

Gráficas y Juegos: Tarea 02

Martínez Méndez Ángel Antonio

Pinzón Chan José Carlos

Rendón Ávila Jesús Mateo

February 18, 2025



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Profesor: César Hernández Cruz

1. Sea D una digráfica de orden n . Demuestre que si D no tiene ciclos dirigidos, entonces existe un orden total, v_1, \dots, v_n de V_D , tal que siempre que (v_i, v_j) sea una flecha de D , se tiene que $i < j$.

Hipotesis

G es isomorfa a H .

2. Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3, entonces \overline{G} tiene diámetro menor que 3.

Hipotesis

G es isomorfa a H .

Definiciones

Def. Una gráfica G es **isomorfa** a una gráfica H si existe una función φ biyectiva, tal que:

$$\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$$

Tal que para cualesquiera vertices $u, v \in V(G)$, se cumple que:

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$$

Def. El **complemento** de una gráfica G , denotada como \overline{G} , es la gráfica con el conjunto de vértices:

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

y el conjunto de aristas:

$$E(\overline{G}) = \{uv \in V(G) \times V(G) \mid uv \notin E(G)\}$$

b) Usando la definición de conexidad vista en clase, demuestre que si G es inconexa, entonces \overline{G} es conexa.

Hipotesis

G es inconexa, lo que implica la negación de conexidad.

Definiciones

Def. Una grafica G es **conexa** si para cualquier partición (X, Y) de $V(G)$, existe al menos una arista con un extremo en X y el otro en Y .

3. Sea D una digráfica. Utilizando un análogo para digráficas de las matrices de incidencia, demuestramos que:

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Hipotesis

D es una gráfica dirigida (digráfica).

Definiciones

Def. Una gráfica D es una **gráfica dirigida** si D es una pareja ordenada $D = (V, A)$, donde V es un conjunto arbitrario y A es un subconjunto de $V \times V$ (parejas ordenadas).

Def. La **matriz de incidencia** M de G es la matriz de $m \times n$ con entradas en $\{0, 1\}$ tal que:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } v_i \in e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

P.D.

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Sea M^+ y M^- las matrices de incidencia de los exgrados e ingrados respectivamente, si tenemos una gráfica dirigida D y su conjunto de vértices $V(D)$ tal que:

$$V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

y su conjunto de aristas $A(D)$ tal que:

$$A(D) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

Para la matriz de incidencia de una digráfica, tanto para los exgrados e ingrados, la suma de los elementos de cada columna es igual a 1. Sea la suma de los elementos de la columna igual a 0, se concluye que la arista no existe, por otro lado, si la suma es igual a 1, la arista *sale* de algún vértice (exgrado) o se dirige a algún vértice (ingrado).

Suponiendo que la suma de la columna sea ≥ 2 , esto no es posible puesto que una arista sólo puede partir de un solo punto y viceversa, *i.e* sólo puede dirigirse a un solo punto.

Como resultado al sumar todas las columnas de M^+ o M^- obtenemos el número de aristas de la gráfica, *i.e* se obtiene la cardinalidad de $A(D)$.

De forma similar, si sumamos las entradas del i – *esimo* renglón de M^+ obtenemos el exgrado (o ingrado en el caso de M^-) del vértice v_i .

En base a lo anterior se puede argumentar que:

$$\begin{aligned} |A(D)| &= \sum_{j=1}^m 1 \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^n M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n d^+(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^n d^-(v_i) \\
&= \sum_{v \in V(D)} d^+(v)
\end{aligned}$$

Analogamente podemos hacerlo para ingrados, por lo que:

$$|A(D)| = \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$$

4. Sea n un entero positivo. Definimos la *Retícula Boleana*, BL_n , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia tiene exactamente un elemento.

(a) Dibuje BL_1 , BL_2 , BL_3 y BL_4 .

Para BL_1 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1\}$, es decir:

$$V(BL_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$$



Figure 1: Gráfica de BL_1

Para BL_2 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2\}$, es decir:

$$V(BL_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

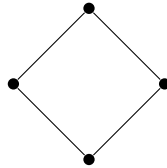


Figure 2: Gráfica de BL_2

Para BL_3 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$, es decir:

$$V(BL_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Para BL_4 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$, es decir:

$$\begin{aligned}
V(BL_4) = & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\
& \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}
\end{aligned}$$

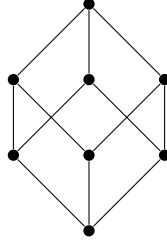


Figure 3: Gráfica de BL_3

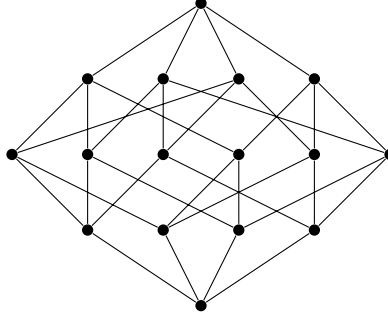


Figure 4: Gráfica de BL_4

b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$ (Demuestre su respuesta).

Definiciones

Def. Sea A un conjunto, definimos al **conjunto potencia** de A , denotado como $\mathcal{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A . *i.e.*:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Como sabemos que $V(BL_n)$ es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, entonces podemos verlo como el conjunto potencia de $\{1, \dots, n\}$, es decir:

$$V(BL_n) = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

cuya cardinalidad se define como:

$$|V(BL_n)| = 2^n$$

Como ya hemos demostrado $|V(BL_n)| = 2^n$. De tal modo que, para saber $|E(BL_n)|$, nos basaremos en la construcción de aristas en la gráfica BL_n

Por definición de BL_n , sabemos que u es adyacente a v si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

Notemos que, sin importar quien sea n , $d(\emptyset) = d(\{1, 2, \dots, n\}) = n$ es decir, sus grados son iguales.

Así podemos ver al conjunto de vértices de la siguiente manera:

$$V(BL_n) = \{d(V_1) = n, v_2, \dots, d(u) = n\}$$

De esta forma, $|V(BL_n)| = n \times 2^n$

Sin embargo, recordemos que $d(v_i) = n$ solo aplica para los vertices extremos, y con la formula dada, estaríamos asumiendo que todos los vertices de $V(BL_n)$ tienen el mismo grado, es decir, estaríamos contando dos veces nuestros "vertices internos", tal que:

$$V(BL_n) = \{d(v_1) = n, d(v_2) = n, \dots, d(u_n) = n\}$$

Así que, solamente dividimos todo nuestra operación entre 2 y tendríamos que $|E(BL_n)| = (n \times 2^n)/2$ O bien, $|E(BL_n)| = n \times 2^{(n-1)}$ Así, nos aseguramos de contar bien los vertices de BL_n .

c) Demuestre que BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 0$.

Definiciones

Def. Sea n un entero positivo. la **Retícula Boleana**, BL_n , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia tiene exactamente un elemento.

Def. Una gráfica G es **bipartita** si $V(G)$ admite una partición $V = (X, Y)$ tal que X y Y son conjuntos independientes.

P.D BL_N es bipartita para cualquier $N \in \mathbb{Z}^+$.

Sean u, v vertices de $V(BL_n)$. Notemos que por definición, los vértices de BL_n tienen cardinalidad par e impar.

Supongamos que tomamos dos vértices pares u y v de nuestra gráfica BL_n , de tal forma que los podemos representar como $\#u = 2m$ y $\#v = 2t$ donde m y t son enteros positivos.

Digamos que $m > t$ y $m \neq t$ por lo que m es igual a $t + g$, con $g \in \mathbb{N}$. Sin importar si hacemos la operación $2m - 2t$ o $2t - 2m$ tendremos que $2(t+g) - 2t = 2g$ o $2t - 2(t+g) = -2g$ (por conmutatividad de la suma).

Es decir, siempre nos quedara un vértice con cardinalidad par si tratamos de sacar su diferencia simétrica. Análogamente se puede probar lo mismo para los vértices impares.

Recordemos que si tenemos un vértice de cardinalidad par o impar estos siempre van a tener al menos una arista por definición de BL_n , de tal manera que vamos a tener una partición $(X, Y) \text{ en } V(BL_n)$ tal que $X \cap Y = \emptyset$

Por lo que en nuestro conjunto de vértices $V(BL_n)$ siempre va a existir una bipartición:

$$X = \{x \mid \#x \text{ es par}\} \text{ y}$$

$$Y = \{y \mid \#y \text{ es impar}\}$$

De esta manera aseguramos que la gráfica BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

5.

6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Hipotesis

$$|E| \geq |V|.$$

Definiciones

Def. Un **ciclo** de tres o mas vértices es una gráfica simple en la que su conjunto de vértices admite un orden cíclico de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en el orden.

Def. Una **trayectoria** es una gráfica simple en la que su conjunto de vértices admite un orden lineal de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en el orden.

P.D Existe alguna arista $v_0v_n \in E(G)$ tal que $v_nv_0 \in E(G)$ para algún orden de vértices cíclico, digamos M , con $M \subseteq V(G)$.

Sea un orden lineal $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_n)$ de vértices de G , donde $n = |V|$, tenemos una trayectoria si m_i es adyacente a m_{i+1} para $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$.

Como se cumplirá siempre, por la condición, la existencia de las aristas $m_0m_1, m_1m_2, m_2m_3, \dots, m_{n-1}m_n$ tendremos que $|E| < |V|$ pues existen dos vértices en la secuencia que no serán adyacentes entre sí, en este caso m_0 y m_n . Con lo anterior tendríamos $|E| = n - 1$.

Con ello, si añadimos una arista m_nm_i al conjunto $E(G)$ tal que $i = \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ (usamos $n-2$ pues si permitimos $i = n-1$ esa arista ya existe y no nos sirve). Como ya hemos garantizado una trayectoria, cualquier arista m_nm_i que añadamos a $E(G)$ nos garantiza un ciclo en G cuando $|E| \geq |V|$.