Gráficas y Juegos: Tarea 02

Martínez Méndez Ángel Antonio
Pinzón Chan José Carlos
Rendón Ávila Jesús Mateo

February 27, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesor: César Hernández Cruz

1. Sea G una gáfica, y recuerde que c_G denota al número de componentes conexas de G. Demuestre que si $e \in E$, entonces $c_G \leq c_{G-e} \leq c_G + 1$.

Hipotesis

G es una gráfica cuyo número de componentes conexas se denota c_G y $e = uv$ es una arista tal que $e \in E_G$

Definiciones

Def. A las subgráficas de una gráfica G, máximas por contención con la propiedad de ser conexas, se les llama **componentes conexas**.

Por hipótesis el número de componentes conexas de G es c_G. Sabemos que $e \in E_G$ por lo cual e forma parte de alguna componente conexa en G. Como se trata de componentes conexas , entre cualesquiera vértices que pertenezcan a la misma componente conexa que e, existe un *camino*. A partir de este punto se pueden distinguir dos casos generales:

Sean x, y dos vértices en la misma componente conexa que e.

1) Existe un $xy - camino$, llamémoslo W, tal que e no forma parte de W:
En este caso, como e no forma parte de W entonces al eliminar dicha arista el $xy - camino$ sigue existiendo.

2) Existe un $xy - camino$, llamémoslo P, tal que e forma parte de P. En este segundo caso es donde divergen dos posibilidades muy importantes:

   (a) Si entre los vértices u y v existe un $uv - camino$ distinto de $\{u,e,v\}$, que denotaremos como R, al eliminar la arista e de G, el camino P ya no coneca a x con y, sin embargo, prevalece un $xy - camino$ descrito del siguiente modo: $xPuRvPy$. En consiguiente podemos decir que la grafica sigue siendo conexa y que por lo tanto $c_{G-e} = c_G$.

   (b) Si entre los vértices u y v el único camino existente es $\{u,e,v\}$, al eliminar e de G, el camino P deja de existir y sucede que u no puede alcanzar a v. Como resultado x no puede alcanzar a y, oséase, no existe un $xy - camino$; la componente conexa se ha separado.Por el incisio 1), sabemos que todos los caminos en los que e no forma parte se conservan, por lo tanto, en ambas particiones la grafica sigue siendo conexa. Asi podemos concluir que $c_{G-e} = c_G + 1$.

A manera de resumen, puede suceder que $c_G = c_{G-e}$, o bien, $c_{G-e} = c_G + 1$, en otras palabras: $c_G \leq c_{G-e} \leq c_G + 1$.

Nota: Eliminar a la arista $\underline{e}$ no afecta a las componentes conexas a las que $\underline{e}$ no pertenece, es por ello que ignoramos al resto de componentes y nos centramos en la componente de $\underline{e}$.

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K. Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. (Sugerencia: Un ejercicio de la tarea anterior puede resultar de utilidad.)

Hipótesis

Una gráfica es **escindible completa** si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida.

Definiciones

Def. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K.
Def. Un subconjunto no vacío de vértices de una gráfica es un **clan** si y sólo si induce una subgráfica completa. Alternativamente, un subconjunto de los vértices de una gráfica G es un clan si y sólo si es un conjunto independiente en la gráfica complementaria $\overline{G}$.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea G una gráfica, tal que G es escindible completa.

Si tenemos una subgráfica inducida de G tal que es igual a C_4, $V_{C_4}=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E_{C_4} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ tenemos 3 posibles biparticiones en C_4:

i) Sea la bipartición (X,Y) en C_4, tal que $v_1, v_3 \in X$ y $v_2, v_4 \in Y$.

Tambien de nuestra hipótesis se sigue que **G no es completa**, pues no existen aristas que unan a los vértices en S.

Finalmente

$\Leftarrow\rfloor$ Sea G una gráfica tal que G no contiene a C_4 ni a

3.

a) Demuestre que si $\mid E \mid > n - 1$, entonces G es conexa.

Hipotesis

Definiciones

b) Para cada $n > 3$ encuentre una gráfica inconexa de orden n con $|E| = n - 1$.

Hipotesis

Definiciones

4.

a) Demuestre que si $\delta > \left(\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1\right)$, entonces G es conexa.

Hipotesis

El grado minimo δ de G es mayor a $\left(\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1\right)$.

Sea G una gráfica cuyo grado minimo es $\delta > \left(\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1\right)$, entonces podemos decir quev $\delta \geq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1 + 1$, es decir:

$$\delta \geq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$$

Si S es un subconjunto de $V(G)$ que satisface $|S| = |V| - 2$ y u, v dos vértices que pertenecen a $V(G)$ y no pertenecen a S.

Como sabemos que $u, v \notin S$. Si es que u es adyacente a $\frac{|S|}{2}$ elementos $s \in S$ y v es adyacente a $\frac{|S|}{2}$ elementos $s' \in S$. Como sabemos que $|S| = |V| - 2$, así u es adyacente a $\frac{|V|-2}{2}$ elementos $s \in S$ y v es adyacente a $\frac{|V|-2}{2}$ elementos $s' \in S$.

Como por hipotesis sabemos que $d(u), d(v) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$, entonces cuando $|V|$ es impar debe haber un s_i en S tal que u es adyacente a s_i y también v es adyacente a s_i, mientras que cuando $|V|$ es par existen al menos un s_i y un s_j a los cuales u y v son adyacentes. Por lo que podemos grantizar una uv- trayectoria P:

$$P = (u, s_k = s_i = s'_k, v) \text{ cuando } |V| \text{ es par e impar y}$$
$$P' = (u, s_k = s_j = s'_k, v), \text{ cuando } |V| \text{ es par}$$

para cada $u, v \in V(G)$. Por lo tanto G es conexa.

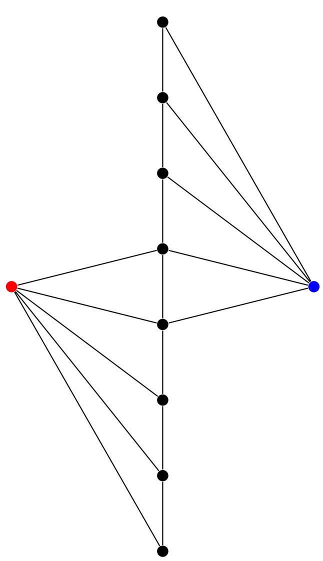

Figure 1: Representación de G cuando $|V|$ es par, suponiendo que la columna central son adaycentes cualesqueira 2 vértices

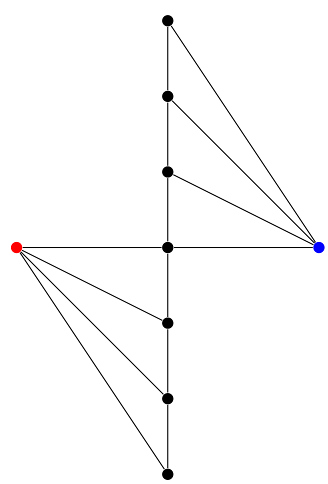

Figure 2: Representación de G cuando $|V|$ es impar

b) Para $|V|$ par encuentre una gráfica $\left(\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1\right)$-regular e inconexa.

Como podemos ver de dibujar las gráficas para $|V| = 2, |V| = 4, |V| = 6$ y $|V| = 8$

Figure 3: Representación de una gráfica 0-regular de 2 vértices

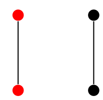

Figure 4: Representación de una gráfica 1-regular de 4 vértices

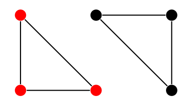

Figure 5: Representación de una gráfica 2-regular de 6 vértices

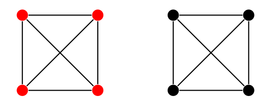

Figure 6: Representación de una gráfica 3-regular de 6 vértices

Podemos decir que las gráficas que representan la condición son las $2k_n$ con $n \geq 1$ y $n \in \mathbb{N}$.

5. Demuestre que si D no tiene lazos y $\delta^+ \geq 1$, entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

Definiciones

Def.