

Álgebra Superior I: Tarea 01

Rendón Ávila Jesús Mateo

February 14, 2025



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesora: Cristina Angélica Núñez Rodríguez

1. Encuentra una proposición adecuada para describir a cada uno de los siguientes conjuntos.

- a) $A = \{30, 31, 32, \dots\}$
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 30\}$
- b) $B = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \text{si } x \bmod 2 \neq 0 \Rightarrow -1(x)\}$
- c) $C = \{-1, 3, -5, 7, -9, 11, \dots\}$
 $C = \{x \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \text{si } \}$
- d) $D = \{4, 7, 12, 19, \dots\}$
 $D = \{\dots\}$

2. Describe los siguientes conjuntos listando todos sus elementos.

- a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x = 0\}$
 $\{3\}$
- b) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
 $\{0, 2, 12, 36, 80\}$
- c) $\{\frac{1}{n^2+n} \mid n \text{ es un positivo impar y } n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}\}$
 $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{56}\}$
- d) $\{l \in \mathbb{Z} \mid l = 2n - 1 \text{ y } -3 \leq n \leq 9\}$
 $\{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

3. Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales. Determinar $A \cup B$, $A \cap B$ y A^c en:

- a) $A = \{n \mid n \text{ es par}\}$ y $B = \{n \mid n < 14\}$
 $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
 $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$
- b) $A = \{n \mid n^2 > 2n - 1\}$, $B = \{n \mid n^2 = 2n + 3\}$
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
 $A \cap B = \{9\}$
 $A^c = \{0, 1\}$

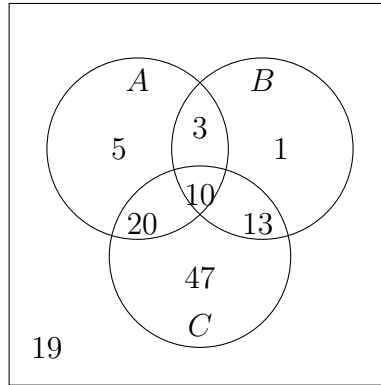
4. Dibuja el diagrama de Venn para el siguiente problema:

Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por diferentes medios de transporte: bicicleta, motocicleta y automóvil. Los datos de las encuestas fueron los siguientes:

- Motocicleta solamente 5.
- Motocicleta 38.
- No gustan del automóvil 9.
- Motocicleta y bicicleta pero no automóvil 3.
- Motocicleta y automóvil pero no bicicleta 20.

- No gustan de la bicicleta 72.
- No gustan de las tres cosas 19.
- No gustan de la motocicleta 61.

Si tomamos al Conjunto A como los que gustan de motocicleta, al B los que gustan de bicicleta y al C los que gustan de automóvil, entonces el diagrama de Venn es:



Determinar:

- ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
118 personas
- ¿A cuántos les gusta la bicicleta solamente?
una persona
- ¿A cuántos les gusta el automóvil solamente?
47 personas
- ¿A cuántos les gustan las tres cosas?
10 personas
- ¿A cuántos les gusta la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?
61 personas

5. Sean A y B conjuntos. Prueba que:

a) $A - B = B^c - A^c$

Demostraremos por propiedad de conjuntos:

$$\begin{aligned}
 A - B &= A \cap B^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\
 &= B^c \cap A \text{ (por conmutatividad de intersección.)} \\
 &= B^c - A^c \text{ (por propiedad de diferencia.)}
 \end{aligned}$$

b) $B \subseteq A \iff (A - B) \cup B = A$

\subseteq) Sea $x \in B$ por definición de subconjunto $x \in A$
 como $x \in A$ y $x \in B$ entonces $x \notin A - B$
 como $x \notin A - B$ y $x \in B$ entonces $x \in (A - B) \cup B$
 y por hipótesis, como $B \subseteq A$ entonces $B \cup (A - B) = A$

\supseteq) Sea $x \in (A - B) \cup B$ entonces

$x \in A - B$ o $x \in B$

como por nuestra hipotesis $(A - B) \cup B = A$ entonces $x \in A$

por lo que debe ser $x \in A - B$ como $x \notin B$ pero si $x \in (A - B) \cup B$ entonces debe ser $B \subseteq A$

$$\therefore B \subseteq A \iff (A - B) \cup B = A$$

6. Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera. Demuestra que:

a) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Demostraremos por propiedades de conjuntos:

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap B^c) - C \\&= (A \cap B^c) \cap C^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\&= A \cap (B^c \cap C^c) \text{ (por leyes De Morgan)} \\&= A \cap (B \cup C)^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\&= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

b) Si $A \subseteq B \implies (A - C) \subseteq (B - C)$

Hipótesis. $A \subseteq B$, entonces $x \in A \implies x \in B$

P.D. $(A - C) \subseteq (B - C)$

Sea $x \in A - C \implies x \in A \wedge x \notin C$

por hipotesis sabemos que $x \in B$ y por el paso anterior $x \notin C$

así, $x \in B - C$

de nuevo por nuestra hipótesis $A \subseteq B \implies (A - C) \subseteq (B - C)$

\therefore si $A \subseteq B$ entonces $(A - C) \subseteq (B - C)$

7. Sean A y B dos conjuntos. Definimos $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Demuestra que:

a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

\subseteq

P.D. $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ sea $x \in A \cap (B \triangle C) \implies x \in A \wedge x \in (B \triangle C)$

por definición de \triangle tenemos que $x \in A$ y $x \in (B - C) \cup (C - B)$

ahora, si $x \in (B - C) \cup (C - B) \implies x \in B - C \vee x \in C - B$

como tenemos una unión, entonces tenemos dos casos:

i) $x \in B - C \implies x \in B \wedge x \notin C$

ii) $x \in C - B \implies x \in C \wedge x \notin B$

Si fuera i), entonces $x \in A$ y $x \in B$ y $x \notin C$

$\implies x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap C$

entonces $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$

con ello $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Si fuera ii), entonces $x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$

$\implies x \in A \cap C$ y $x \notin A \cap B$

entonces $x \in (A \cap C) - (A \cap B)$

con ello, por definición de \triangle , tenemos $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Como en ambos casos $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ entonces $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

\supseteq)

P.D. $(A \cap B) \triangle (A \cap C) \subseteq A \cap (B \triangle C)$

b) Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{3, 5, 7, c\}$ y $C = \{a, 1, 3, c\}$, encuentra:

(a) $A \triangle B$

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b, d, 3, 5, 7\}$$

(b) $A \cap (B \triangle C)$

$$B \triangle C = \{a, 1, 5, 7\}$$

$$A \cap (B \triangle C) = \{a\}$$

(c) $B \triangle A$

$$B \triangle A = (B - A) \cup (A - B) = \{a, b, d, 3, 5, 7\}$$

8. Sean $A, B, C \subseteq U$:

a) Expresa $(A - B)^c$ en terminos de \cup y $-$:

$$(U - A) \cup B$$

b) Demuestra que: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Demostremos por propiedades de conjuntos:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \text{ (por propiedad de la diferencia)} \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \text{ (por leyes De Morgan)} \\ &= A - (B^c \cup C^c)^c \text{ (por propiedad de diferencia.)} \\ &= A - (B \cap C) \text{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A - B) \cup (A - C) \text{ (por leyes De Morgan)} \end{aligned}$$

9. Da un contraejemplo para probar la falsedad de los siguientes enunciados:

a) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \implies A \cap C = \emptyset$

Proponemos los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{7, 8, 9\} \text{ y } C = \{2, 5, 6, 7\}$$

Primero determinaremos $B \cup C$, que es el conjunto $\{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ahora, $A \cap (B \cup C) = \{2\}$, notemos que:

$$A \cap C = \{2\} \neq \emptyset$$

cumpliendo la igualdad $A \cap (B \cup C) = A \cap C$ con $A \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto hemos exhibido un elemento que no cumple la proposición.

b) $A - (B - C) = (A - B) - C$

Proponemos los conjuntos:

$$A = \{3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}, B = \{3, 4, 5, 6, a, b, c\} \text{ y } C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Primero realizamos el conjunto $B - C$, que resulta ser $\{3, 4, a, b, c\}$. con el podemos realizar el conjunto $A - (B - C) = \{5, 9, 10, 11, 12\}$.

Ahora podemos realizar el conjunto $A - B = \{9, 10, 11, 12\}$, de aquí podemos formar el conjunto $(A - B) - C = \{10, 11, 12\}$

Como es evidente $A - (B - C) \neq (A - B) - C$, los conjuntos propuestos prueban la falsedad de la proposición.

10. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que:

a) $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Hipotesis. $A \subset B$, entonces $\forall x \in A \implies x \in B$

Si tuvieramos $x \in A$, por nuestra hipotesis será $x \in B$.

Por la definición de $\mathcal{P}(A)$ tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$, y como sabemos $A \subset B$ entonces todo subconjunto de A es tambien subconjunto de B , así:

$$\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$$

b) Si $A \cap B = \emptyset \implies \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\forall x \in A \implies x \notin B$ y $\forall z \in B \implies z \notin A$

\subseteq)

P.D $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

Como $A \cap B = \emptyset$, por la definición de *diferencia de conjuntos* sabemos que se cumple $A - B = A$. De lo anterior afirmamos que $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A)$

Como A y B son conjuntos disjuntos, entonces sus potencias $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ sólo comparten un elemento que es el conjunto vacío \emptyset . Así:

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$$

De lo anterior tenemos $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

\supseteq)

P.D $[\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A - B)$

Como sabemos por hipotesis que $A \cap B = \emptyset$ podemos deducir que $A - B = A$.

De lo anterioro podemos decir:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\} \\ (\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}) \cup \emptyset &= \mathcal{P}(A)\end{aligned}$$

De nuevo por hipótesis sabemos que $A - B = A$, entonces $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A - B)$

Así hemos demostrado que $[\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A - B)$

\therefore si $A \cap B = \emptyset \implies \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

13. Determina cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones:

- a) Algunos números enteros son negativos.
Es una proposición con valor de verdad V .
- b) El número 15 es un número par.
Es una proposición con valor de verdad F .
- c) ¿Qué hora es?
No es una proposición pues no se puede determinar veracidad.
- d) En los números enteros, $11 + 6 \neq 12$
Si es proposición con valor de verdad V .
- e) La tierra es casi una esfera.
Si es una proposición con valor de verdad V .

14. Si P y R representan proposiciones verdaderas y Q y S representan proposiciones falsas, encuentra el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas a continuación:

- a) $\neg P \wedge R$
 $F \wedge V = F$
- b) $\neg[\neg P \wedge (\neg Q \wedge P)]$
 $\neg[F \wedge (V \wedge V)] = \neg[F \wedge V] = \neg F = V$
- c) $(P \wedge R) \vee \neg Q$
 $(V \wedge V) \vee V = V \vee V = V$
- d) $P \implies (Q \implies R)$
 $V \implies (F \implies V) = V \implies V = V$
- e) $[(P \wedge \neg Q) \implies (Q \wedge R)] \implies (S \vee \neg Q)$
 $[(V \wedge V) \implies (F \wedge V)] \implies (F \vee V) = [V \implies F] \implies V = F \implies V = V$

15. Responde:

- a) Si la proposición Q es verdadera, determine todas las asignaciones de valores de verdad para las proposiciones P , R y S para la proposición:

$$\{Q \implies [(\neg P \vee R) \wedge (\neg S)]\} \wedge \{\neg S \implies (\neg R \wedge Q)\}$$

Vamos a realizar una sola tabla para ahorra espacio:

Q	P	R	S	\implies	$\neg P$	\vee	R	\wedge	$\neg S$	\wedge	$\neg S$	\implies	$\neg R$	\wedge	Q
V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F

Table 1: Tabla de valor de las variables