Tarea 1

1. Dibuje todas las gráficas no isomorfas de cuatro vértices. Justifique brevemente por qué son todas, es decir, justifique por qué la lista que exhibe es exhaustiva.

2. Sean G y H gráficas.

   (a) Demuestre que G es isomorfa a H si y sólo si $\overline{G}$ es isomorfa a $\overline{H}$.

   (b) Usando la definición de conexidad vista en clase, demuestre que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

3. Sea D una digráfica. Utilizando un análogo para digráficas de las matrices de incidencia, demuestre que
$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|.$$

4. Sea n un entero positivo. Definimos a la *Retícula Booleana*, BL_n, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \cdots, n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

   (a) Dibuje BL_1, BL_2, BL_3 y BL_4.

   (b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$. (Demuestre su respuesta.)

   (c) Demuestre que BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

5. El algoritmo de Euclides es uno de los algoritmos más antiguos que sigue siendo usado hoy en día. Este se basa en el hecho que el máximo común divisor de dos números a y b con $a > b$, es igual al máximo común divisor de $a\%b$ (el residuo de a entre b) y b.

   Escribe el pseudocódigo del algoritmo de Euclides en su versión iterativa y su versión recursiva.

Puntos Extra

1. Sea $G = [X, Y]$ una gráfica bipartita con $|X| = r$ y $|Y| = s$.

   (a) Demuestre que $|E| \leq rs$.

   (b) Deduzca que $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$.

   (c) Describa a las gráficas bipartitas que cumplen la igualdad en el inciso anterior. Justifique su respuesta.