $f(x) = x^2$ *é bijetora.*

2. *Dado o gráfico de uma função, indique uma maneira de, por inspeção do gráfico, dizer se a função é injetora.*

Definição 30 *Seja $f : X \to Y$ uma função. O conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X \,;\, f(x) \in Y\} \tag{5.9}$$

é chamado de a imagem inversa de Y por f.

Exemplo 52

1. *Dada a função $f : [0, 10] \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x + 2$, qual é a imagem inversa de $[0, +\infty)$ por f?*
2. *Dada a função $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$, qual é a imagem inversa de $\mathbb{R}$ por f?*
3. *Dada a função $f : [0, 10] \to [2, 12]$, definida por $f(x) = x + 2$, qual é a imagem inversa de $[2, 12]$ por f?*
4. *Dentre as funções acima, identifique àquelas que são injetoras, àquelas que são sobrejetoras e àquelas que são bijetoras.*
5. *Dada uma função $f : X \to Y$, pode o conjunto $f^{-1}(Y)$ ser vazio? Justifique.*

Definição 31 *Seja $f : X \to Y$ uma função injetora e seja $Z \subset Y$ a imagem direta de X por f (ou seja, $Z = f(X)$). A lei (regra ou correspondência) $f^{-1} : Z \to X$ dada por*

$$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y \tag{5.10}$$

para todo y em Z define uma função. Se $Z = Y$ (o que equivale a dizer que f é bijetora se X e Y são subconjuntos da reta), então dizemos que $f^{-1} : Y \to X$ definida como acima é a função inversa de f.

<u>CUIDADO!</u>

1. Não confunda o "-1" de f^{-1} com um expoente: $f^{-1}(x)$ não significa $\dfrac{1}{f(x)}$.
2. Uma função $f : X \to Y$ possui inversa se, e somente se, f é bijetora. Porém, em determinadas ocasiões, não estaremos interessados nos eventuais elementos de Y que não pertençam a $f(X)$. Sendo f injetora é suficiente para que se defina a função $f^{-1} : f(X) \to X$, dada pela regra que consta na definição acima (temos então a inversa de f sobre sua imagem).

Exemplo 53

1. *Identifique se as funções abaixo são inversíveis (considere o domínio de f seu domínio natural (ou maximal)):*
   a) $f(x) = x^2$;
   b) $g(x) = 2x + 1$;
   c) $h(x) = x^3$.
2. *Para achar a inversa de uma função inversível basta proceder como segue: escreva $y = f(x)$, resolva essa equação para x em termos de y (se possível) e, para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$. Com base nisto, encontre a inversa das seguintes funções:*
   a) $f(x) = \dfrac{1 + 3x}{5 - 2x}$;
   b) $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$;
   c) $f(x) = 5 - 4x^3$

5.5 Funções elementares

5.5.1 Função constante

Definição 32 *Toda função constante é da forma $f(x) = k$, que associa a qualquer número real x um mesmo número k.*

• O domínio da função constante é $D(f) = \mathbb{R}$.
• A imagem é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.
• O gráfico é uma reta paralela ao eixo x, passando por $y = k$.

Exemplo 54 1. $f(x) = 2$

2. $f(x) = -3$

5.5.2 Função do 1^o grau

Definição 33 *Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo numero real x associa o número $ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, é denominada função do 1^o grau.*

Notação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto y = ax + b, \\ a \neq 0 & \end{aligned} \tag{5.11}$$

Exemplo 55 1. $f(x) = 3x + 2$

2. $f(x) = -\frac{2}{3}x - 6$

3. $f(x) = 2x$

• O domínio de $f(x) = ax + b$ é $D(f) = \mathbb{R}$.
• A imagem de $f(x) = ax + b$ é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico cartesiano

Exemplo 56 1. $f(x) = 2x + 1$

2. $f(x) = 2x - 1$

3. $f(x) = 3x$

Observação 21 1. *O gráfico de uma função do primeiro grau é sempre uma reta. (Portanto, basta encontrar dois pontos)*

2. *Em $f(x) = ax$, com $b = 0$, a reta sempre passa pela origem do referencial e a função também recebe o nome de função linear.*

3. *Em $f(x) = ax + b$, a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear do gráfico de f.*

4. *O ponto onde o gráfico corta o eixo x mostra o valor de x tal que $f(x) = 0$. Nesse caso, x é chamado de zero ou raiz da função do primeiro grau.*

<u>**CUIDADO!**</u> Podemos mudar o domínio de f.

Exemplo 57

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Neste caso $D(f) = \mathbb{R}$ *e* $Im(f) = \mathbb{R}$.

Agora, se mudarmos o domínio teremos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Neste caso $D(f) = \mathbb{N}$ *e* $Im(f) = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$.

5.5.3 Função identidade

Definição 34 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x$ *é denominada função identidade.*

O domínio desta função é o conjunto dos números reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$. O gráfico é uma reta bissetriz ao primeiro e terceiro quadrantes.

Observação 22 *A função identidade é um caso particular de função do primeiro grau.*

5.5.4 Função crescente e função decrescente

Definição 35 *Função crescente é aquela em que, aumentando o valor de* $x \in D(f)$*, o valor de* $y \in Im(f)$ *aumenta. Função decrescente é aquela em que, aumentando o valor de* $x \in D(f)$*, o valor de* $y \in Im(f)$ *diminui.*

Exemplo 58

1. *Construa o gráfico de* $y = -2x + 3$*, de domínio* $\mathbb{R}$.
2. *Verifique qual é a raiz da função.*
3. *Analise a função quanto ao seu crescimento.*

Observação 23

1. *Uma função do primeiro grau* $f(x) = ax + b$ *é crescente quando* $a > 0$ *e decrescente quando* $a < 0$.
2. *Existem funções que não são crescentes e nem decrescentes, por exemplo,* $f(x) = x^2$.

Estudo do sinal de uma função do 1^o **grau.**

Em geral, estudar o sinal de uma função f de domínio $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ significa descobrir os valores de x para os quais $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

Exemplo 59 *Estudar o sinal da função* $f(x) = 3x + 1$.

5.5.5 Função do 2^o grau

Um foguete carregando um satélite, depois de lançado, caiu, devido a uma pane do sistema. Ao estudar sua trajetória e as causas do acidente, a equipe da base construiu o seguinte gráfico:

A partir do gráfico podemos obter algumas informações:

1. a altura máxima que o foguete atingiu foi de, aproximadamente, 102m;
2. o tempo que o foguete levou para atingir o ponto mais alto foi de 6s;

3. o tempo que o foguete levou para voltar à altura inicial foi de 12s.

Este gráfico foi obtido a partir da função $f(t) = 12,5 + 30t - 2,5t^2$, que é uma função do 2^o grau ou quadrática.

Definição 36 *Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa o número ax^2+bx+c, com a, b e c reais e $a \neq 0$, é denominada função do 2^o grau ou função quadrática.*

Notação

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = ax^2+bx+c, \quad a\neq 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Exemplo 60 1. $f(x) = 3x^2+6x+2$

2. $f(x) = 4x^2 - \frac{2}{3}x - 6$

3. $f(x) = \sqrt{3} + \frac{1}{2}x^2$

4. $f(x) = -4x^2$

O domínio de $f(x) = ax^2+bx+c$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico cartesiano

O gráfico carteseiano de uma função quadrática, de domínio $\mathbb{R}$ e de coeficientes reais, é uma curva denominada parábola.

Exemplo 61 *Desenhar o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Dê o domínio e a imagem.*

Para achar as raízes, ou zeros, de uma função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ usamos a fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

onde o termo b^2-4ac também é chamado de discriminante e representado pela letra grega Δ.

O vértice da parábola é dado pelo ponto $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Observação 24 1. *Se $a > 0$ então:*

(a) a parábola tem concavidade voltada para cima.

(b) o valor de mínimo é dado por $y = -\frac{\Delta}{4a}$ e o vértice é denominado ponto de mínimo da parábola.

(c) $Im(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, \infty[$

2. *Se $a < 0$ então:*

(a) a parábola tem concavidade voltada para baixo.

(b) o valor de máximo é dado por $y = -\frac{\Delta}{4a}$ e o vértice é denominado ponto de máximo da parábola.

(c) $Im(f) =]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

Exemplo 62 1. *Esboce o gráfico das seguintes funções, ache as raízes, dê as coordenadas o vértice e o ponto onde a parábola corta o eixo y.*

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

2. *Determine* m *para que o gráfico de* $y = mx^2 + 3x - 2$ *passe por* $A(-1, -3)$.

Exemplo 63 1. *Determine* m *e* n *para que o vértice da parábola de equação* $y = x^2 - mx + n$ *seja* $(-1, 2)$. *Classifique o vértice em ponto de máximo ou ponto de mínimo.*

2. *Determine o conjunto imagem da função* $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ *de domínio* $\mathbb{R}$.

3. *Determine* m *para que a função* $f(x) = (3m - 12)x^2 - 5x - 1$ *tenha valor máximo.*

4. *De todos os retângulos de mesmo perímetro 40 cm, determine o de área máxima.*

Estudo do sinal de uma função do 2^o **grau.**

Em geral, estudar o sinal de uma função f de domínio $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ significa descobrir os valores de x para os quais $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

Exemplo 64 *Estudar o sinal das funções:*

1. $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$

2. $f(x) = 4x^2 - 20x + 25$

3. $f(x) = x^2 + 4$

5.5.6 Função polinomial

Definição 37 *Função polinomial é a função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *onde* $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, *com* $a_n \neq 0$, *são números reais chamados coeficientes e* n, *inteiro positivo, determina o grau da função.*

• O domínio de f é o conjunto dos números reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.
• O gráfico é uma curva que pode ter pontos de máximos e mínimos.

Exemplo 65 1. $f(x) = k$, *onde* k *é uma constante, é uma função polinomial de grau zero.*

2. $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, *é uma função polinomial do primeiro grau.*

3. $f(x) = x^3$ *é uma função polinomial do terceiro grau ou cúbica.*

Proposição 4 *(Resultados para funções polinomiais) Para uma função polinomial* f *e um número real* k, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $x = r$ *é uma solução da equação* $f(x) = 0$.

(2) r *é uma raiz da função* f.

(3) r *é um valor por onde o gráfico passa no eixo horizontal* x.

(4) $x - r$ *é um fator de* $f(x)$.

Teorema 12 *(Teorema das raízes racionais) Suponha* f *uma função polinomial de grau* $n \geq 1$ *da forma* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, *com todos os coeficientes como números inteiros e* $a_0 \neq 0$. *Se* $x = p/q$ *é uma raiz racional de* f *onde* p *e* q *são primos entre si, então:*

(i) p *é um fator inteiro do termo independente* a_0

(ii) q *é um fator inteiro do coeficiente principal* a_n

5.5.7 Função modular

Definição 38 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ chama-se função módulo.*

O domínio desta função é $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem é $Im(f) = [0, \infty)$.

Exemplo 66

$$f(x) = |x|$$

Gráfico cartesiano

Exemplo 67 *1.* $f(x) = |x - 2|$

2. $y = |x^2 - 2x|$

Exemplo 68 *Esboce o gráfico das funções, de domínio $\mathbb{R}$:*

1. $y = |x| + 2$

2. $y = | - 6x - 3|$

3. $y = |x - 2| - 1$

4. $y = |x^2 - 1| - 2$

5. $y = -|x^2 - 2x| + 1$

6. $y = |x^2 - 2x - 3|$

5.5.8 Função racional

Definição 39 *É a função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.*

O domínio é o conjunto dos números reais exceto aqueles x tal que $q(x) = 0$.

Exemplo 69 *1.* $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ *com* $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2. $g(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{(x^2 + 3x - 12)(x + 3)}$ *com* $D(f) = \mathbb{R} - \{-4, -3, 3\}$.

5.5.9 Funções pares e funções ímpares

Definição 40 *Uma função $f(x)$ é par se para todo $x \in D(f)$ tem-se que $f(-x) = f(x)$.*

Exemplo 70 $f(x) = x^2$ *é par pois* $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Definição 41 *Uma função $f(x)$ é ímpar se para todo $x \in D(f)$ tem-se que $f(-x) = -f(x)$.*

Exemplo 71 $f(x) = x^5 + x^3$ *é ímpar pois*
$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3 = -(x^5 + x^3) = -f(x)$.

5.5.10 Função exponencial

Definição 42 *Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa o número a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é denominada função exponencial de base a.*

Notação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Exemplo 72 *1. $f(x) = 3^x$ é função exponencial de base 3.*

2. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ é função exponencial de base $\frac{1}{3}$.

3. $f(x) = \pi^x$ é função exponencial de base π.

Observação 25 *Vejamos o motivo das restrições: $a > 0$ e $a \neq 1$*

1. *Se $a = 1$, temos que $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e a função não é exponencial, mas constante.*
2. *$a \neq 0$ e $a \neq 1$ garantem que potências iguais e de mesma base não sejam originadas por expoentes diferentes.*
   $0^2 = 0^7$ ou $1^2 = 1^7$. Fazendo $a \neq 0$ e $a \neq 1$ podemos afirmar que $a^m = a^n$ apenas se $m = n$.
3. *Se $a < 0$ não se pode garantir que $a^x \in \mathbb{R}$, por exemplo,*
   $(-3)^{0,5} = (-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$.

Gráfico Cartesiano

Vamos construir os gráficos de $f(x) = 3^x$ e $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.

O gráfico de uma função exponencial f de base a, com $0 < a \neq 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$:

1. está acima do eixo x, pois $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. tem $Im(f) = \mathbb{R}$ e corta o eixo y em $(0, 1)$ pois $a^0 = 1$;
3. Se $a > 1$ então $f(x) = a^x$ é crescente;
4. Se $0 < a < 1$ então $f(x) = a^x$ é decrescente;
5. $f(x) = a^x$ não é função par, não é função ímpar.

Exemplo 73 *1. Reduza cada expressão a um única potência:*

(a) $\dfrac{2^x.4^{x+1}}{8^{-x}.16^{\frac{x}{2}}}$

(b) $\dfrac{0,04^x.25^{1-x}}{0,008^x.125^{2-x}}$

2. Esboce os gráficos cartesianos das funções de domínio $\mathbb{R}$ e determine a imagem:

(a) $y = 5^x$

(b) $y = 2 - 2^x$

(c) $y = 2^x - 1$

3. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que a função:

(a) $f(x) = (2m - 1)^x$ *seja crescente em $\mathbb{R}$.*

(b) $f(x) = (-3m + 1)^x$ *seja decrescente em $\mathbb{R}$.*

5.5.11 Função logarítmica

Definição 43 *Uma função f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real $x > 0$ associa o logaritmo de x, numa base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada função logarítmica de base a.*

Notação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Exemplo 74 *1. $f(x) = \log_3 x$ é função logarítmica de base 3.*

2. $f(x) = \log_{0,2} x$ é função logarítmica de base $0,2$.

3. $f(x) = \pi^x$ é função exponencial de base π.

Exemplo 75 *Qual o domínio de:*

1. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.
2. $g(x) = \log_{0,2} \sqrt[3]{2x+1}$.
3. $h(x) = \log_3(\frac{x+1}{x-1})$.

Gráfico Cartesiano

Exemplo 76 *Vamos construir os gráficos de $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.*

O gráfico apresenta um dos seguintes aspectos:

1. O conjunto imagem de f, onde $f(x) = \log_a x$, com $x > 0$, $0 < a \neq 1$ é $Im(f) = \mathbb{R}$.
2. o gráfico de $f(x) = \log_a x$ esta a direita do eixo y.
3. O gráfico de $f(x) = \log_a x$ corta o eixo x em $(1, 0)$ pois $log_a 1 = 0$.
4. Se $a > 1$ então $f(x) = \log_a x$ é crescente.
5. Se $0 < a < 1$ então $f(x) = \log_a x$ é decrescente.

Exemplo 77 *1. Esboce o gráfico das funções:*

   (a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

   (b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

2. Considere a função definida por $f(x) = \log_a x$. Se $f(a) = b$ e $f(a+2) = b+1$, quais são os valores de a e b?

Relação entre as funções exponencial e logarítmica

Vejamos os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$ construídos num mesmo plano cartesiano.

Vejamos, também, os gráficos de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ construídos em um mesmo plano cartesiano.

Nos dois casos os gráficos são simétricos em relação à bissetriz do 1^0 e 3^0 quadrantes. Isso ocorre porque essas duas funções são inversas.

Por isso, ao resolvermos a equação $2^x = 9$, calculamos o logaritmo dos dois lados:

$$\begin{aligned} \log 2^x &= \log 9 \\ x \log 2 &= \log 9 \\ x &= \tfrac{\log 9}{\log 2} \\ x &= \log_2 9 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Observação 26 *Sendo a função $f(x) = a^x$ inversa de $g(x) = \log_a x$, as mesmas restrições impostas para a base a da função exponencial valem para a base a da função logarítmica, garantindo também a existência e unicidade do logaritmo de quaquer número real positivo.*

5.5.12 Função seno

Definição 44 *Definimos a função seno como a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa o número real $y = sen(x)$.*

Notação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = sen(x) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Observação 27 1. *O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$;*

2. $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $sen(\alpha) = sen(\alpha + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
4. *O gráfico da função seno é chamado senóide.*

5.5.13 Função cosseno

Definição 45 *Definimos a função cosseno como a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa o número real $y = \cos x$.*

Notação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos x \end{aligned} \tag{5.19}$$

Observação 28 1. *O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$;*

2. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
4. *O gráfico da função cosseno é chamado cossenóide.*

5.5.14 Função tangente

Definição 46 *Definimos a função tangente como a função f, de $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa o número real $y = tg(x)$.*

Notação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = tg(x) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Observação 29 1. *O domínio da função tangente é $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e o conjunto imagem é $\mathbb{R}$;*

2. $tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$ $\alpha \in D(tg)$;
3. $tg(\alpha) = tg(\alpha + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ $\alpha \in D(tg)$;