Álgebra Superior I: Tarea 01

Rendón Ávila Jesús Mateo

February 17, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesora: Cristina Angélica Núñez Rodríguez

1. Encuentra una proposición adecuada para describir a cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $A = \{30, 31, 32, ...\}$
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 30\}$

b) $B = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, ...\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \text{ si } x \mod 2 \neq 0 \Rightarrow -1(x)\}$

c) $C = \{-1, 3, -5, 7, -9, 11, ...\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \text{ si } \}$

d) $D = \{4, 7, 12, 19, ...\}$
$D = \{...\}$

2. Describe los siguientes conjuntos listando todos sus elementos.

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x = 0\}$
$\{3\}$

b) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
$\{0, 2, 12, 36, 80\}$

c) $\{\frac{1}{n^2+n} \mid n \text{ es un positivo impar y } n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}\}$
$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{56}\}$

d) $\{l \in \mathbb{Z} \mid l = 2n - 1 \text{ y } -3 \leq n \leq 9\}$
$\{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Determinar $A \cup B$, $A \cap B$ y A^c en:

a) $A = \{n \mid n \text{ es par}\}$ y $B = \{n \mid n < 14\}$
$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$
$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$

b) $A = \{n \mid n^2 > 2n - 1\}$, $B = \{n \mid n^2 = 2n + 3\}$
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
$A \cap B = \{9\}$
$A^c = \{0, 1\}$

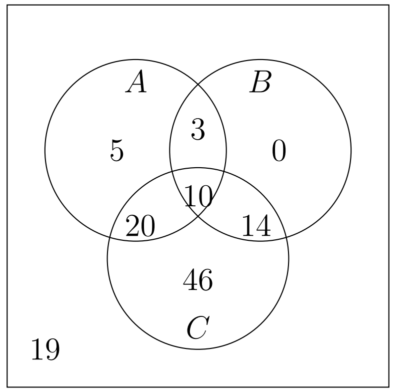
4. Dibuja el diagrama de Venn para el siguiente problema:

Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por diferentes medios de transporte: bicicleta, motocicleta y automóvil. Los datos de las encuestas fueron los siguientes:

- Motocilceta solamente 5.
- Motocicleta 38.
- No gustan del automóvil 27.
- Motocicleta y bicicleta pero no automóvil 3.
- Motocicleta y automóvil pero no bicicleta 20.

- No gustan de la bicicleta 90.
- No gustan de las tres cosas 19.
- No gustan de la motocicleta 79.

Si tomamos al Conjunto A como los que gustan de motocicleta, al B los que gustan de bicicleta y al C los que gustan de automóvil, entonces el diagrama de Venn es:



Determinar:

a) ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
117 personas

b) ¿A cuántos les gusta la bicicleta solamente?
a ninguna persona

c) ¿A cuántos les gusta el automóvil solamente?
46 personas

d) ¿A cuántos les gustan las tres cosas?
10 personas

e) ¿A cuántos les gusta la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?
60 personas

5. Sean A y B conjuntos. Prueba que:

a) $A - B = B^c - A^c$
Demostraremos por propiedad de conjuntos:

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B^c \textit{(por propiedad de diferencia.)} \\ &= B^c \cap A \textit{(por conmutatividad de intersección.)} \\ &= B^c - A^c \textit{(por propiedad de diferencia.)} \end{aligned}$$

b) $B \subseteq A \iff (A - B) \cup B = A$

$\subseteq$) Sea $x \in B$ por definición de subconjunto $x \in A$
como $x \in A$ y $x \in B$ entonces $x \notin A - B$
como $x \notin A - B$ y $x \in B$ entonces $x \in (A - B) \cup B$
y por hipotesis, como $B \subseteq A$ entonces $B \cup (A - B) = A$

$\supseteq$) Sea $x \in (A-B) \cup B$ entonces
$x \in A - B$ o $x \in B$
como por nuestra hipotesis $(A-B) \cup B = A$ entonces $x \in A$
por lo que debe ser $x \in A - B$ como $x \notin B$ pero si $x \in (A-B) \cup B$ entonces debe ser $B \subseteq A$

$\therefore B \subseteq A \Longleftrightarrow (A-B) \cup B = A$

6. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Demuestra que:

a) $(A-B) - C = A - (B \cup C)$
Demostraremos por propiedades de conjuntos:

$$\begin{aligned}(A-B) - C &= (A \cap B^c) - C \\ &= (A \cap B^c) \cap C^c \text{ \textit{(por propiedad de diferencia.)}} \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \text{ \textit{(por leyes De Morgan)}} \\ &= A \cap (B \cup C)^c \text{ \textit{(por propiedad de diferencia.)}} \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

b) Si $A \subseteq B \Longrightarrow (A-C) \subseteq (B-C)$

Hipótesis. $A \subseteq B$, entonces $x \in A \Longrightarrow x \in B$

$PD.$ $(A-C) \subseteq (B-C)$
Sea $x \in A - C \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin C$
por hipotesis sabemos que $x \in B$ y por el paso anterior $x \notin C$
así, $x \in B - C$
de nuevo por nuestra hipótesis $A \subseteq B \Longrightarrow (A-C) \subseteq (B-C)$
$\therefore$ si $A \subseteq B$ entonces $(A-C) \subseteq (B-C)$

7. Sean A y B dos conjuntos. Definimos $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$. Demuestra que:

a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
$\subseteq$)
$P.D.$ $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ sea $x \in A \cap (B \triangle C) \Longrightarrow x \in A \wedge x \in (B \triangle C)$
por definición de $\triangle$ tenemos que $x \in A$ y $x \in (B-C) \cup (C-B)$
ahora, si $x \in (B-C) \cup (C-B) \Longrightarrow x \in B - C \vee x \in C - B$

como tenemos una unión, entonces tenemos dos casos:

$$\text{i) } x \in B - C \Longrightarrow x \in B \wedge x \notin C$$

$$\text{ii) } x \in C - B \Longrightarrow x \in C \wedge x \notin B$$

Si fuera i), entonces $x \in A$ y $x \in B$ y $x \notin C$
$\Longrightarrow x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap C$
entonces $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$
con ello $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Si fuera ii), entonces $x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$
$\Longrightarrow x \in A \cap C$ y $x \notin A \cap B$

entonces $x \in (A \cap C) - (A \cap B)$
con ello, por definición de $\triangle$, tenemos $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Como en ambos casos $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ entonces $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

$\supseteq)$
P.D. $(A \cap B) \triangle (A \cap C) \subseteq A \cap (B \triangle C)$

b) Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{3, 5, 7, c\}$ y $C = \{a, 1, 3, c\}$, encuentra:

(a) $A \triangle B$
$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b, d, 3, 5, 7\}$

(b) $A \cap (B \triangle C)$
$B \triangle C = \{a, 1, 5, 7\}$
$A \cap (B \triangle C) = \{a\}$

(c) $B \triangle A$
$B \triangle A = (B - A) \cup (A - B) = \{a, b, d, 3, 5, 7\}$

8. Sean A, B, $C \subseteq \mathcal{U}$:

a) Expresa $(A - B)^c$ en terminos de $\cup$ y -:
$(\mathcal{U} - A) \cup B$

b) Demuestra que: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
Demostraremos por propiedades de conjuntos:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \textit{ (por propiedad de la diferencia)} \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \textit{ (por leyes De Morgan)} \\ &= A - (B^c \cup C^c)^c \textit{ (por propiedad de diferencia.)} \\ &= A - (B \cap C) \textit{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A - B) \cup (A - C) \textit{ (por leyes De Morgan)} \end{aligned}$$

9. Da un contraejemplo para probar la falsedad de los siguientes enunciados:

a) $A \cap (B \cup C) = A \cap C \implies A \cap C = \varnothing$

Proponemos los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{7, 8, 9\} \text{ y } C = \{2, 5, 6, 7\}$$

Primero determinaremos $B \cup C$, que es el conjunto $\{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ahora, $A \cap (B \cup C) = \{2\}$, notemos que:

$$A \cap C = \{2\} \neq \varnothing$$

cumpliendo la igualdad $A \cap (B \cup C) = A \cap C$ con $A \cap C \neq \varnothing$. Por lo tanto hemos exibido un elemento que no cumple la proposición.

b) $A - (B - C) = (A - B) - C$

Proponemos los conjuntos:

$$A = \{3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}, B = \{3, 4, 5, 6, a, b, c\} \text{ y } C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Primero realizamos el conjunto $B - C$, que resulta ser $\{3, 4, a, b, c\}$. con el podemos realizar el conjunto $A - (B - C) = \{5, 9, 10, 11, 12\}$.

Ahora podemos realizar el conjunto $A - B = \{9, 10, 11, 12\}$, de aquí podemos formar el conjunto $(A - B) - C = \{10, 11, 12\}$

Como es evidente $A - (B - C) \neq (A - B) - C$, los conjuntos propuestos prueban la falsedad de la proposición.

10. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que:

a) $A \subset B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Hipotesis. $A \subset B$, enotnces $\forall x \in A \Longrightarrow x \in B$

Si tuvieramos $x \in A$, por nuestra hipotesis será $x \in B$.

Por la definición de $\mathcal{P}(A)$ tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$, y como sabemos $A \subset B$ entonces todo subconjunto de de A es tambien subconjunto de B, así:

$$\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$$

b) Si $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\}$

Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $\forall x \in A \Longrightarrow x \notin B$ y $\forall z \in B \Longrightarrow z \notin A$

$\subseteq$)
P.D $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\}$

Como $A \cap B = \varnothing$, por la definición de *diferencia de conjuntos* sabemos que se cumple $A - B = A$. De lo anterior afirmamos que $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A)$

Como A y B son conjuntos disjuntos, entonces sus potencias $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ sólo comparten un elemento que es el conjunto vacío $\varnothing$. Así:

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$$

De lo anterior tenemos $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\}$

$\supseteq$)
P.D $[\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(A - B)$

Como sabemos por hipotesis que $A \cap B = \varnothing$ podemos deducir que $A - B = A$.

De lo anteriro podemos decir:

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$$
$$(\mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}) \cup \varnothing = \mathcal{P}(A)$$

De nuevo por hipótesis sabemos que $A - B = A$, entonces $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A - B)$

Así hemos demostrado que $[\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(A - B)$

$\therefore$ si $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathcal{P}(A - B) = [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\varnothing\}$

11. Se define la siguiente operación $A * B = A^c \cup B^c$. Demuestra que:

a) $(A * B) * (A * B) = A \cap B$

$$\begin{aligned}(A * B) * (A * B) &= (A^c \cup B^c)^c \cup (A^c \cup B^c)^c \\ &= [(A^c)^c \cap (B^c)^c] \cup [(A^c)^c \cap (B^c)^c] \textit{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \textit{ (por propiedad de complemento)} \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

b) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$

$$\begin{aligned}(A * B) * (A * B) &= (A^c \cup A^c)^c \cup (B^c \cup B^c)^c \\ &= [(A^c)^c \cap (A^c)^c] \cup [(B^c)^c \cap (B^c)^c] \textit{ (por leyes De Morgan)} \\ &= (A \cap A) \cup (B \cap B) \textit{ (por propiedad de complemento)} \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

12. Sean A, B y C conjuntos no vacíos. Demuestra las siguientes propiedades:

a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D \Longrightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$

Hipotesis. $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$

P.D. $(A \times C) \subseteq (B \times D)$

Sean $x \in A$ y $y \in C$, por hipotesis $x \in B$ y $y \in D$

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times C$ y

$\Longrightarrow (x, y) \in B \times D$

$\therefore (A \times C) \subseteq (B \times D)$

b) $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

$\subseteq$) P.D. $(A \times B) - (C \times C) \subseteq [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

Sea $(a, b) \in (A \times B) - (C \times C)$

$\Longrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \notin C \times C$

$\Longrightarrow a \in A, b \in B$ para c procedemos por casos:

i) $a \notin C$ y $b \in C$

ii) $a \in C$ y $b \notin C$

iii) $a \notin C$ y $b \notin C$

Procedemos con i: tenemos $a \in A, b \in B$ y $a \notin C, b \in C$

$\Longrightarrow a \in A - C$ y $b \notin B - C$

$\Longrightarrow (a, b) \in (A - C) \times B$ y $(a, b) \notin A \times (B - C)$

$\Longrightarrow (a, b) \in [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

Procedemos con ii: $a \in A, b \in B$ y $a \in C, b \notin C$

$\Longrightarrow a \notin A - C$ y $b \in B - C$

$\Longrightarrow (a, b) \notin (A - C) \times B$ y $(a, b) \in A \times (B - C)$

$\Longrightarrow (a, b) \in [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

Procedemos con iii: $a \in A, b \in B$ y $a \notin C, b \notin C$

$\Longrightarrow a \in A - C$ y $b \in B - C$

$\Longrightarrow (a, b) \in (A - C) \times B$ y $(a, b) \in A \times (B - C)$

$\Longrightarrow (a, b) \in [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$
Por lo tanto $(A \times B) - (C \times C) \subseteq [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

$\supseteq$) P.D. $[(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)] \subseteq (A \times B) - (C \times C)$

Sea (a, b) en $[(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

$\Longrightarrow (a, b) \in (A - C) \times B$ o $(a, b) \in A \times (B - C)$

i) $(a, b) \in (A - C) \times B$

$\Longrightarrow a \in A - C$ y $b \in B$

$\Longrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \notin C$

$\Longrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \notin C \times C$

ii) $(a, b) \in A \times (B - C)$

$\Longrightarrow a \in A$ y $b \in B - C$

$\Longrightarrow a \in A, b \in B$ y $b \notin C$

$\Longrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \notin C \times C$

por lo tanto $[(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)] \subseteq (A \times B) - (C \times C)$

13. Determina cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones:

a) Algunos números enteros son negativos.
Es una proposición pues podemos determinar su veracidad, tiene valor de verdad V.

b) El número 15 es un número par.
Es una proposición con valor de verdad F.

c) ¿Qué hora es?
No es una proposición pues no se puede determinar veracidad.

d) En los números enteros, $11 + 6 \neq 12$
Si es proposición con valor de verdad V.

e) La tierra es casi una esfera.
Si es una proposición con valor de verdad V.

14. Si P y R representan proposiciones verdaderas y Q y S representan proposiciones falsas, encuentra el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas a continuación:

a) $\neg P \wedge R$
$F \wedge V = F$

b) $\neg[\neg P \wedge (\neg Q \wedge P)]$
$\neg[F \wedge (V \wedge V)] = \neg[F \wedge V] = \neg F = V$

c) $(P \wedge R) \vee \neg Q$
$(V \wedge V) \vee V = V \vee V = V$

d) $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$
$V \Longrightarrow (F \Longrightarrow V) = V \Longrightarrow V = V$

e) $[(P \wedge \neg Q) \Longrightarrow (Q \wedge R)] \Longrightarrow (S \vee \neg Q)$
$[(V \wedge V) \Longrightarrow (F \wedge V)] \Longrightarrow (F \vee V) = [V \Longrightarrow F] \Longrightarrow V = F \Longrightarrow V = V$

15. Responde:

a) Si la proposición Q es verdadera, determine todas las asiganciones de valores de verdad para las proposiciones P, R y S para la proposición:

$$\{Q \Longrightarrow [(\neg P \vee R) \wedge (\neg S)]\} \wedge \{\neg S \Longrightarrow (\neg R \wedge Q)\}$$

Vamos a realizar una sola tabla para ahorra espacio:

Q	P	R	S	$\Longrightarrow$	$\neg P$	$\vee$	R	$\wedge$	$\neg S$	$\wedge$	$\neg S$	$\Longrightarrow$	$\neg R$	$\wedge$	Q
V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F

Table 1: Tabla de valor de las variables