Facultad de Ciencias
UNAM

Tarea 1

Álgebra Superior I
Febrero 2025

1. Encuentra una proposición adecuada para describir a cada uno de los siguientes cjts.

   a) $\mathrm{A} = \{30, 31, 32, ...\}$
   b) $\mathrm{B} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, ...\}$
   c) $\mathrm{C} = \{-1, 3, -5, 7, -9, 11, ...\}$
   d) $\mathrm{D} = \{4, 7, 12, 19, ...\}$

2. Describe los siguientes conjuntos listando todos sus elementos.

   a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x = 0\}$
   b) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
   c) $\left\{\frac{1}{n^2+n} \mid n \text{ es un positivo impar y } n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}\right\}$
   d) $\{l \in \mathbb{Z} \mid l = 2n - 1 \text{ y } -3 \leq n \leq 9\}$

3. Sea $\mathbf{N}$ el conjunto de los números naturales. Determinar $A \cup B$, $A \cap B$ y A^C en:

   a) $A = \{n \mid n \text{ es par}\}$, $B = \{n \mid n < 14\}$
   b) $A = \{n \mid n^2 > 2n - 1\}$, $B = \{n \mid n^2 = 2n + 3\}$

4. Dibuja el diagrama de Venn para el siguiente problema:

   Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por diferentes medios de transporte: bicicleta, motocicleta y automóvil. Los datos de las encuestas fueron los siguientes:

   i) Motocicleta solamente 5.
   ii) Motocicleta 38.
   iii) No gustan del automóvil 9.
   iv) Motocicleta y bicicleta pero no automóvil 3.
   v) Motocicleta y automóvil pero no bicicleta 20.
   vi) No gustan de la bicicleta 72.
   vii) No gustan de las tres cosas 19.
   viii) No gustan de la motocicleta 61.

   Determinar:

   a) ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
   b) ¿A cuántos les gusta la bicicleta solamente?
   c) ¿A cuántos les gusta el automóvil solamente?
   d) ¿A cuántos les gustan las tres cosas?
   e) ¿A cuántos les gusta la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

Tarea 1

5. Sean A y B conjuntos. Prueba que

   a) $A - B = B^C - A^C$

   b) $B \subseteq A \iff (A - B) \cup B = A$

6. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Demuestra que:

   a) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

   b) Si $A \subseteq B \Longrightarrow (A - C) \subseteq (B - C)$.

7. Sean A y B dos conjuntos. Definimos $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Prueba que:

   a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

   b) Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{3, 5, 7, c\}$ y $C = \{a, 1, 3, c\}$ encuentra $A \triangle B$, $A \cap (B \triangle C)$ y $B \triangle A$.

8. Sean $A,\ B,\ C\ \subseteq\ U$:

   a) Expresa $(A - B)^C$ en términos de $\cup$ y $-$

   b) Demuestra que: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

9. Da un contraejemplo para probar la falsedad de los siguientes enunciados:

   a) $A \cap (B \cup C) = A \cap C \iff A \cap C = \varnothing$.

   b) $A - (B - C) = (A - B) - C$.

10. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra lo siguiente:

    a) $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

    b) Si $A \cap B = \varnothing, \Longrightarrow \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\}$.

11. Se define la siguiente operación $A * B = A^c \cup B^c$. Prueba lo siguiente:

    a) $(A * B) * (A * B) = A \cap B$.

    b) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$.

12. Sean A, B, C y D conjuntos no vacíos. Demuestra las siguientes propiedades:

    a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D \Longrightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$.

    b) $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$.

Tarea 1

13. Determina cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones:

    a) Algunos números enteros son negativos.

    b) El número 15 es un número par.

    c) ¿Qué hora es?

    d) En los números enteros, $11+6 \neq 12$.

    e) La Tierra es casi una esfera.

14. Si P y R representan proposiciones verdaderas y Q y S representan proposiciones falsas, encuentra el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas a continuación.

    a) $\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{R}$

    b) $\neg [\neg P \wedge (\neg Q \wedge P)]$

    c) $(P \wedge R) \vee \neg Q$

    d) $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$

    e) $[(P \wedge \neg Q) \Longrightarrow (Q \wedge R)] \Longrightarrow (S \vee \neg Q)$

15. Responde:

    a) Si la proposición Q es verdadera, determine todas las asignaciones de valores de verdad para las proposiciones P, R y S para que la proposición

    $$\{Q \Longrightarrow [(\neg P \vee R) \wedge (\neg S)]\} \wedge \{\neg S \Longrightarrow (\neg R \wedge Q)\}$$

    sea verdadera.

    b) Lo mismo que en a), pero ahora suponiendo que Q es falsa.