

# Álgebra Superior I: Tarea 01

Rendón Ávila Jesús Mateo

February 16, 2025



Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Profesora: Cristina Angélica Núñez Rodríguez

1. Encuentra una proposición adecuada para describir a cada uno de los siguientes conjuntos.

- a)  $A = \{30, 31, 32, \dots\}$   
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 30\}$
- b)  $B = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots\}$   
 $B = \{x \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \text{si } x \bmod 2 \neq 0 \Rightarrow -1(x)\}$
- c)  $C = \{-1, 3, -5, 7, -9, 11, \dots\}$   
 $C = \{x \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \text{si } \}$
- d)  $D = \{4, 7, 12, 19, \dots\}$   
 $D = \{\dots\}$

2. Describe los siguientes conjuntos listando todos sus elementos.

- a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x = 0\}$   
 $\{3\}$
- b)  $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$   
 $\{0, 2, 12, 36, 80\}$
- c)  $\{\frac{1}{n^2+n} \mid n \text{ es un positivo impar y } n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}\}$   
 $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{56}\}$
- d)  $\{l \in \mathbb{Z} \mid l = 2n - 1 \text{ y } -3 \leq n \leq 9\}$   
 $\{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

3. Sea  $\mathbb{N}$  el conjunto de los números naturales. Determinar  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  y  $A^c$  en:

- a)  $A = \{n \mid n \text{ es par}\}$  y  $B = \{n \mid n < 14\}$   
 $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$   
 $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$   
 $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$
- b)  $A = \{n \mid n^2 > 2n - 1\}$ ,  $B = \{n \mid n^2 = 2n + 3\}$   
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$   
 $A \cap B = \{9\}$   
 $A^c = \{0, 1\}$

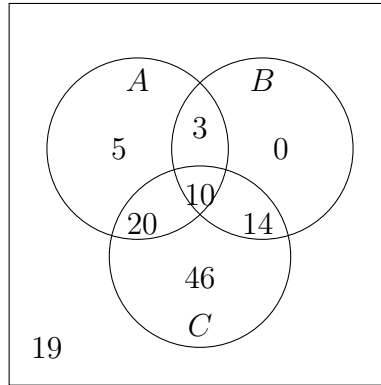
4. Dibuja el diagrama de Venn para el siguiente problema:

Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por diferentes medios de transporte: bicicleta, motocicleta y automóvil. Los datos de las encuestas fueron los siguientes:

- Motocicleta solamente 5.
- Motocicleta 38.
- No gustan del automóvil 27.
- Motocicleta y bicicleta pero no automóvil 3.
- Motocicleta y automóvil pero no bicicleta 20.

- No gustan de la bicicleta 90.
- No gustan de las tres cosas 19.
- No gustan de la motocicleta 79.

Si tomamos al Conjunto  $A$  como los que gustan de motocicleta, al  $B$  los que gustan de bicicleta y al  $C$  los que gustan de automóvil, entonces el diagrama de Venn es:



Determinar:

- ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?  
118 personas
- ¿A cuántos les gusta la bicicleta solamente?  
una persona
- ¿A cuántos les gusta el automóvil solamente?  
47 personas
- ¿A cuántos les gustan las tres cosas?  
10 personas
- ¿A cuántos les gusta la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?  
61 personas

5. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Prueba que:

a)  $A - B = B^c - A^c$

Demostraremos por propiedad de conjuntos:

$$\begin{aligned}
 A - B &= A \cap B^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\
 &= B^c \cap A \text{ (por conmutatividad de intersección.)} \\
 &= B^c - A^c \text{ (por propiedad de diferencia.)}
 \end{aligned}$$

b)  $B \subseteq A \iff (A - B) \cup B = A$

$\subseteq$ ) Sea  $x \in B$  por definición de subconjunto  $x \in A$   
 como  $x \in A$  y  $x \in B$  entonces  $x \notin A - B$   
 como  $x \notin A - B$  y  $x \in B$  entonces  $x \in (A - B) \cup B$   
 y por hipótesis, como  $B \subseteq A$  entonces  $B \cup (A - B) = A$

$\supseteq$ ) Sea  $x \in (A - B) \cup B$  entonces

$x \in A - B$  o  $x \in B$

como por nuestra hipotesis  $(A - B) \cup B = A$  entonces  $x \in A$

por lo que debe ser  $x \in A - B$  como  $x \notin B$  pero si  $x \in (A - B) \cup B$  entonces debe ser  $B \subseteq A$

$$\therefore B \subseteq A \iff (A - B) \cup B = A$$

6. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres conjuntos cualesquiera. Demuestra que:

a)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Demostraremos por propiedades de conjuntos:

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap B^c) - C \\&= (A \cap B^c) \cap C^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\&= A \cap (B^c \cap C^c) \text{ (por leyes De Morgan)} \\&= A \cap (B \cup C)^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\&= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

b) Si  $A \subseteq B \implies (A - C) \subseteq (B - C)$

**Hipótesis.**  $A \subseteq B$ , entonces  $x \in A \implies x \in B$

*P.D.*  $(A - C) \subseteq (B - C)$

Sea  $x \in A - C \implies x \in A \wedge x \notin C$

por hipotesis sabemos que  $x \in B$  y por el paso anterior  $x \notin C$

así,  $x \in B - C$

de nuevo por nuestra hipótesis  $A \subseteq B \implies (A - C) \subseteq (B - C)$

$\therefore$  si  $A \subseteq B$  entonces  $(A - C) \subseteq (B - C)$

7. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Definimos  $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ . Demuestra que:

a)  $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

$\subseteq$ )

*P.D.*  $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$  sea  $x \in A \cap (B \triangle C) \implies x \in A \wedge x \in (B \triangle C)$

por definición de  $\triangle$  tenemos que  $x \in A$  y  $x \in (B - C) \cup (C - B)$

ahora, si  $x \in (B - C) \cup (C - B) \implies x \in B - C \vee x \in C - B$

como tenemos una unión, entonces tenemos dos casos:

i)  $x \in B - C \implies x \in B \wedge x \notin C$

ii)  $x \in C - B \implies x \in C \wedge x \notin B$

Si fuera i), entonces  $x \in A$  y  $x \in B$  y  $x \notin C$

$\implies x \in A \cap B$  y  $x \notin A \cap C$

entonces  $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$

con ello  $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Si fuera ii), entonces  $x \in A$  y  $x \in C$  y  $x \notin B$

$\implies x \in A \cap C$  y  $x \notin A \cap B$

entonces  $x \in (A \cap C) - (A \cap B)$

con ello, por definición de  $\Delta$ , tenemos  $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Como en ambos casos  $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  entonces  $A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$\supseteq$ )

*P.D.*  $(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C)$

b) Sean  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{3, 5, 7, c\}$  y  $C = \{a, 1, 3, c\}$ , encuentra:

(a)  $A \Delta B$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b, d, 3, 5, 7\}$$

(b)  $A \cap (B \Delta C)$

$$B \Delta C = \{a, 1, 5, 7\}$$

$$A \cap (B \Delta C) = \{a\}$$

(c)  $B \Delta A$

$$B \Delta A = (B - A) \cup (A - B) = \{a, b, d, 3, 5, 7\}$$

8. Sean  $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ :

a) Expresa  $(A - B)^c$  en terminos de  $\cup$  y  $-$ :

$$(\mathcal{U} - A) \cup B$$

b) Demuestra que:  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Demostraremos por propiedades de conjuntos:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \text{ (por propiedad de la diferencia)} \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \text{ (por leyes De Morgan)} \\ &= A - (B^c \cup C^c)^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\ &= A - (B \cap C) \text{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A - B) \cup (A - C) \text{ (por leyes De Morgan)} \end{aligned}$$

9. Da un contraejemplo para probar la falsedad de los siguientes enunciados:

a)  $A \cap (B \cup C) = A \cap C \implies A \cap C = \emptyset$

Proponemos los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{7, 8, 9\} \text{ y } C = \{2, 5, 6, 7\}$$

Primero determinaremos  $B \cup C$ , que es el conjunto  $\{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Ahora,  $A \cap (B \cup C) = \{2\}$ , notemos que:

$$A \cap C = \{2\} \neq \emptyset$$

cumpliendo la igualdad  $A \cap (B \cup C) = A \cap C$  con  $A \cap C \neq \emptyset$ . Por lo tanto hemos exhibido un elemento que no cumple la proposición.

b)  $A - (B - C) = (A - B) - C$

Proponemos los conjuntos:

$$A = \{3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}, B = \{3, 4, 5, 6, a, b, c\} \text{ y } C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Primero realizamos el conjunto  $B - C$ , que resulta ser  $\{3, 4, a, b, c\}$ . con el podemos realizar el conjunto  $A - (B - C) = \{5, 9, 10, 11, 12\}$ .

Ahora podemos realizar el conjunto  $A - B = \{9, 10, 11, 12\}$ , de aquí podemos formar el conjunto  $(A - B) - C = \{10, 11, 12\}$

Como es evidente  $A - (B - C) \neq (A - B) - C$ , los conjuntos propuestos prueban la falsedad de la proposición.

**10.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Demuestra que:

a)  $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

*Hipotesis.*  $A \subset B$ , enotnces  $\forall x \in A \implies x \in B$

Si tuvieramos  $x \in A$ , por nuestra hipotesis será  $x \in B$ .

Por la definición de  $\mathcal{P}(A)$  tenemos que  $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$ , y como sabemos  $A \subset B$  entonces todo subconjunto de  $A$  es tambien subconjunto de  $B$ , así:

$$\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$$

b) Si  $A \cap B = \emptyset \implies \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

Si  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $\forall x \in A \implies x \notin B$  y  $\forall z \in B \implies z \notin A$

$\subseteq$ )

P.D  $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

Como  $A \cap B = \emptyset$ , por la definición de *diferencia de conjuntos* sabemos que se cumple  $A - B = A$ . De lo anterior afirmamos que  $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A)$

Como  $A$  y  $B$  son conjuntos disjuntos, entonces sus potencias  $\mathcal{P}(A)$  y  $\mathcal{P}(B)$  sólo comparten un elemento que es el conjunto vacío  $\emptyset$ . Así:

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$$

De lo anterior tenemos  $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

$\supseteq$ )

P.D  $[\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A - B)$

Como sabemos por hipotesis que  $A \cap B = \emptyset$  podemos deducir que  $A - B = A$ .

De lo anterioro podemos decir:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\} \\ (\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}) \cup \emptyset &= \mathcal{P}(A)\end{aligned}$$

De nuevo por hipótesis sabemos que  $A - B = A$ , entonces  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A - B)$

Así hemos demostrado que  $[\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A - B)$

$\therefore$  si  $A \cap B = \emptyset \implies \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

**11.** Se define la siguiente operación  $A * B = A^c \cup B^c$ . Demuestra que:

a)  $(A * B) * (A * B) = A \cap B$

$$\begin{aligned}(A * B) * (A * B) &= (A^c \cup B^c)^c \cup (A^c \cup B^c)^c \\ &= [(A^c)^c \cap (B^c)^c] \cup [(A^c)^c \cap (B^c)^c] \text{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \text{ (por propiedad de complemento)} \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

b)  $(A * A) * (B * B) = A \cup B$

$$\begin{aligned}(A * A) * (B * B) &= (A^c \cup A^c)^c \cup (B^c \cup B^c)^c \\ &= [(A^c)^c \cap (A^c)^c] \cup [(B^c)^c \cap (B^c)^c] \text{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A \cap A) \cup (B \cap B) \text{ (por propiedad de complemento)} \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

**12.** Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos no vacíos. Demuestra las siguientes propiedades:

a) Si  $A \subseteq B$  y  $C \subseteq D \implies (A \times C) \subseteq (B \times D)$

b)  $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

**13.** Determina cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones:

a) Algunos números enteros son negativos.

Es una proposición pues podemos determinar su veracidad, tiene valor de verdad  $V$ .

b) El número 15 es un número par.

Es una proposición con valor de verdad  $F$ .

c) ¿Qué hora es?

No es una proposición pues no se puede determinar veracidad.

d) En los números enteros,  $11 + 6 \neq 12$

Si es proposición con valor de verdad  $V$ .

e) La tierra es casi una esfera.

Si es una proposición con valor de verdad  $V$ .

**14.** Si  $P$  y  $R$  representan proposiciones verdaderas y  $Q$  y  $S$  representan proposiciones falsas, encuentra el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas a continuación:

a)  $\neg P \wedge R$

$$F \wedge V = F$$

b)  $\neg[\neg P \wedge (\neg Q \wedge P)]$

$$\neg[F \wedge (V \wedge V)] = \neg[F \wedge V] = \neg F = V$$

c)  $(P \wedge R) \vee \neg Q$

$$(V \wedge V) \vee V = V \vee V = V$$

d)  $P \implies (Q \implies R)$

$$V \implies (F \implies V) = V \implies V = V$$

e)  $[(P \wedge \neg Q) \implies (Q \wedge R)] \implies (S \vee \neg Q)$

$$[(V \wedge V) \implies (F \wedge V)] \implies (F \vee V) = [V \implies F] \implies V = F \implies V = V$$

**15.** Responde:

a) Si la proposición  $Q$  es verdadera, determine todas las asignaciones de valores de verdad para las proposiciones  $P$ ,  $R$  y  $S$  para la proposición:

$$\{Q \implies [(\neg P \vee R) \wedge (\neg S)]\} \wedge \{\neg S \implies (\neg R \wedge Q)\}$$

Vamos a realizar una sola tabla para ahorra espacio:

$Q$	$P$	$R$	$S$	$\implies$	$\neg P$	$\vee$	$R$	$\wedge$	$\neg S$	$\wedge$	$\neg S$	$\implies$	$\neg R$	$\wedge$	$Q$
V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F

Table 1: Tabla de valor de las variables