



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD CUAJIMALPA  
DIVISION DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

# Introducción a la Teoría de las Gráficas

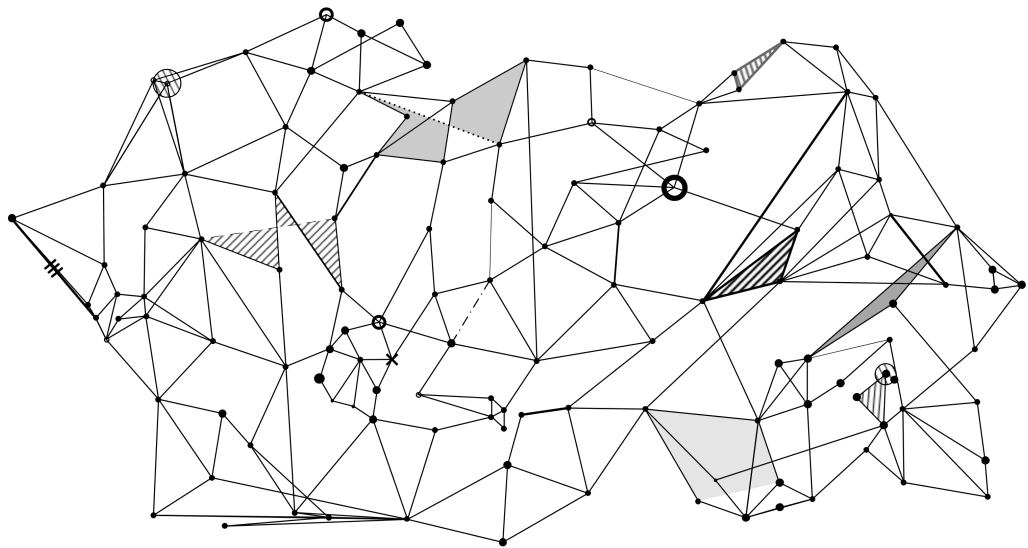
Abril 2017

**Dr. Diego Antonio González-Moreno**

Departamento de Matemáticas  
Aplicadas y Sistemas

ISBN: 978-607-28-1037-2

# Introducción a la Teoría de las Gráficas



Diego Antonio González-Moreno<sup>1</sup>  
*Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas*  
Universidad Autónoma Metropolitana - Cuajimalpa.

17 de abril de 2017

<sup>1</sup>e-mail: [dgonzalez@correo.cua.uam.mx](mailto:dgonzalez@correo.cua.uam.mx)



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción a la Teoría de las Gráficas</b>	<b>7</b>
1.1. Los puentes de Königsberg . . . . .	7
1.2. Gráficas . . . . .	8
1.2.1. Caminos, trayectorias, ciclos y distancia . . . . .	14
1.2.2. Gráficas conexas . . . . .	16
1.2.3. Gráficas bipartitas . . . . .	17
1.2.4. Gráficas y matrices . . . . .	18
1.3. Digráficas . . . . .	21
1.4. Ejercicios . . . . .	24
<b>2. Árboles</b>	<b>29</b>
2.1. Problema del mínimo conector . . . . .	29
2.2. Árboles . . . . .	30
2.2.1. Excentricidad y centros . . . . .	34
2.3. Árboles generadores . . . . .	36
2.3.1. Árboles de peso mínimo . . . . .	36
2.4. Árboles y probabilidad . . . . .	39
2.5. $k$ -árboles . . . . .	42
2.6. Ejercicios . . . . .	44
<b>3. Recorridos en gráficas</b>	<b>49</b>
3.1. Gráficas Eulerianas. . . . .	49
3.2. Gráficas Hamiltonianas . . . . .	52
3.3. Aplicaciones de recorridos en gráficas . . . . .	56
3.3.1. Dominos . . . . .	57
3.3.2. El problema del caballo de ajedrez . . . . .	57
3.3.3. Problema del agente viajero . . . . .	59
3.3.4. La Mesa Redonda . . . . .	60
3.4. Ejercicios . . . . .	61

<b>4. Conexidad</b>	<b>67</b>
4.1. Conexidad por aristas . . . . .	67
4.2. Conexidad por vértices . . . . .	69
4.3. Bloques . . . . .	71
4.4. Teorema de Menger . . . . .	75
4.5. Conexidad Promedio . . . . .	80
4.6. Ejercicios . . . . .	81
<b>5. Planaridad</b>	<b>85</b>
5.1. Gráficas Planas . . . . .	85
5.1.1. Problema de la fábrica de ladrillos . . . . .	85
5.2. Fórmula de Euler . . . . .	88
5.3. Sólidos Platónicos . . . . .	93
5.4. Ejercicios . . . . .	97
<b>6. Coloraciones de gráficas</b>	<b>99</b>
6.1. Problema de los Cuatro Colores . . . . .	99
6.2. Coloración de vértices . . . . .	102
6.3. Algoritmo Greedy . . . . .	105
6.3.1. Algoritmo Greedy . . . . .	106
6.4. Sudoku . . . . .	108
6.5. Coloración por aristas . . . . .	110
6.6. Ejercicios . . . . .	112

# Prefacio

“La Teoría de las Gráficas nos cautiva por la belleza de sus métodos y resultados.”

V. Neuman-Lara

La Teoría de las Gráficas es una rama de las Matemáticas Discretas que en los últimos años ha tenido un gran desarrollo, probablemente debido a la enorme cantidad de aplicaciones que estas tienen. Se considera que tiene su inicio en 1736 cuando Leonhard Euler [16] publicó *Solutio problematis and geometrian situs pertinentis* en donde aparece la solución al famoso *Problema de los Puentes de Königsberg*. Durante el siglo XIX la Teoría de las Gráficas fue redescubierta a través del estudio de diversos problemas obteniendo así nuevos y más resultados importantes. Por ejemplo, Arthur Cayley [11] en 1857, mientras estudiaba la cantidad posible que podía haber de ciertas estructuras químicas, descubrió una importante familia de gráficas, a las que llamó árboles. Aunque poco a poco iba aumentando el interés en ésta área, fue hasta 1936 cuando el húngaro Dénes König [26] publicó el primer libro sobre este tema. Así que podemos decir que la Teoría de las Gráficas es un área muy joven dentro del mundo de las matemáticas, sobre todo si la comparamos con la antigüedad de otras áreas como la Geometría o el Álgebra.

El objetivo de este libro es proporcionar a estudiantes de cursos de Teoría de las Gráficas un texto escrito y pensado en español. Ha sido un esfuerzo intentar presentar los temas de este libro de forma simple y rigurosa. Los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo forman una parte esencial para reforzar los conceptos, ideas y técnicas utilizadas en cada capítulo, por este motivo es que se recomienda ampliamente resolverlos.

Debido a que las gráficas (o grafos como los llaman en otros países) tienen una gran cantidad de aplicaciones y se utilizan en muchas áreas de la ciencia (química, computación, biología, sociología, etc.), es posible que algunos términos y conceptos que aparecen en este libro se encuentren definidos con otra notación o nombre en otros textos. De forma sistemática, las palabras escritas en itálicas y negritas se refieren a la definición de conceptos. La terminología y definiciones que aquí utilizamos intentan estar apegadas y ser congruentes con la tradición teórica de la Teoría de las Gráficas en México.

La estructura de este libro está formada por seis capítulos. En el primer capítulo se presentan las definiciones y los conceptos básicos de la Teoría de las Gráficas. En el segundo capítulo hablaremos de una importante clase de gráficas llamada árboles. Se muestran algunos conceptos y propiedades estructurales de ésta familia. En el capítulo tres se habla sobre caminos Eulerianos y ciclos Hamiltonianos, se presentan condiciones que debe satisfacer una gráfica para que ésta posea un camino o un ciclo con ciertas características. En el Capítulo 4 se aborda

el tema de la conexidad de una gráfica y se presenta el famoso Teorema de Menger. El Capítulo 5 está dedicado al tema de planaridad, el cual ha sido muy importante para el desarrollo de la Teoría de las Gráficas, se presenta la fórmula de Euler y cómo se utiliza ésta para probar que solamente hay cinco sólidos platónicos. En el último capítulo se habla de coloraciones en gráficas y se pone especial interés en el problema de los cuatro colores. En cada uno de los capítulos de este libro se muestran ejemplos de aplicaciones en los que se utilizan los conceptos vistos para resolver algún problema particular.

Espero que este texto sirva para lograr un mayor interés y difusión de la Teoría de las Gráficas entre estudiantes de Matemáticas y Computación. Finalmente deseo agradecer a todos los estudiantes, quienes con sus observaciones, sugerencias y consejos han ayudado a la elaboración de este texto y sin los cuales este esfuerzo no hubiera sido posible.

# Capítulo 1

## Introducción a la Teoría de las Gráficas

En este capítulo presentamos formalmente el concepto de gráfica. También se dan algunas definiciones básicas, las cuales se utilizan para obtener algunos resultados sencillos. El Capítulo comienza con una breve explicación del Problema de los Puentes de Königsberg, el cual se considera como el inicio de esta rama de las matemáticas. En secciones posteriores se introducen las ideas de camino, trayectoria, ciclo, conexidad, matriz de adyacencia e incidencia. Finalmente, se da una breve presentación del concepto de digráfica.

### 1.1. Los puentes de Königsberg

En la ciudad de Königsberg (hoy llamada Kaliningrado) pasa el río Pregel, el cual rodea dos islas ( $A$  y  $D$ ) comunicadas entre sí mediante un puente. Cada ribera ( $B$  y  $C$ ) se conecta con  $A$  a través de dos puentes, y con  $D$  por medio de uno (ver Figura 1.1). El problema que se planteaban los habitantes de la ciudad consistía en encontrar un paseo que comience y termine en una de las dos riberas, durante el cual se utilicen los siete puentes y no se pase dos veces por ninguno de ellos.

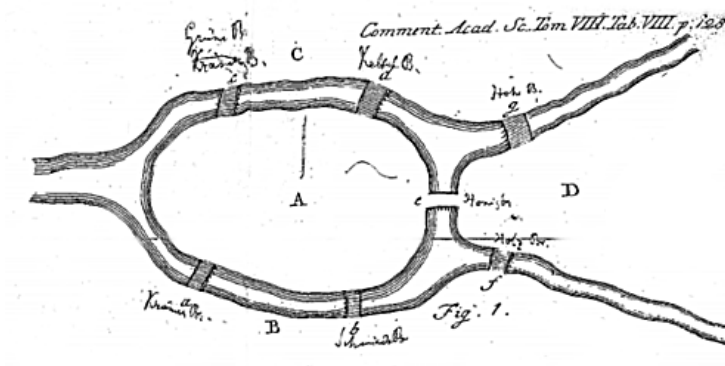


Figura 1.1: Diagrama de la ciudad de Königsber que aparece en el artículo original de Euler.



Euler [16] en 1736 publicó la respuesta a esta pregunta. Para resolver el problema realizó lo que hoy en día se conoce como un modelo matemático. En este representaba a cada una de las islas y a las dos riberas por un vértice y puso una arista por cada puente. De esta forma obtuvo el diagrama que aparece en la Figura 1.2. No es difícil ver que resolver el problema de los Puentes de Königsberg es equivalente a realizar el dibujo, del diagrama asociado al problema, sin levantar el lápiz del papel ni trazar dos veces la misma línea.

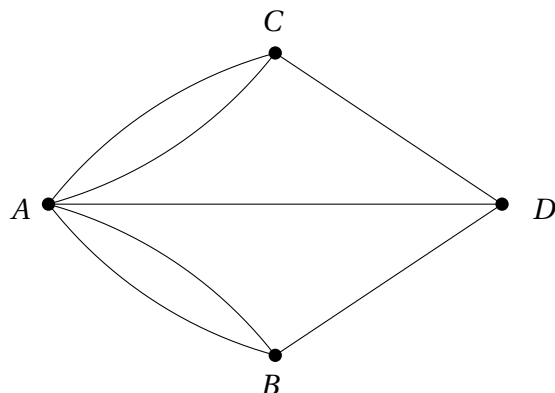


Figura 1.2: Diagrama asociado al problema de los puentes de Königsberg.

Después de un estudio minucioso sobre las condiciones que tiene que cumplir el diagrama para que exista un camino con estas características, Euler deduce que para que dicho recorrido sea posible es necesario que todos los vértices en el diagrama sean incidentes con un número par de líneas. Como en el diagrama todos los vértices tienen un número impar de líneas se concluye que no existe una solución al problema de los puentes de Königsberg. El análisis y la solución a este problema se detallan en la Sección 3.1 del Capítulo 3.

## 1.2. Gráficas

Una **gráfica**  $G$  es una estructura formada por un conjunto no vacío  $V = V(G)$  cuyos elementos son llamados **vértices**, y un conjunto  $E = E(G)$  de pares no ordenados de vértices llamados **aristas**. Por comodidad, una arista  $\{u, v\}$  será denotada por  $uv$ .

Una gráfica se puede representar geométricamente mediante un dibujo, en el cual los vértices son puntos y las aristas son líneas que conectan a los puntos. Se puede observar que el dibujo de la gráfica determina completamente a la gráfica. Por ejemplo, la gráfica  $G$  definida por  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $E = \{v_1 v_2, v_1 v_4, v_2 v_3, v_3 v_4\}$  se puede representar a través del dibujo que aparece en la Figura 1.3.

La definición de gráfica se puede ampliar si se permiten **lazos**, es decir, aristas de la forma  $uu$ , y **aristas paralelas** entre pares de vértices. A una gráfica con lazos y aristas paralelas se le conoce como **multigráfica**. Diremos que una gráfica es **simple** si no contiene lazos y aristas paralelas. En la Figura 1.4 se muestra una multigráfica con un lazo y dos aristas paralelas. A

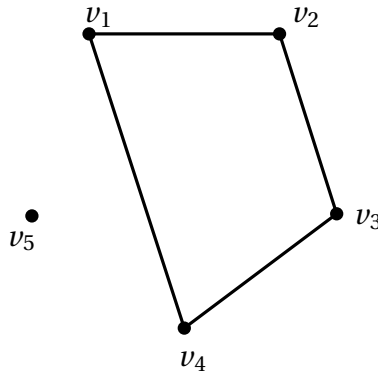


Figura 1.3: Gráfica  $G$  con  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_1 v_4\}$ .

menos que se mencione lo contrario, en este libro sólo vamos a trabajar con gráficas sin lazos y sin aristas paralelas, es decir, con gráficas simples.

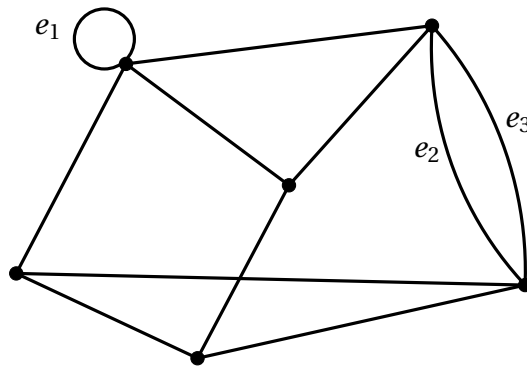


Figura 1.4: Multigráfica con un lazo  $e_1$  y dos aristas paralelas  $e_2$  y  $e_3$ .

El número de vértices de una gráfica es conocido como el **orden** y el número de aristas es el **tamaño**. Si una arista  $e = uv$  relaciona los vértices  $u$  y  $v$ , decimos que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**, en caso contrario decimos que son **independientes**. También se dice que  $u$  y  $v$  son **incidentes** con la arista  $e$ . Además, si  $e_1 = uv \in E(G)$  y  $e_2 = vw \in E(G)$  diremos que  $e_1$  y  $e_2$  son **aristas adyacentes**.

Dado un vértice  $u$  en una gráfica  $G$ , denotamos por  $N(u)$ <sup>1</sup> al conjunto de todos los vértices adyacentes a  $u$ . A este conjunto se le conoce como la **vecindad de  $u$** . El **grado** o **valencia de  $u$**

<sup>1</sup>En caso de ser necesario se puede denotar a la vecindad de  $N(u)$  con un subíndice, es decir,  $N(u) = N_G(u)$ , para aclarar en qué gráfica estamos considerando a la vecindad de  $u$ .

se denota como  $d(u)$  o  $val(u)^2$  y es el número de vecinos de  $u$ , es decir,  $d(u) = val(u) = |N(u)|$ . El **grado mínimo** de una gráfica  $G$  se denota por  $\delta(G)$  y se define como

$$\delta(G) = \min\{d(u) : u \in V(G)\},$$

similarmemente se define el **grado máximo** de  $G$  como

$$\Delta(G) = \max\{d(u) : u \in V(G)\}.$$

Si  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ , decimos que la gráfica es  **$k$ -regular**. En la Figura 1.5 se muestra una gráfica con grado mínimo 3 y grado máximo ocho y otra gráfica 3-regular.

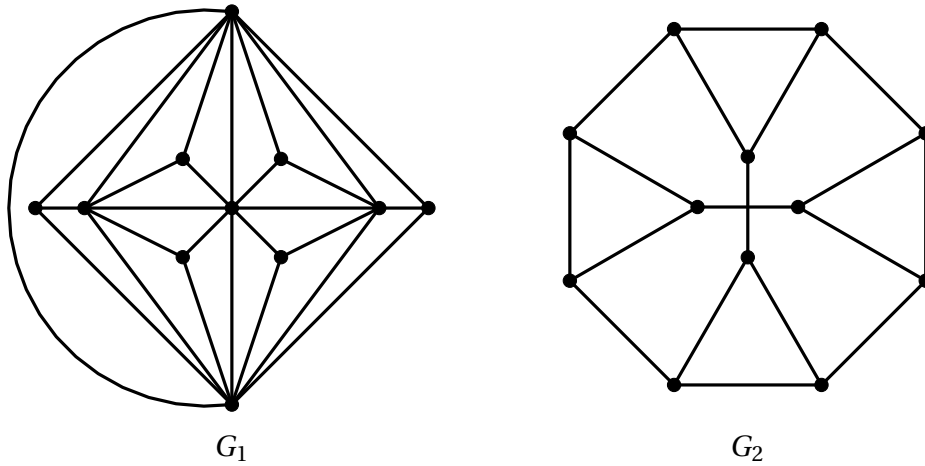


Figura 1.5:  $\delta(G_1) = 3$ ,  $\Delta(G_1) = 8$  y  $\delta(G_2) = \Delta(G_2) = 3$ .

Se define **complemento de  $G = (V, E)$**  como la gráfica  $G^c = (V^c, E^c)$ , en donde  $V = V^c$  y  $uv \in E^c$  si y sólo si  $uv \notin E$ . El **grado promedio** de una gráfica  $G$  con  $n$  vértices se define como

$$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{n}.$$

Obsérvese que si  $G$  es una gráfica  $k$ -regular, entonces  $\bar{d}(G) = k$ .

Una gráfica es **completa** si entre cualquier par de vértices hay una arista (ver Figura 1.6). La gráfica completa con  $n$  vértices se denota como  $K_n$ . Es fácil ver que la gráfica  $K_n$  es una gráfica  $(n-1)$ -regular.

En este momento podemos preguntarnos sobre el tamaño de la gráfica completa con  $n$  vértices. Utilizando la terminología que acabamos de ver, queremos encontrar  $|E(K_n)|$ . No es difícil ver que

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

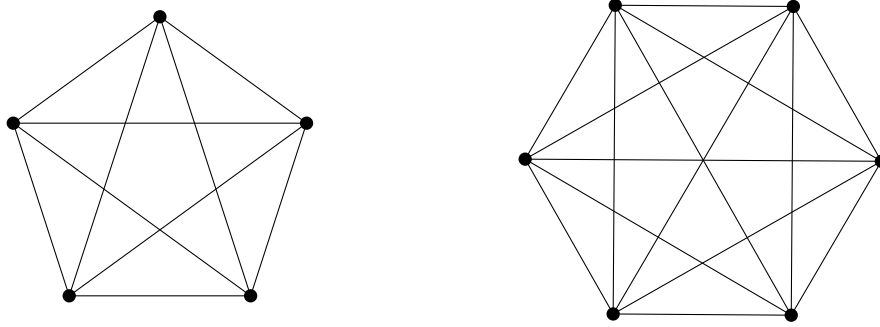


Figura 1.6: Gráfica completa  $K_5$  y  $K_6$ , respectivamente.

Con las definiciones que ya conocemos podemos probar un primer resultado, el cual relaciona el número de aristas (tamaño) en una gráfica y los grados de sus vértices. Si sumamos los grados de todos los vértices de una gráfica, se puede ver que cada arista  $e = uv$  se cuenta dos veces (una vez cuando contamos el grado de  $u$  y otra cuando contamos el grado de  $v$ ). Entonces podemos formular el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.1.** *Dada una gráfica  $G$  con  $m$  aristas, se tiene*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

El teorema anterior es conocido como el Teorema de los Apretones de Manos (*handshaking lemma*) pues se puede formular de la siguiente forma:

*en toda fiesta el número total de manos que se aprietan cuando las personas se saludan es par.*

Intentando averiguar un poco más sobre la estructura de una gráfica podemos sacarle más jugo al resultado anterior y obtener la siguiente propiedad.

**Corolario 1.2.1.** *En toda gráfica, el número de vértices de grado impar es par.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica con  $m$  aristas. Por el Teorema 1.2.1 sabemos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Ahora, separando la suma en dos términos, correspondientes a los vértices de grado par y los vértices de grado impar, tenemos

$$\sum_{v \in V(G), d(v) \text{ par}} d(v) + \sum_{v \in V(G), d(v) \text{ impar}} d(v) = 2m.$$

---

<sup>2</sup>Igual que con la vecindad de un vértice, si fuese necesario se le puede agregar un subíndice  $d_G(u)$  o  $val_G(u)$ .

Como el primer sumando sólo esta formado de la suma de números pares, se sigue que el resultado es un número par. Por lo tanto, tenemos que el segundo sumando también tiene que ser par, y eso sucede si y sólo si el número de vértices de grado impar es par.  $\square$

Traduciendo el corolario anterior al lenguaje de apretones de manos tenemos que

*en toda fiesta el número de personas que dan un número impar de apretones de manos es par.*

## Subgráficas

Un concepto muy importante en Teoría de las Gráficas es el de subgráfica. Una gráfica  $G'$  es **subgráfica de**  $G$  si el conjunto de los vértices de  $G'$  es un subconjunto de los vértices de  $G$  y el conjunto de las aristas de  $G'$  es un subconjunto de las aristas de  $G$ , es decir, si

a)  $V(G') \subseteq V(G)$ .

b)  $E(G') \subseteq E(G)$ .

Si  $A$  es un subconjunto de los vértices de una gráfica  $G$ , podemos asociarle una subgráfica al conjunto  $A$ , a la cual se le conoce como la **subgráfica inducida por**  $A$  y se denota por  $G[A]$ . Esta subgráfica se obtiene al considerar a todos los vértices en  $A$  y a las aristas de  $G$  que son incidentes con ellos.

En la Figura 1.7 se muestra la gráfica inducida  $G[A]$ , donde  $A = \{a, b, d, e, f\}$ , y la subgráfica  $H$  con  $V(H) = \{c, d, e, f, g\}$  y  $E(H) = \{cg, dg, de, gf\}$ .

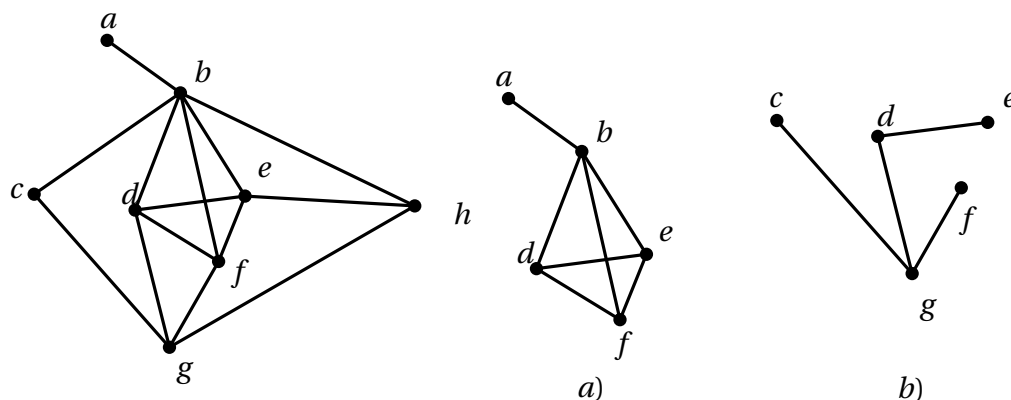


Figura 1.7: a) Subgráfica inducida por  $A = \{a, b, d, e, f\}$  b) subgráfica.

Dada una gráfica  $G$ , se puede definir de forma natural la eliminación de los elementos de un conjunto de vértices  $S$  como  $G - S$ , que es la gráfica que obtenemos al quitar de  $G$  a todos los vértices de  $S$  y todas las aristas incidentes con estos. De forma análoga, si  $W$  es un conjunto de

aristas de  $G$ , tenemos que  $G - W$  es la gráfica obtenida al eliminar de  $G$  a todas las aristas en  $W$ . En el caso en el que el conjunto esté formado por un solo elemento, es decir,  $S = \{v\}$  ( $W = \{e\}$ ), denotamos a la gráfica  $G - S$  ( $G - W$ ) como  $G - v$  ( $G - e$ ) (ver Figura 1.8).

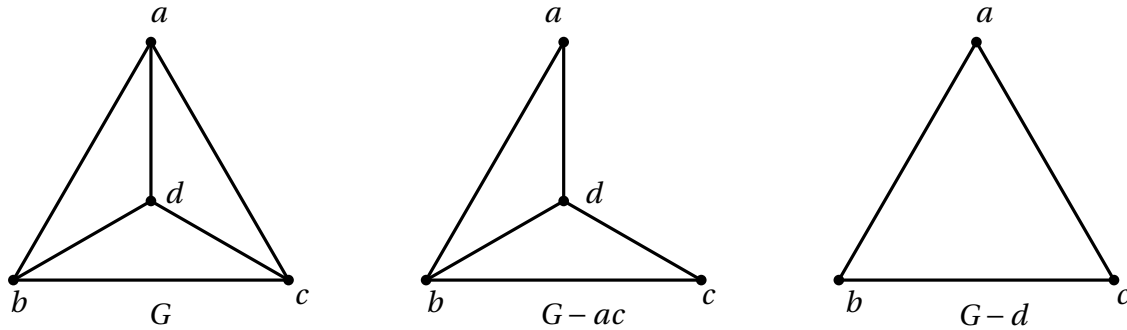


Figura 1.8: Eliminación de una arista y un vértice.

## Isomorfismos entre gráficas

En la Sección 1.2 mencionamos que una gráfica puede representarse geoméricamente mediante un dibujo, más aún, hicimos la observación que el dibujo determina completamente a la gráfica, pues a partir de él se pueden obtener los vértices y la regla de adyacencia. Es fácil ver que hay muchas formas de realizar dicho dibujo. Por ejemplo, sea  $G$  la gráfica con conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y aristas  $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5, v_5 v_1\}$ . En la Figura 1.9 se muestran dos formas distintas de dibujar a  $G$ . Es muy importante hacer notar que los dos dibujos son distintos pero vistos como gráficas representan a la misma gráfica. A esta idea se le

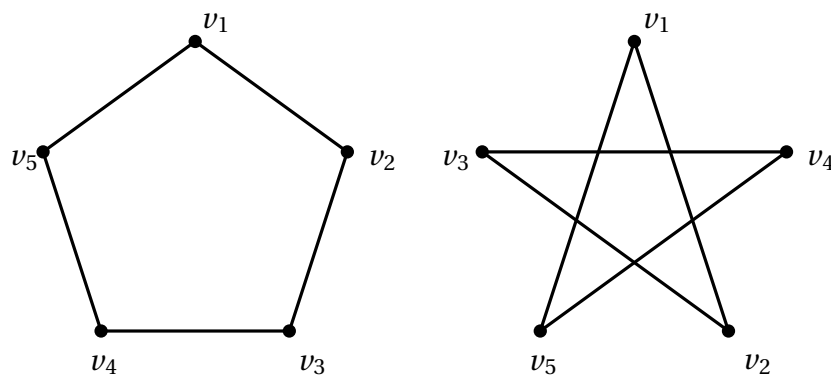


Figura 1.9: Dos formas de dibujar la misma gráfica.

conoce como isomorfismo entre gráficas.

**Definición 1.2.1.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas. Decimos que  $G$  y  $H$  son **isomorfas** si existe una función biyectiva  $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$  que preserva las adyacencias, es decir,

$$uv \in E(G) \text{ si y sólo si } \phi(u)\phi(v) \in E(H).$$

A la función  $\phi$  se le llama **isomorfismo**.

En la Figura 1.10 se puede ver que las dos gráficas son isomorfas pues la función  $\phi(x) = x'$  para  $x \in \{a, b, c, d\}$  es un isomorfismo. Claramente, dos gráficas isomorfas deben tener el mismo

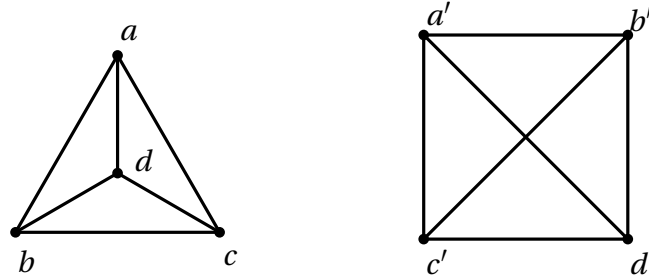


Figura 1.10: Dos gráficas isomorfas.

orden y el mismo tamaño. Además de tener el mismo grado mínimo, grado máximo, y mismo número de vértices de un cierto grado, entre otras cosas.

### 1.2.1. Caminos, trayectorias, ciclos y distancia

Una idea que surge de forma natural cuando se estudia una gráfica es la de camino. Dada una gráfica  $G$ , un **camino** es una sucesión de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_l)$  con  $v_{i-1}v_i \in E(G)$  para todo  $i = 2, 3, \dots, l$ . Obérvase que un camino también puede describirse como una sucesión alternada de vértices y aristas  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{l-1}, v_l)$ , en donde  $v_i v_{i+1} = e_i \in E(G)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, l-1$ .

También es importante hacer notar que en la definición de camino no se prohíbe repetir vértices o aristas. Si el camino no repite aristas se le llama **paseo** y si no repite vértices se llama **trayectoria**. Si el camino comienza en un vértice  $u = v_1$  y termina en un vértice  $v = v_l$ , nos referimos al camino como un  $uv$ -camino. Si  $u = v$  diremos que el camino es **cerrado**. De forma análoga podemos definir los  $uv$ -paseos, paseos cerrados y las  $uv$ -trayectorias.

En la gráfica de la Figura 1.11 se puede ver que la sucesión  $C = (v_1, v_5, v_7, v_6, v_5, v_7, v_8, v_4)$  es un  $v_1 v_4$ -camino. Las sucesiones  $P = (v_1, v_5, v_7, v_6, v_5, v_3, v_4)$  y  $T = (v_1, v_5, v_3, v_7, v_4)$  son un  $v_1 v_4$ -paseo y una  $v_1 v_4$ -trayectoria, respectivamente.

Obérvase que un camino puede repetir vértices. Si tenemos un  $uv$ -camino  $C$  que repite vértices podemos encontrar un atajo y encontrar una  $uv$ -trayectoria cuyos vértices y aristas son parte de  $C$ .

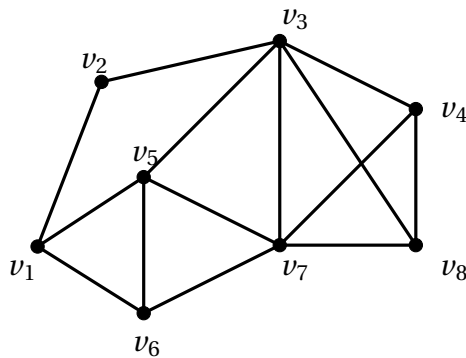


Figura 1.11: Gráfica G.

**Teorema 1.2.2.** Sea  $G$  una gráfica y sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$ . Entonces todo  $uv$ -camino contiene una  $uv$ -trayectoria.

*Demostración.* Sea  $C = (u = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, e_k, x_k = v)$  un  $uv$ -camino. Si  $C$  no repite vértices entonces  $C$  es una trayectoria y el resultado se sigue. Supongamos que  $C$  contiene un vértice que se repite, es decir, que para  $i \neq j$ , con  $0 \leq i < j \leq k$  tenemos que  $v_i = v_j$ . Entonces vamos a “recortar” el camino  $C$  al quitar el segmento  $e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j$ . De esta forma construimos un nuevo  $uv$ -camino que repite menos vértices. Este proceso lo podemos realizar tantas veces como sea necesario para obtener un  $uv$ -camino que no repite vértices, es decir, una  $uv$ -trayectoria.  $\square$

La **longitud de un camino**  $C$  es el número de aristas que tiene  $C$  y la denotamos como  $\text{long}(C)$ . De forma análoga, se define la **longitud de un paseo** y la **longitud de una trayectoria** como el número de aristas que tiene el paseo o la trayectoria, respectivamente. Entonces, regresando a nuestro ejemplo tenemos que  $\text{long}(C) = 7$ ,  $\text{long}(P) = 6$  y  $\text{long}(T) = 4$ . Si la trayectoria tiene longitud  $n$ , se denota como  $T_n$ . Decimos que un camino  $C = (v_1, v_2, \dots, v_l)$  es **cerrado** si el primer vértice y el último coinciden, es decir, si  $v_1 = v_l$ . Un **ciclo** es un camino cerrado en el cual todos los vértices son distintos. La **longitud del ciclo** es el número de aristas que tiene el ciclo. Denotamos como  $C_n$  a un ciclo de longitud  $n$ . La longitud del ciclo más pequeño de la gráfica se llama el **cuello** de la gráfica. Si la gráfica  $G$  no contiene ciclos, decimos que es **acíclica** y que su cuello es  $\infty$ .

Se puede ver que en la gráfica de la Figura 1.11 la sucesión  $(v_3, v_4, v_8, v_7, v_3)$  es un ciclo de longitud 4. También es fácil de ver que el cuello de  $G$  es 3, pues el ciclo  $C = (v_1, v_5, v_6, v_1)$  es un ciclo de longitud mínima en la gráfica, es decir, un  $C_3$ .

Una vez conocido el concepto de longitud, podemos introducir la definición de distancia. La **distancia** entre dos vértices  $u$  y  $v$  se denota como  $d(u, v)$  y se define como la longitud de la  $uv$ -trayectoria más pequeña. Si dicha trayectoria no existe decimos que  $d(u, v) = \infty$ .

En la gráfica  $G$  que aparece en la Figura 1.11, tenemos que  $d(v_1, v_8) = 3$ , pues  $T = (v_1, v_6, v_7, v_8)$  es una  $v_1 v_8$ -trayectoria de longitud mínima. Si calculamos todas las distancias entre los vértices de  $G$ , podemos observar que la máxima de estas distancias es 3, entonces decimos que  $G$



tiene diámetro 3 y lo denotamos como  $diam(G) = 3$ . En general, el **diámetro** de una gráfica es la máxima de las distancias entre cualquier par de vértices de la gráfica. Dicho de otra forma tenemos que

$$diam(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}.$$

Dada una gráfica  $G$ , se puede ver que la distancia cumple las siguientes propiedades:

1.  $d(u, v) \geq 0$  para todo  $u, v \in V(G)$ . Además,  $d(u, v) = 0$  si y sólo si  $u = v$ .
2.  $d(u, v) = d(v, u)$ , para todo  $u, v \in V(G)$ .
3.  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ , para todo  $u, v, w \in V(G)$  (desigualdad del triángulo).

### 1.2.2. Gráficas conexas

Una de las familias de gráficas más importantes es la de las gráficas conexas. Decimos que dos vértices  $u$  y  $v$  de una gráfica  $G$  están **conectados** si existe una  $uv$ -trayectoria en  $G$ . Una gráfica  $G$  es **conexa** si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  existe una  $uv$ -trayectoria, es decir, si  $u$  y  $v$  están conectados.

Si  $H$  es una subgráfica de  $G$ , diremos que  $H$  es una **componente conexa** de  $G$  si  $H$  no está contenida en ninguna subgráfica conexa de  $G$  con más vértices o más aristas que  $H$  (ver Figura 1.12).

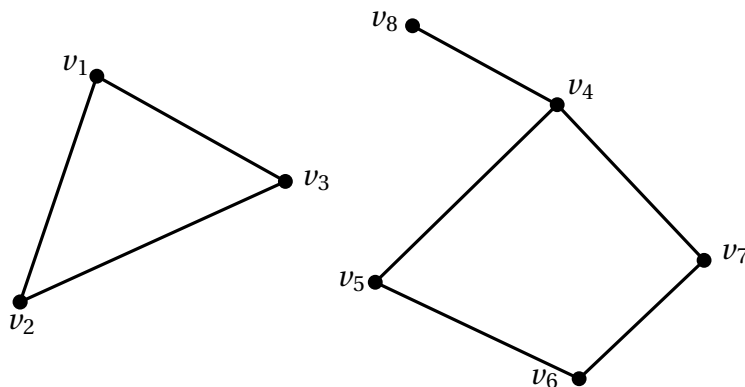


Figura 1.12: Gráfica con dos componentes conexas.

Consideremos la gráfica conexa de la Figura 1.13, se puede ver que la arista  $e$  y los vértices  $u$  y  $v$  tienen una gran importancia en términos de la conexidad de la gráfica, pues las gráficas  $G - e$ ,  $G - u$  y  $G - v$  no son conexas. En general, dada una gráfica conexa  $G$ , decimos que  $e \in E(G)$  es un **punto de corte** si la gráfica  $G - e$  no es conexa. Similarmente, un vértice  $v$  de  $G$  es un **vértice de corte** si  $G - v$  no es conexa. No es muy difícil ver que si  $e$  es un punto de corte de  $G$ , entonces la gráfica  $G - e$  tiene exactamente dos componentes conexas (ver ejercicio 14).

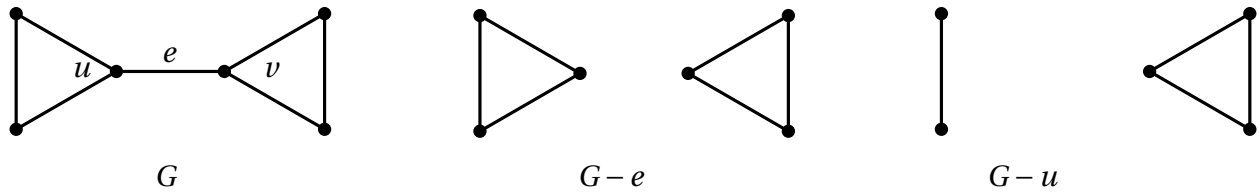


Figura 1.13: Gráfica  $G$  con un puente  $e$  y con vértices de corte  $u$  y  $v$ .

### 1.2.3. Gráficas bipartitas

Otra familia importante de gráficas son las gráficas bipartitas.

**Definición 1.2.2.** Una gráfica  $G$  es **bipartita** si existen dos conjuntos  $A$  y  $B$  de los vértices de  $G$  tales que

- a)  $A \cup B = V(G)$ .
- b)  $A \cap B = \emptyset$ .
- c) Si  $uv \in E(G)$ , entonces  $u \in A$  y  $v \in B$ .

Vale la pena mencionar que la pareja de conjuntos que forma una partición puede no ser única y que uno de los conjuntos  $A$  o  $B$  puede ser vacío. Con esta observación tenemos que la gráfica formada por un solo vértice es bipartita y que las gráficas bipartitas no pueden tener lazos. También hay que recalcar que una gráfica es bipartita si y sólo si cada una de sus componentes conexas es bipartita. Al analizar la longitud de los ciclos de la gráfica de la Figura 1.14 se

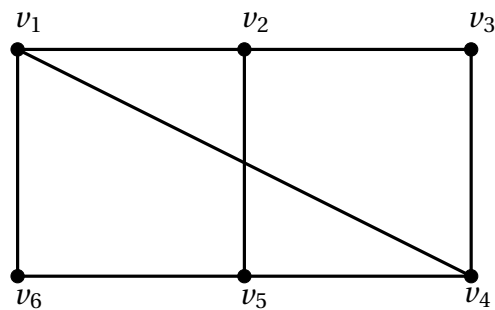


Figura 1.14: Gráfica bipartita con bipartición  $A = \{v_1, v_3, v_5\}$  y  $B = \{v_2, v_4, v_6\}$ .

puede ver que todos los ciclos tienen longitud par. El siguiente teorema es una caracterización de las gráficas bipartitas en términos de la longitud de los ciclos.

**Teorema 1.2.3.** Una gráfica  $G$  es bipartita si y sólo si  $G$  no contiene ciclos de longitud impar.

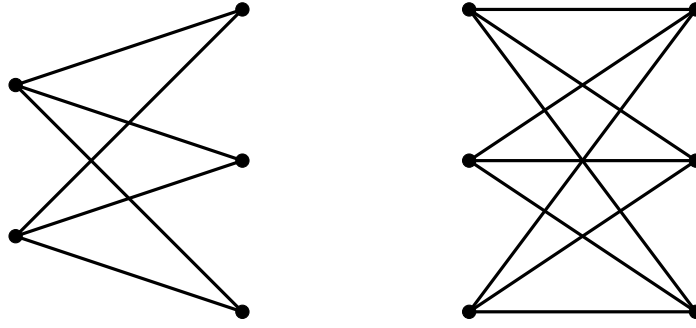


Figura 1.15: Gráficas bipartitas  $K_{2,3}$  y  $K_{3,3}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es una gráfica bipartita. Sea  $(A, B)$  una partición de los vértices de  $G$  que cumple con las condiciones de la Definición 1.2.2. Sea  $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$  un ciclo en  $G$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $v_1 \in A$ . Entonces  $v_2 \in B$ ,  $v_3 \in A$ ,  $v_4 \in B$  y así sucesivamente. Es decir,  $v_i \in A$  si y sólo si  $i$  es impar y  $v_j \in B$  si y sólo si  $j$  es par. Como  $v_k \in B$  (pues  $v_1 v_k \in E(G)$ ), entonces se sigue que  $k$  es un número par y por lo tanto la longitud de  $C$  es par.

Ahora supongamos que  $G$  no contiene ciclos de longitud impar. Como sabemos que una gráfica es bipartita si y sólo si cada una de sus componentes conexas es bipartita, podemos suponer que  $G$  es conexa. Sea  $u$  un vértice de  $G$  y consideremos siguiente pareja de conjuntos de  $V(G)$

$$A = \{v \in V(G) : d(u, v) \text{ es impar}\} \text{ y } B = V(G) \setminus A.$$

Claramente no puede existir una arista entre dos vértices de  $A$  o dos vértices de  $B$ , pues en caso de existir  $G$  tendría un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción con nuestras hipótesis. Por lo tanto la pareja  $(A, B)$  cumple con las condiciones de la definición 1.2.2 y  $G$  es una gráfica bipartita.  $\square$

Decimos que  $G$  es una **gráfica bipartita completa** si todo vértice en  $A$  es adyacente a todo vértice en  $B$ . Si  $|A| = n$  y  $|B| = m$  denotamos a  $G$  como  $K_{n,m}$ . Se puede ver que  $|V(K_{n,m})| = n + m$  y  $|E(K_{n,m})| = nm$ .

La gráficas bipartitas tienen una enorme cantidad de aplicaciones, para más información sobre el tipo de aplicaciones les recomendamos ver el libro de Asratian et al [3].

#### 1.2.4. Gráficas y matrices

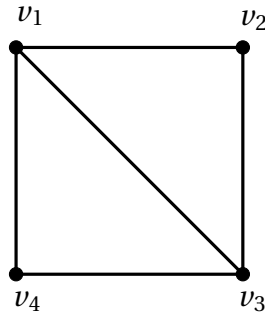
Anteriormente mencionamos que toda gráfica puede representarse geoméricamente mediante un dibujo formado por puntos y líneas. Sin embargo, en ocasiones es conveniente utili-

zar otro tipo de representación de la gráfica. Una manera muy útil de hacerlo es mediante una matriz.

### Matriz de adyacencia

Dada una gráfica  $G = (V, E)$  con  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  se define la **matriz de adyacencia**  $A(G)$  de  $G$  como la matriz cuadrada de  $n \times n$  definida por  $A(G) = [a_{ij}]$ , donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Figura 1.16: Una gráfica y su matriz de adyacencia.

Muchas propiedades pueden obtenerse a partir de la matriz de adyacencia de una gráfica. Como ejemplo, presentamos el siguiente teorema, del cual omitimos su demostración, pues utiliza técnicas del álgebra lineal. Para ver una demostración les recomendamos el libro de teoría algebraica de las gráficas de Biggs [8].

**Teorema 1.2.4.** *Sea  $G$  una gráfica y  $A(G)$  su matriz de adyacencia. Entonces el número de caminos (pueden repetir vértices y aristas) de longitud  $l$  entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$  es la entrada  $a_{ij}$  de la matriz  $A(G)^l$ .*

Una implicación inmediata del teorema anterior es el siguiente corolario, el cual nos proporciona un método para encontrar la distancia entre dos vértices.

**Corolario 1.2.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con matriz de adyacencia  $A(G)$ . Entonces la distancia entre dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  de  $G$  es el menor entero  $l$  tal que la entrada  $a_{ij}$  de la matriz  $A(G)^l$  es distinta de cero.*

Si la gráfica no tiene lazos, entonces la matriz  $A(G)$  tiene ceros en la diagonal, además se puede ver que es una matriz simétrica<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Una matriz simétrica es una matriz que es igual a su transpuesta.

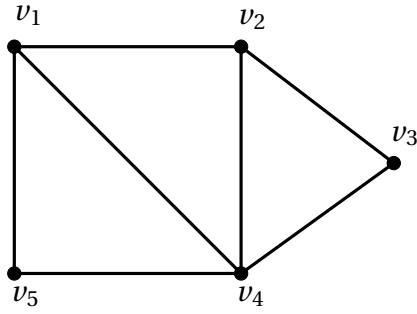


Figura 1.17: Ejemplo.

Consideremos la gráfica de la Figura 1.17. Si calculamos  $A(G)$  y  $A(G)^2$  obtenemos

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A(G)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, gracias al Teorema 1.2.4 y al Corolario 1.2.2 podemos observar, por ejemplo, que hay dos  $v_1 v_3$ -caminos de longitud 2 ( $(v_1, v_2, v_3)$  y  $(v_1, v_4, v_3)$ ). Por otra parte, se puede ver que hay un solo  $v_4 v_5$ -camino de longitud dos ( $(v_4, v_1, v_5)$ ). Ahora, si calculamos  $A(G)^3$  obtenemos

$$A(G)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si contamos el número de triángulos (ciclos de longitud 3) que tiene  $G$  podemos darnos cuenta que tiene 3. Poniendo un poco de atención vemos que si sumamos los elementos de la diagonal de  $A(G)^3$  obtenemos  $18 = 6(3)$ . ¿Puedes explicar por qué?

Finalmente, se puede ver que si se suman los elementos del renglón  $i$  de la matriz de adyacencia  $A(G)$  se obtiene el grado del vértice  $v_i$ .

### Matriz de incidencia

Otra matriz que se le puede asociar a una gráfica es la matriz de incidencia.

Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  donde  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . La **matriz de incidencia**  $B(G)$  de  $G$  es una matriz de orden  $n \times m$  definida por

$$B(G) = [b_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con la arista } e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si etiquetamos las aristas de la gráfica de la Figura 1.17 como  $e_1 = v_1 v_2$ ,  $e_2 = v_1 v_4$ ,  $e_3 = v_1 v_5$ ,  $e_4 = v_2 v_3$ ,  $e_5 = v_2 v_4$ ,  $e_6 = v_3 v_4$  y  $e_7 = v_4 v_5$  (ver Figura 1.18), tenemos que la matriz de incidencia de la gráfica es:

$$B(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & v_1 \\ & v_2 \\ & v_3 \\ & v_4 \\ & v_5 \end{matrix}$$

Si sumamos cada columna de  $B(G)$  se obtiene siempre dos (pues cada arista es incidente con dos vértices) y si sumamos el renglón  $i$ -ésimo obtenemos el grado del vértice  $v_i$ .

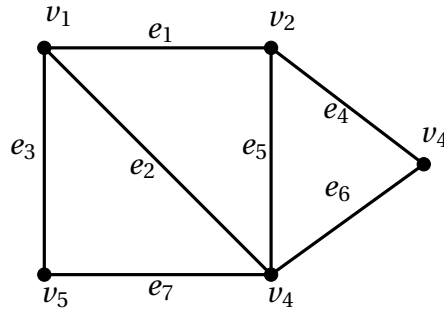


Figura 1.18: Gráfica con las aristas etiquetadas.

### 1.3. Digráficas

Una digráfica se puede entender a partir de una gráfica si en lugar de considerar aristas consideramos flechas. Dicho de otra manera, una **digráfica**  $D$  es una estructura formada por un conjunto de vértices llamado  $V(D)$  y un conjunto  $F(D)$  de pares ordenados de  $V(D)$  llamados **flechas** o **arcos**.

Hay que hacer notar que si consideramos pares ordenados, estamos asignando una dirección a la flecha. A un par ordenado  $(u, v)$  en  $F(D)$  lo denotaremos como  $\overrightarrow{uv}$  o si queda claro que estamos hablando de las flechas de una digráfica como  $uv$ . Dada una digráfica  $D$  hay una gráfica

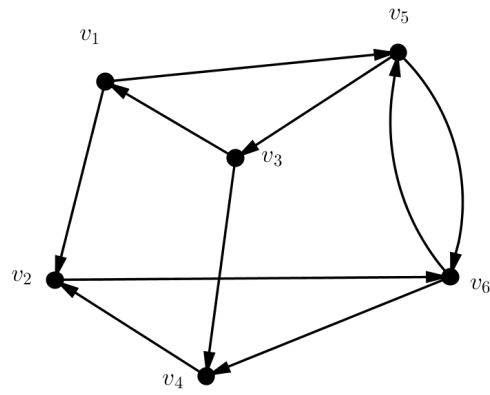


Figura 1.19: Digráfica  $D$  con  $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y  $F(D) = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_2 v_6, v_3 v_1, v_3 v_4, v_4 v_2, v_5 v_6, v_6 v_5, v_5 v_3, v_6 v_4\}$ .

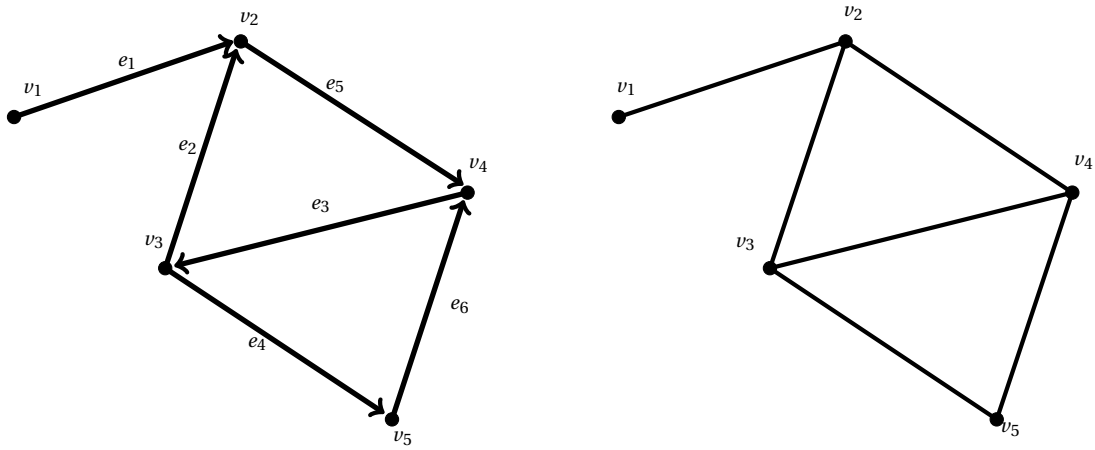


Figura 1.20: Digráfica y su gráfica subyacente.

que se le asocia de forma muy natural. La **gráfica subyacente** de  $D$  es la gráfica que se obtiene al cambiar las flechas de  $D$  por aristas.

Muchas de las definiciones que vimos en gráficas se pueden copiar a digráficas agregando la noción de dirigido. Por ejemplo, diremos que dos vértices son adyacentes en una digráfica  $D$  si son incidentes con alguna flecha de  $D$ , es decir, si  $uv \in F(D)$  o  $vu \in F(D)$ . Consideremos ahora un vértice  $u$  en una digráfica  $D$ , para copiar la definición de vecindad de  $u$  podemos hacer una distinción entre los vértices adyacentes a  $u$  dependiendo si la flecha comienza o termina en  $u$ . Entonces se define la **ex-vecindad** de  $u$  como

$$N_D^+(u) = \{v \in V(D) : uv \in F(D)\},$$

y la **in-vecindad** de  $u$  como

$$N_D^-(u) = \{v \in V(D) : vu \in F(D)\}.$$

Como consecuencia se define el **ex-grado** y el **in-grado** de  $u$  como

$$d_D^+(u) = |N_D^+(u)| \text{ y } d_D^-(u) = |N_D^-(u)|.$$

Ahora, el **ex-grado mínimo de  $D$**  es  $\delta^+(D) = \min\{d^+(v) : v \in V(D)\}$  y el **in-grado mínimo de  $D$**  es  $\delta^-(D) = \min\{d^-(v) : v \in V(D)\}$ . Similarmente se puede definir el **ex-grado máximo** y el **in-grado máximo**.

Observa que las ideas de trayectoria, camino y ciclo se pueden copiar pero tendrán un carácter dirigido. Por ejemplo, en la Figura 1.19, la sucesión  $(v_1, v_2, v_6, v_4)$  es una  $v_1 v_4$ -trayectoria, mientras que la sucesión  $(v_3, v_4, v_2, v_6, v_5, v_3)$  es un ciclo de longitud 5.

La idea de conexidad también se puede extender. Diremos que una digráfica  $D$  es conexa si su gráfica subyacente es conexa. Por ejemplo, se puede observar que la digráfica que aparece en la Figura 1.20 es conexa. Sin embargo, en esta digráfica no es posible ir y regresar entre cualquier par de vértices. Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $D$  existe una  $uv$ -trayectoria y una  $vu$ -trayectoria. Claramente, toda digráfica fuertemente conexa es conexa, pero hay gráficas conexas que no son fuertemente conexas. Por ejemplo, la digráfica que aparece en la Figura 1.20 es conexa pero no es fuertemente conexa, pues no contiene un  $v_5 v_1$ -camino.

Igual que en las gráficas se define la **matriz de adyacencia**  $A(D)$  de una digráfica  $D$  de orden  $n$  como una matriz de  $n \times n$  definida como  $A(D) = [a_{ij}]$ , donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in F(D), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La **matriz de incidencia** de una digráfica  $D$  de orden  $n$  y tamaño  $m$  es una matriz  $B(D)$  de orden  $n \times m$  definida como  $B(D) = [b_{ij}]$ , donde

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si la flecha } e_j \text{ sale desde el vértice } v_i, \\ 1 & \text{si la flecha } e_j \text{ sale hacia el vértice } v_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Para la digráfica de aparece en la Figura 1.20 tenemos que

$$\begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7
 \end{array}$$

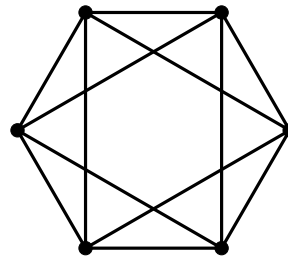
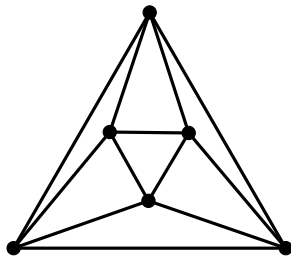
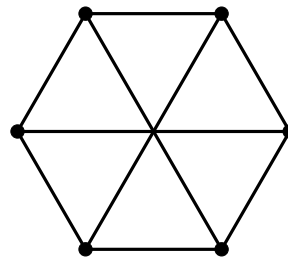
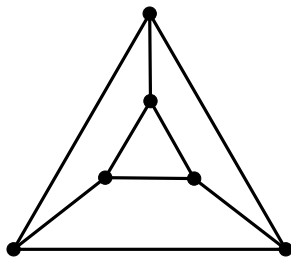
$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \quad \text{y} \quad B(D) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Para mayor información sobre las digráficas les recomendamos que se acerquen al libro de Bang-Jensen y Gutin [5], en donde aparece un estudio muy completo y actual sobre este tema.

## 1.4. Ejercicios      ejercicios del 1 al 26

- Dibuja la gráfica  $G$  que tiene como conjunto de vértices  $V(G)$  y conjunto de aristas  $E(G)$  donde
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  
 $E(G) = \{v_1 v_3, v_1 v_6, v_2 v_3, v_4 v_5, v_5 v_6, v_2 v_5, v_4 v_6, v_2 v_1\}$ .
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  
 $E(G) = \{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6, v_1 v_5, v_3 v_6\}$ .
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  
 $E(G) = \{v_1 v_2, v_1 v_4, v_1 v_5, v_2 v_5, v_2 v_3, v_2 v_4\}$ .
  - $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ ,  
 $E(G) = \{ab, ac, ad, db, bd, bh, bi, bj, bl, cd, ck, cl, df, dg, dh, di, i, j, kl, hi\}$ .
- Dibuja una gráfica que cumpla con las siguientes dos propiedades:
  - Todo vértice es adyacente a dos vértices.
  - Toda arista es adyacente a dos aristas.
- ¿Cuál es el máximo tamaño posible que puede tener una gráfica de orden  $n = 3, 4, 5, 6$ ?
- Sea  $n$  un entero positivo. Encuentra una fórmula para encontrar el máximo tamaño posible de una gráfica con  $n$  vértices.
- Demuestra que si  $G$  es una gráfica con un número finito de vértices tal que  $d_G(v) \geq 2$  para todo  $v \in V(G)$ , entonces  $G$  tiene un ciclo.
- Demuestra que si  $e$  es un puente de  $G$  entonces  $e$  no puede pertenecer a un ciclo de la gráfica.

7. Dibuja todas las gráficas posibles de orden tres.
8. Dibuja todas las gráficas posibles de orden cuatro.
9. Dibuja todas las gráficas conexas posibles de orden cinco.
10. Demuestra que la relación *ser isomorfo* es una relación de equivalencia.
11. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son isomorfas?



12. Demuestra que una gráfica conexa y distinta de la completa tiene una trayectoria de longitud al menos  $\delta(G) + 1$ .
13.
  - a) Da un ejemplo de una gráfica conexa que tenga más puentes que vértices de corte.
  - b) Da un ejemplo de una gráfica que contenga más vértices de corte que puentes.
  - c) Da un ejemplo de una gráfica de orden 5 tal que toda arista es un puente.
  - d) Da un ejemplo de una gráfica en la que cada vértice tiene grado 3 y que contenga un puente.
14. Sea  $G$  una gráfica conexa y sea  $e \in E(G)$  un puente. Demuestra que la gráfica  $G - e$  tiene exactamente dos componentes conexas.
15. Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  con  $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$  para todo  $v \in V(G)$ . Demuestra que  $G$  es conexa.

16. Sea  $G$  una gráfica y sean  $T_1$  y  $T_2$  dos  $uv$ -trayectorias. Demuestra que la unión de  $T_1$  y  $T_2$  contiene un ciclo.
17. Sea  $G$  una gráfica conexa con  $m$  aristas. Si  $A(G)$  es la matriz de adyacencia de  $G$ , demuestra que la suma de los elementos de la diagonal<sup>4</sup> de  $A(G)^2$  es igual a  $2m$ .
18. Sea  $G$  una gráfica conexa con  $t$  triángulos. Si  $A(G)$  es la matriz de adyacencia de  $G$ , demuestra que la suma de los elementos de la diagonal de  $A(G)^3$  es igual a  $6t$ .
19. Dibuja a la gráfica  $G$  a partir de su matriz de adyacencia  $A(G)$ , donde

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Encuentra una gráfica  $G$  simple de orden 10, tal que  $d(v) = 3$  para todo  $v \in V(G)$  y que no contenga ciclos de longitud 3 y 4.
21. Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  con  $\delta(G) \geq 1$ . Demuestra que

$$|E(G)| \geq \frac{n}{2}.$$

(Sugerencia: Primero pruébalo para  $n$  par utilizando el teorema de los apretones de manos).

22. Construye una gráfica conexa simple con 8 vértices, con 17 aristas tal que todo vértice tenga grado dos, tres o cuatro.
23. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  una colección de número enteros impares. Demuestra que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

es par si y sólo si  $n$  es par.

24. Demuestra que no existe una gráfica simple con 13 vértices y 28 aristas tal que todo vértice tiene grado 3 o 5.
25. Sea  $\bar{d}(G)$  el grado promedio de  $G$ . Demuestra que  $\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \Delta(G)$ .
26. Sea  $G$  una gráfica bipartita con pareja de conjuntos  $(A, B)$ . Si  $|A| = a$  y  $|B| = b$ , demuestra que  $|E(G)| \leq ab$ .

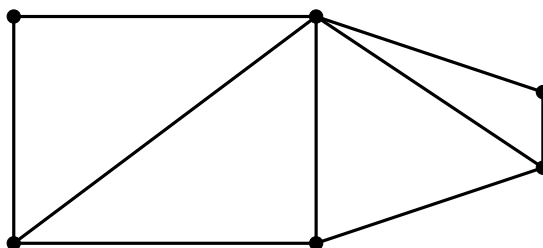
---

<sup>4</sup>A la suma de los elementos de la diagonal de una matriz  $A$  se le conoce como la **traza de**  $A$  y se denota como  $tr(A)$ .

27. Dada una gráfica  $G$ , demuestra que la distancia cumple las siguientes propiedades:

- a)  $d(u, v) \geq 0$  y  $d(u, v) = 0$  si y sólo si  $u = v$ .
- b)  $d(u, v) = d(v, u)$ .
- c)  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$  (desigualdad del triángulo).

28. Asigna una orientación a las aristas de la siguiente gráfica de forma que



- a) La digráfica obtenida sea fuertemente conexa.
- b) La digráfica obtenida no sea fuertemente conexa.

29. Sea  $D$  una digráfica tal que  $d^+(v) \geq 1$  para todo vértice  $v$  en  $D$ . Demuestra que  $D$  contiene al menos un ciclo.

30. Sea  $D$  una digráfica con  $\delta^+(D) \geq 1$ . Demuestra que  $D$  contiene una trayectoria de longitud al menos  $\delta^+(D)$ .

31. Sea  $D$  una digráfica con  $n$  vértices y  $m$  flechas. Demuestra que si  $D$  es fuertemente conexa, entonces  $n \leq m$ .

32. Escribe la definición de isomorfismo para digráficas.



# Capítulo 2

## Árboles

Los árboles desde sus principios han tenido muchas aplicaciones. Se considera que tienen su origen en 1857 cuando el matemático inglés Arthur Cayley [11] los utilizó para contar un cierto tipo de estructuras químicas. Gustav Kirchhoff usó a los árboles (ver [25]) para el estudio de redes eléctricas, obteniendo así lo que hoy en día se conocen como *Las Leyes de Kirchhoff*. Los árboles son una familia de gráficas muy importante y estudiada, que desde su origen ha demostrado tener un gran número de aplicaciones en áreas como la química molecular y las ciencias de la computación, en donde se utilizan para el diseño de algoritmos y estructuras de datos, respectivamente. Para motivar la definición de árbol comenzamos estudiando el problema del mínimo conector.

### 2.1. Problema del mínimo conector

Imagina que tenemos una cierta cantidad de ciudades que queremos conectar mediante una red ferroviaria de forma que puedas viajar en tren entre cualquier par de ciudades y construyendo el menor número posible de líneas ferroviarias.

Este problema se puede modelar utilizando una gráfica si consideramos un vértice por cada ciudad y una arista entre dos vértices si las ciudades correspondientes van a estar conectadas mediante una línea ferroviaria. Si queremos poder viajar en tren entre cualquier par de ciudades, necesitamos pedir que la gráfica asociada sea conexa. Por otra parte, para minimizar el número de líneas ferroviarias a construir, también tenemos que pedir que la gráfica asociada tenga el menor número posible de aristas. Observa que la gráfica asociada al problema no debe tener ciclos, pues si tuviera un ciclo y  $uv$  es una arista del ciclo, al eliminar la arista  $uv$  de la gráfica tenemos que ésta sigue siendo conexa y tiene una arista menos que la gráfica original. Entonces parece que el hecho de minimizar el número de aristas se relaciona con pedir que la gráfica no tenga ciclos.

En general, si tenemos  $n$  ciudades, lo que estamos buscando es construir una gráfica conexa con  $n$  vértices y el menor número posible de aristas.

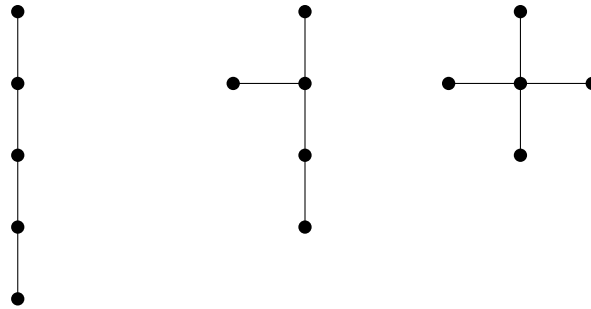


Figura 2.1: Árboles no isomorfos de orden cinco.

## 2.2. Árboles

**Definición 2.2.1.** *Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos.*

En general nos referimos a una gráfica sin ciclos como **acíclica**. Es importante hacer notar que al no tener ciclos, toda arista en un árbol es un puente. Si relajamos la condición de la conexidad, el concepto de árbol puede extenderse de la siguiente manera: un **bosque** es una gráfica sin ciclos (puede o no ser conexa). Si tenemos un bosque no conexo, entonces se sigue que sus componentes conexas son árboles.

A continuación estudiaremos algunas de las propiedades estructurales más importantes de esta interesante familia de gráficas.

**Teorema 2.2.1.** *Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de un árbol  $G$ . Entonces hay exactamente una  $uv$ -trayectoria en  $G$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  un árbol y sean  $u, v \in V(G)$ , por definición de árbol se tiene que  $G$  es conexa y por lo tanto existe una  $uv$ -trayectoria.

Para probar que la trayectoria es única procedamos por contradicción y supongamos que  $T_1$  y  $T_2$  son dos  $uv$ -trayectorias diferentes en  $G$ . Como  $T_1$  y  $T_2$  son diferentes, entonces  $T_1 \cup T_2$  contiene un ciclo (ver Ejercicio 14 del Capítulo 1) contradiciendo que  $G$  no contiene ciclos.  $\square$

El siguiente lema es de ayuda para probar algunas propiedades estructurales de los árboles.

**Lema 2.2.1.** *Toda arista en un árbol  $G$  es un puente.*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que existe una arista  $e = uv$  en  $G$  tal que  $e$  no es un puente, es decir,  $G - e$  es conexa. Entonces existe  $uv$ -trayectoria  $T$  en  $G - e$ . Es fácil ver que la trayectoria  $T$  junto con la arista  $e$  forma un ciclo en  $G$ , lo cual contradice que  $G$  no contiene ciclos.  $\square$

Una técnica muy útil a la hora de realizar demostraciones en Teoría de las Gráficas es la inducción matemática. Para ver el poder de esta técnica probamos el siguiente resultado, el cuál relaciona al orden y el tamaño de un árbol.

**Teorema 2.2.2.** Si  $G$  es un árbol de orden  $n$  y tamaño  $m$ , entonces  $m = n - 1$ .

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre el número de vértices de  $G$ .

1. *Base de la inducción.*

Si  $n = 1$ , sólo hay un árbol con un solo vértice, el cuál no tiene aristas. Si  $n = 2$ , el único árbol con dos vértices es la gráfica  $K_2$ . Por lo tanto el resultado es válido en gráficas de orden  $n = 1, 2$ .

2. *Hipótesis de inducción.*

Sea  $n \geq 3$  un entero y supongamos que el resultado es cierto para todo árbol con  $i$  vértices con  $1 \leq i \leq n - 1$ .

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  un árbol con  $n$  vértices y sea  $e$  una arista de  $G$ . Consideremos la gráfica  $G - e$ , la cual no es conexa, pues en un árbol toda arista es un puente (ver Lema 2.2.1). De hecho,  $G - e$  es un bosque con exactamente dos componentes conexas a las cuales podemos llamar  $T_1$  y  $T_2$ .

Obsérvese que  $|V(T_1)| + |V(T_2)| = n$ , entonces  $|V(T_1)| \leq n - 1$  y  $|V(T_2)| \leq n - 1$ . Por lo tanto la hipótesis de inducción es válida para los árboles  $T_1$  y  $T_2$ , es decir,

$$|E(T_1)| = |V(T_1)| - 1 \quad (2.1)$$

y

$$|E(T_2)| = |V(T_2)| - 1. \quad (2.2)$$

Además, se puede ver que  $E(G) = E(T_1) \cup E(T_2) \cup \{e\}$ . Utilizando este hecho y las igualdades (2.1) y (2.2) se sigue que el tamaño de  $G$  es

$$|E(G)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = |V(T_1)| - 1 + |V(T_2)| - 1 + 1 = |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 = n - 1.$$

□

Un resultado que se obtiene de forma inmediata a partir del Teorema 2.2.2 tiene que ver con el grado mínimo de un árbol.

**Corolario 2.2.1.** Todo árbol con orden al menos dos, tiene dos vértices de grado uno.

*Demostración.* Si  $G$  es un árbol con orden  $n \geq 2$ , entonces  $d(v) \geq 1$  para todo  $v \in V(G)$  (si  $d(v) = 0$  para algún vértice  $v$ , entonces  $G$  tendría un vértice aislado y no sería conexo). Entonces por el Teorema 1.2.1 y el Teorema 2.2.2 tenemos

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2(n - 1). \quad (2.3)$$



Si suponemos que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y que  $G$  tiene a lo más un vértice de grado uno, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) \geq 1 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{(n-1)\text{-veces}} = 1 + 2(n-1). \quad (2.4)$$

Juntando las ecuaciones (2.3) y (2.2) tenemos que

$$2(n-1) \geq 1 + 2(n-1),$$

lo cual es un absurdo y contradice que  $G$  tenga a lo más un vértice de grado 1. Por lo tanto se sigue que  $G$  tiene al menos dos vértices de grado uno.  $\square$

Para repasar la inducción matemática en Teoría de las Gráficas presentamos una segunda prueba del corolario anterior en la cual se usa inducción.

*Demostración.* Por inducción sobre el orden  $n$  del árbol  $G$ .

1. *Base de la inducción.*

Si  $n = 2$ , entonces el árbol es isomorfo a  $K_2$  y el resultado se sigue. Si  $n = 3$ , entonces el árbol es isomorfo a una trayectoria de longitud dos y el resultado también es cierto.

2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que el resultado es cierto para todo árbol con  $i$  vértices con  $2 \leq i \leq n$ .

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  un árbol de orden  $n + 1$ . Si  $G$  tiene al menos dos vértices de grado uno el resultado es cierto, así que podemos suponer que  $G$  tiene a lo más un sólo vértice de grado uno.

Como  $n + 1 \geq 3$  y  $G$  tiene a lo más un sólo vértice de grado uno, entonces existe una arista  $e = uv$  en  $G$  tal que  $d(u) \geq 2$  y  $d(v) \geq 2$ . Por el Lema 2.2.1 sabemos toda arista en un árbol es un puente, más aún, la gráfica  $G - e$  tiene exactamente dos componentes conexas a las cuales llamaremos  $T_1$  y  $T_2$ .

Entonces se sigue que  $T_1$  y  $T_2$  tienen a lo más  $n$  vértices. Utilizando la hipótesis de inducción sabemos que tanto  $T_1$  como  $T_2$  tienen al menos dos vértices de grado uno. Por lo tanto tenemos que  $T_1$  tiene al menos un vértice de grado 1 diferente a  $u$  y  $T_2$ , contiene al menos un vértice de grado 1 diferente de  $v$ . Así,  $G$  tiene al menos dos vértices de grado uno.  $\square$

A los vértices de un árbol que tienen grado 1 se les llama **hojas**, por lo que el corolario anterior se puede enunciar de la siguiente manera:

*todo árbol contiene al menos dos hojas.*

Hay muchas definiciones equivalentes de árbol, en el siguiente teorema enunciamos algunas de estas equivalencias.

**Teorema 2.2.3.** Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices, las siguientes proposiciones son equivalentes

- a)  $G$  es un árbol.
- b)  $G$  es conexa y tiene  $n - 1$  aristas.
- c)  $G$  es conexa y toda arista de  $G$  es un puente.
- d)  $G + uv$  contiene exactamente un ciclo para todo par  $u, v$  de vértices independientes.

A continuación daremos un resultado que caracteriza a los árboles como subgráficas de una gráfica.

**Teorema 2.2.4.** Sea  $T$  un árbol con  $k$  aristas. Si  $G$  es una gráfica con  $\delta(G) \geq k$ , entonces  $G$  contiene a  $T$  como subgráfica.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre el número de aristas  $k$ .

1. *Base de inducción.*

Si  $k = 0$ , entonces el árbol  $T$  es isomorfo a  $K_1$  y claramente  $K_1$  es subgráfica de toda gráfica con al menos un vértice. Si  $k = 1$ , entonces  $T$  es isomorfo a  $K_2$  y es fácil de ver que toda gráfica con grado mínimo uno contiene a  $K_2$  como subgráfica.

2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que el resultado es cierto para todo árbol con  $i$  aristas, donde  $2 \leq i \leq k$ .

3. *Paso inductivo.*

Sea  $T$  un árbol con exactamente  $k + 1$  aristas y sea  $G$  una gráfica con  $\delta(G)$  mayor o igual que  $k + 1$ . Sabemos que  $T$  tiene al menos dos hojas. Sea  $v \in V(T)$  tal que  $d_T(v) = 1$  y consideremos la gráfica  $T - v$ . Obsérvese que el tamaño de  $T - v$  es

$$|E(T - v)| = k.$$

Obsérvese que la subgráfica  $T - v$  es un árbol. Aplicando la hipótesis de inducción sabemos que  $T - v$  es una subgráfica de  $G$ . Por otra parte, como  $\delta(G) \geq k + 1$ , entonces  $G$  tiene al menos  $k + 2$  vértices, además  $T - v$  contiene exactamente  $k + 1$  vértices. Por lo tanto hay un vértice de  $G$  que no pertenece a la subgráfica  $T - v$ . Más aún, si  $w$  es el vértice en  $T$  adyacente a  $v$ , como  $d_G(w) \geq k + 1$ , sabemos que existe un vértice  $u$  en  $G$  adyacente a  $w$  tal que no pertenece a  $T - v$ . Entonces, la subgráfica  $T - v$  junto con el vértice  $u$  y la arista  $uw$  es una subgráfica de  $G$  isomorfa a  $T$  y el teorema queda demostrado.

□

Lo que nos dice el teorema anterior es que toda gráfica  $G$  contiene como subgráfica a todo árbol de orden a lo más  $\delta(G) + 1$ .

### 2.2.1. Excentricidad y centros

Dado un vértice  $v$  de una gráfica  $G$  se define la **excentricidad**  $e(v)$ , de  $v$  de como

$$e(v) = \text{máx}\{d(v, x) : x \in V(G)\}.$$

Si recordamos la definición de diámetro vista en el capítulo anterior, es fácil ver que el diámetro de  $G$  (que es la máxima de las distancias entre cualquier par de vértices), puede definirse en términos de las excentricidades de los vértices de  $G$ , es decir,

$$\text{diam}(G) = \text{máx}\{e(v) : v \in V(G)\}.$$

Ya que tenemos la idea de diámetro de una gráfica, utilizando la idea de excentricidad se puede definir el **radio**  $r(G)$  de  $G$  como la mínima de las excentricidades de los vértices de  $G$ , es decir,

$$r(G) = \text{mín}\{e(v) : v \in V(G)\}.$$

Diremos que un vértice  $v$  es un **centro** de  $G$  si  $e(v) = r(G)$ . En el árbol  $G$  de la Figura 2.3, se observa que  $e(v_1) = 5$ ,  $e(v_2) = 4$ ,  $e(v_3) = 6$ ,  $e(v_4) = 5$ ,  $e(v_5) = 3$ ,  $e(v_6) = 4$ ,  $e(v_7) = 5$  y  $e(v_8) = 6$ . Entonces,  $r(G) = 3$ ,  $\text{diam}(G) = 6$  y  $v_5$  es el único centro del árbol.

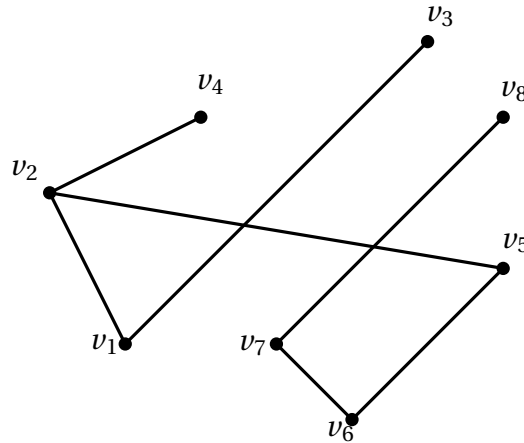


Figura 2.2: Árbol con centro  $v_5$ .

En relación a los centros de un árbol tenemos el siguiente teorema, el cual se le debe a Jordan [23].

**Teorema 2.2.5.** *En todo árbol  $T$ , la subgráfica inducida formada por el conjunto de los centros de  $T$  es isomorfa a  $K_1$  o  $K_2$ , es decir, es un sólo vértice o dos vértices adyacentes.*

*Demostración.* Si el árbol es isomorfo a  $K_1$ , entonces el centro es el único vértice de la gráfica. Si el árbol es isomorfo a  $K_2$ , el centro son los dos vértices de la gráfica.

Vamos a probar que cualquier otro árbol  $T$  tiene el mismo centro que un árbol  $T'$ , el cual se obtiene al quitar los vértices de grado 1, es decir, a las hojas. Nos referiremos a este proceso como el **podado de  $T$** . Obsérvese que la máxima de las distancias de un vértice  $u$  a cualquier otro vértice  $v$  de  $T$  se da cuando  $v$  es una hoja.

Entonces, la excentricidad de cada vértice en  $T'$  será uno menos que la excentricidad de ese vértice en  $T$ , es decir

$$e(u) = \max\{d(u, x) : x \in V(T')\} = \max\{d(u, x) : x \in V(T)\} - 1.$$

Por lo tanto, los vértices de  $T$  que tienen la mínima excentricidad, es decir, excentricidad igual al radio de  $T$ , son los mismos vértices que tienen excentricidad mínima en  $T'$ . Entonces,  $T$  y  $T'$  tienen el mismo centro. Si continuamos el proceso de podado obtendremos una sucesión de árboles que tienen el mismo centro. Como  $T$  tiene un número finito de vértices, en algún momento obtendremos a  $K_1$  o  $K_2$ , los cuales tienen un centro formado por uno o dos vértices adyacentes, respectivamente.  $\square$

La demostración del teorema anterior nos da un algoritmo para encontrar el centro de un árbol  $G$  de forma recursiva.

1. Si  $T$  es un vértice o una arista, entonces el centro de  $T$  está formado por un vértice o una arista, respectivamente.
2. En caso contrario, creamos un nuevo árbol  $T'$  a partir de  $T$  quitando a todas las hojas de  $T$ . Repetimos este proceso hasta obtener un vértice o una arista.

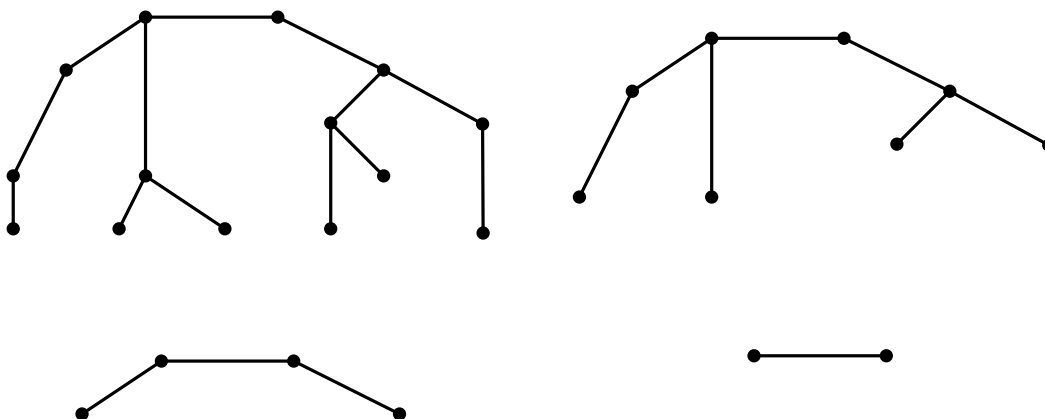


Figura 2.3: Podado de un árbol  $T$ .

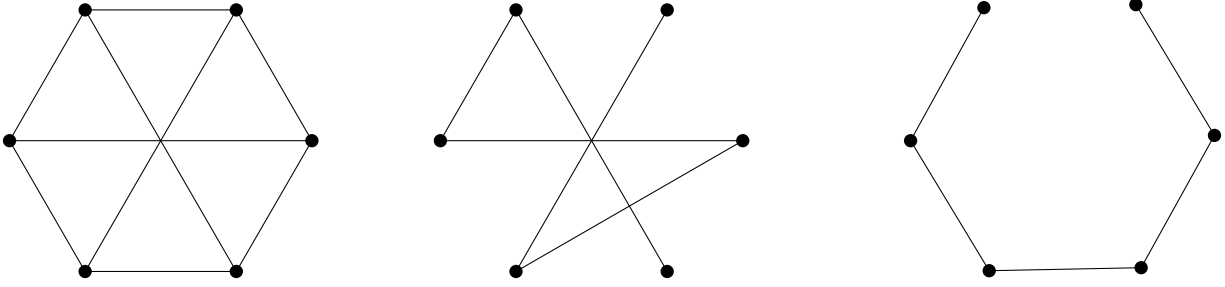


Figura 2.4: Una gráfica y dos de sus árboles generadores.

## 2.3. Árboles generadores

**Definición 2.3.1.** *Un árbol generador de una gráfica  $G$  es una subgráfica acíclica y conexa de que contiene a todos los vértices de  $G$ .*

En general, una gráfica conexa puede tener varios árboles generadores, en la Figura 2.4 se muestra una gráfica y dos de sus árboles generadores.

No es difícil ver que toda gráfica conexa contiene un árbol generador como subgráfica.

**Teorema 2.3.1.** *Toda gráfica conexa contiene un árbol generador.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa. Si  $G$  es acíclica entonces es un árbol y  $G$  es por sí misma un árbol generador. Supongamos ahora que  $G$  contiene al menos un ciclo  $C$ , entonces si eliminamos una arista  $e$  de  $C$  obtenemos una subgráfica  $T'$  de  $G$ , la cual va a ser conexa. Si  $T'$  es acíclica hemos terminado, en caso contrario basta con ir eliminando sucesivamente una arista de cada ciclo de la gráfica que vaya resultando. Como las subgráficas que se van formando siempre son conexas, cuando ya no queden ciclos, la gráfica resultante será un árbol generador.  $\square$

### 2.3.1. Árboles de peso mínimo

Regresando al problema del mínimo conector, imaginemos que queremos construir una red ferroviaria que conecte a  $n$  ciudades, de forma que un pasajero pueda viajar entre cualesquiera dos ciudades. Además, supongamos que por razones económicas la cantidad de vía a utilizar debe ser la mínima posible.

Como vimos anteriormente, la gráfica asociada a este problema tiene  $n$  vértices (uno por cada ciudad) y dos vértices son adyacentes si las ciudades correspondientes están unidas por una vía. Si queremos ser un poco más finos a la hora de modelar el problema anterior podemos considerar a las aristas de la gráfica con un cierto valor o peso, que indique el costo de construcción entre las ciudades. Si queremos minimizar el costo de construcción de la red ferroviaria, tenemos que encontrar un árbol generador de forma que la suma de los pesos de las aristas sea mínima.

Las ideas que acabamos de mostrar motivan la definición de gráfica ponderada. Decimos que una gráfica  $G$  es **ponderada** si a cada arista  $e \in E(G)$  se le asocia un número  $w(e)$  al cual se le conoce como el **peso de la arista**. Si  $H$  es una subgráfica de una gráfica ponderada, el peso  $w(H)$  de  $H$  es la suma de los pesos de las aristas de  $H$ . Muchos problemas de optimización requieren encontrar una subgráfica con peso mínimo o máximo. A un árbol generador de peso mínimo se le llama **árbol óptimo**.

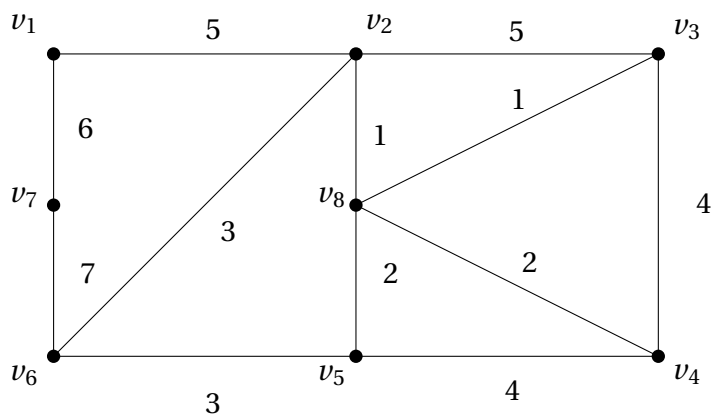
Una solución al problema del mínimo conector que considera pesos en las aristas la da el *Algoritmo de Kruskal*, el cual fue implementado por Kruskal [28] en 1956 para resolver el problema del mínimo conector.

### Algoritmo de Kruskal

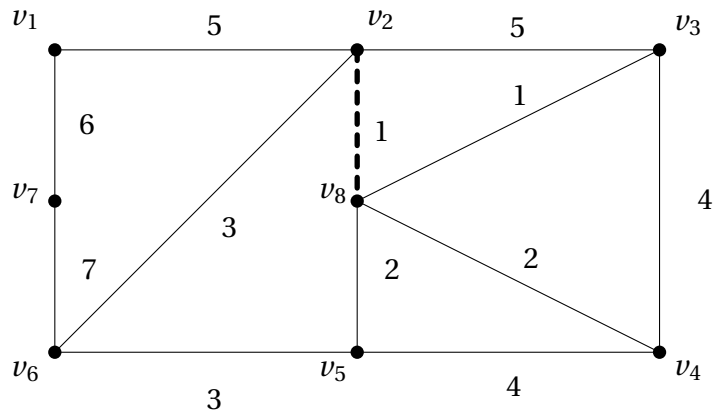
1. Selecciona una arista  $e_1$  de la gráfica  $G$  de forma que el peso  $w(e_1)$  sea el más pequeño posible.
2. Si las aristas  $e_1, e_2, \dots, e_i$  ya fueron seleccionadas, entonces escoge una arista  $e_{i+1}$  de  $E(G) \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  de tal forma que
  - a) La subgráfica inducida  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}\}]$  es acíclica;
  - b)  $w(e_{i+1})$  es lo más chico posible (sujeto a la condición a)).
3. El algoritmo termina cuando ya no se puedan agregar aristas.

Utilicemos un ejemplo para entender como funciona el algoritmo de Kruskal.

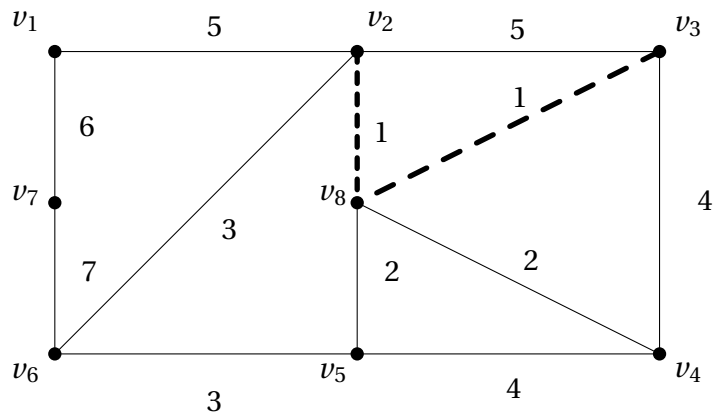
**Ejemplo.** Aplicar el algoritmo de Kruskal a la siguiente gráfica para encontrar un árbol generador de peso mínimo.



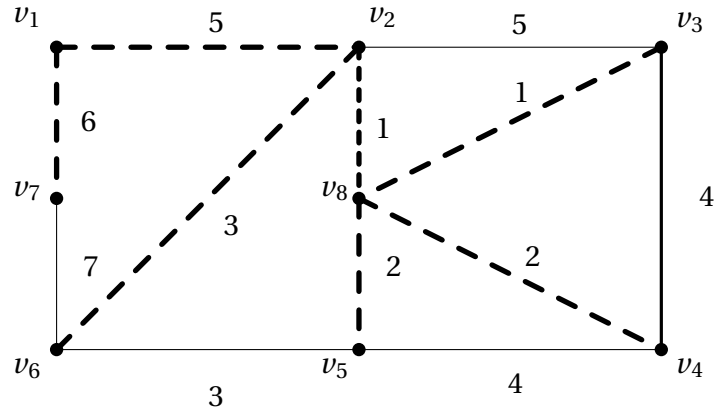
Comencemos seleccionando una arista con el menor peso posible. Nótese que tenemos más de una opción para seleccionar, por ejemplo, las aristas  $v_2v_8$  y  $v_8v_3$  tienen ambas peso mínimo. Seleccionemos la arista  $v_2v_8$  (hay que hacer notar que también pudimos comenzar seleccionando la arista  $v_8v_3$ ).



De entre las aristas que quedan, escojamos una que tenga el menor peso y que al agregarla no forme ningún ciclo. En este ejemplo la arista que debemos seleccionar es la  $v_8 v_3$ .



Después de todo el proceso obtenemos el siguiente árbol generador de peso mínimo.



Una variación del Algoritmo de Kruskal es el Algoritmo de Prim, el cual también nos permite encontrar un árbol generador de peso mínimo en una gráfica conexa.

### Algoritmo de Prim

1. Seleccionamos un vértice  $v_0$  cualquiera de la gráfica.
2. De entre todas las aristas incidentes con  $v_0$  seleccionamos aquella que tenga el menor peso y seleccionamos el otro vértice en el que incide dicha arista.
3. Repetimos el paso 2, siempre que la arista seleccionada sea incidente con uno de los vértices seleccionados y no forme un ciclo.
4. El algoritmo termina cuando todos los vértices de la gráfica estén seleccionados.

## 2.4. Árboles y probabilidad

Los árboles pueden ser de gran utilidad para determinar todas las posibilidades de que suceda un cierto evento. Por ejemplo, supongamos que vamos a lanzar una moneda dos veces. En la Figura 2.5 se muestra un árbol en el que se ven los posibles resultados de tirar una moneda dos veces.

Debido a que los árboles pueden utilizarse como una herramienta para determinar todos los posibles casos de una situación, estos pueden aplicarse de forma natural al cálculo de probabilidades. La probabilidad es un área muy profunda de las matemáticas. En este libro no pretendemos presentar una introducción a la probabilidad, y suponemos que el lector tiene los conocimientos básicos de probabilidad. Veamos a continuación un ejemplo en el que podemos calcular la probabilidad de que suceda un evento utilizando un árbol.

**Ejemplo 1.** Tenemos tres contenedores etiquetados con las letras  $A$ ,  $B$  y  $C$ . En cada contenedor colocamos pelotas de color rojo y azul de forma que

- a) El contenedor  $A$  contiene una pelota roja y dos pelotas azules.
- b) El contenedor  $B$  tiene una pelota roja y tres pelotas azules.



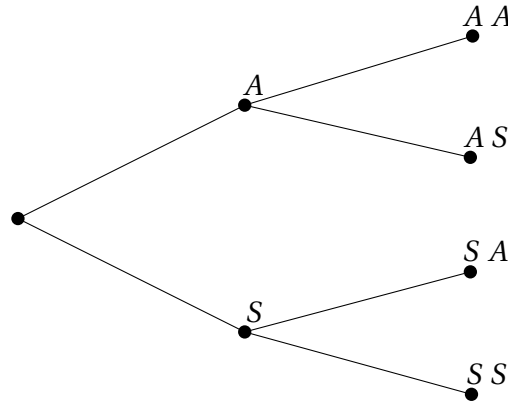


Figura 2.5: Árbol asociado a los lanzamientos de una moneda  $A$  (águila)  $S$  (sol).

c) El contenedor  $C$  tiene solamente una pelota roja.

Si seleccionamos un contenedor y una pelota al azar ¿qué es más probable, escoger una pelota roja o una pelota azul? Para responder a esta pregunta podemos modelar el problema en términos de árbol ponderado como el que aparece en la Figura 2.6. La etiqueta de las aristas con un vértice de color rojo o azul representan la probabilidad de sacar una pelota roja o azul del contenedor correspondiente.

Con ayuda del árbol anterior podemos encontrar que la probabilidad de escoger una pelota azul es

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{36}.$$

La probabilidad de sacar una pelota roja es

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{19}{36}.$$

Por lo tanto tenemos que es más probable escoger una pelota roja que una pelota azul.

Veamos ahora otro ejemplo que puede modelarse a través de un árbol de probabilidades.

**Ejemplo 2.** La compañía de teléfonos IUSATEL tiene el 40% del mercado de telefonía en una ciudad de un millón de habitantes. Su único competidor CELTEL tiene el otro 60% del mercado. Para aumentar su competitividad IUSATEL contrata a una empresa de publicidad para mejorar su imagen. Durante la campaña se recogen datos de las ventas mensuales y se encuentra que el 90% de los clientes de IUSATEL se mantienen en IUSATEL después de un mes, mientras que el 20% de los clientes de CELTEL se cambian a IUSATEL. ¿Qué porcentaje de los clientes usa cada servicio después de dos meses?

Se puede ver que este problema puede ser modelado mediante un árbol de probabilidades como el que se muestra en la Figura 2.7

Si queremos encontrar el porcentaje de clientes que tendrá IUSATEL después de dos meses debemos encontrar la probabilidad de llegar a cada uno de los vértices terminales etiquetados

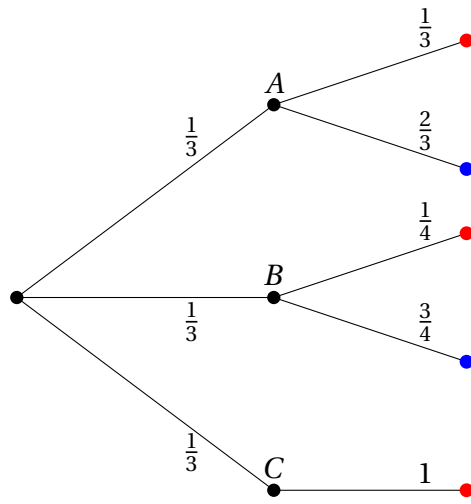


Figura 2.6: Árbol de probabilidades asociado al Ejemplo 1.

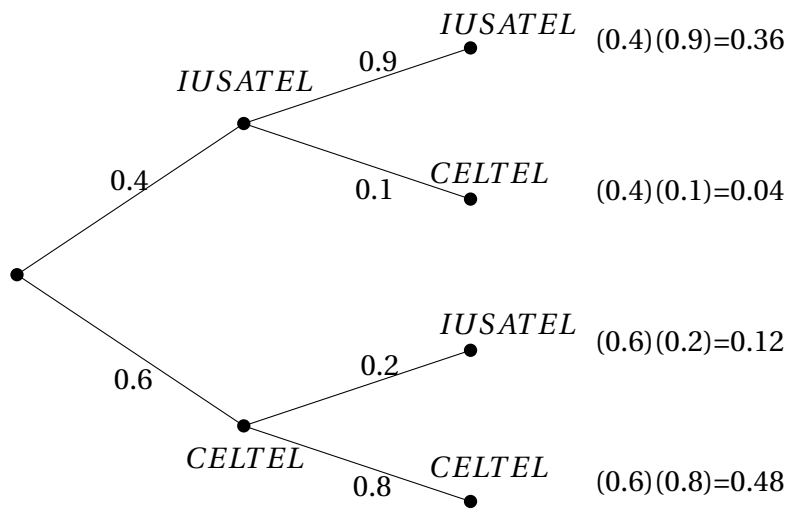


Figura 2.7: Árbol de probabilidades asociado al Ejemplo 2.

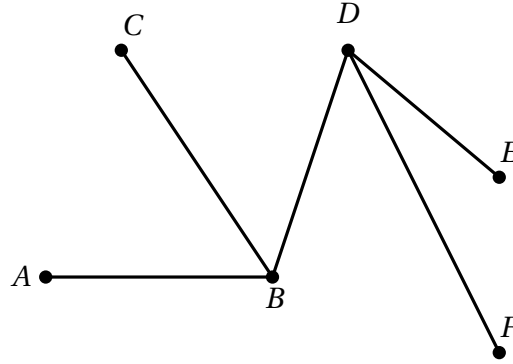


Figura 2.8: Árbol construido de forma recursiva.

con IUSATEL. Entonces, el porcentaje de clientes de IUSATEL será

$$(0.4)(0.9)+(0.6)(0.2)=0.48.$$

## 2.5. $k$ -árboles

En esta sección presentamos de forma muy breve una generalización de la familia de los árboles. Esta generalización surge al observar que todo árbol puede construirse de manera recursiva. El árbol de la Figura 2.8 puede construirse recursivamente al agregar un vértice y haciéndolo adyacente a un vértice existente. Por ejemplo, comenzamos con el vértice  $A$ , luego agregamos el vértice  $B$  y lo hacemos adyacente a  $A$ . Después agregamos  $C$  y lo hacemos adyacente a  $B$ . Luego el vértice  $D$  y lo hacemos adyacente a  $B$ . Posteriormente agregamos  $F$  y lo hacemos adyacente a  $C$ . Finalmente agregamos  $E$  y lo hacemos adyacente a  $C$ .

En general la idea de árbol puede generalizarse si consideramos que un vértice aislado es la gráfica completa  $K_1$ . Con este razonamiento podemos definir un  $k$ -árbol como una familia de gráficas que se define de forma recursiva de la siguiente manera:

- La gráfica completa  $K_k$  es un  $k$ -árbol.
- Si  $G$  es un  $k$ -árbol y  $A$  es una subgráfica completa de  $G$  con  $k$  vértices, entonces la gráfica que se obtiene al agregar un nuevo vértice y haciéndolo adyacente a todos los vértices de  $A$  también es un  $k$ -árbol.

Equivalentemente podemos decir que una gráfica  $G$  es un  $k$ -árbol si y sólo si existe un orden de los vértices de  $G$   $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que

- El conjunto de los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$  induce una gráfica completa de orden  $k$ .

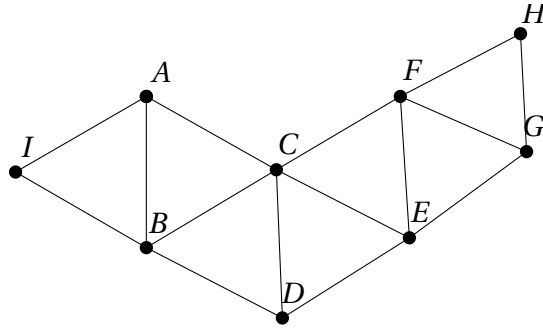


Figura 2.9: 2-árbol.

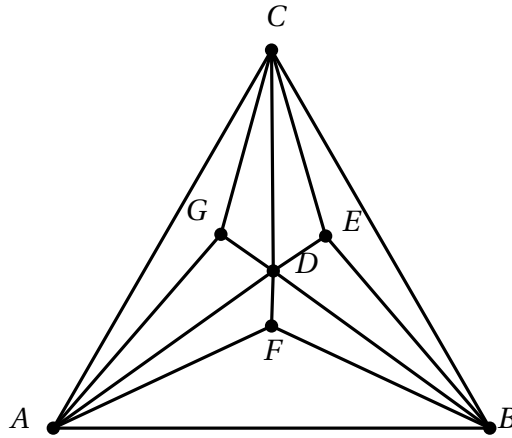


Figura 2.10: 3-árbol.

b) Para cada  $i \geq k + 1$ , el conjunto  $\{v_j : j < i, v_i v_j \in E(G)\}$  induce la gráfica  $K_k$ .

De la definición de  $k$ -árbol se sigue claramente que si  $G$  es un  $k$ -árbol, entonces  $|V(G)| \geq k$ . Muchos de los conceptos de árboles tienen un análogo en los  $k$ -árboles, por ejemplo, un vértice  $v$  en un  $k$ -árbol es una  $k$ -**hoja** si los vecinos de  $v$  inducen una gráfica completa con  $k$  vértices y por lo tanto  $d(v) = k$ . También se puede ver que  $\delta(G) = k$  y que todo  $k$ -árbol contiene al menos dos  $k$ -hojas.

En la Figura 2.9 se muestra un 2-árbol que se puede reconstruir considerando el siguiente orden de los vértices:  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ . En la Figura 2.10 se muestra un 3-árbol que se puede contruir recursivamente comenzando con la gráfica completa  $K_3$  formada por los vértices  $A, B, C$  y se sigue agregando los vértices  $C, D, E, F, G$ . Los  $k$ -árboles tienen muchas aplicaciones en áreas como la computación en donde se utilizan para la evaluación de bases de datos [4]. Para mayor información sobre las propiedades de los  $k$ -árboles remitimos al lector al artículo

de Beineke y Pippert [7].

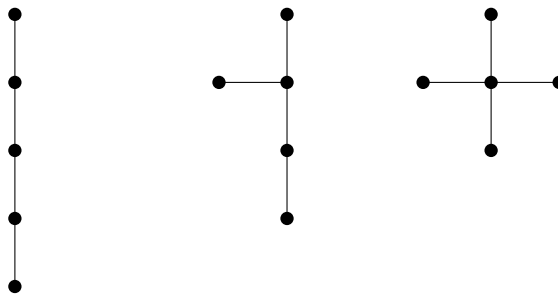
## 2.6. Ejercicios

1. Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden cinco (hay seis).
2. Sea  $G$  un árbol de orden 7 con al menos 3 vértices de grado 1 y al menos dos vértices de grado 3. Encuentra todos los árboles (no isomorfos) que cumplen con estas propiedades.
3. Dibuja un árbol  $T$  tal que  $rad(T) = 6$  y  $diam(T) = 12$ .
4. Sea  $T$  un árbol con un número par de aristas. Demuestra que  $T$  tiene al menos un vértice de grado par.
5. Encuentra el número de árboles generadores que tiene  $K_4$ .
6. Demuestra que un árbol con exactamente dos hojas es una trayectoria.
7. Demuestra que todo árbol es una gráfica bipartita.
8. Sea  $T$  un árbol con la siguiente propiedad: todo vértice adyacente a una hoja tiene grado al menos 3. Demuestra que existen un par de vértices  $u$  y  $v$  en  $T$  tal que  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ .
9. Demuestra que  $G$  es un árbol si y sólo si  $G + uv$  contiene un único ciclo para todo par de vértices independientes  $u$  y  $v$ .
10. Sea  $G$  un bosque con orden  $n$  y  $q$  componentes conexas ¿Cuál es el tamaño de  $G$ ?
11. Demuestra que en toda gráfica  $G$

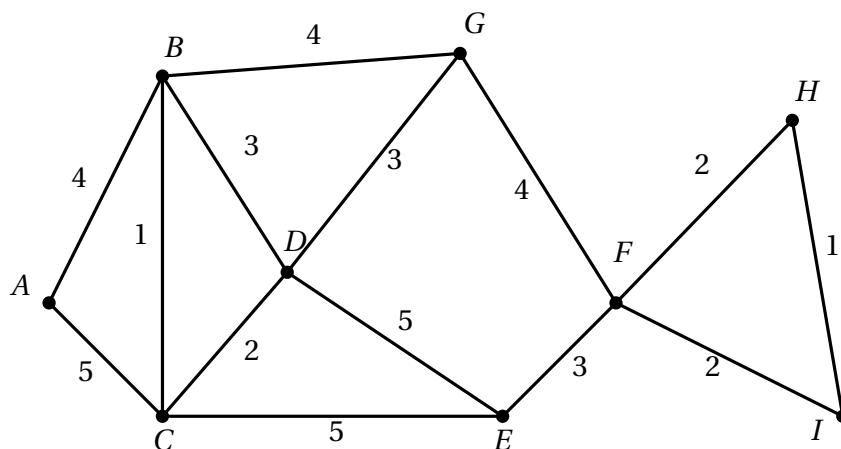
$$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G).$$

12. Demuestra que si  $u$  es un vértice de un árbol  $G$ , entonces la máxima distancia de  $u$  a cualquier otro vértice  $v$  de  $G$  se da cuando  $v$  es una hoja.
13. Sea  $G$  un árbol. Encuentra una cota superior para  $\Delta(G)$ .
14. Una gráfica  $G$  es **autocomplementaria** si  $G$  es isomorfa a  $G^c$ . Encuentra todos los árboles que son autocomplementarios.
15. ¿Para qué valores de  $k$  existe un árbol  $k$ -regular?
16. Sea  $G$  un gráfica distinta de la trivial, con exactamente un vértice de grado 1. Demuestra que  $G$  no puede ser un árbol.
17. Sea  $G$  un árbol con  $n$  vértices tal que todo vértice de  $G$  tiene grado 1 o 3. Demuestra que  $G$  contiene  $(n-2)/2$  vértices de grado 3.

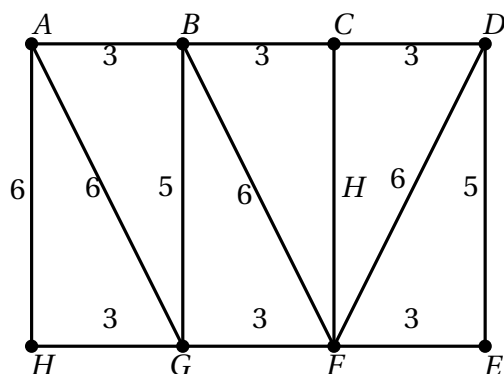
18. Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m$  aristas tal que  $n = m + 1$ . Demuestra que no necesariamente  $G$  es un árbol.
19. Sea  $G$  un árbol, demuestra que  $v$  es un vértice de corte de  $G$  si y sólo si  $d(v) \geq 2$ .
20. Dibuja todos los bosques no isomorfos de orden  $n = 5, 6$ .
21. Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden 8 tal que su grado máximo sea mayor o igual a 4.
22. Sea  $G$  un árbol con  $n$  vértices. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes
- $G$  es isomorfa a la trayectoria con  $n$  vértices
  - $G$  tiene grado máximo dos.
  - $G$  tiene exactamente dos hojas.
  - $\text{diam}(G) = n - 1$ .
23. Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m = n - 1$  aristas tal que no es un árbol. Demuestra que si  $G$  tiene exactamente dos componentes conexas, entonces hay una que es un árbol y una que no lo es.
24. Determina los centros y la excentricidad de cada vértice de la siguientes gráficas



25. Aplica el algoritmo de Kruskal a la siguiente gráfica para obtener un árbol de peso mínimo.



26. Aplica el algoritmo de Prim a la siguiente gráfica para obtener un árbol de peso mínimo.



27. Sea  $G$  una gráfica y sea  $e$  una arista de  $G$ . Demuestra que existe al menos un árbol generador de  $G$  que contiene a la arista  $e$ .
28. Demuestra que siempre se pueden colorear los vértices de un árbol con dos colores de forma que toda arista sea incidente con vértices de colores distintos.
29. Demuestra que  $G$  es un árbol si y sólo si toda subgráfica inducida de  $G$  contiene un vértice de grado menor o igual a uno.
30. Según los datos estadísticos de un hospital se sabe que si una persona esta sana, la probabilidad de que siga sana el día de mañana es del 98%. Si la persona está enferma, la probabilidad de que esté sana al día siguiente es de 30%. Encuentra un arbol asociado que nos permita encontrar la probabilidad de que una persona sana este enferma dos días después.

31. Sea  $G$  un árbol con 5 vértices. Qué características debe tener  $G$  para que  $\sum_{u,v \in V(G)} d(u, v)$
- Sea máxima.
  - Sea mínima.
32. Sea  $G$  un 2-árbol de orden  $n$ .
- ¿Cuántas aristas tiene un 2-árbol con  $n \in \{9, 10, 11, 12\}$  vértices?
  - Encuentra una fórmula para el tamaño de un 2-árbol con  $n \geq 2$  vértices.
33. Sea  $G$  un árbol y sea  $v \in V(G)$  tal que  $e(v) = r(G)$ , es decir, un centro de  $G$ . Si  $T$  un trayectoria de longitud máxima en  $G$ , demuestra que  $v \in V(T)$ .
34. Sea  $G$  un árbol con  $n$  vértices y  $k$  hojas. Si  $G$  no tiene vértices de grado 2 demuestra que  $k \geq (n + 2)/2$ . ¿Puedes decir como son los árboles para los cuales se cumple la igualdad?
35. Sea  $G$  un 3-árbol de orden  $n$ .
- ¿Cuántas aristas tiene un 3-árbol con  $n$  vértices, donde  $n \in \{9, 10, 11, 12\}$ ?
  - Encuentra una fórmula para el tamaño de un 3-árbol con  $n \geq 3$  vértices.
36. Un **hidrocarburo saturado** es una molécula de la forma  $C_m H_n$ , en la cual se cumplen las siguientes propiedades:
- Todo átomo de carbono ( $C$ ) tiene cuatro enlaces.
  - Todo átomo de hidrógeno ( $H$ ) tiene sólo un enlace.
  - Ninguna sucesión de enlaces forma un ciclo.

Demuestra que para todo entero positivo  $m$  puede existir la molécula  $C_m H_n$  si y sólo si  $n = 2(m + 1)$  (en la Figura 2.11 se muestran dos moléculas de carbono saturado).



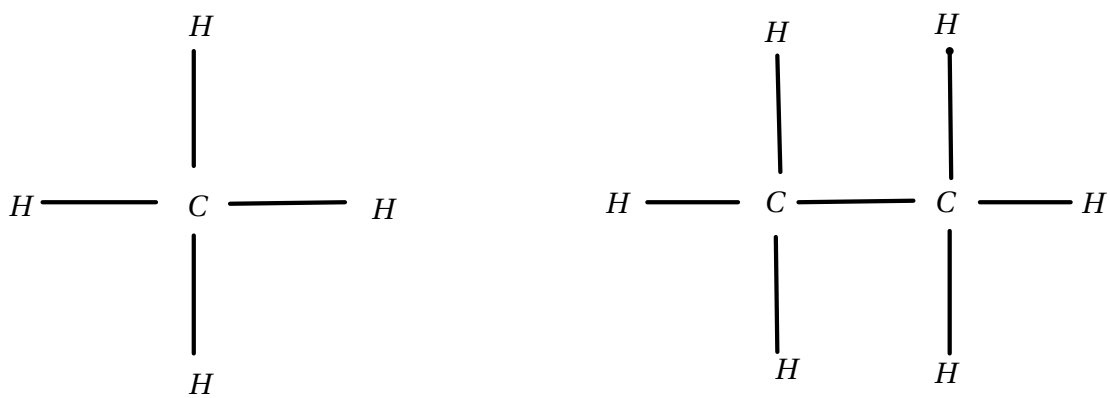


Figura 2.11: Moléculas  $CH_4$  (metano) y  $C_2H_6$  (etano).

## Capítulo 3

# Recorridos en gráficas

En este capítulo estudiaremos algunos temas relacionados con problemas de transporte o de recorridos. Muchos problemas de este tipo pueden ser modelados a través de gráficas y su solución da lugar a dos familias importantes de gráficas: las gráficas Eulerianas y las gráficas Hamiltonianas.

### 3.1. Gráficas Eulerianas.

Como se mencionó en la Introducción de este texto, Euler resolvió el problema de los puentes de Königsberg. La solución al problema de los puentes de Königsberg da lugar a la definición de una clase de gráficas, las cuales reciben el nombre de **gráficas Eulerianas** (en honor a Leonhard Euler).

Otra forma de introducir a la familia de las gráficas Eulerianas es a través del juego de dibujar *la firma del diablo*. Este juego consiste en dibujar la Figura 3.1 sin levantar el lápiz del papel y sin trazar dos veces una misma línea.

Si pensamos en la firma del diablo como una gráfica, el juego se traduce en encontrar un camino que utilice todas las aristas y que no repita aristas. Después de varios intentos de dibujar la firma del diablo, uno puede empezar a sospechar que este juego es imposible de resolver. Dicho de otra forma, que la gráfica asociada a la firma del Diablo no contiene un paseo<sup>1</sup> que utilice a todas las aristas de la gráfica

**Definición 3.1.1.** *Un paseo cerrado que contiene a todos los vértices y a todas las aristas de una gráfica o multigráfica se llama **paseo Euleriano**. Una gráfica es **Euleriana** si contiene un paseo Euleriano.*

La gráfica mostrada en la Figura 3.2 es Euleriana, pues  $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1)$  es un paseo Euleriano. Dicho de otra manera, podemos dibujar a la gráfica sin levantar el lápiz del papel y sin trazar dos veces la misma línea.

Una pregunta que surge de manera natural es saber cuándo una gráfica contiene un paseo Euleriano. El siguiente resultado es una caracterización de la familia de las gráficas Eulerianas,

---

<sup>1</sup>Un paseo es un camino que no repite aristas.

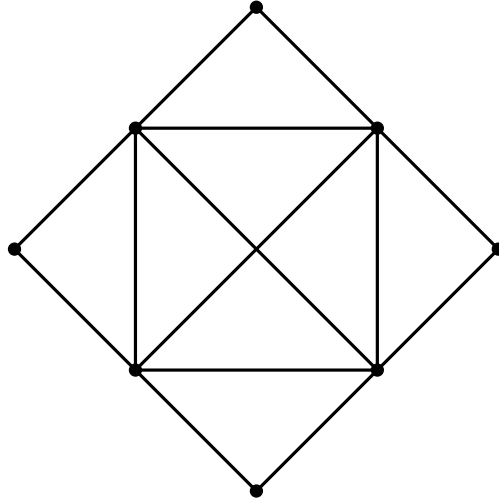


Figura 3.1: La firma del Diablo.

es decir, nos da condiciones suficientes y necesarias para decidir si una gráfica es Euleriana o no.

**Teorema 3.1.1.** *Una gráfica (o multigráfica)  $G$  es Euleriana si y sólo si  $G$  es conexa y todo vértice de  $G$  tiene grado par.*

*Demostración.* Primero supongamos que  $G$  es una gráfica Euleriana. Sea  $C$  un paseo Euleriano de  $G$ . Obsérvese que cada vez que tenemos un vértice  $v$  en  $G$  se sigue que  $C$  contribuye en dos aristas al grado de  $v$ . Ahora, como cada arista de  $G$  aparece exactamente una sola vez en  $C$ , entonces todo vértice debe tener grado par.

Ahora supongamos que  $G$  es conexa y que cada vértice de  $G$  tiene grado par. Sea

$$C = (v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{l-1}, v_l)$$

un paseo de máxima longitud en  $G$ . Como  $C$  es máximo, entonces no se puede extender y por lo tanto  $C$  contiene a todas las aristas incidentes con el último vértice  $v_l$ . Por hipótesis sabemos que el número de estas aristas es par, entonces  $v_0 = v_l$  y se sigue que  $C$  es un camino cerrado.

Supongamos que  $C$  no es Euleriano. Entonces existe una arista  $e = uv_i$  que no pertenece a  $C$  pero que es incidente con un algún vértice de  $C$  (para ver esto hay que utilizar la hipótesis de conexidad sobre  $G$ ). Entonces el paseo

$$(u, e, v_i, e_i, \dots, e_{l-1}, v_l, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{i-1}, v_i)$$

es un paseo de longitud mayor a  $C$ , lo cual es una contradicción. □

El siguiente teorema es otra caracterización de las gráficas Eulerianas.

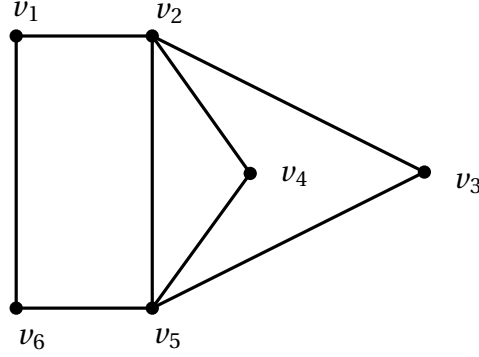


Figura 3.2: Gráfica Euleriana.

**Teorema 3.1.2.** *Una gráfica conexa  $G$  es Euleriana si y sólo si el conjunto de las aristas puede verse como una unión de ciclos ajenos (en aristas).*

*Demostración.* Consideremos una gráfica conexa  $G$  y supongamos que es Euleriana. Por el teorema anterior sabemos que todo vértice de  $G$  tiene grado par mayor o igual a dos, lo cual implica que  $G$  contiene un ciclo  $C$ . Daremos una partición de las aristas de  $G$  en ciclos ajenos por aristas. Para esto es importante hacer notar que  $C$  es una gráfica 2-regular.

Sea  $G_1 = G - E(C)$ , obérvase que todo vértice en  $G_1$  tiene grado par (a cada vértice  $v$  le reducimos su grado en dos si  $v \in V(C)$ ). Si  $G_1$  no tiene aristas, entonces  $C$  es una partición de  $G$  en un ciclo y el resultado se sigue. En caso contrario, considerando los vértices en  $G_1$  de grado mayor o igual a dos podemos repetir el mismo argumento, obteniendo así un ciclo  $C_1$  y una gráfica  $G_2 = G_1 - E(C_1)$  la cual tiene a todos sus vértices de grado par. Si  $G_2$  no tiene aristas, entonces  $(E(C_1), E(C_2))$  es una partición de las aristas de  $G$  en dos ciclos. En caso contrario podemos continuar con este procedimiento hasta obtener una gráfica  $G_n$  la cual no tiene aristas. Encontrando así una partición  $(E(C), E(C_1), \dots, E(C_{n-1}))$  de sus aristas en  $n$  ciclos disjuntos por aristas.

Ahora supongamos que  $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  es una partición de las aristas de  $G$  en  $n$  ciclos disjuntos por aristas. Sea  $v$  un vértice de  $G$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v \in V(C_1) \cap V(C_2)$ . Si  $C_1 = (v, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots, u_{l-1}, e_l, v)$  y  $C_2 = (v, e'_1, w_1, e'_2, w_2, e'_3, \dots, w_{l-1}, e_l, v)$ , entonces  $(v, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots, u_{l-1}, e_l, v, e'_1, w_1, e'_2, w_2, e'_3, \dots, w_{l-1}, e_l, v)$  es un paseo cerrado  $G$ . En general, se puede ver que si  $C$  y  $C'$  son paseos cerrados tales que  $V(C) \cap V(C') \neq \emptyset$ , entonces  $C \cup C'$  es un paseo cerrado. Por lo tanto  $\cup_{i=1}^n E(C_i)$  es un paseo cerrado que contiene a todas las aristas de  $G$  y  $G$  es Euleriana.  $\square$

Combinando el Teorema 3.1.1 y el Teorema 3.1.2 podemos obtener los siguientes dos corolarios.

**Corolario 3.1.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con exactamente  $2n$  vértices de grado impar ( $n \geq 1$ ). Entonces el conjunto de las aristas de  $G$  puede dividirse en  $n$  paseos (no cerrados).*

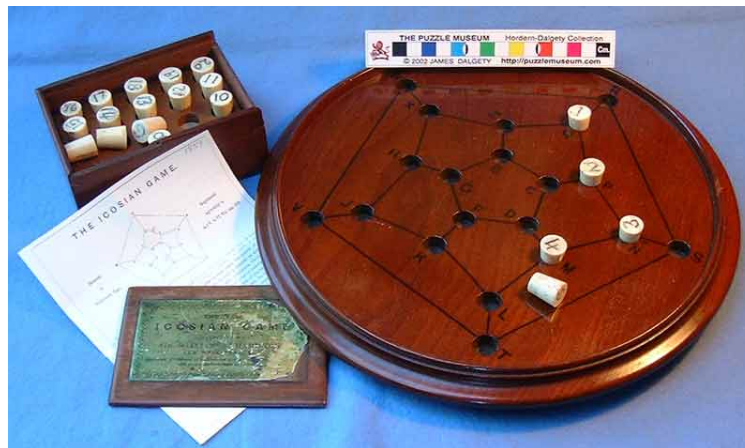
**Corolario 3.1.2.** Sea  $G$  una gráfica conexa con exactamente dos vértices de grado impar. Entonces  $G$  tiene un paseo (no cerrado) que contiene a todas las aristas de  $G$  y que comienza y termina en los vértices de grado impar.

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  los únicos vértices de  $G$  que tienen grado impar. Construimos una nueva gráfica ( $G'$ ) la cual se obtiene añadiendo a  $G$  la arista  $uv$ . Obsérvese que la gráfica  $G$  puede ser una multigráfica. Se puede ver que  $G'$  tiene todos sus vértices de grado par y por el Teorema 3.1.1 es Euleriana. Consideremos un paseo Euleriano  $C'$  en  $G'$ , claramente la arista  $uv$  pertenece a  $C'$ . Por lo tanto el paseo  $C = C' - \{uv\}$  es un  $uv$ -paseo que contiene a todas las aristas de  $G$ .  $\square$

La noción de gráfica Euleriana puede modificarse y encontrar un análogo para vértices si en la definición de paseo Euleriano cambiamos la palabra arista por vértice.

## 3.2. Gráficas Hamiltonianas

Sir William Hamilton (1805 – 1865) creó un juego llamado *Icosian Game*, el cual vendió a una empresa de juguetes por veinticinco libras y que llegó a alcanzar un cierto grado de popularidad [14]. El juego tenía como tablero un dodecaedro regular de madera en el que cada vértice tenía un pivote etiquetado con el nombre de una ciudad europea. El objetivo del juego era mostrar un itinerario (utilizando las aristas del dodecaedro) que empieza y termina en la misma ciudad y que pase por todas las ciudades una sola vez, dicho itinerario se iba señalando con un hilo de color.



Al estudiar este problema se puede ver que lo que busca el juego es un ciclo que utilice todos los vértices del dodecaedro. Entonces, de forma natural surge la idea de definir a las gráficas que tienen un camino cerrado que pase una sola vez por cada vértice, es decir, un ciclo que pase por todos los vértices de la gráfica.

**Definición 3.2.1.** Una gráfica  $G$  es **Hamiltoniana** si existe un ciclo que contiene a todos los vértices de  $G$ . Un ciclo que contiene a todos los vértices de la gráfica se le conoce como **ciclo Hamiltoniano**.

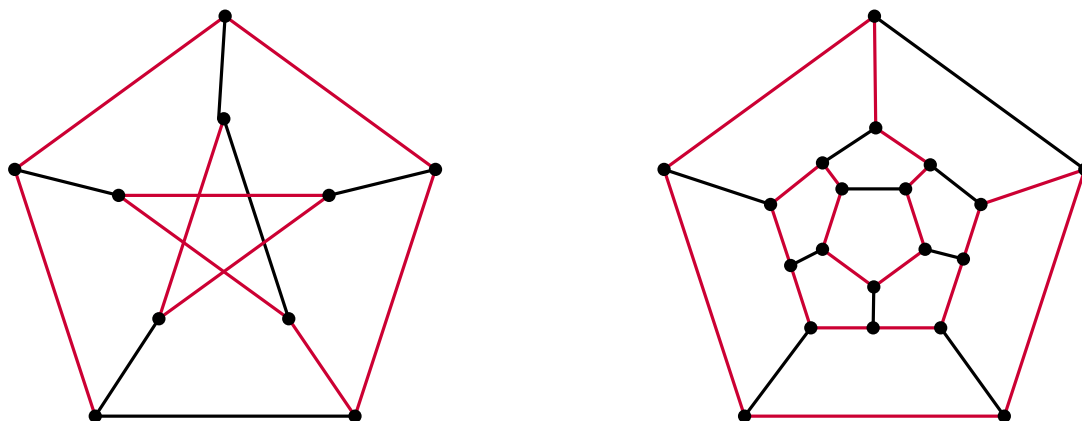


Figura 3.3: Una trayectoria Hamiltoniana en la Gráfica de Petersen (izquierda) y un ciclo Hamiltoniano en el Dodecaedro (derecha).

Si relajamos un poco las hipótesis y en lugar de pedir un ciclo que contenga a todos los vértices de la gráfica pedimos una trayectoria que contenga a todos los vértices obtenemos la definición de trayectoria Hamiltoniana.

**Definición 3.2.2.** Una trayectoria en una gráfica  $G$  es **Hamiltoniana** si contiene a todos los vértices de  $G$ .

No es difícil de ver que si una gráfica tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces contiene una trayectoria Hamiltoniana. Sin embargo el recíproco no es cierto, pues existen gráficas que contienen una trayectoria Hamiltoniana que no contienen un ciclo Hamiltoniano, por ejemplo, la gráfica de Petersen (ver Figura 3.3).

Dada una gráfica  $G$ , podemos establecer la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de condiciones debe satisfacer  $G$  para que podamos garantizar la existencia de un ciclo Hamiltoniano?

Desafortunadamente, a diferencia de las gráficas Eulerianas, aún no se conoce una caracterización de las gráficas Hamiltonianas, es decir, no se conocen condiciones que sean suficientes y necesarias para garantizar que una gráfica contenga un ciclo Hamiltoniano. Sin embargo conocemos algunas condiciones suficientes para garantizar que una gráfica tiene un ciclo Hamiltoniano.

El siguiente teorema da condiciones suficientes para que una gráfica contenga un ciclo Hamiltoniano. Es un resultado que se debe a Dirac [15] y en la demostración de este resultado se utiliza de forma implícita el concepto de *extremalidad*.

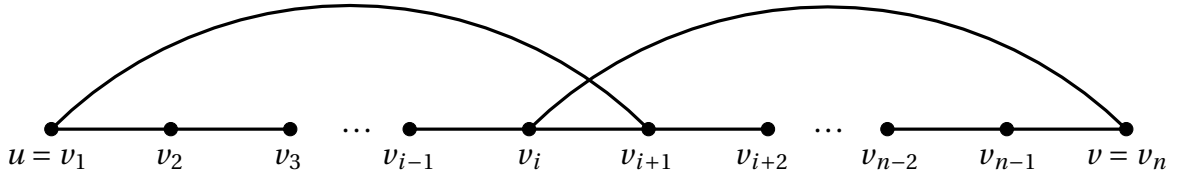


Figura 3.4: Construcción del ciclo Hamiltoniano en  $G$ .

**Teorema 3.2.1.** Sea  $n \geq 3$  un entero. Si  $G$  es una gráfica con  $n$  vértices tal que  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Procedemos por contradicción suponiendo que el teorema es falso. Definimos por  $\mathcal{G}$  al conjunto formado por todas las gráficas que cumplen con la hipótesis del teorema y no son Hamiltonianas, es decir,

$$\mathcal{G} = \left\{ G : \delta(G) \geq \frac{n}{2} \text{ y } G \text{ no es Hamiltoniana} \right\}.$$

Sea  $G$  una gráfica en  $\mathcal{G}$  con el mayor número posible de aristas, es decir,  $|E(G)| \geq |E(G')|$  para toda  $G' \in \mathcal{G}$ . Como la gráfica completa es Hamiltoniana tenemos que  $G$  tiene al menos dos vértices no adyacentes  $u$  y  $v$ . Además, como  $G$  tiene el mayor número posible de aristas se sigue que si agregamos una arista a  $G$ , esta nueva gráfica debe ser Hamiltoniana. En particular la gráfica  $G + uv$  es Hamiltoniana y cada ciclo Hamiltoniano de  $G + uv$  tiene que contener a la arista  $uv$ . Por otro lado, como se dijo anteriormente, obsérvese que un ciclo Hamiltoniano en  $G + uv$  nos da una trayectoria Hamiltoniana en  $G$  que va de  $u$  a  $v$ .

Sea  $P = (u = v_1, v_2, \dots, v_n = v)$  una trayectoria Hamiltoniana en  $G$ . Definimos dos conjuntos de vértices  $S$  y  $T$  como sigue:

$$S = \{v_i \mid uv_{i+1} \in E(G)\},$$

y

$$T = \{v_i \mid v_i v \in E(G)\}.$$

Claramente  $v_n = v \notin S \cup T$ , por lo tanto  $|S \cup T| < n$ . Además se cumple que  $S \cap T = \emptyset$ , pues si  $v_i \in S \cap T$ , entonces  $uv_{i+1}, v_i v \in E(G)$  y el ciclo  $\mathcal{C} = (u = v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, u)$  sería un ciclo Hamiltoniano (ver Figura 3.4), contradiciendo nuestra hipótesis.

Por lo tanto tenemos que

$$d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < n. \quad (3.1)$$

Por otra parte, utilizando las hipótesis del teorema sabemos que  $d(u) \geq \frac{n}{2}$  y  $d(v) \geq \frac{n}{2}$ , entonces

$$d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n. \quad (3.2)$$

Juntando (3.1) y (3.2) se obtiene una contradicción.  $\square$

La idea fundamental de la demostración consiste en considerar una gráfica que no es Hamiltoniana y que satisface las hipótesis. Debido a que la gráfica completa es Hamiltoniana sabemos que después de agregar un cierto número de aristas a una gráfica, eventualmente aparecerá un ciclo Hamiltoniano. Por otra parte, como el hecho de agregar aristas a una gráfica no disminuye el grado mínimo de ésta, podemos considerar solamente a aquellas gráficas no Hamiltonianas con el mayor número posible de aristas. Bondy y Chvátal [10] se dieron cuenta que las condiciones dadas por Dirac pueden ser modificadas para obtener una versión un poco más fuerte.

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ , y sean  $u$  y  $v$  dos vértices no adyacentes de  $G$  tales que  $d(u) + d(v) \geq n$ . Entonces,  $G$  es Hamiltoniana si y sólo si  $G + uv$  es Hamiltoniana.*

*Demostración.* Primero supongamos que  $G$  es Hamiltoniana. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$  tales que no son adyacentes. Claramente  $G + uv$  es Hamiltoniana, pues el hecho de agregar una arista a  $G$  no afecta la propiedad de ser Hamiltoniana.

Ahora, supongamos que  $G + uv$  es Hamiltoniana y que  $G$  no lo es. Entonces, utilizando un razonamiento similar al utilizado en el Teorema 3.2.1 tenemos que  $G$  contiene una trayectoria Hamiltoniana de  $u$  a  $v$ . Utilizando un razonamiento análogo al mostrado en la demostración del Teorema 3.2.1 obtenemos una contradicción.  $\square$

El resultado anterior motiva la definición de la cerradura de una gráfica.

**Definición 3.2.3.** *La cerradura de una gráfica  $G$  de orden  $n$  se obtiene de forma recursiva al unir pares de vértices  $u$  y  $v$  tales que*

- a)  $uv \notin E(G)$ ,
- b)  $d(u) + d(v) \geq n$ ,

*hasta que ya no queden de esos pares.*

Denotaremos como  $c(G)$  a la cerradura de una gráfica  $G$ . Veamos ahora que  $c(G)$  es una operación que está bien definida, es decir, que la cerradura de una gráfica es única.

**Proposición 3.2.1.** *La cerradura de una gráfica está bien definida.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y supongamos que  $G_1$  y  $G_2$  son dos gráficas que se obtienen a partir de  $G$  al unir pares de vértices no adyacentes cuya suma de grados es al menos  $n$ .

Sean  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$  y  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$  las sucesiones de aristas que agregamos a  $G$  para obtener  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente.

Como  $G_1 \neq G_2$ , entonces existe una arista  $e_{k+1} = uv \in E$  tal que es la primera arista del conjunto  $E$  que no aparece en  $G_2$ . Definimos una nueva gráfica  $H = G + \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ . De la definición de cerradura de una gráfica tenemos que

$$d_H(u) + d_H(v) \geq n.$$



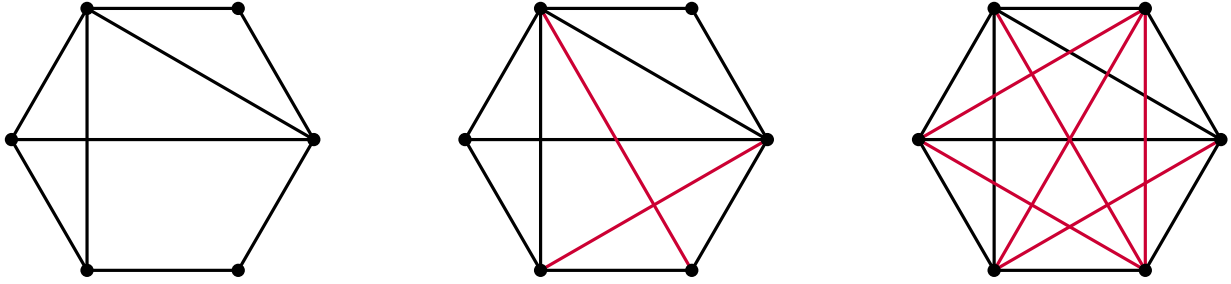


Figura 3.5: Una gráfica y su cerradura en dos pasos.

Por la forma de escoger  $e_{k+1}$ , se sigue que  $H$  es una subgráfica de  $G_2$ . Por lo tanto

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq n,$$

lo cual es una contradicción, pues  $uv \notin E(G_2)$ . Entonces hemos probado que  $E = F$  y la cerradura de una gráfica está bien definida.  $\square$

Una consecuencia inmediata de la cerradura de una gráfica es el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.3.** *Una gráfica  $G$  es Hamiltoniana si y sólo si  $c(G)$  es Hamiltoniana.*

*Demostración.* Si  $G$  es Hamiltoniana, entonces al agregar las aristas de la cerradura ésta lo sigue siendo y el resultado se sigue. Ahora si suponemos que  $c(G)$  es una gráfica Hamiltoniana, entonces utilizando el Teorema 3.2.2 el resultado es válido.  $\square$

El teorema anterior tiene consecuencias interesantes, por ejemplo, que toda gráfica completa con al menos tres vértices es Hamiltoniana.

**Corolario 3.2.1.** *Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$ . Si  $c(G)$  es isomorfo a la gráfica completa  $K_n$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.*

Obsérvese que si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  con grado mínimo  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , claramente  $c(G)$  es completa, y el Teorema 3.2.1 es una consecuencia del Corolario 3.2.1.

### 3.3. Aplicaciones de recorridos en gráficas

En esta sección presentamos algunos problemas que pueden resolverse utilizando las ideas de paseo Euleriano y de ciclo Hamiltoniano.

### 3.3.1. Dominos

Las gráficas Eulerianas tienen muchas aplicaciones, una de ellas es en el juego del dominó.

El dominó es un juego que tiene 28 fichas en las que aparecen todas las cifras entre 0 y 6. La idea del juego es muy sencilla y consiste en colocar una ficha detrás de otra con la condición que dos fichas pueden ser consecutivas si y sólo si éstas comparten la misma cifra. Se dice que una partida es *perfecta* si logramos utilizar todas las fichas del dominó. Una partida es *semiperfecta* si logramos utilizar todas las fichas del dominó pero empezamos y terminamos con números distintos.

El problema del dominó puede modelarse en términos de teoría de las gráficas de la siguiente forma: ponemos un vértice por cada número que aparece en nuestro conjunto de fichas y dos vértices van a ser adyacentes si en nuestro conjunto de fichas aparece una que tenga las dos cifras correspondientes a los vértices. Entonces la gráfica asociada a este juego tiene 7 vértices y 28 aristas. De hecho se puede ver que el juego del dominó se modela con la gráfica  $K_7$  (ver Figura 3.6). Se puede ver que encontrar una partida perfecta en el dominó es equivalente a en-

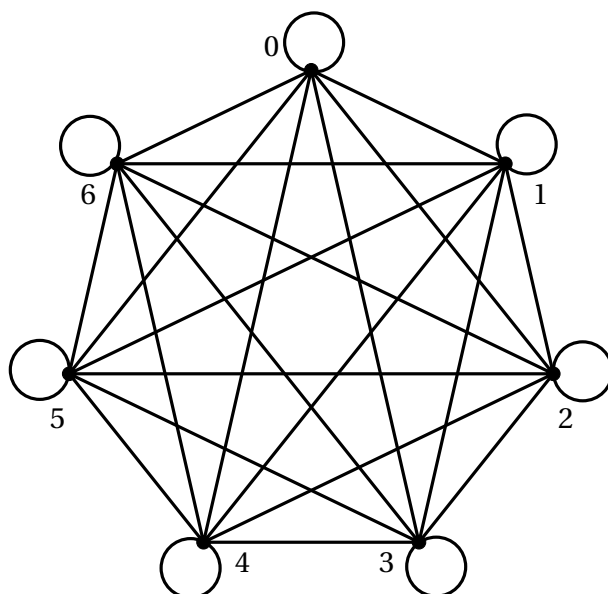


Figura 3.6: Gráfica asociada al dominó.

contrar un paseo Euleriano en nuestra gráfica. Por ejemplo, el camino  $(0, 3, 6, 5, 0)$  representa la sucesión de fichas  $(0, 3), (3, 6), (6, 5), (5, 0)$  (ver Figura 3.7).

### 3.3.2. El problema del caballo de ajedrez

En el juego de ajedrez la pieza del caballo se mueve en forma de  $L$ , es decir, se desplaza dos casillas en dirección horizontal y una en dirección vertical o viceversa. Obsérvese que al

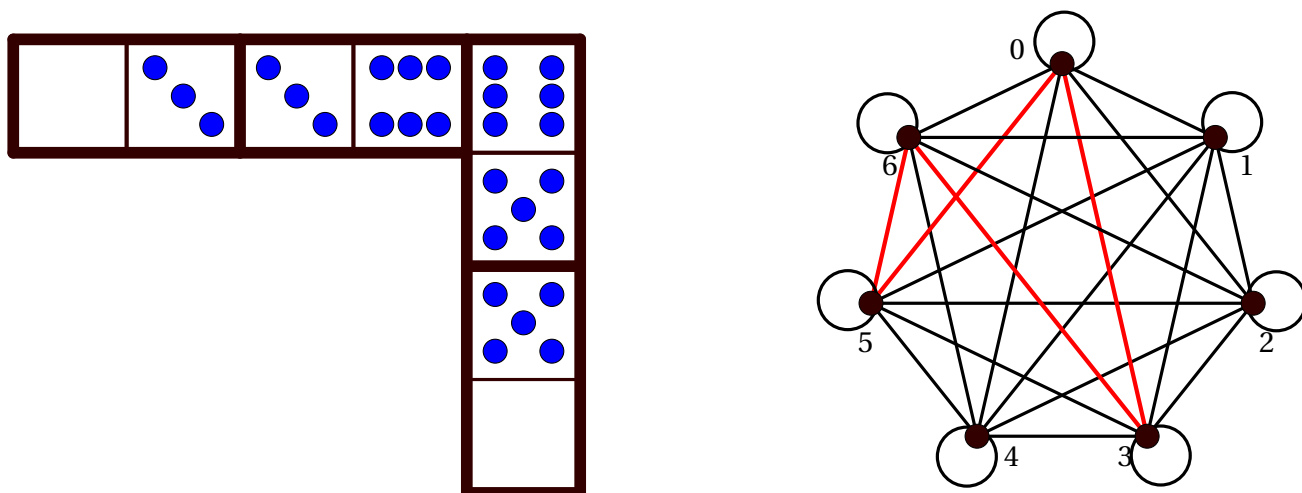


Figura 3.7: Ejemplo de una sucesión de fichas y el camino asociado.

moverse el caballo cambia su casilla de color. Un **recorrido del caballo** es una sucesión de saltos (sin repetir casillas) que van de una casilla inicial a una casilla final.

En el siglo IX los ajedrecistas árabes se divertían buscando recorridos del caballo en el tablero de ajedrez, es decir, colocaban el caballo en una casilla del tablero y tenían que recorrer el tablero (respetando los movimientos de la pieza) pasando por cada casilla exactamente una sola vez.

En general, si uno consigue encontrar un camino que termina en una casilla que esté a un salto de caballo de la casilla inicial, entonces el recorrido se puede cerrar y podríamos hacer el recorrido empezando en cualquier casilla.

¿Es posible encontrar un recorrido del caballo que visite todas las casillas del tablero de ajedrez y que regrese a su posición de salida?

En 1759, Euler escribió un artículo en el que hace un tratamiento matemático de este problema (*Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse*). En ese artículo intenta dar soluciones parciales al problema y después completarla. También Euler estudió el problema para tableros con distinto número de casillas y probó que no existen soluciones cuando el número de casillas es impar. Su argumento consistía en que un caballo siempre salta a una casilla de color distinto (de una blanca a una negra y viceversa), si el tablero tiene un número impar de casillas, entonces la última casilla visitada es del mismo color que la del primero y por lo tanto no pueden estar a un salto de distancia.

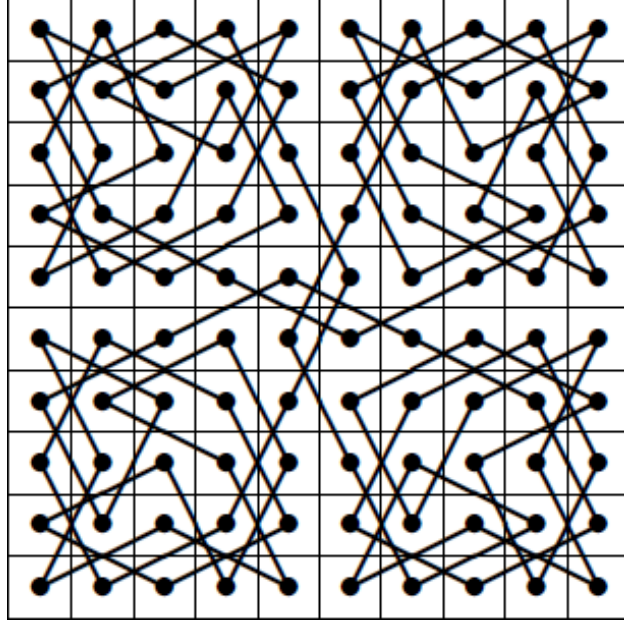


Figura 3.8: Una solución al recorrido del caballo.

### 3.3.3. Problema del agente viajero

Un agente viajero debe visitar un cierto número de ciudades y regresar a la ciudad de partida. ¿Cómo debe planear su itinerario de forma que sólo pase una vez por cada ciudad y lo haga en el menor tiempo posible? En términos de Teoría de las Gráficas este problema se puede modelar con una gráfica ponderada y la solución al problema corresponde con un ciclo Hamiltoniano de peso mínimo. Lo ideal para resolver el problema sería encontrar un algoritmo que nos de una solución óptima. Sin embargo, a diferencia del problema del mínimo conector no se conoce un algoritmo eficiente para resolver este problema. Por lo tanto, algo razonable sería obtener un solución (aunque no sea óptima) razonablemente buena.

Una posible solución sería encontrar primero un ciclo Hamiltoniano y luego hacer pequeñas modificaciones para ver si podemos obtener un ciclo Hamiltoniano de menor peso.

Sea  $G$  una gráfica Hamiltoniana de orden  $n$ .

1. Sea  $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  un ciclo Hamiltoniano.
2. Para toda  $i$  y  $j$  tales que  $1 < i+1 < j < n$  podemos obtener un nuevo ciclo Hamiltoniano

$$C_{ij} = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, v_1).$$

Este ciclo se obtiene al borrar las aristas  $v_i v_{i+1}$  y  $v_j v_{j+1}$  y agregar las aristas  $v_i v_j$  y  $v_{i+1} v_{j+1}$ .

Si para alguna  $i$  y  $j$  se tiene que  $\{v_i v_j, v_{i+1} v_{j+1}\} \subset E(G)$  y

$$\omega(v_i v_j) + \omega(v_{i+1} v_{j+1}) < \omega(v_i v_{i+1}) + \omega(v_j v_{j+1}),$$

donde  $\omega(v_i v_j)$  denota el peso de la arista  $v_i v_j$ . Entonces el ciclo  $C_{ij}$  es un ciclo de peso menor a  $C$ . Después de realizar estos cambios podemos obtener un ciclo que si bien no es óptimo si es una solución bastante razonable a nuestro problema.

### 3.3.4. La Mesa Redonda

Romeo y Julieta van a organizar una cena para ocho personas, a las que llamaremos por comodidad,  $A, B, C, D, E, F, G$  y  $H$ . La mesa en donde van a cenar tiene forma octagonal. El problema radica en que no todas las personas son amigas y no aceptan sentarse junto a alguien que no es de su agrado. Antes de asignar los lugares para la reunión, Romeo y Julieta le pidieron a cada persona una lista de las personas con las cuales no está dispuesto a sentarse. Después de recopilar toda la información obtuvieron las siguientes restricciones:

1.  $A$  no quiere sentarse junto a  $C, D$  y  $F$ .
2.  $B$  no quiere sentarse junto a  $E$  y  $H$ .
3.  $C$  no quiere sentarse junto a  $A, D, E$  y  $G$ .
4.  $D$  no quiere sentarse junto a  $C$  y  $H$ .
5.  $E$  no quiere sentarse junto a  $B$  y  $G$ .
6.  $F$  no quiere sentarse junto a  $A$  y  $G$ .
7.  $G$  no quiere sentarse junto a  $C, E$  y  $F$ .
8.  $H$  no quiere sentarse junto a  $A, B, C$  y  $D$ .

Una forma de resolver este problema es probando una a una las posibilidades que hay para sentar a las 8 personas. Debido a que el número total de posibilidades que hay para sentar a las 8 personas en una mesa redonda es  $8!/8 = 5040$ , este método de resolución se vuelve poco práctico. Otra forma de resolver este problema es a través de la construcción de una gráfica en la que los vértices representan a las personas y dos vértices van a ser adyacentes si y sólo si las personas correspondientes a los vértices no quieren sentarse juntas.

Si consideramos el complemento de la gráfica asociada al problema anterior obtenemos una nueva gráfica en la que se representan las posibles compatibilidades entre las personas (ver Figura 3.9). El problema se resuelve al encontrar un ciclo hamiltoniano. Por ejemplo, en el caso anterior una solución al problema podría ser el ciclo Hamiltoniano  $(A, E, D, B, C, F, H, G, A)$ .

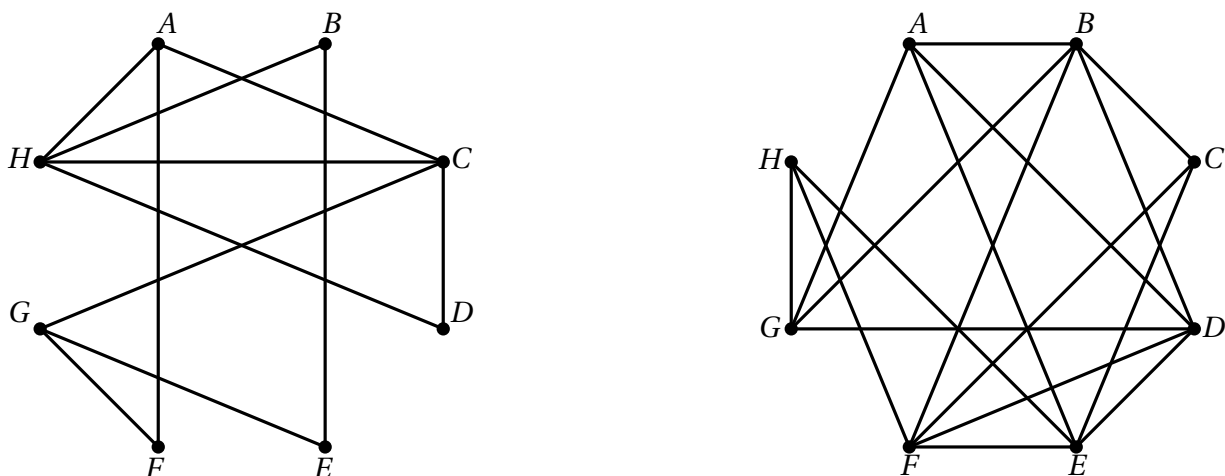


Figura 3.9: La gráfica de preferencias y su complemento.

### 3.4. Ejercicios

1. Encuentra una gráfica que sea Euleriana y Hamiltoniana.
2. Encuentra una gráfica que sea Euleriana y que no sea Hamiltoniana.
3. Encuentra una gráfica que sea Hamiltoniana y que no sea Euleriana.
4. Encuentra una gráfica que no sea Euleriana y que no sea Hamiltoniana.
5. Encuentra una partición de las aristas de la gráfica que aparece en la Figura 3.10 en ciclos.

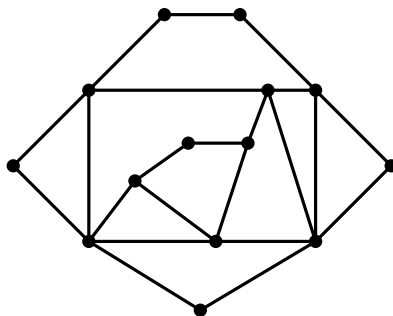
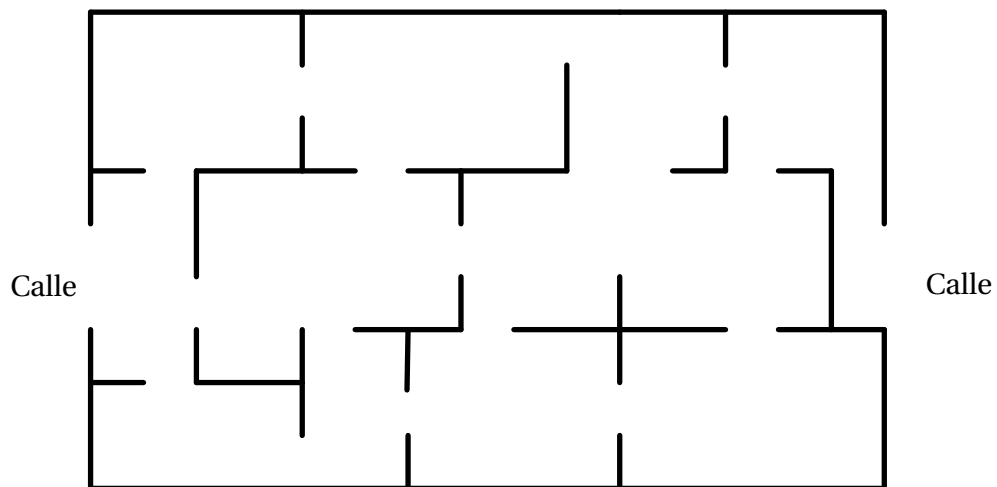


Figura 3.10: Encuentra un descomposición de las aristas de la gráfica en ciclos.

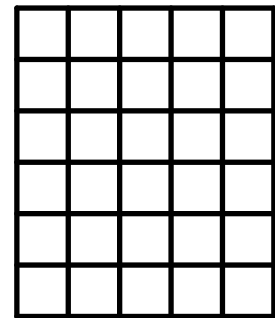
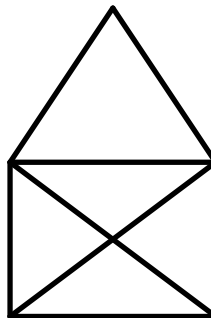
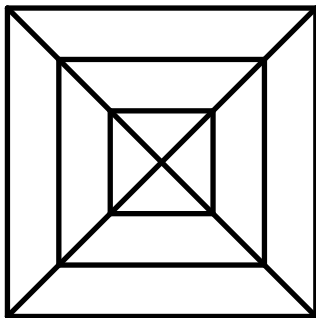
6. Demuestra que si  $G$  es una gráfica con un vértice de corte, entonces  $G$  no es Hamiltoniana.
7. Demuestra que si  $G$  es una gráfica Euleriana, entonces  $G$  no puede tener puentes.
8. Encuentra una gráfica  $G$  de orden 10 con grado mínimo 4 tal que no sea Hamiltoniana.
9. ¿Toda gráfica de orden 10 con grado mínimo 5 es Hamiltoniana? Justifica tu respuesta.
10. Demuestra el Colorario 3.1.1.
11. ¿Para que valores de  $n$  y  $m$  las gráficas  $C_n$ ,  $K_n$  y  $K_{n,m}$  son Eulerianas.
12. Supongamos que tenemos una red con 10 computadoras en la que cada computadora esta conectada con al menos otras seis computadoras.
  - a) ¿Cómo puedes modelar a la red utilizando una gráfica?
  - b) ¿La gráfica asociada a la red es Hamiltoniana?
  - c) Si la gráfica asociada a la red es Euleriana y el número de enlaces es 39 ¿cuántos vértices de grado 6 tiene la red?
13. Describe un algoritmo para encontrar un camino Euleriano en una gráfica dada.
14. Sea  $G$  un árbol, construimos la gráfica  $G^2$  como la gráfica con  $V(G^2) = V(G)$  y  $uv \in E(G^2)$  si y sólo si  $d_G(u, v) = 2$ . Encuentra condiciones sobre  $G$  para garantizar que  $G^2$  es Euleriana.
15. En la siguiente figura se muestran las salas de un museo.



- a) ¿Puedes encontrar un recorrido que pase por todas las salas, sin pasar dos veces por la misma sala, del museo que empiece y termine en la calle?

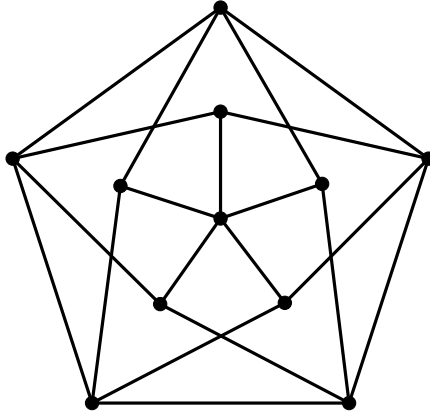
b) ¿Y si permitimos pasar dos veces por la misma sala es posible?

16. Sea  $G$  una gráfica. Decimos que  $T$  es una **paseo Euleriano no cerrado** de  $G$  si utiliza a todas las aristas, no repite aristas y empieza y termina en vértices distintos. Demuestra que si  $G$  es una gráfica conexa con exactamente dos vértices de grado impar, entonces  $G$  tiene un paseo Euleriano no cerrado.
17. Cuáles de las siguientes figuras pueden ser dibujadas sin levantar el lápiz del papel y trazar dos veces la misma línea.

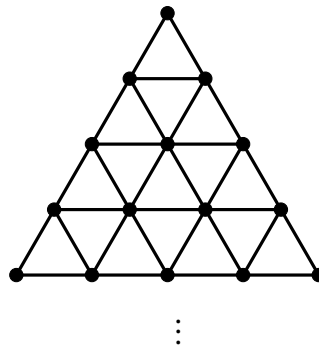


18. Construye una gráfica  $G$  tal que
  - a)  $G$  y  $G^c$  son Eulerianas.
  - b)  $G$  es Euleriana y  $G^c$  no es Euleriana .
  - c)  $G$  es Hamiltoniana y  $G^c$  no es Hamiltoniana.
  - d)  $G$  y  $G^c$  son Hamiltonianas.
19. Da un ejemplo de una gráfica de orden  $n$  para ver que la hipótesis  $d(v) \geq n/2$  del Teorema 3.2.1 no puede ser remplazada por  $d(v) \geq (n-1)/2$ .
20. Demuestra que la siguiente gráfica es Hamiltoniana.





21. Demuestra que si  $G$  es una gráfica Euleriana, entonces  $L(G)$  es hamiltoniana.
22. Considera un tablero de ajedrez de  $4 \times 4$ . Demuestra que un caballo no puede recorrer todas las casillas del tablero sin pasar dos veces por la misma casilla utilizando los movimientos del caballo.
23. ¿Se puede encontrar un recorrido de un caballo que pase por todas las casillas de un tablero de  $5 \times 5$ ?
24. La siguiente gráfica se puede construir con un número arbitrario de niveles.



- a) Demuestra que la gráfica es Euleriana. ¿Puedes describir como sería un ciclo Euleriano?
  - b) ¿La gráfica es Hamiltoniana?
25. Sea  $G$  una gráfica bipartita tal que  $V(G) = A \cup B$  y si  $uv \in E(G)$ , entonces  $u \in A$  y  $v \in B$ . Demuestra que si  $G$  es Hamiltoniana, entonces  $|A| = |B|$ .

26. Considera el juego del dominó.

- a)* Haz una partida perfecta ¿puedes empezar y terminar con cualquier número?
- b)* ¿Puedes hacer una partida semiperfecta?
- c)* Si ahora nos olvidamos de las fichas en las que aparece un 6 ¿puedes hacer una partida perfecta? ¿y semiperfecta?



# Capítulo 4

## Conexidad

En capítulos anteriores hemos hablado del concepto de conexidad en una gráfica (una gráfica es conexa si y sólo si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  existe una trayectoria que los conecta). Por ejemplo, vimos que los árboles son gráficas conexas minimales por aristas, es decir, si quitamos una arista de un árbol este deja de ser conexo. También vimos que un ciclo no se puede desconectar si eliminamos sólo una arista, pero si en lugar de quitar una arista quitamos dos aristas, este siempre se desconecta. Esto nos dice de forma intuitiva que el ciclo es una gráfica “más” conexa que un árbol.

En este capítulo realizamos un estudio más profundo sobre la conexidad de una gráfica. Se presenta la definición de conexidad por aristas y por vértices. Se estudia el Teorema de Menger, el cual es uno de los resultados más importantes en conexidad. Al final de este capítulo se presenta la conexidad promedio de una gráfica, la cual además de ser un parámetro definido recientemente tiene muchas aplicaciones.

### 4.1. Conexidad por aristas

Muchas redes de telecomunicación<sup>1</sup> pueden ser modeladas con una gráfica conexa, en este tipo de problemas es importante conocer la tolerancia a fallos de la red, es decir, la capacidad que tiene la red para seguir funcionando cuando alguno de sus componentes falla. Supongamos que tenemos dos redes de telecomunicación las cuales están modeladas por las gráficas que aparecen en Figura 4.1.

La red modelada por  $G_1$  parece tener una mejor tolerancia a los fallos que la modelada por  $G_2$ , pues para desconectar dos vértices en  $G_1$  hay que quitar dos aristas. Por otro lado, cualquier arista que eliminemos de  $G_2$  desconecta a la gráfica. Entonces, aunque las dos gráficas son conexas, podríamos decir  $G_1$  es “más” conexa que  $G_2$ .

Si profundizamos un poco más en la idea de conexidad, podemos llegar a la siguiente definición.

---

<sup>1</sup>Una **red de telecomunicación** es un conjunto de medios para la transmisión e intercambio de información.

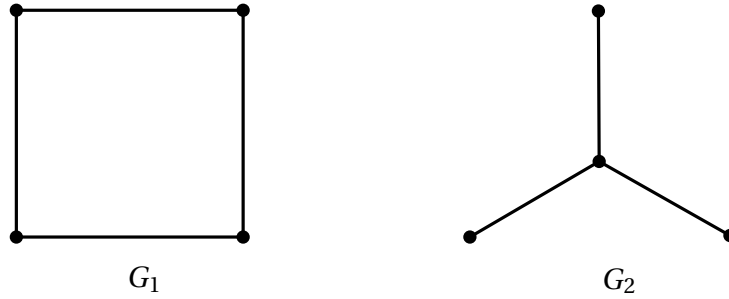


Figura 4.1: Gráficas asociadas a dos redes de telecomunicación.

**Definición 4.1.1.** *Un conjunto de corte por aristas de una gráfica  $G$  es un subconjunto  $W \subset E(G)$  tal que  $G - W$  no es conexa. Decimos que  $W$  es un  $k$ -corte por aristas si  $|W| = k$ .*

*La conexidad por aristas de una gráfica  $G$  se denota como  $\lambda(G)$  y es la mínima cardinalidad de un conjunto de corte por aristas, es decir,*

$$\lambda(G) = \text{mín}\{|W| : W \text{ es un conjunto de corte por aristas}\}.$$

Decimos que una gráfica  $G$  es  $k$ -**arista conexa** si para desconectarla hay que quitar al menos  $k$  aristas, es decir, si  $\lambda(G) \geq k$ . Regresando a las gráficas de la Figura 4.1 tenemos que  $\lambda(G_1) = 2$  y  $\lambda(G_2) = 1$ , es decir,  $G_1$  es 2-conexa y  $G_2$  es 1-conexa.

Consideremos ahora al cubo (ver Figura 4.2). Es fácil ver que un conjunto de corte por aristas del cubo es  $S = \{AD, EH, FG, BC\}$ , sin embargo no es un corte de cardinalidad mínimo, pues el conjunto de aristas incidentes con el vértice  $A$  también desconecta al cubo, más aún, se cumple que para el cubo la conexidad por aristas es 3.

Para ciertas familias de gráficas es sencillo determinar su conexidad por aristas. En el Cuadro 4.1 se presentan algunos valores de la conexidad por aristas de ciertas familias de gráficas.

Gráfica	Conexidad por aristas
$G$ no es conexa	$\lambda(G) = 0$
$G$ un árbol	$\lambda(G) = 1$
$C_n$	$\lambda(C_n) = 2$
$K_n$	$\lambda(K_n) = n - 1$
$K_{n,m}$	$\lambda(K_{n,m}) = \text{mín}\{n, m\}$

Cuadro 4.1: Conexidad por aristas de algunas familias de gráficas

En general, se puede ver que dada una gráfica  $G$  se cumple la siguiente desigualdad:

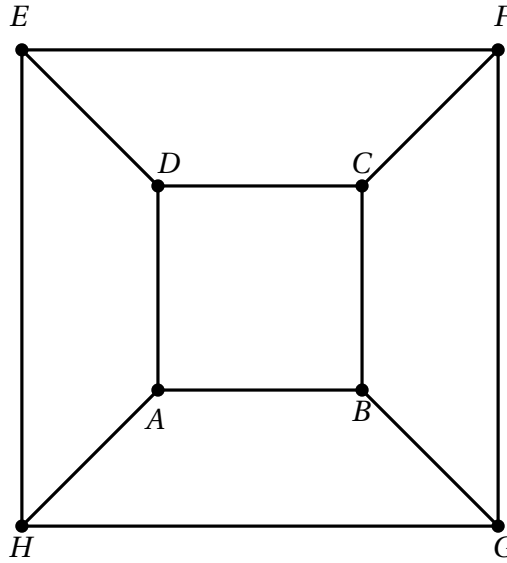


Figura 4.2: Cubo.

$$\lambda(G) \leq \delta(G).$$

Esto se debe a que si nos fijamos en un vértice  $v$  de  $G$  tal que  $d(v) = \delta(G)$ , el conjunto de aristas incidentes a  $v$  es un conjunto de corte por aristas de  $G$ .

Más adelante se presentarán más resultados relacionados con la conexidad por aristas de una gráfica. En la siguiente sección se muestra el concepto análogo de conexidad para vértices.

## 4.2. Conexidad por vértices

Si cambiamos la palabra arista y la sustituimos por vértice en la definición de conexidad por aristas (ver Definición 4.1.1), obtenemos la definición de conexidad por vértices de una gráfica.

**Definición 4.2.1.** Un **conjunto de corte** de una gráfica  $G$  es un subconjunto de vértices  $S \subset V(G)$  tal que  $G - S$  no es conexa. Decimos que  $S$  es un  **$k$ -corte** si  $|S| = k$ .

La **conexidad de una gráfica**  $G$  se denota como  $\kappa(G)$  y es la mínima cardinalidad de un conjunto de corte, es decir,

$$\kappa(G) = \min\{|S| : S \text{ es un conjunto de corte}\}.$$

Nótese que la gráfica completa  $K_n$  no tiene conjuntos de corte, sin embargo, por convención suponemos que  $\kappa(K_n) = n - 1$ . Si  $G$  no es conexa, entonces  $\kappa(G) = 0$ . Igual que en la conexidad por aristas, decimos que una gráfica es  **$k$ -conexa** si  $\kappa(G) \geq k$ .

Dada una gráfica  $G$  existe una relación entre los parámetros  $\lambda(G)$  y  $\kappa(G)$ , esta relación se conoce como la desigualdad de Whitney y fue probada en 1932 (ver [33]).

**Teorema 4.2.1.** Sea  $G$  una gráfica simple, entonces

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

*Demostración.* Primero veamos que la desigualdad  $\lambda(G) \leq \delta(G)$  se cumple al observar que cualquier conjunto de aristas incidentes con un vértice de grado mínimo es un conjunto de corte de  $G$ .

Ahora, para ver que  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$  utilizaremos inducción matemática sobre  $\lambda(G)$ .

1. *Base de la inducción.*

Si  $\lambda(G) = 0$ , se sigue que  $G$  no es conexa y por lo tanto  $\kappa(G) = 0$  y el resultado es cierto. Si  $\lambda(G) = 1$ , entonces  $G$  contiene una arista  $e = uv$  la cual es un puente. Si  $|V(G)| \geq 3$ , entonces tenemos que  $G - u$  o  $G - v$  no es conexa y por lo tanto  $\kappa(G) = 1$ . Si  $|V(G)| = 2$ , entonces  $G$  es isomorfa a la gráfica completa  $K_2$  y por definición tenemos que  $\kappa(K_2) = 1$ , probando así que el resultado es válido para  $\lambda(G) = 0, 1$ .

2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos ahora que el resultado es cierto para toda gráfica  $G$  con  $\lambda(G) \leq k$ .

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  una gráfica con  $\lambda(G) = k + 1$ . Sea  $W \subset E(G)$  un conjunto de corte por aristas de  $G$  de cardinalidad mínima, es decir,  $|W| = k + 1$ . Sea  $e \in W$  y consideremos la gráfica  $H = G - e$ . Claramente  $\lambda(H) = k$  (en caso contrario  $G$  tendría un conjunto de corte de cardinalidad menor a  $k + 1$ , lo cual sería una contradicción con la elección de  $G$ ). Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que  $\kappa(H) \leq \lambda(H) = k$ .

Sea  $S \subset V(H)$  un conjunto de corte de  $H$  de cardinalidad  $\kappa(H)$ . Consideremos los siguientes casos.

*Caso 1.*  $G - S$  no es conexa.

En este caso tenemos que el conjunto  $S$  también es un corte de  $G$  y por lo tanto  $\kappa(G) \leq |S| = \kappa(H) \leq k < \lambda(G)$ .

*Caso 2.*  $G - S$  es conexa.

En este caso se observa que la arista  $e$  es un puente de  $G - S$ . Supongamos que  $e = uv$ . Claramente  $u, v \notin S$ , por lo tanto  $|V(G) \setminus S| \geq 2$ .

Si  $|V(G) \setminus S| = 2$ , entonces  $|S| = |V(G)| - 2$ , y

$$\kappa(G) \leq |V(G)| - 1 = |S| + 1$$

Continuemos suponiendo que  $|V(G) \setminus S| > 2$ . Entonces, alguno de los vértices terminales de la arista  $e = uv$  debe ser un vértice de corte de  $G - S$  (ver ejercicio 4 de este capítulo). Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $u$  es un vértice de corte de  $G - S$ . Entonces  $S \cup \{u\}$  es un conjunto de corte de  $G$  y por lo tanto

$$\kappa(G) \leq |S| + 1 = \kappa(H) + 1 = k + 1 = \lambda(G).$$

□

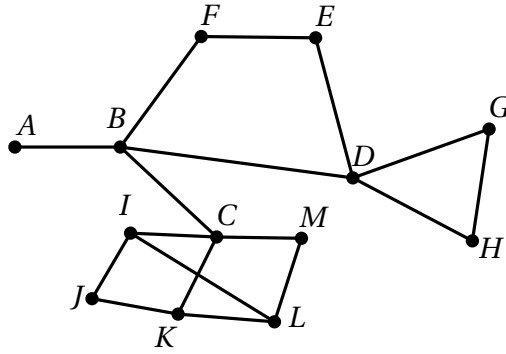


Figura 4.3: Gráfica  $G$ .

### 4.3. Bloques

En esta sección introducimos el concepto de bloque, el cual será de gran utilidad para estudiar la estructura de una gráfica conexa.

**Definición 4.3.1.** Un **bloque** de una gráfica  $G$  es una subgráfica conexa de  $G$  maximal y sin vértices de corte.

En la gráfica  $G$  que aparece Figura 4.3 se observa que la subgráfica inducida por  $\{A, B\}$  es un bloque, pues no contiene vértices de corte y cualquier otra subgráfica que contenga a  $A$  y a  $B$  tiene al menos un vértice de corte. De igual forma la subgráfica inducida por el conjunto  $\{B, F, E, D\}$  forma otro bloque. En cambio la subgráfica  $G_1$  inducida por  $\{B, D, E, F, G, H\}$  no es un bloque pues contiene al vértice  $D$ , el cual es vértice de corte de  $G_1$ .

Se puede ver que todo bloque de una gráfica  $G$  es una gráfica maximal 2-conexa, o bien es un puente o un vértice aislado. De forma inversa tenemos que estas subgráficas de  $G$  son bloques de  $G$ . Debido a la maximalidad de los bloques tenemos que dos bloques a lo más se intersectan en un sólo vértice, el cual es un vértice de corte de  $G$ , la demostración de este hecho se dará más adelante. En la Figura 4.4 se muestra una gráfica con cinco bloques.

A continuación presentamos un concepto que es de gran ayuda para caracterizar a las gráficas 2-conexas. Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos  $uv$ -trayectorias en una gráfica  $G$ . Diremos que  $T_1$  y  $T_2$  son dos trayectorias **internamente disjuntas por vértices** si  $V(T_1) \cap V(T_2) = \{u, v\}$ . Utilizando el concepto de trayectorias internamente disjuntas por vértices podemos caracterizar a las gráficas 2-conexas.

**Teorema 4.3.1.** Una gráfica  $G$  con al menos 3 vértices es 2-conexa si y sólo si todo par de vértices  $u$  y  $v$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente disjuntas.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$  y supongamos que todo par de vértices  $u$  y  $v$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente disjuntas. Supongamos por contradicción que  $G$  contiene un vértice de corte  $x$ . Como  $x$  es un vértice de corte se sigue que



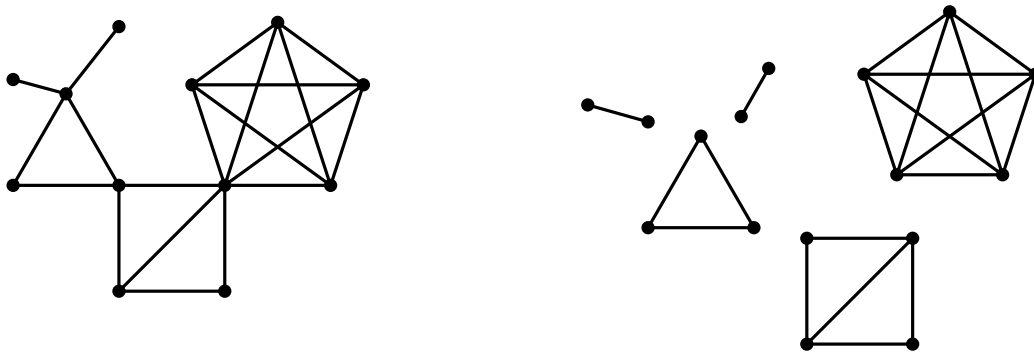


Figura 4.4: Gráfica con cinco bloques.

$G - x$  no es conexa. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $G - x$  tales que están en componentes conexas distintas. Por hipótesis sabemos que en  $G$  hay al menos dos  $uv$ -trayectorias  $P$  y  $Q$  internamente disjuntas, además en  $G - x$  no existe una  $uv$ -trayectoria. Esto implica que  $x$  pertenece a  $P$  y  $Q$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto todo conjunto de corte de  $G$  tiene al menos dos vértices y la gráfica es 2-conexa.

Ahora supongamos que  $G$  es una gráfica 2-conexa. Utilizaremos inducción sobre la distancia  $d(u, v)$  entre los vértices  $u$  y  $v$  para probar que  $u$  y  $v$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente disjuntas.

1. *Base de la inducción.*

Si  $d(u, v) = 1$ . Obsérvese que como  $d(u, v) = 1$ , entonces  $uv \in E(G)$ . Como  $G$  es 2-conexa se sigue que  $G$  no tiene vértices de corte y por lo tanto no tiene puentes (ver ejercicio 13). Entonces la gráfica  $G - \{uv\}$  contiene una  $uv$ -trayectoria  $P$  y por lo tanto  $u$  y  $v$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente disjuntas (la arista  $uv$  y la trayectoria  $P$ ).

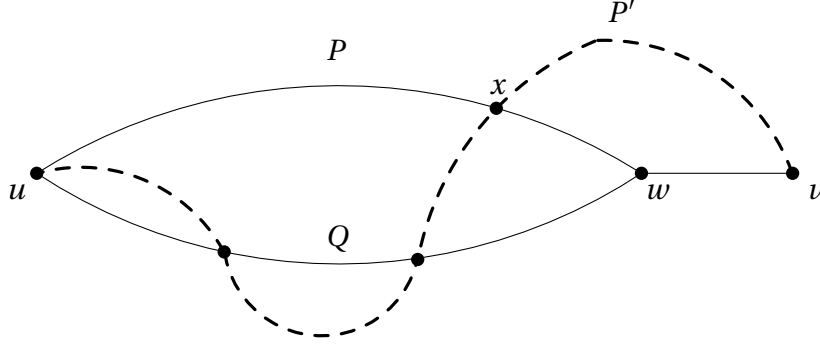
2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que el teorema se cumple para todo par de vértices que están a distancia menor o igual a  $k - 1$ .

3. *Paso inductivo.*

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$  a distancia  $k$ , es decir,  $d(u, v) = k$ . Consideremos una  $uv$ -trayectoria de longitud  $k$  y sea  $w$  el vértice en  $P$  anterior a  $v$ . Nótese que  $d(u, w) = k - 1$ , entonces por la hipótesis de inducción se sigue que existen dos  $uw$ -trayectorias internamente disjuntas a las cuales denotaremos por  $P$  y  $Q$ . Además, como  $G$  es 2-conexa, la gráfica  $G - w$  es conexa y por lo tanto contiene una  $uv$ -trayectoria  $P'$ . Sea  $x$  el último vértice de  $P'$  tal que está en  $P \cup Q$ . Como  $u \in P \cup Q$ , sabemos que siempre podemos elegir al vértice  $x$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \in P$ . Entonces  $G$  tiene dos  $uv$ -trayectorias internamente disjuntas, una formada por la parte de  $P$  que va de  $u$  a  $x$  y la parte de  $P'$  que va de  $x$  a  $v$ , y la otra compuesta por  $Q$  y la arista  $wv$ .



□

Como un resultado inmediato del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.1.** *Si  $G$  es una gráfica 2-conexa, entonces todo par de vértices está en un ciclo.*

*Demostración.* Si  $G$  es dos conexa, entonces todo par de vértices está conectado a través de dos trayectorias internamente disjuntas y la unión de esas trayectorias forma un ciclo. □

Para continuar con el capítulo es conveniente introducir una nueva operación. La **subdivisión** de una arista. Decimos que una arista  $e$  es subdividida si es borrada y reemplazada por una trayectoria de longitud dos (ver Figura 4.5).



Figura 4.5: Subdivisión de una arista  $e$ .

Una vez introducida la subdivisión de una arista podemos hacer la siguiente observación.

**Observación 4.3.1.** *La clase de los bloques con al menos tres vértices es cerrada bajo la operación de subdivisión, es decir, que si subdividimos una arista de un bloque, este sigue siendo bloque.*

Como una aplicación inmediata de esta operación podemos encontrar un resultado análogo al Teorema 4.3.1 para aristas.

**Teorema 4.3.2.** *Si  $G$  es un bloque con al menos tres vértices, entonces todo par de aristas está en un ciclo.*

*Demostración.* Sea  $G$  un bloque de orden  $n \geq 3$  y sean  $e_1$  y  $e_2$  aristas de  $G$ . Formemos una nueva gráfica  $G'$  al subdividir las aristas  $e_1$  y  $e_2$  y denotemos por  $v_1$  y  $v_2$  a los vértices que agregamos. Por la Observación 4.3.1 se sigue que  $G'$  es un bloque y por el Teorema 4.3.1 sabemos que hay un ciclo que contiene a  $v_1$  y  $v_2$ . Como  $d_{G'}(v_1) = d_{G'}(v_2) = 2$  tenemos que  $e_1$  y  $e_2$  están en un ciclo.  $\square$

Utilizando los bloques de una gráfica podemos definir una nueva gráfica a la que llamaremos la **gráfica de bloques**.

Sea  $G$  una gráfica. Sea  $A$  el conjunto de los vértices de corte de  $G$  y sea  $\mathcal{B}$  el conjunto de los bloques de  $G$ . Definimos la **gráfica de bloques**  $\mathcal{B}(G)$  de  $G$  como sigue:

- a)  $V(\mathcal{B}(G)) = A \cup \mathcal{B}$ .
- b) Dado  $a \in A$  y  $B \in \mathcal{B}$ ,  $aB \in E(\mathcal{B}(G))$  si y sólo si  $a \in B$ .

Nótese que  $\mathcal{B}(G)$  es una gráfica bipartita con bipartición  $(A, \mathcal{B})$ . Más aún, la gráfica de bloques nos da información sobre como es la estructura conexas de  $G$ .

Utilicemos la gráfica  $G$  de la Figura 4.6 para encontrar su gráfica de bloques  $\mathcal{B}(G)$ . Los vértices de corte de  $G$  son  $A = \{v_1, v_2, v_3\}$  y los bloques  $B_1, B_2, B_3, B_4$  y  $B_5$  son los inducidos por los conjuntos de vértices  $\{a, v_1\}, \{b, v_1\}, \{c, v_2, v_1\}, \{d, e, v_2, v_3\}$  y  $\{f, g, h, i, v_3\}$ , respectivamente

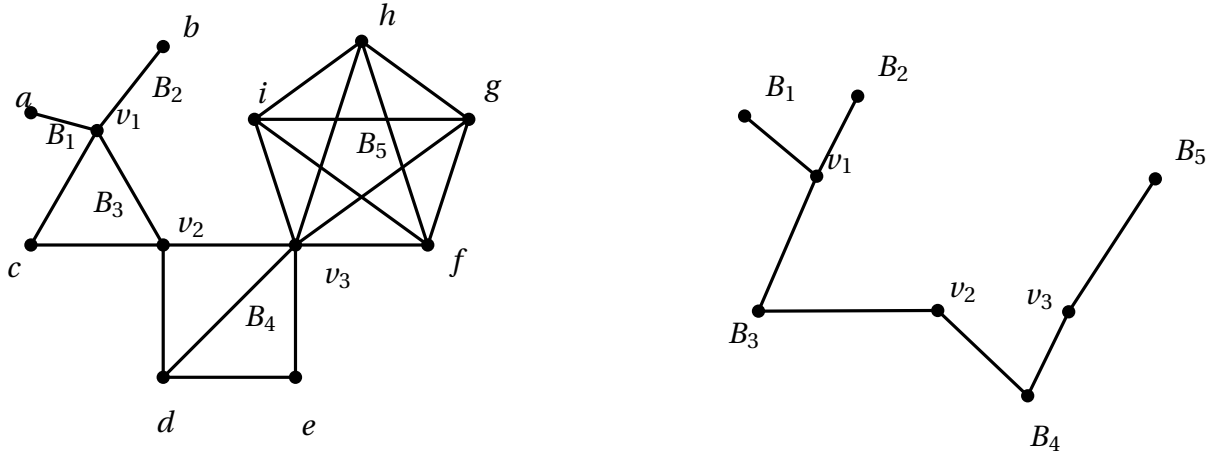


Figura 4.6: Gráfica  $G$  y su gráfica de bloques  $\mathcal{B}(G)$ .

Dada una gráfica  $G$  podemos establecer una relación  $\sim_R$  entre las aristas de  $G$ . Diremos que dos aristas  $e$  y  $f$  están relacionadas si hay un ciclo en  $G$  que contiene a las aristas  $e$  y  $f$ . Es decir,

$$e \sim_R f \iff \text{hay un ciclo } C \text{ en } G \text{ tal que } e, f \in E(C).$$

**Teorema 4.3.3.** *La relación  $\sim_R$  es una relación de equivalencia. Más aún, las clases de equivalencia de  $\sim_R$  son los bloques de  $G$ .*

*Demostración.* Ejercicio. □

Ahora veamos algunas propiedades de los bloques de una gráfica.

**Proposición 4.3.1.** *Sean  $B_1$  y  $B_2$  bloques distintos de una gráfica  $G$ , entonces*

$$|V(B_1) \cap V(B_2)| \leq 1.$$

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $G$  contiene dos bloques  $B_1$  y  $B_2$  tales que

$$|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2.$$

Sea  $B = B_1 \cup B_2$ . Veamos que  $B$  no contiene vértices de corte. Sea  $v \in V(B)$ . Las gráficas  $B_1 - v$  y  $B_2 - v$  son conexas (por definición de bloque), además como  $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$  se sigue que  $B_1 - v$  y  $B_2 - v$  comparten al menos un vértice y por lo tanto  $B - v = (B_1 - v) \cup (B_2 - v)$  es conexa. Entonces  $B$  no contiene vértices de corte, lo cual contradice la maximalidad de  $B_1$  y  $B_2$ . □

**Proposición 4.3.2.** *Sean  $B_1$  y  $B_2$  bloques distintos de una gráfica  $G$ , entonces*

$$E(B_1) \cap E(B_2) = \emptyset.$$

*Demostración.* Supongamos que  $B_1$  y  $B_2$  son dos bloques de  $G$  tales que comparten una arista  $e = uv$ . Entonces por la proposición anterior tenemos que  $\{u, v\} \in B_1 \cap B_2$ , obteniendo así una contradicción. □

Una vez definida la gráfica de bloques de una gráfica conexa podemos estudiar las propiedades estructurales que esta cumple.

**Proposición 4.3.3.** *La gráfica de bloques de una gráfica conexa es un árbol.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa y  $\mathcal{B}(G)$  su gráfica de bloques. Sea  $(A, \mathcal{B})$  la bipartición de  $\mathcal{B}(G)$  donde  $A$  es el conjunto de los vértices de corte de  $G$  y  $\mathcal{B}$  el conjunto de los bloques de  $G$ . Por la conexidad de  $G$  se sigue que  $\mathcal{B}(G)$  es conexa. Supongamos ahora que  $\mathcal{B}(G)$  contiene un ciclo  $C$ . Consideremos a la subgráfica  $H$  formada por todos los bloques en  $\mathcal{B} \cap V(C)$ . Utilizando un razonamiento similar al utilizado en la Proposición 4.3.1 se sigue que  $H$  es una gráfica 2-conexa, lo cual contradice la maximalidad de los bloques en  $\mathcal{B} \cap V(C)$ . □

## 4.4. Teorema de Menger

Una definición equivalente del concepto de conexidad se debe a Menger [31]. El Teorema de Menger es uno de los resultados más importantes y clásicos en el área de conexidad. Para poder hablar del Teorema de Menger es necesario entender el concepto de trayectorias disjuntas y conjuntos separadores. Aunque en la sección anterior se presentó el concepto de trayectorias internamente disjuntas por vértices, consideramos conveniente escribir otra vez la definición incluyendo su análogo para aristas.

**Definición 4.4.1.** Sea  $G$  una gráfica conexa, y sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$ . Dos  $uv$ -trayectorias son **internamente disjuntas por vértices** si los únicos vértices que tienen en común son  $u$  y  $v$ . Análogamente podemos definir este concepto para las aristas. Dos  $uv$ -trayectorias son **disjuntas por aristas** si no tienen aristas en común.

Se puede ver que dos trayectorias internamente disjuntas por vértices son a su vez disjuntas por aristas, sin embargo el recíproco no es cierto. En la gráfica que aparece en la Figura 4.7 se observa que  $(u, x, z, v)$  y  $(u, y, w, v)$  son dos trayectorias internamente disjuntas por vértices. Las trayectorias  $(u, x, w, z, v)$  y  $(u, y, w, v)$  son dos trayectorias disjuntas por aristas pero no por vértices.

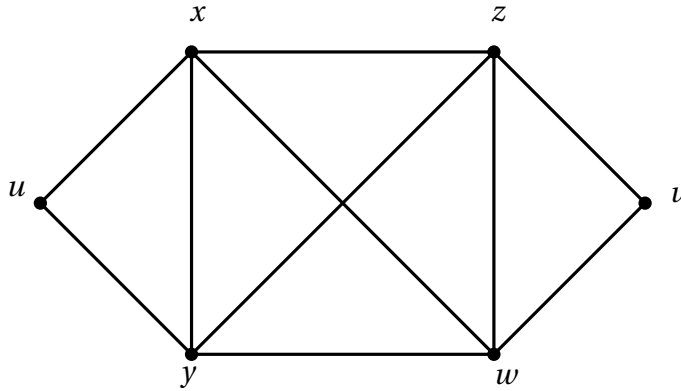


Figura 4.7: Trayectorias disjuntas entre  $u$  y  $v$ .

**Definición 4.4.2.** Sea  $G$  una gráfica conexa y sean  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ . Decimos que un conjunto  $S$  de vértices **separa** a  $u$  y  $v$  si en la gráfica  $G - S$  no hay trayectorias entre  $u$  y  $v$ . Análogamente decimos que un conjunto  $W$  de aristas **separa** a los vértices  $u$  y  $v$  si en la gráfica  $G - W$  no hay trayectorias entre los vértices  $u$  y  $v$ .

En la gráfica de la Figura 4.7 se puede ver que los conjuntos  $S = \{x, y\}$  y  $W = \{xz, xw, yz, zw\}$ , separan a  $u$  y  $v$ . En general diremos que  $S$  y  $W$  son conjuntos  $(u, v)$ -**separadores** de la gráfica.

Consideremos una gráfica conexa  $G$  y supongamos que  $W$  es un conjunto de aristas que separa a dos vértices  $u$  y  $v$ . Como  $W$  es un  $(u, v)$ -separador, entonces en  $G - W$  no hay  $uv$ -trayectorias y por lo tanto toda  $uv$ -trayectoria debe contener al menos una arista de  $W$ . Entonces, el máximo número de  $uv$ -trayectorias disjuntas por aristas dos a dos no puede ser mayor que el número de aristas en  $W$ .

Análogamente, si  $S \subset V(G)$  es un  $(u, v)$ -separador, tenemos que el máximo número de  $uv$ -trayectorias disjuntas por vértices dos a dos es menor o igual que la cardinalidad de  $S$ .

Nótese que el razonamiento es válido para todo  $(u, v)$ -separador, en particular para aquellos de cardinalidad mínima.

Menger demostró que las desigualdades que acabamos de presentar son una igualdad cuando el conjunto separador tiene cardinalidad mínima. A continuación presentamos la versión del Teorema de Menger para aristas. La demostración de este teorema se debe a Wilson.

**Teorema 4.4.1** (Menger, 1927). *Sea  $G$  una gráfica conexa y sean  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ . Entonces el máximo número de  $uv$ -trayectorias disjuntas por aristas es igual al mínimo número de aristas en un  $(u, v)$ -separador.*

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$ . Acabamos de probar que el máximo número de  $uv$ -trayectorias disjuntas por aristas no puede ser mayor que el mínimo número de aristas en un conjunto que separa a  $u$  y  $v$ .

Para probar la igualdad demostraremos, utilizando inducción matemática, que el mínimo número de aristas en un  $(u, v)$ -separador no puede ser mayor que el máximo número de  $uv$ -trayectorias disjuntas por aristas.

Sea  $m$  el número de aristas de  $G$ . Procedamos por inducción sobre  $m$ .

1. *Base de la inducción.*

Claramente, si  $m = 1$ , como  $G$  es conexa se sigue que es isomorfa a  $K_2$  y se puede ver que el teorema es válido. Si  $m = 2$ , entonces  $G$  es isomorfa a una trayectoria de longitud 2 y el resultado también es cierto.

2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que el resultado es válido para toda gráfica con menos de  $m$  aristas.

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  una gráfica con  $m$  aristas. Dividamos la prueba en dos casos.

*Caso 1.* Existe un conjunto  $W \subset E(G)$  de cardinalidad mínima que separa a los vértices  $u$  y  $v$  tal que hay aristas incidentes con  $u$  que no pertenecen a  $W$ .

Como  $W$  es un  $(u, v)$ -separador de cardinalidad mínima, entonces  $G - W$  tiene exactamente dos componentes conexas  $H_1$  y  $H_2$  (las cuales podemos pensar como subgráficas disjuntas) en donde podemos suponer que  $u \in V(H_1)$  y  $v \in V(H_2)$ . Construimos ahora dos nuevas gráficas  $G_1$  y  $G_2$  como sigue:

- $G_1$  se obtiene a partir de  $G$  al contraer<sup>2</sup> todas las aristas de  $H_1$  a  $u$ .
- $G_2$  se obtiene a partir de  $G$  al contraer todas las aristas de  $H_2$  a  $v$ .

En la Figura 4.8 se muestra como se construyen las gráficas  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente.

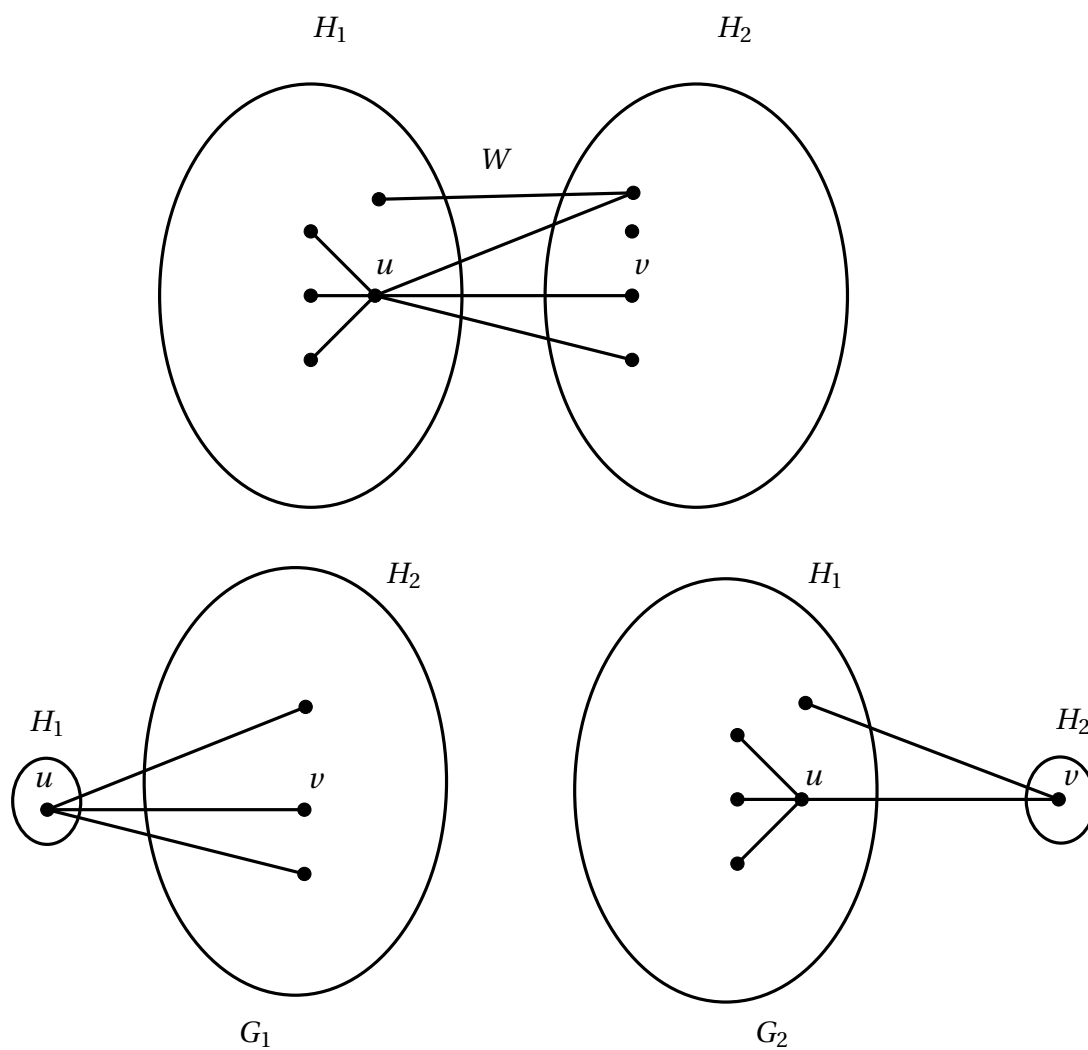


Figura 4.8: Construcción de  $G_1$  y  $G_2$ .

Como  $|E(G_1)| < E(G)$  y  $|E(G_2)| < E(G)$ , y  $W$  es un conjunto de cardinalidad mínima que separa a  $u$  y a  $v$  en  $G$ , entonces, se sigue por la hipótesis de inducción que hay  $|W|$  trayectorias disjuntas por aristas en  $G_1$  de  $u$  a  $v$ . De forma análoga (utilizando la hipótesis de inducción), se sigue que hay  $|W|$  trayectorias disjuntas por aristas de  $u$  a  $v$  en  $G_2$ . Juntanto las  $|W|$  trayectorias disjuntas de  $G_1$  y  $G_2$  obtenemos las  $|W|$  trayectorias aristas disjuntas de  $u$  a  $v$  en  $G$ .

*Caso 2.* Supongamos ahora que cada conjunto  $W \subset E(G)$  de cardinalidad mínima que separa a  $u$  y  $v$  está formado únicamente por las aristas incidentes con  $u$  o con  $v$ , es decir,  $|W| = d(u)$  o  $|W| = d(v)$ .

Primero observemos que cada arista de  $G$  está contenida en un  $(u, v)$ -separador. En caso contrario, si existe una arista  $e$  tal que no pertenece a ningún  $(u, v)$  separador podemos considerar a la gráfica  $G' = G - e$  y aplicar la hipótesis de inducción a  $G'$ . Obteniendo así  $|W|$  trayectorias disjuntas por aristas entre  $u$  y  $v$  en la gráfica  $G$ .

Sea  $T$  una  $uv$ -trayectoria en  $G$ . Obsérvese que si  $W$  es un  $(u, v)$ -separador, entonces  $|E(T) \cap W| \leq 1$ . Al quitar de  $G$  todas las aristas de  $T$  y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos una nueva gráfica con al menos  $|W| - 1$  trayectorias disjuntas por aristas de  $u$  a  $v$ . Estas trayectorias junto con  $T$  nos dan las  $|W|$  trayectorias en  $G$  que estamos buscando.

□

Recordemos que la conexidad  $\lambda(G)$  de una gráfica  $G$  es el mínimo número de aristas que hay que quitar de  $G$  para que esta se vuelva desconexa. Utilizando el Teorema de Menger, si una gráfica  $G$  tiene conexidad por aristas  $\lambda(G) = k$ , entonces entre cualquier par de vértices de  $G$  hay al menos  $k$  trayectorias disjuntas por aristas. Es decir, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.4.1.** *Un gráfica conexa es  $k$ -conexa por aristas si y sólo si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  hay al menos  $k$   $uv$ -trayectorias disjuntas por aristas.*

Ahora enunciamos la versión en vértices del teorema de Menger. Para ver una demostración sencilla pueden recurrir al artículo de McCuaig [30] la cual es bastante más simple que la hecha por Menger.

**Teorema 4.4.2** (Menger, 1927). *Sea  $G$  una gráfica conexa y sean  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ . Entonces el máximo número de  $uv$ -trayectorias disjuntas en vértices es igual al mínimo número de vértices en un  $uv$  separador.*

Podemos encontrar una versión para vértices del Corolario 4.4.1.

**Corolario 4.4.2.** *Un gráfica conexa es  $k$ -conexa por vértices si y sólo si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  hay al menos  $k$   $uv$ -trayectorias disjuntas por vértices.*

---

<sup>2</sup>Una **contracción** de una arista es una operación que elimina una arista de la gráfica al mismo tiempo que identifica los vértices extremos.



## 4.5. Conexidad Promedio

Utilizando el Teorema de Menger (Teorema 4.4.2) se puede definir de forma local la conexidad (por vértices o aristas) entre dos vértices  $u$  y  $v$  de una gráfica  $G$  como el número de trayectorias internamente disjuntas (por vértices o aristas) entre  $u$  y  $v$ . Denotaremos a este valor como  $\kappa_G(u, v)$  o  $\lambda_G(u, v)$ . Con esta notación se puede definir de forma equivalente a la conexidad por vértices o aristas de  $G$  como

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_G(u, v) : u, v \in V(G)\}. \quad (4.1)$$

$$\lambda(G) = \min\{\lambda_G(u, v) : u, v \in V(G)\}. \quad (4.2)$$

Utilizando (4.1), Beineke, Ollerman y Pippert [6], definieron la **conexidad promedio por vértices**  $\bar{\kappa}(G)$  como el promedio de las conexidades entre todos los pares de vértices, es decir, si  $G$  es una gráfica de orden  $n$ , entonces

$$\bar{\kappa}(G) = \frac{\sum_{u, v \in V(G)} \kappa_G(u, v)}{\binom{n}{2}}.$$

El parámetro  $\bar{\kappa}(G)$  puede ser más preciso que la conexidad usual para calcular la tolerancia a fallos de una red modelada por una gráfica  $G$ , pues la conexidad  $\kappa(G)$  es un parámetro basado en la peor situación posible y no refleja en general la conexidad global de la gráfica. En cambio, la conexidad promedio  $\bar{\kappa}(G)$  nos da una medida sobre el número esperado de vértices que hay que eliminar (de forma aleatoria) para que la gráfica deje de ser conexa. Por ejemplo, si consideramos las gráficas que aparecen en la Figura 4.9, se puede ver que  $G_1$  y  $G_2$  tienen ambas conexidad uno, sin embargo podemos intuir que  $G_1$  es una gráfica con una “mejor” conexidad global. Además, existen algoritmos [12] que permiten calcular la conexidad promedio en tiempo polinomial, lo cual hace que este parámetro sea de gran interés en varias aplicaciones.

La conexidad promedio de una gráfica  $G$  está acotada inferiormente por la conexidad usual, es decir  $\kappa(G) \leq \bar{\kappa}(G)$ .

Dankelmann y Oellermann [13] probaron que la conexidad promedio de una gráfica  $G$  está acotada superiormente por el grado promedio de  $G$ , es decir, si  $\bar{d}$  es el grado promedio de  $G$ , se tiene que  $\bar{\kappa}(G) \leq \bar{d}(G)$ . Entonces dada una gráfica  $G$  tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\kappa(G) \leq \bar{\kappa}(G) \leq \bar{d}(G).$$

También se puede ver que

- $\bar{\kappa}(G) = 0$  si y sólo si  $G$  no contiene aristas.
- $\bar{\kappa}(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es un árbol.
- Si el orden de  $G$  es  $n$ , entonces  $\bar{\kappa}(G) \leq n - 1$ , y  $\bar{\kappa}(G) = n - 1$  si y sólo si  $G$  es isomorfa a  $K_n$ .

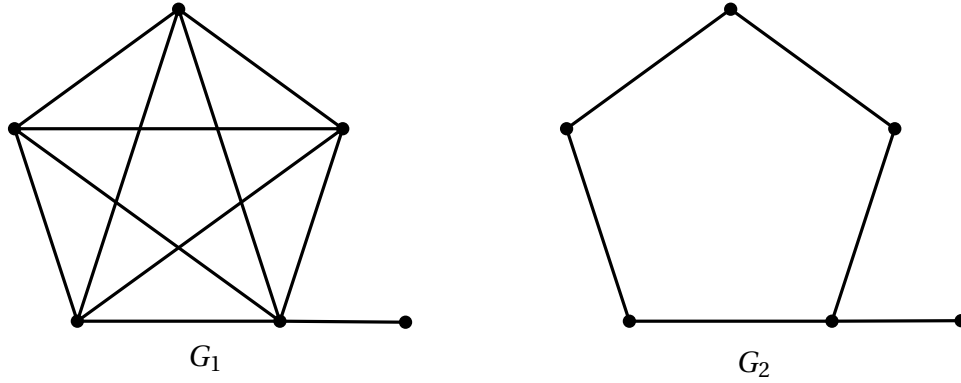


Figura 4.9:  $\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 1$ ,  $\bar{\kappa}(G_1) = \frac{45}{10} = 4,5$  y  $\bar{\kappa}(G_2) = \frac{25}{10} = 2,5$ .

## 4.6. Ejercicios

1. Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Demuestra que si  $\lambda(G) \geq k$ , entonces

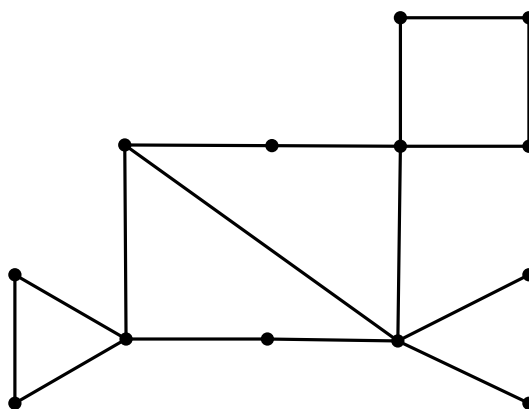
$$m \geq \frac{nk}{2}.$$

2. Sea  $G$  una gráfica cúbica, es decir,  $d(v) = 3$  para todo  $v \in V(G)$ . Demuestra que

$$\lambda(G) = \kappa(G).$$

3. Demuestra que una gráfica cúbica  $G$  tiene un vértice de corte si y sólo si  $G$  tiene un puente.
4. Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos tres vértices. Demuestra que si  $G$  tiene un puente  $e = uv$ , entonces al menos uno de los vértices  $u$  y  $v$  es un vértice de corte.
5. Demuestra que una gráfica es Euleriana si y sólo si todos sus bloques son Eulerianos.
6. Demuestra que una gráfica  $G$  es Euleriana si y sólo si todo corte mínimo de  $G$  tiene un número par de aristas.
7. Sea  $e$  una arista de una gráfica 3-conexa. Demuestra que  $e$  pertenece a un ciclo.
8. Encuentra una gráfica  $G$  tal que  $\delta(G) = 5$ ,  $\lambda(G) = 4$  y  $\kappa(G) = 3$ .
9. Encuentra una gráfica con 10 vértices tal que  $\delta(G) = 7$  y  $\kappa(G) < \lambda(G)$ .
10. Sea  $G$  una gráfica con 10 vértices tal que  $\delta(G) = 8$ , demuestra que  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$ .

11. Sea  $G$  una gráfica conexa con grado mínimo  $\delta(G) = 1$ . Sea  $v \in V(G)$  tal que  $d(v) = 1$ . Demuestra que  $G - v$  es conexa.
12. Sea  $G$  una gráfica conexa y sea  $W \subset E(G)$  un conjunto separador de  $G$  de cardinalidad mínima. Demuestra que  $G - W$  tiene exactamente dos componentes conexas.
13. Demuestra que si  $G$  es una gráfica 2-conexa, entonces  $G$  no tiene puentes.
14. Demuestra que si  $G$  es una gráfica conexa sin puentes, entonces  $G$  no tiene vértices de corte.
15. Encuentra la gráfica de bloques de una trayectoria de longitud  $n \geq 2$ .
16. Encuentra la gráfica de bloques de la siguiente gráfica.

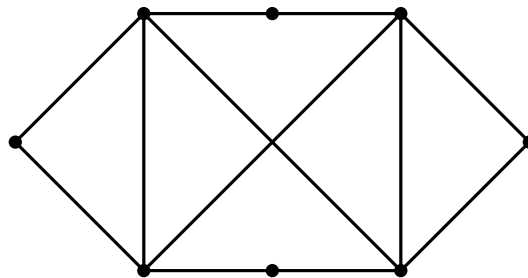


17. Sea  $G$  una gráfica conexa. Definimos  $b(v)$  como el número de bloques que contienen a  $v$ . Demuestra que el número de bloques de  $G$  es

$$1 + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1).$$

18. Sea  $C$  un ciclo en una gráfica  $G$ . Demuestra que  $C$  está completamente contenido en un bloque de  $G$ .
19. Sea  $G$  una gráfica  $k$ -conexa, y sea  $e = uv \in E(G)$ . Definimos la gráfica  $G_e$  como la gráfica que se obtiene al contraer la arista  $e$  en  $G$ . Demuestra que  $G_e$  es  $k$ -conexa si y sólo si  $G - \{u, v\}$  es  $(k - 1)$ -conexa.
20. Sea  $G$  una gráfica conexa y  $e$  una arista de  $G$ . Demuestra que  $\kappa(G - e) = \kappa(G)$  o bien  $\kappa(G - e) = \kappa(G) - 1$ .

21. Sea  $G$  una gráfica 2-conexa. Demuestra que dos ciclos de longitud máxima tienen al menos dos vértices en común.
22. Sea  $G$  una gráfica conexa de orden  $n$ . Demuestra que
 
$$n \geq 2\kappa(G)(\text{diam}(G) - 1).$$
23. Sea  $v$  un vértice de corte en una gráfica  $G$ . Demuestra que  $v$  no es un vértice de corte en el complemento  $G^c$  de  $G$ .
24. Demuestra que una gráfica  $G$  es 2-conexa si para todo vértice  $v$  y arista  $e$  existe un ciclo que los contiene.
25. Demuestra el Teorema 4.3.3.
26. Dada una gráfica  $G$  se define la **gráfica de líneas**  $L(G)$  de  $G$  como la gráfica cuyos vértices son las aristas de  $G$  y dos vértices serán adyacentes si y sólo si las aristas correspondientes son adyacentes. ¿Si  $e$  es un puente de  $G$ , entonces  $e$  es un vértice de corte en  $L(G)$ ? Demuéstralo o da un contraejemplo.
27. Sea  $G$  una gráfica bipartita 3-regular. Demuestra que  $G$  no tiene puentes.
28. Escribe la definición de conexidad promedio por aristas para una gráfica.
29. Encuentra la conexidad promedio por vértices y aristas de la siguiente gráfica





# Capítulo 5

## Planaridad

En este capítulo estudiamos el problema de determinar cuando una gráfica puede ser dibujada en el plano de forma que sus aristas no se crucen. Se dice que una gráfica es plana si esta puede ser dibujada (en el plano) sin que sus aristas se crucen.

El estudio de las gráficas planas se encuentra muy relacionado con el intento de resolver el famoso problema de los cuatro colores, sobre el cual se profundizará en el Capítulo 6. Debido a este problema y a la cercanía a otras áreas de las matemáticas, como la Topología, la planaridad es un área de la Teoría de las Gráficas que ha contribuido enormemente al crecimiento de la misma. En este capítulo se presentan algunos resultados básicos sobre las gráficas planas, en particular se presenta el Teorema de Kuratowsky, el cual es una caracterización de la familia de las gráficas planas. En la Sección 5.2 se presenta y demuestra la fórmula de Euler para gráficas planas. Finalmente se utiliza la fórmula de Euler como una aplicación para probar que únicamente hay cinco sólidos Platónicos. Comenzamos este capítulo con un problema que motivó el estudio de las gráficas planas.

### 5.1. Gráficas Planas

El origen de las gráficas planas sucede durante la segunda guerra mundial, cuando el matemático húngaro Paul Turán (1910-1976) trabajaba en una fábrica de ladrillos. Para explicar como se dió, hacemos uso del siguiente texto, el cual fue extraído de una carta que Turán le escribió a su amigo, el matemático inglés, Richar Guy en 1968.

#### 5.1.1. Problema de la fábrica de ladrillos

*“En 1944 nuestro batallón tuvo la suerte de trabajar en una fábrica de ladrillos cerca de Budapest. Nuestro trabajo consistía en sacar los ladrillos de los hornos y transportarlos, en vagonetas que circulaban sobre rieles, hasta alguno de los almacenes que estuviera vacío. Como nunca se podía estar seguro de qué almacén iba a estar disponible, cada horno estaba conectado por rieles con todos los almacenes. Puesto que teníamos que trasladar una cantidad fija de vagonetas al día, nos interesaba*

*terminar lo antes posible. Después de cargarlas en los hornos, las vagonetas se deslizaban suavemente por los rieles sin demasiado esfuerzo; el único problema surgía cuando dos rieles se cruzaban. Ahí las vagonetas saltaban y los ladrillos se caían, lo cual significaba un montón de trabajo extra y una pérdida de tiempo. Después de pasar por ésta experiencia muchas veces, pensé por qué demonios habían construido el sistema de rieles de manera tan mala; minimizando el número de cruces de los rieles la producción podría haber sido mucho mayor y más económica.”*

En el campo de concentración donde trabajó Turán había 3 hornos y 3 almacenes. Entonces el problema de la fábrica de ladrillos puede modelarse con una gráfica bipartita, en la que tenemos un conjunto de tres vértices, que representan los tres hornos y otro conjunto, también con tres vértices, que representan a cada uno de los almacenes. Debido a que cada horno está conectado con los tres almacenes, se puede ver que la gráfica asociada al problema es la gráfica bipartita completa  $K_{3,3}$ . Como queremos que las líneas de conexión se crucen lo menos posible, resolver este problema en términos de nuestro modelo, consiste en dibujar  $K_{3,3}$  de forma que sus aristas no se crucen, o que se crucen el menor número posible de veces.

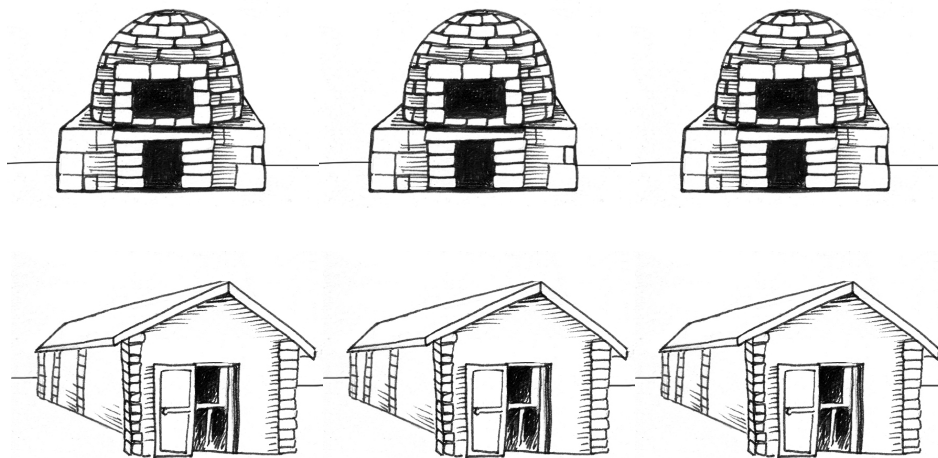


Figura 5.1: Los hornos de ladrillos y sus almacenes.

En la Figura 5.2 se muestra un dibujo de  $K_{3,3}$  en el cual sólo hay un cruce entre sus aristas, entonces esa representación de  $K_{3,3}$  es un intento fallido de representar a  $K_{3,3}$  de forma que sus aristas no se crucen. Después de varios intentos uno comienza a sospechar que resolver el problema es imposible.

El problema anterior lo podemos plantear para gráficas en general, es decir, dada una gráfica  $G$  podemos establecer la siguiente pregunta

*¿Podemos encontrar condiciones suficientes y necesarias para determinar si  $G$  es plana?*

Consideremos ahora a la gráfica completa con cuatro vértices  $K_4$ . Hay muchas formas de dibujar  $K_4$ . En la Figura 5.3 aparecen dos dibujos de  $K_4$ , en el primero las aristas no se cruzan

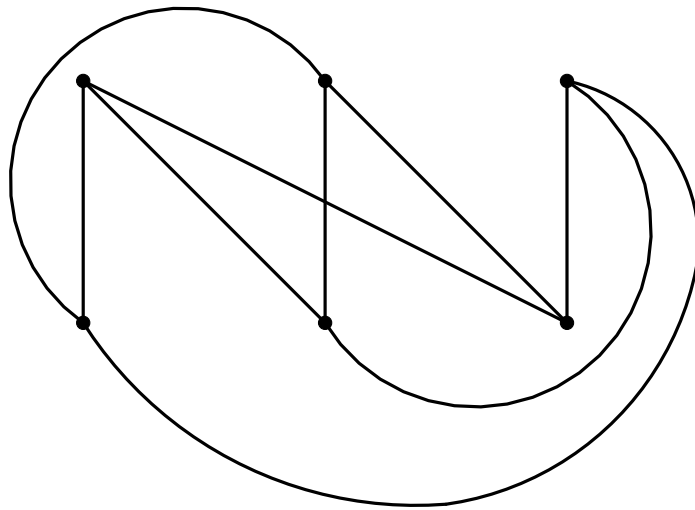


Figura 5.2: Representación de  $K_{3,3}$  con un solo cruce de aristas.

mientras que en el segundo dibujo si lo hacen. En general decimos que el primer dibujo de Figura 5.3 es una **representación plana** de  $K_4$ , mientras que el segundo no lo es.

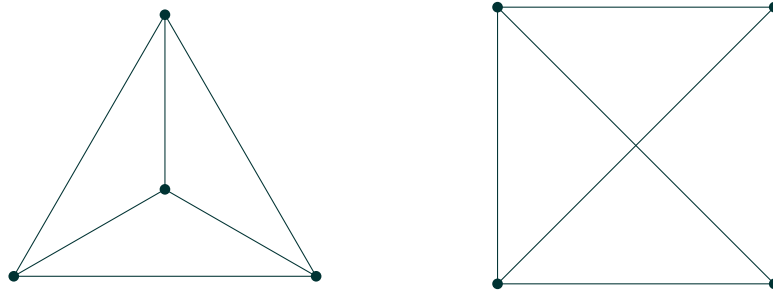


Figura 5.3: Dos formas distintas de dibujar  $K_4$ .

A continuación damos la definición formal de gráfica plana.

**Definición 5.1.1.** Una gráfica  $G$  es plana si y sólo si puede dibujarse en el plano de forma que dos aristas no se crucen o que se crucen solamente en un vértice (si son incidentes con el mismo vértice).



Las gráficas planas tienen muchas e interesantes aplicaciones como la impresión de circuitos electrónicos, el diseño de líneas de metro y la coloración de mapas.

Un criterio que nos puede ayudar a determinar si una gráfica es plana nos lo da la fórmula de Euler.

## 5.2. Fórmula de Euler

Supongamos que  $G$  es una gráfica plana, es decir, que la podemos dibujar en el plano de forma que sus aristas no se crucen. Se puede ver que los ciclos de  $G$  delimitan regiones en el plano. Por ejemplo, en la gráfica plana que aparece en la Figura 5.4, se puede observar que ésta divide al plano en cuatro regiones o caras. A la región  $R_4$  se le llama **región exterior** (no es difícil de ver que toda gráfica plana siempre tiene exactamente una región exterior).

En 1752 Euler [18] publicó una interesante relación que existe entre el número de vértices, el número de aristas y el número de regiones de una gráfica plana. Dada una gráfica plana consideremos la siguiente operación

$$\# \text{ vértices} - \# \text{ aristas} + \# \text{ regiones}.$$

Si consideramos la gráfica que aparece en la Figura 5.4 se puede ver que esta tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 regiones. Realizando la operación anterior tenemos que

$$4 - 6 + 4 = 2.$$

Euler descubrió que dada una gráfica plana siempre se cumple la siguiente relación:

$$\# \text{ vértices} - \# \text{ aristas} + \# \text{ regiones} = 2.$$

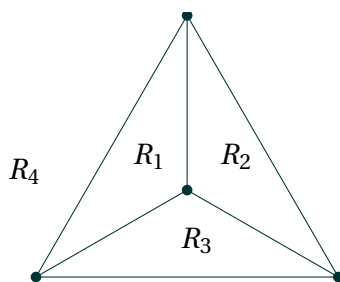


Figura 5.4: Regiones de una gráfica plana.

**Teorema 5.2.1** (Fórmula de Euler). *Sea  $G$  una gráfica conexa y plana con  $n$  vértices,  $m$  aristas y  $r$  regiones. Entonces*

$$n - m + r = 2.$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre el número de aristas  $m$ .

1. *Base de la inducción.*

Si  $m = 0$ , como  $G$  es conexa, entonces  $G$  está formada por un vértice aislado y por lo tanto tiene una sola región. Entonces

$$1 - 0 + 1 = 2,$$

y el resultado se sigue.

2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos ahora que el resultado es cierto para toda gráfica plana y conexa con  $k - 1$  aristas.

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $k$  aristas, es decir  $m = k$ . Procedamos por casos.

*Caso 1.* Si  $G$  es un árbol.

Entonces  $n = m + 1$  (ver Teorema 2.2.2). Además, al ser  $G$  un árbol se sigue que no contiene ciclos y claramente  $r = 1$ . Por lo tanto

$$n - m + r = (m + 1) - m + 1 = 2,$$

y la fórmula se sigue.

*Caso 2.* Si  $G$  no es un árbol.

Como  $G$  es conexa, entonces contiene al menos un ciclo  $C$ . Sea  $e$  una arista de  $C$  y consideremos a la gráfica  $G - e$  (la cual sigue siendo plana y conexa). Las dos regiones que estaban separadas por la arista  $e$  en  $G - e$  se convierten en una sola región y  $G - e$  tiene  $k - 1$  aristas. Por lo tanto la gráfica  $G - e$  tiene  $n$  vértices,  $k - 1$  aristas y  $r - 1$  regiones. Aplicando la hipótesis de inducción a la gráfica  $G - e$  tenemos

$$\begin{aligned} 2 &= n - (m - 1) + (r - 1) \\ &= n - m + 1 + r - 1 \\ &= n - m + r. \end{aligned}$$

Por lo tanto la fórmula es válida. □

La fórmula de Euler es uno de los teoremas clásicos y más importantes en Teoría de las Gráficas. El siguiente resultado es de mucha utilidad para determinar la planaridad de una gráfica y para su demostración utilizamos una forma ingeniosa de contar. Antes de pasar al teorema es necesario introducir el concepto de grado de una región. Dada una región  $R$  definimos el **grado**  $grad(R)$  de  $R$  como el número de aristas que tiene el ciclo que la limita. Si la gráfica plana que estamos considerando es simple, es decir, que no tiene aristas paralelas, entonces se puede ver que cada región tiene grado al menos tres.

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $G$  una gráfica plana con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Si  $n \geq 3$ , entonces*

$$m \leq 3n - 6.$$

*Demostración.* Primero nótese que para  $n = 3$  el resultado se sigue, pues toda gráfica con 3 vértices a lo más tiene  $3(3) - 6 = 3$  aristas. Continuemos la prueba suponiendo que  $n \geq 4$ . Sea  $r$  el número de regiones de  $G$  y denotemos por  $\mathcal{R}$  al conjunto de todas las regiones de  $G$ . Para cada región  $R \in \mathcal{R}$  consideremos el número de aristas que hay en la frontera de  $R$ , es decir  $\text{grad}(R)$ . Definimos

$$N = \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{grad}(R).$$

Como  $G$  es una gráfica simple, cada región está acotada por al menos 3 aristas, entonces se sigue  $N \geq 3r$ . Por otra parte, como cada arista de  $G$  está en a lo más dos regiones tenemos  $N \leq 2m$ . Entonces

$$3r \leq N \leq 2m,$$

y por lo tanto

$$3r \leq 2m.$$

Lo cual implica

$$-r \geq \frac{-2m}{3}. \quad (5.1)$$

Despejando  $n$  de la fórmula de Euler y utilizando (5.1) tenemos que

$$n = m - r + 2 \geq m - \frac{2m}{3} + 2 = \frac{m}{3} + 2.$$

Despejando  $m$  tenemos que  $m \leq 3n - 6$ . □

Este teorema nos dice que si una gráfica es plana, entonces esta no puede tener “muchas” aristas. Ahora, utilicemos el teorema anterior para ver que la gráfica completa  $K_5$  no es una gráfica plana.

**Corolario 5.2.1.** *La gráfica  $K_5$  no es plana.*

*Demostración.* La gráfica  $K_5$  tiene 5 vértices y 10 aristas. Si  $K_5$  fuera plana, por el Teorema 5.2.2 se tiene que cumplir

$$10 \leq 3(5) - 6 = 9,$$

lo cual es una contradicción. □

La gráfica completa bipartita  $K_{3,3}$  tiene 6 vértices y 9 aristas, utilizando el Teorema 5.2.2 no se puede determinar si  $K_{3,3}$  es una gráfica plana pues  $9 \leq 3(6) - 6 = 12$ . Para ver que  $K_{3,3}$  no es plana utilizaremos el siguiente resultado, cuya demostración está basada en la misma idea que utilizamos para probar el Teorema 5.2.2.

**Teorema 5.2.3.** *Sea  $G$  una gráfica conexa plana con  $n$  vértices,  $m$  aristas y sin ciclos de longitud tres. Entonces*

$$m \leq 2n - 4.$$

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa plana con  $r$  regiones y denotemos por  $\mathcal{R}$  al conjunto de todas las regiones de  $G$ . Para cada región  $R$  de  $G$  contamos el número de aristas que hay en la frontera de  $R$ . Siguiendo la notación utilizada en el Teorema 5.2.2 sea

$$N = \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{grad}(R).$$

Como  $G$  no tiene ciclos de longitud tres, entonces cada región está acotada por al menos 4 aristas, entonces se sigue  $N \geq 4r$ . Por otra parte, como cada arista de  $G$  está en a lo más dos regiones tenemos  $N \leq 2m$ . Entonces podemos establecer la siguiente cadena de desigualdades:

$$4r \leq N \leq 2m,$$

de donde se deduce que  $4r \leq 2m$ . Por lo tanto

$$-r \geq \frac{-2m}{4} = \frac{-m}{2}. \quad (5.2)$$

Despejando  $n$  de la fórmula de Euler y utilizando la ecuación (5.2) se sigue que

$$n = m - r + 2 \geq m - \frac{m}{2} + 2 = \frac{m}{2} + 2.$$

Despejando  $m$  tenemos que  $m \leq 2n - 4$ , y el resultado se sigue.  $\square$

**Corolario 5.2.2.** *La gráfica  $K_{3,3}$  no es plana.*

*Demostración.* Como  $K_{3,3}$  es una gráfica bipartita no tiene ciclos de longitud impar y en particular no tiene ciclos de longitud 3. Por otra parte,  $K_{3,3}$  tiene 6 vértices, 9 aristas. Utilizando el Teorema 5.2.3 tenemos que

$$9 \leq 2(6) - 4 = 8,$$

lo cual es una contradicción y prueba que  $K_{3,3}$  no es plana.  $\square$

El hecho que una gráfica plana no tiene muchas aristas está relacionado con el grado mínimo. Para probar el siguiente resultado, concerniente con el grado mínimo, se utiliza el Teorema 5.2.2.

**Teorema 5.2.4.** *Sea  $G$  una gráfica conexa plana, entonces  $G$  contiene al menos un vértice de grado menor o igual a cinco, es decir,  $\delta(G) \leq 5$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica plana con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Procederemos por contradicción suponiendo que para todo  $v \in V(G)$ ,  $d(v) \geq 6$ , es decir,  $\delta(G) \geq 6$ . Por el Teorema 5.2.2 sabemos que

$$m \leq 3n - 6. \quad (5.3)$$

Por otra parte, gracias al Teorema de los apretones de manos (ver Teorema 1.2.1) sabemos que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n.$$

Por lo tanto  $m \geq 3n$ . Juntando esta desigualdad junto con (5.3) obtenemos

$$3n \leq m \leq 3n - 6,$$

lo cual es una contradicción.  $\square$

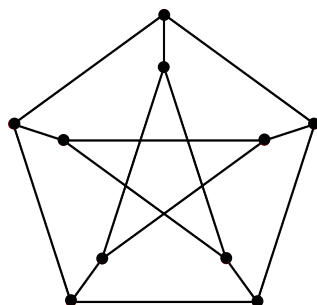


Figura 5.5: Gráfica de Petersen.

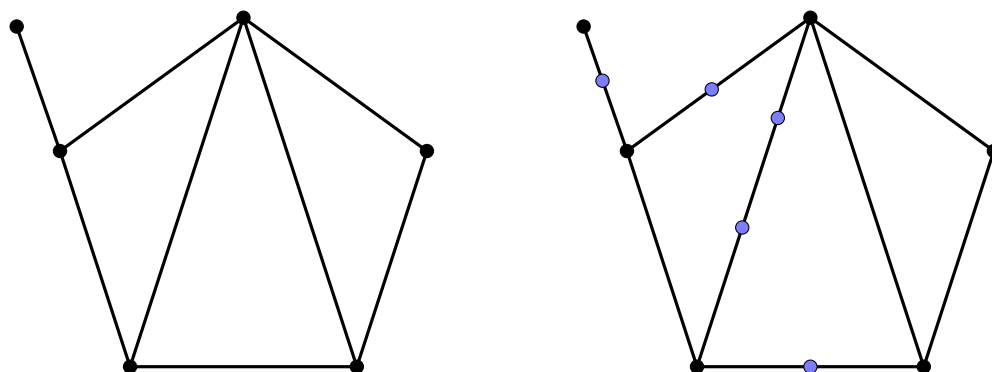


Figura 5.6: Una gráfica y subdivisiones de ella.

### ¿Cómo saber si una gráfica es plana?

Las restricciones que vimos sobre el número de aristas de una gráfica (ver Teorema 5.2.2 y Teorema 5.2.3) o sobre el grado mínimo (ver Teorema 5.2.4) pueden ayudar a decidir si una gráfica es plana o no. Desafortunadamente este método no funciona siempre. Hay muchas gráficas que satisfacen estas desigualdades y no son planas. Por ejemplo la gráfica de Petersen es 3-regular, tiene 15 aristas y 10 vértices, satisface las desigualdades vistas anteriormente y no es plana.

Para determinar si una gráfica es plana es bueno tener en cuenta las siguientes observaciones.

1.  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planas.
2. Si  $G$  es una gráfica plana, entonces toda subgráfica de  $G$  es plana.
3. Si  $G$  contiene una subgráfica que no es plana. Entonces  $G$  no es plana.

Como la inserción de vértices de grado dos no afecta la planaridad o no planaridad de una gráfica, entonces tenemos las siguientes observaciones.

1. Si  $G$  es una gráfica plana, entonces toda subdivisión de  $G$  es plana.
2. Si  $G$  es una subdivisión de una gráfica no plana, entonces  $G$  no es plana.

Debido a que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planas y por las observaciones, tenemos que si  $G$  es una gráfica que contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  o de  $K_5$ , entonces  $G$  no es plana. Kuratowsky [29] encontró una caracterización de las gráficas planas, la cual se encuentra muy relacionada con las gráficas  $K_{3,3}$  o de  $K_5$ .

**Teorema 5.2.5** (Kuratowsky). *Un gráfica es plana si y sólo si no contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  o  $K_5$  como subgráfica.*

Omitimos la demostración del Teorema de Kuratowsky, para ver una demostración de este resultado recomendamos al lector revisar el libro de Harary [19].

El resultado de Kuratowsky nos dice que todas las gráficas no planas pueden obtenerse agregando vértices y aristas a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

**Proposición 5.2.1.** *La gráfica de Petersen no es plana.*

*Demostración.* Ejercicio. □

## 5.3. Sólidos Platónicos

Como una aplicación de la fórmula de Euler, en esta sección probaremos que solamente hay cinco sólidos platónicos (cubo, tetraedro, dodecaedro, octaedro, icosaedro). Los sólidos platónicos son poliedros<sup>1</sup> convexos<sup>2</sup> en los que todas sus caras son polígonos regulares y los ángulos entre ellas son iguales. Como consecuencia de la definición de sólido platónico se tiene que el número de aristas y caras que concurren en cada vértice siempre es el mismo.

Una forma de asociar a cada sólido platónico una gráfica es a través de una proyección del poliedro en el plano. En la Figura 5.7 se muestra la proyección del cubo desde un punto  $p$  y su gráfica asociada.

Debido a las propiedades que cumplen los sólidos platónicos se puede ver que si  $G$  es la gráfica asociada a un sólido platónico, entonces esta tiene que ser regular. Además las caras de la gráfica son todos ciclos con el mismo número de aristas. Debido a que la gráfica de un sólido platónico es simple, cada cara debe contener al menos tres aristas, y cada vértice tiene al menos grado tres (ver Figura 5.8).

Obsérvese que debido a que el poliedro y su gráfica asociada tienen el mismo número de vértices, aristas y caras se sigue que la fórmula de Euler también se cumple con los datos del poliedro.

<sup>1</sup>Un **poliedro** es una superficie sólida cuyas caras son planas y envuelven un volumen finito.

<sup>2</sup>Un poliedro es **convexo** si para todo par de puntos en su interior estos pueden unirse a través de un segmento de recta totalmente contenido en el interior del poliedro.

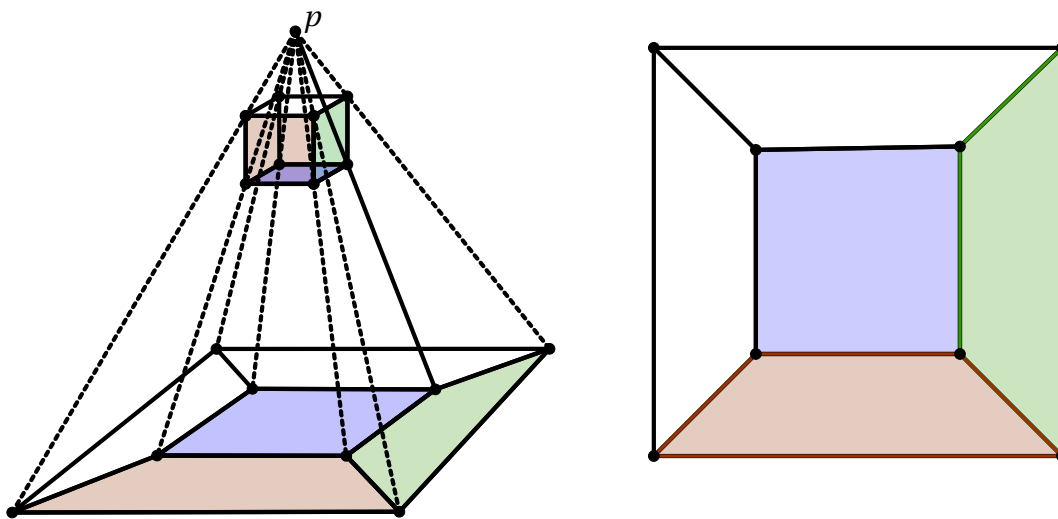


Figura 5.7: Proyección del cubo en un plano y su gráfica asociada.

**Teorema 5.3.1.** *Los únicos poliedros regulares son el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.*

*Demostración.* Sea  $P$  un poliedro regular, definimos los siguientes parámetros para  $P$ :

- $F(P) :=$  número de caras de  $P$ .
- $E(P) :=$  número de aristas de  $P$ .
- $V(P) :=$  número de vértices de  $P$ .
- $n(P) :=$  número de aristas que delimitan cada cara de  $P$ .
- $c(P) :=$  número de aristas que son incidentes con cada vértice de  $P$ .

Como los sólidos Platónicos son regulares, el número de caras que hay alrededor de cada vértice debe ser el mismo para cada vértice y el número de aristas incidentes con cada vértice también debe de ser el mismo. Esto nos da una relación entre  $n(P)$  y  $c(P)$ . Además, como el número de lados de un polígono regular es al menos 3 y cada vértice tiene que ser incidente con al menos 3 aristas, se sigue que  $n(P) \geq 3$  y  $c(P) \geq 3$ .

Por otra parte, como cada arista está en exactamente dos caras o regiones del poliedro, si multiplicamos el número de caras por el número de aristas que rodean cada cara, tenemos que

$$F(P) \cdot n(P) = 2E(P).$$

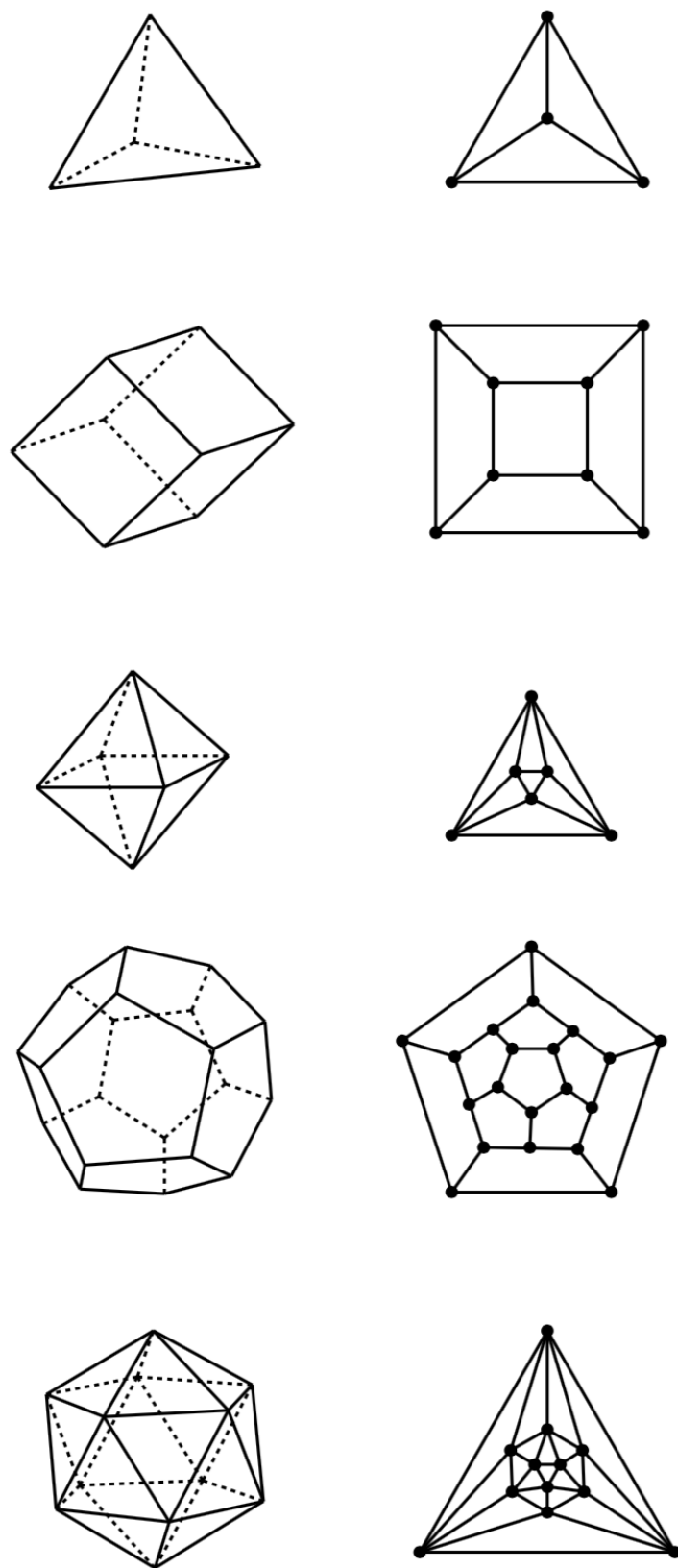


Figura 5.8: Sólidos Platónicos y sus gráficas asociadas.



Ahora, como cada arista es incidente con exactamente dos vértices, multiplicando el número de aristas incidentes en un vértice por el número de vértices obtenemos

$$V(P) \cdot c(P) = 2E(P).$$

Por lo tanto se sigue que

$$F(P) = \frac{2E(P)}{n(P)} \text{ y } V(P) = \frac{2E(P)}{c(P)}.$$

Ahora, si sustituimos en la fórmula de Euler ( $V(P) - E(P) + F(P) = 2$ ), tenemos

$$\frac{2E(P)}{c(P)} - E(P) + \frac{2E(P)}{n(P)} = 2.$$

Factorizando  $E(P)$  de la expresión nos queda

$$E(P) \left( \frac{2}{c(P)} - 1 + \frac{2}{n(P)} \right) = 2.$$

Claramente  $E(P)$  debe ser un entero positivo (no tiene sentido un poliedro con un número negativo o con cero aristas), por lo tanto

$$\left( \frac{2}{c(P)} - 1 + \frac{2}{n(P)} \right) > 0 \iff \frac{1}{c(P)} + \frac{1}{n(P)} > \frac{1}{2}.$$

Primero consideremos la desigualdad

$$\frac{1}{c(P)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n(P)}.$$

Como  $n(P) \geq 3$ , tenemos que  $\frac{1}{n(P)} \leq \frac{1}{3}$  y se sigue que

$$\frac{1}{c(P)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n(P)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

por lo tanto  $\frac{1}{c(P)} > \frac{1}{6}$ , lo cual implica que  $c(P) < 6$  y se sigue que  $c(P) \in \{3, 4, 5\}$ . Aplicando un razonamiento análogo con  $n(P)$ , podemos concluir que  $n(P) \in \{3, 4, 5\}$ .

Ahora, de la desigualdad  $\frac{1}{c(P)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n(P)}$ , si  $c(P) = 3$ , entonces  $\frac{1}{n(P)} > \frac{1}{6}$  y  $3 \leq n(P) \leq 5$ .

Si  $c(P) = 4$ , entonces  $\frac{1}{n(P)} > \frac{1}{4}$  y por lo tanto  $3 \leq n(P) < 4$ , es decir,  $n(P) = 3$ .

Si  $c(P) = 5$ , entonces  $\frac{1}{n(P)} > \frac{3}{10}$  y por lo tanto  $3 \leq n(P) < \frac{10}{3} < 4$ , así  $n(P) = 3$ .

En la siguiente tabla presentamos los posibles valores de  $c(P)$  y  $n(P)$  y su sólido platónico correspondiente.

Entonces acabamos de probar que hay exactamente cinco sólidos platónicos □

$c(P)$	$n(P)$	$V(P)$	$E(P)$	$F(P)$	Sólido Platónico
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Cuadrado
3	5	20	12	6	Dodecaedro
4	3	6	8	12	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

## 5.4. Ejercicios

1. Dibuja una gráfica plana que no contenga vértices de grado cinco.
2. Dibuja la gráfica  $K_5$  con exactamente un solo cruce entre sus aristas.
3. Demuestra que la gráfica  $K_{3,3} - e$ , donde  $e$  es cualquier arista de  $K_{3,3}$  es plana.
4. Demuestra que la gráfica  $K_5 - e$ , donde  $e$  es cualquier arista de  $K_5$  es plana.
5. Para qué valores de  $k$  existe una gráfica plana  $k$ -regular.
6. Dibuja una gráfica plana que tenga exactamente cuatro vértices de grado a lo más cinco.
7. Demuestra que una gráfica es plana si y sólo si cada una de sus componentes conexas es plana.
8. Demuestra que si  $G$  es una gráfica conexa plana, tal que cada una de sus caras esta acotada por al menos cinco aristas, entonces

$$|E(G)| \leq \frac{5}{3} (|V(G)| - 2).$$

9. ¿Puedes encontrar una gráfica plana tal que todos sus vértices tienen grado cinco?
10. Demuestra que la gráfica de Petersen contiene como subgráfica una subdivisión de  $K_{3,3}$ .
11. Demuestra que la gráfica de Petersen no es plana.
12. Sea  $G$  una gráfica con al menos 11 vértices. Demuestra que  $G$  o su  $\overline{G}$  (complemento de  $G$ ) no es plana.
13. Dibuja una gráfica  $G$  de orden ocho tal que:
  - a)  $G$  y  $\overline{G}$  sean planas.
  - b)  $G$  es plana y  $\overline{G}$  no es plana.
14. Sea  $G$  una gráfica plana con al menos 4 vértices. Demuestra que  $G$  contiene al menos 4 vértices de grado menor o igual a 6.

15. El **dual de una gráfica plana**  $G$  es una gráfica  $G'$  en la que cada vértice de  $G'$  es una cara de  $G$  y dos vértices serán adyacentes si las caras correspondientes comparten una arista. Encuentra la gráfica dual de los cinco sólidos platónicos.
16. Sea  $G$  una gráfica tal que  $|E(G)| \leq 8$  o  $|V(G)| \leq 4$ . Demuestra que  $G$  es plana.
17. Sea  $G$  una gráfica (no necesariamente conexa) con  $n$  vértices,  $q$  aristas y  $r$  caras. Demuestra que
 
$$n - m - r = 1 + \omega(G),$$
 donde  $\omega(G)$  es el número de componentes conexas de  $G$ .
18. Demuestra que toda gráfica se puede dibujar en el espacio sin que se crucen sus aristas.
19. Demuestra que una gráfica es plana si y sólo si cada uno de sus bloques es plano.
20. Sea  $G$  una gráfica plana simple y conexa 4-regular. Si  $|E(G)| = 12$ , ¿cuántas caras tiene una representación plana de  $G$ ?
21. Sea  $G$  una gráfica plana y conexa con 12 caras todas estas de grado 3.
  - a) ¿Cuántas aristas tiene  $G$ ?
  - b) ¿Cuántos vértices tiene  $G$ ?
22. Sea  $G$  una gráfica 6-conexa. Demuestra que  $G$  no puede ser plana.

# Capítulo 6

## Coloraciones de gráficas

En este capítulo consideramos el problema de colorear los vértices y las aristas de una gráfica de forma que cumplan ciertas condiciones. Esta área, la cual ha sido muy estudiada desde el inicio de la Teoría de las Gráficas, surge como un intento por resolver el famoso problema de los cuatro colores. Comenzamos este capítulo con una introducción a este problema, el cual se encuentra relacionado con colorear los vértices de una gráfica plana. Posteriormente presentamos una definición más general y los resultados básicos respecto a la coloración (de vértices o aristas) de una gráfica.

### 6.1. Problema de los Cuatro Colores

El problema de los cuatro colores estuvo abierto por más de cien años. La primera referencia escrita sobre este problema data de 1852, cuando Augustus de Morgan, profesor de matemáticas en el University College de Londres, le envía una carta a Sir William Hamilton. En esa carta le cuenta que un estudiante suyo (Frederick Guthrie) le pregunta la razón por la cual todo mapa puede colorearse con cuatro colores de forma que dos países que comparten una franja de frontera reciban colores distintos.

**Todos los mapas pueden ser coloreados con cuatro colores  
de forma que dos países vecinos no tengan el mismo color.**

De Morgan pensaba que esta pregunta podía ser respondida utilizando un argumento matemático. Una forma de atacar este problema es utilizando la Teoría de las Gráficas de la siguiente forma: ponemos un vértice por cada región o país del mapa y agregamos una arista entre dos vértices si sus países correspondientes comparten un segmento de frontera. A la gráfica resultante se conoce como la **gráfica dual del mapa**. En la Figura 6.1 se muestra un mapa y su gráfica dual. No es difícil de ver que la gráfica que se le asocia al mapa resulta que siempre es una gráfica plana. Por lo tanto el problema de colorear un mapa se convierte en un problema de coloración de los vértices de una gráfica plana. Entonces, traduciendo el problema de los cuatro colores a lenguaje de Teoría de las Gráficas tenemos que toda gráfica plana tiene una

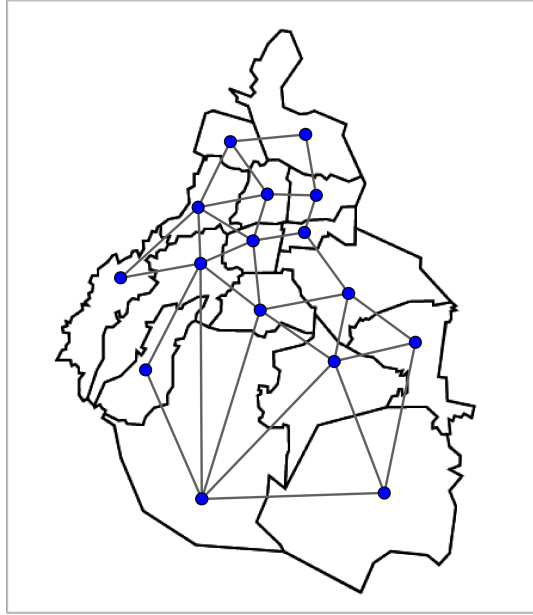


Figura 6.1: Un mapa y su gráfica dual.

coloración de sus vértices de forma que vértices adyacentes reciben colores distintos y utiliza a lo más cuatro colores.

Para entender bien la naturaleza del problema de los cuatro colores hay que imponer que la frontera entre dos países no puede ser un punto.

En 1878 Kempe [24] publicó en la famosa revista *Nature* una solución al problema de los cuatro colores. Sin embargo, Heawood [20] en 1890 encontró un error en la demostración de Kempe. Aunque Heawood no pudo corregir el error de Kempe pudo demostrar que toda gráfica plana puede ser coloreada con cinco colores. Más adelante presentaremos este resultado con la prueba original que aparece en el artículo de Heawood [20].

Actualmente se considera que el problema de los cuatro colores está resuelto. Su demostración fue publicada en 1977 y se debe a Appel y Haken [1, 2] y ha sido una de las más controvertidas dentro del mundo de las matemáticas debido a que utiliza la ayuda de una computadora y hay que aceptar la certeza del programa, el compilador y la computadora en la que se basaron para demostrar el teorema.

Diremos que una gráfica  $G$  es  *$k$ -coloreable* si existe una coloración de los vértices de  $G$  con  $k$  colores de forma que vértices adyacentes reciben colores diferentes.

Comenzaremos dando una cota superior para el número de colores necesarios para colorear los vértices de una gráfica plana.

**Teorema 6.1.1.** *Toda gráfica plana es 6-colorable.*

*Demostración.* Utilizaremos inducción matemática sobre el orden de la gráfica.



Figura 6.2: Coloración del mapa de México con cuatro colores.

1. *Base de la inducción.*

Si  $G$  es una gráfica con a lo más 6 vértices, entonces claramente,  $G$  puede colorearse con a lo más 6 colores (uno por cada vértice).

2. *Hipótesis de Inducción.*

Supongamos ahora que toda gráfica plana con a lo más  $k$  vértices es 6-coloreable.

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  una gráfica plana con  $k + 1$  vértices. Por el Teorema 5.2.4 sabemos que  $G$  contiene un vértice  $v$  de grado a lo más 5, es decir,  $d(v) \leq 5$ . Consideremos la gráfica  $G' = G - v$ . Claramente  $G'$  es una gráfica plana con  $k$  vértices y por lo tanto  $G'$  es 6-coloreable. En  $G$ , como  $d(v) \leq 5$ , los vecinos de  $v$  a lo más utilizan 5 de los 6 colores disponibles. Por lo tanto hay uno de los seis colores que no aparece en los vecinos de  $v$  y podemos colorear a  $v$  con ese color, lo cual nos da una 6-coloración de  $G$ .

□

El siguiente teorema lo probó Heawood [20] cuando intentaba arreglar la prueba incorrecta de Kempe del teorema de los 4 colores.

**Teorema 6.1.2.** *Toda gráfica plana es 5-colorable.*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que existen gráficas planas que no son 5-coloreables. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{G} = \{G : G \text{ es una gráfica plana 6-coloreable y no es 5-coloreable}\}.$$

De todas las gráficas en  $\mathcal{G}$  seleccionemos una gráfica  $G$  con el menor número posible de vértices, es decir,  $|V(G)| \leq |V(G')|$  para toda  $G' \in \mathcal{G}$ . Por el Teorema 5.2.4 sabemos que  $G$  contiene un vértice  $v$  de grado a lo más 5. Construyamos la gráfica  $H = G - v$ . Se puede ver que  $H$  es 5-coloreable, pues en caso contrario  $H$  sería una gráfica en  $\mathcal{G}$  tal que  $|V(H)| = |V(G - v)| = |V(G)| - 1$ , contradiciendo así la elección de  $G$ . Sean  $C_1, C_2, C_3, C_4$  y  $C_5$  los colores utilizados en una 5-coloración de los vértices de  $H$ . Obsérvese que cada color aparece al menos una vez entre los vecinos de  $v$ , en caso contrario podemos colorear a  $v$  con el color ausente y así obtener una 5-coloración de  $G$ . Por lo tanto podemos asumir que  $d_G(v) = 5$ . Sea  $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  la vecindad de  $v$  y supongamos sin pérdida de generalidad que el vértice  $v_i$  recibe el color  $C_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en la 5-coloración de  $H$  (ver figura 6.3).

Denotemos por  $H(i, j)$  a la subgráfica de  $H$  inducida por las aristas con color  $C_i$  o  $C_j$ . Consideremos la subgráfica  $H(1, 3)$  y supongamos que  $v_1$  y  $v_3$  están en componentes conexas distintas. Consideremos la componente conexa que contiene a  $v_1$  e intercambiemos los colores, es decir, en esta componente los vértices que tenían el color  $C_1$  ahora reciben el color  $C_3$  y viceversa. Después de este intercambio, se puede ver que  $H$  sigue estando bien coloreada y en esta nueva coloración  $v_1$  y  $v_3$  reciben ambos el color  $C_3$ . Entonces, en  $G$  podemos asignarle a  $v$  el color  $C_1$  y obtener así una 5-coloración de  $G$ , obteniendo una contradicción. Por lo tanto podemos suponer que  $v_1$  y  $v_3$  están en la misma componente conexa de  $H(1, 3)$ . Entonces existe una  $v_1 v_3$ -trayectoria  $T_1$  en la cual los vértices están coloreados de forma alternada con  $C_1$  y  $C_3$ .

Utilizando un razonamiento análogo podemos deducir que existe una  $v_2 v_4$ -trayectoria  $T_2$  en la que sus vértices están coloreados alternadamente con los colores  $C_2$  y  $C_4$ .

Ahora consideremos a los ciclos  $C_1 = T_1 \cup (v_1, v, v_3)$  y  $C_2 = T_2 \cup (v_2, v, v_4)$ . Debido a que  $C_1$  divide al plano en dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  en las que  $v_2 \in R_1$  y  $v_4 \in R_2$ , se sigue que la trayectoria  $T_2$  tiene que cruzar a  $T_1$  contradiciendo que  $G$  es plana. Por lo tanto hemos probado que toda gráfica plana es 5-coloreable.  $\square$

Finalmente Appel y Haken [1, 2] demostraron el famoso problema de los cuatro colores.

**Teorema 6.1.3** (Teorema de los 4 colores). *Toda gráfica plana es 4-colorable.*

## 6.2. Coloración de vértices

El problema de los cuatro colores nos da la idea de colorear los vértices de una gráfica plana de forma que vértices vecinos tengan colores distintos. En la siguiente definición presentamos formalmente esta idea para gráficas en general.

**Definición 6.2.1.** *Sea  $G$  una gráfica simple. Una  $k$ -coloración de los vértices de  $G$  es una asignación de  $k$  colores a los vértices de  $G$  de forma que dos vértices adyacentes tienen colores distintos. Si  $G$  tiene una  $k$ -coloración, entonces decimos que  $G$  es  $k$ -coloreable. El **número cromático** de*

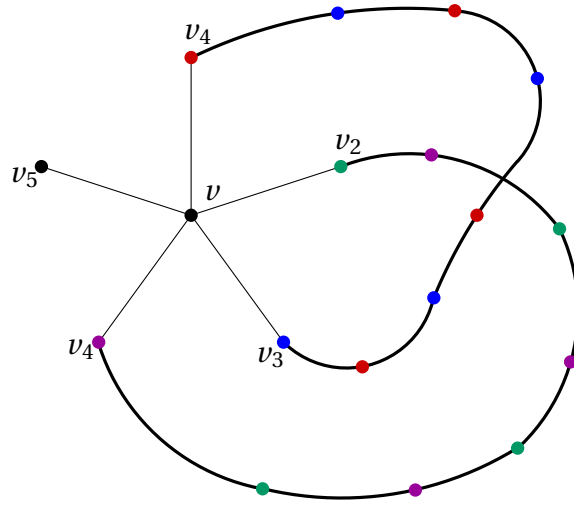


Figura 6.3: El vértice  $v$  y sus vecinos coloreados.

$\chi(G)$  se denota como  $\chi(G)$  y es el menor entero  $k$  tal que la gráfica  $G$  es  $k$ -coloreable. Finalmente, diremos que  $G$  es  $k$ -**cromática** si  $\chi(G) = k$ .

Obsérvese que una  $k$ -coloración de una gráfica  $G$  nos induce una partición de los vértices de  $G$  en conjuntos independientes (uno por cada color), a los que llamamos las **clases cromáticas** de  $G$ . Por ejemplo, las gráficas 2-coloreables inducen una partición de sus vértices en dos clases cromáticas y estas son precisamente las gráficas bipartitas (ver Figura 6.4).

El siguiente teorema nos da una cota superior, en términos del grado máximo, para el número cromático de una gráfica.

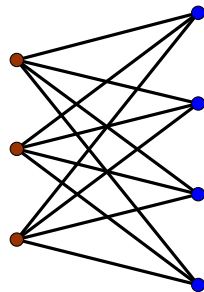


Figura 6.4: Gráfica bipartita coloreada con dos colores.



**Teorema 6.2.1.** Sea  $G$  una gráfica con grado máximo  $\Delta(G)$ , entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demostración.* Demostraremos este resultado utilizando inducción matemática sobre el orden de  $G$ .

1. *Base de la inducción.*

Si  $|V(G)| = 1$ . Entonces  $G$  es isomorfa a  $K_1$ , entonces  $\Delta(G) = 0$  y el resultado se sigue.

2. *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que el resultado es válido para toda gráfica con  $k$  vértices.

3. *Paso inductivo.*

Sea  $G$  una gráfica con  $k + 1$  vértices y grado máximo  $\Delta(G) = d$ . Sea  $v \in V(G)$  y sea  $G' = G - v$ . Obsérvese que  $|V(G')| = k$  y  $\Delta(G') \leq d$ . Entonces aplicando la hipótesis de inducción tenemos  $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq d + 1$ , es decir,  $G'$  es  $(d + 1)$ -coloreable. Ahora podemos obtener una  $(d + 1)$ -coloración de  $G$  al colorear a  $v$  con cualquier color que no haya sido asignado a los vértices adyacentes a  $v$  (esto se puede hacer pues  $d(v) \leq d$ ).

□

Un concepto que es de gran ayuda cuando trabajamos con coloración de gráficas es el de *gráfica crítica*. Este concepto fue estudiado por Dirac en 1952.

**Definición 6.2.2.** Una gráfica  $G$  es **crítica** si  $\chi(H) < \chi(G)$  para toda subgráfica propia  $H$  de  $G$ . Además, decimos que una gráfica es  **$k$ -crítica** si es  $k$ -cromática y crítica.

No es difícil ver que la gráfica completa  $K_n$  es  $n$ -crítica. También, si  $n$  es impar, el ciclo  $C_n$  es 3-crítico. En la Figura 6.5 se presenta una gráfica 6-crítica.

Obsérvese que toda gráfica  $k$ -cromática contiene una subgráfica  $k$ -crítica.

Una consecuencia de la definición de gráfica crítica es que toda gráfica crítica es conexa. El siguiente resultado establece una propiedad de las gráficas críticas.

**Teorema 6.2.2.** Si  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica, entonces  $\delta(G) \geq k - 1$ .

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica con  $\delta(G) < k - 1$ . Sea  $v \in V(G)$  un vértice de grado mínimo, es decir,  $d(v) = \delta(G)$ .

Como  $G$  es  $k$ -crítica, entonces  $G' = G - v$  es  $(k - 1)$ -coloreable. Sea  $(V_1, V_2, \dots, V_{k-1})$  una  $(k - 1)$ -coloración de  $G'$ . Por definición tenemos que  $v$  es adyacente a  $\delta(G) < k - 1$  vértices, por lo tanto existe  $V_j$  tal que  $v$  no es adyacente a ningún vértice de  $V_j$ . Entonces  $(V_1, V_2, \dots, (V_j \cup \{v\}), \dots, V_{k-1})$  es una  $(k - 1)$ -coloración de  $G$ , lo cual es una contradicción y por lo tanto  $\delta(G) \geq k - 1$ .

□

**Corolario 6.2.1.** Toda gráfica  $k$ -cromática tiene al menos  $k$  vértices de grado  $k - 1$ .

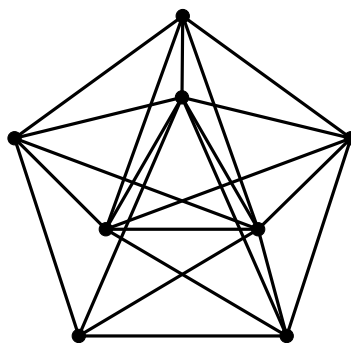


Figura 6.5: Gráfica 6-crítica

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica  $k$ -cromática y sea  $H$  una subgráfica  $k$ -crítica de  $G$ . Por el teorema anterior, todo vértice de  $H$  tiene grado al menos  $k + 1$  en  $H$ , y por lo tanto también en  $G$ . Como  $H$  es  $k$ -crítica, entonces  $H$  tiene al menos  $k$  vértices y por lo tanto el resultado se sigue.  $\square$

El estudio de gráficas  $k$ -críticas es un problema de frontera en la Teoría de las Gráficas, es decir, un problema sobre el cual se realiza investigación activa.

Una gráfica  $G$  es **doblemente crítica** si  $G$  es conexa y la eliminación de cualquier par de vértices adyacentes disminuye el número cromático en dos. Paul Erdős conjeturó [17] que la única gráfica doblemente crítica  $k$ -cromática es la gráfica completa  $K_k$ .

### 6.3. Algoritmo Greedy

Si observamos con cuidado, podemos darnos cuenta que el problema de coloración puede ser pensado como un problema de optimización pues en general queremos encontrar el mínimo número de colores necesario para colorear los vértices de una gráfica.

Diremos que una coloración de los vértices de una gráfica  $G$  es **óptima** si utiliza el mínimo número de colores. Es decir, una  $k$ -coloración es óptima si y sólo si  $\chi(G) = k$ .

Un problema muy interesante en coloración de gráficas es el siguiente:

¿cómo encontrar una coloración óptima en una gráfica arbitraria  $G$ ?

Una forma de intentar responder a la pregunta anterior es a través de un algoritmo. Puede parecer sorprendente pero hasta el momento no se conoce un algoritmo eficiente para encontrar una coloración óptima en una gráfica dada. Para casos pequeños se pueden buscar exhaustivamente una coloración óptima y para ciertas familias de gráficas existen algoritmos bastante buenos, pero para gráficas en general lo mejor que se puede hacer es utilizar algoritmos que nos aproximen a una coloración óptima.

En esta sección presentamos el algoritmo Greedy para colorear los vértices de una gráfica.

### 6.3.1. Algoritmo Greedy

Sea  $G$  una gráfica con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

1. Asigna el primer color  $c_1$  al primer vértice  $v_1$ .
2. Al vértice  $v_2$  le asignamos el color  $c_1$  si este no es adyacente a  $v_1$ ; en caso contrario le asignamos el color  $c_2$ .
3. El vértice  $v_i$  es coloreado con el primer color posible en la lista ordenada de colores, es decir, le asignamos el primer color que no ha sido asignado a alguno de los vecinos de  $v_i$ .

El algoritmo Greedy puede ser bastante bueno para la coloración de los vértices de una gráfica, especialmente si utilizamos un buen ordenamiento de los vértices de  $G$  (pues hay más restricciones para colorear los vértices de mayor grado).

A continuación presentamos un ejemplo que nos permita entender como funciona este algoritmo.

Utilicemos el algoritmo Greedy para encontrar una coloración de la gráfica que aparece en la Figura 6.6.

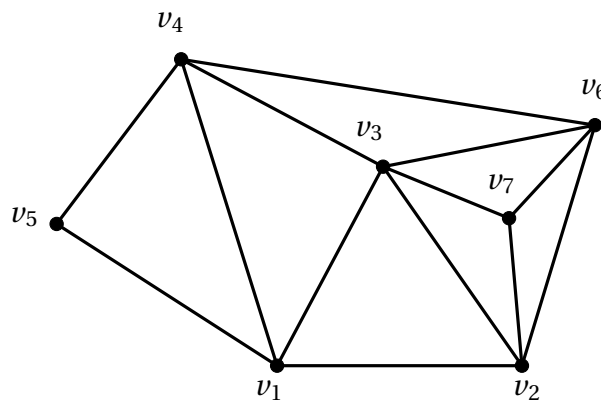


Figura 6.6: Gráfica  $G$  para aplicar el algoritmo Greedy.

Comenzamos asignándole al vértice  $v_1$  el color  $C_1$  que en este caso es rojo. Ahora seleccionamos el vértice  $v_2$  y como ya es adyacente a  $v_1$  le asignamos el color  $C_2$  (azul). Posteriormente pasamos al vértice  $v_3$ , debido a que  $v_3$  es adyacente a  $v_1$  y  $v_2$  le asignamos el color  $C_3$  (amarillo) (ver Figura 6.7).

Continuando con el algoritmo, seleccionamos el vértice  $v_4$ , como este es adyacente a  $v_1$  y a  $v_3$ , pero no a  $v_2$  le asignamos el color  $C_2$ , es decir, azul. Al vértice  $v_5$  que es adyacente a  $v_1$  y  $v_4$  y no es adyacente a  $v_2$  ni a  $v_3$  le podemos asignar el color  $C_2$  (azul) o bien el color  $C_3$  (amarillo). Elegimos el color  $C_3$ . El vértice  $v_6$  es adyacente a  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_7$ . Por lo tanto no se le puede asignar los colores  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ . Le asignamos el color  $C_1$ . Finalmente al vértice  $v_7$  que es

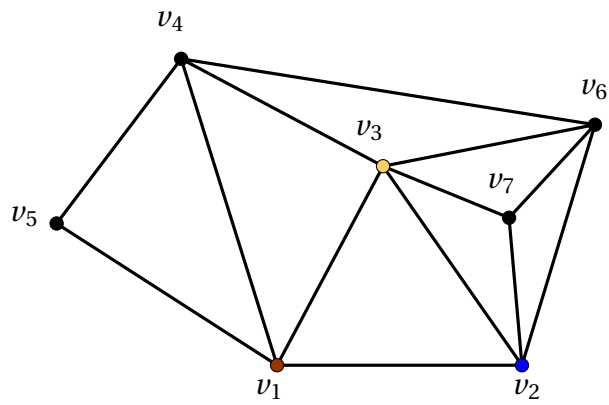


Figura 6.7: Primeros pasos para Coloración de una gráfica utilizando el algoritmo Greedy.

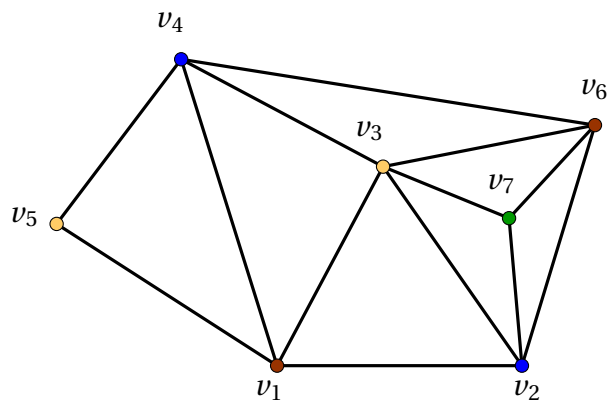


Figura 6.8: Coloración de una gráfica utilizando el algoritmo Greedy.

adyacente a  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_6$  le tenemos que asignar un nuevo color  $C_4$  (verde). Con esto encontramos una coloración de la gráfica que utiliza 4 colores.

Es conveniente hacer notar que la coloración depende del ordenamiento de los vértices de la gráfica y en general el número de colores que utiliza este algoritmo puede estar bastante alejado del número cromático de la gráfica.

## 6.4. Sudoku

En esta sección presentamos como se pueden aplicar conceptos de coloración de gráficas para resolver el juego matemático del Sudoku

El juego del Sudoku consiste en llenar las casillas de una cuadrícula de  $9 \times 9$ , la cual esta dividida en cuadrículas (llamadas cajas) de  $3 \times 3$ , de forma que se cumplan las siguientes reglas:

1. Cada casilla se debe llenar con un número del 1 al 9.
2. En un mismo renglón no puede aparecer dos veces el mismo número.
3. En una misma columna no puede aparecer dos veces el mismo número.
4. En una misma caja  $3 \times 3$  no puede aparecer dos veces el mismo número.

							1	
					2			3
			4					
						5		
6		1	7					
		4	1					
	5					2		
				8			6	
	3		9	1				

Figura 6.9: Sudoku.

En un Sudoku se suelen dar entre 15 y 40 números (dependiendo de la dificultad), a estos números se le llaman pistas y a partir de ellos es que podemos comenzar a realizar inferencias lógicas para determinar que número va en cada casilla.

Herzberg y Murty [21] encontraron una bonita conexión entre el juego del Sudoku y la coloración de gráficas. Dado un Sudoku  $S$  se le puede asociar una gráfica  $G(S)$  de la siguiente forma: los vértices de la gráfica son las casillas del Sudoku. Dos vértices serán adyacentes si sus casillas no pueden tener el mismo número (ya sea porque están en la misma columna o el mismo renglón).

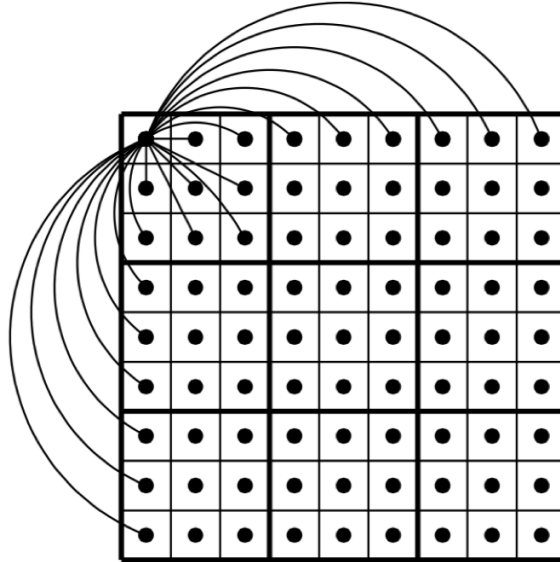


Figura 6.10: Gráfica asociada al Sudoku.

Debido a la forma en que se construye la gráfica asociada al Sudoku se puede observar que  $G(S)$  tiene orden 81, tamaño 810 y es 20-regular. Colorear la gráfica  $G(S)$  puede ser muy complicado debido al número de vértices y aristas, en la Figura 6.10 presentamos una parte de la gráfica en la que sólo se muestra el conjunto de todas las aristas incidentes con un vértice.

Para terminar de modelar el juego del Sudoku como un problema de coloración de gráficas podemos asignar un color diferente a cada número del 1 al 9 (ver Figura 6.11).

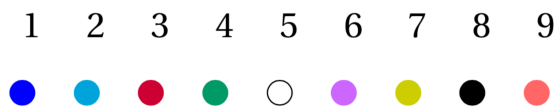


Figura 6.11: Relación entre los números y los colores.

Ahora que tenemos la gráfica asociada al Sudoku y los colores asignados, todo Sudoku puede ser descrito en términos de una coloración de  $G(S)$ . Una solución del Sudoku es una coloración de los vértices  $G(S)$  de forma que dos vértices adyacentes reciban colores distintos. En la Figura 6.12 se puede apreciar una parte de la gráfica coloreada asociada al Sudoku y parte de la solución al juego.

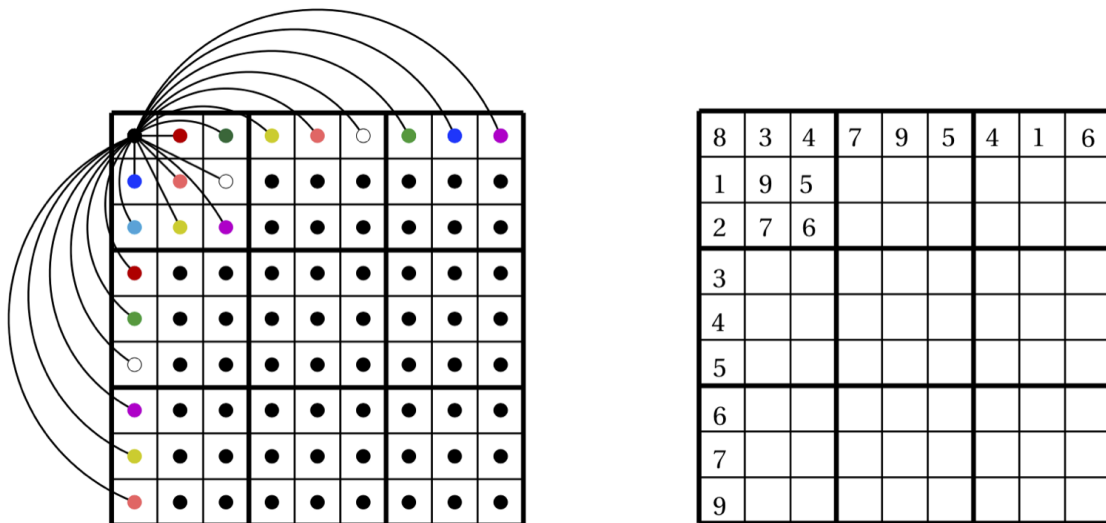


Figura 6.12: Ejemplo de una coloración y el llenado de casillas correspondiente.

## 6.5. Coloración por aristas

Podemos considerar el concepto análogo a colorear vértices pero fijándonos en las aristas.

**Definición 6.5.1.** Sea  $G$  una gráfica. Una  **$k$ -coloración por aristas** de  $G$  es una asignación de  $k$  colores a las aristas de  $G$  de forma que dos aristas adyacentes tengan colores distintos. Decimos que  $G$  es  **$k$ -arista coloreable** si  $G$  tiene una  $k$ -coloración por aristas.

Equivalentemente podemos pensar que dada una gráfica  $G$  una  $k$ -coloración de sus aristas es una función  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  en la que el conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$  representa el conjunto de colores y si  $e_1$  y  $e_2$  son aristas adyacentes, entonces  $f(e_1) \neq f(e_2)$ .

Otra definición equivalente, establece que una  $k$ -coloración de las aristas de una gráfica  $G$  es una partición<sup>1</sup>  $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  de las aristas de  $G$ , en la que cada clase cromática de  $E(G)$  es un conjunto independiente de aristas, es decir, que si  $e_1 = u_1 v_1$  y  $e_2 = u_2 v_2$  son dos aristas que pertenecen a una misma clase cromática, entonces  $\{u_1, v_1\} \cap \{u_2, v_2\} = \emptyset$ .

El número cromático por aristas de una gráfica  $G$  se define como

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \text{existe una } k\text{-coloración}\}$$

De la definición podemos encontrar las siguientes propiedades:

1.  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .
2. Si  $H$  es una subgráfica de  $G$ , entonces  $\chi'(H) \leq \chi'(G)$ .

<sup>1</sup>Una **partición de un conjunto**  $A$  es una familia de conjuntos (distintos del vacío)  $A_1, A_2, \dots, A_r$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$  y  $A = \cup_{i=1}^r A_i$ .

3. Sea  $C_n$  el ciclo de longitud  $n$ , entonces

$$C_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Dada una gráfica  $G$  un problema a estudiar consiste en encontrar el valor de  $\chi'(G)$ . En general este problema puede ser muy complicado y puede restringirse a una familia de gráficas. A continuación encontraremos el valor exacto de  $\chi'(G)$  cuando  $G$  es la gráfica completa con  $n$  vértices, o cuando  $G$  es bipartita.

**Teorema 6.5.1.** Sea  $n \geq 2$ , entonces

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* Primero supongamos que  $n$  es impar. Consideremos la representación geométrica de  $K_n$  en la que los vértices forman un polígono regular con  $n$  lados. Claramente hay  $n$  aristas que forman el casco convexo del polígono, asignemos a cada una de estas aristas un color distinto. Ahora obsérvese que cada una de las aristas restantes es paralela a exactamente una de las aristas en el casco convexo. Asignemos a cada una de estas aristas el mismo color que tiene su arista paralela en el casco convexo. Con esta coloración se puede ver que dos aristas tienen el mismo color si y sólo si son paralelas. Como la coloración utiliza  $n$  colores tenemos que

$$\chi'(K_n) \leq n.$$

Ahora veamos que ocurre si  $\chi'(K_n) \geq n$ . Supongamos que  $K_n$  tiene una  $n-1$ -coloración. Por la definición de coloración tenemos que el conjunto de aristas de un mismo color forma un conjunto independiente. Como  $n$  es impar, el máximo número de aristas en una clase cromática es  $(n-1)/2$ . Por lo tanto hay a lo más  $(n-1)(n-2)/2$  aristas en  $K_n$ , lo cual es una contradicción. Esto quiere decir que  $K_n$  no contiene una  $(n-1)$  coloración de sus aristas y por lo tanto  $\chi'(G) = n$ .

Ahora supongamos que  $n$  es par. Seleccionemos un vértice  $v$  de  $K_n$  y consideremos la gráfica  $K_n - v$ . Es inmediato ver que  $K_n - v$  es una gráfica completa con  $n-1$  vértices. Además, como  $n$  es par, entonces  $n-1$  es impar. Por lo tanto sabemos que existe una  $n-1$ -coloración de las aristas de  $K_n - v$ . Ahora, como cada vértice en  $K_n - v$  tiene exactamente  $n-2$  aristas incidentes, se sigue que en cada vértice hay un color que no aparece. En dicha coloración podemos observar que en cada vértice hay un color que no aparece. Ahora agreguemos el vértice  $v$  y consideremos a la gráfica  $K_n$ . Podemos colorear las aristas que van del vértice  $v$  a cada uno de los vértices de la gráfica y la coloreamos con el color que no aparece en dicho vértice. Esto nos da una  $(n-1)$ -coloración de  $K_n$  y por lo tanto

$$\chi'(K_n) \leq n-1.$$

Es fácil ver que  $K_n$  no tiene una  $(n-2)$ -coloración pues cada vértice es incidente con  $n-1$  aristas. □



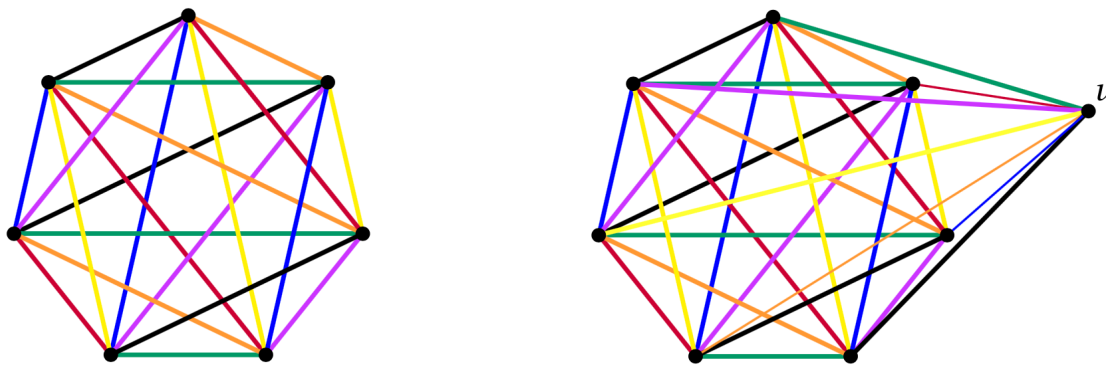


Figura 6.13: Coloración por aristas de la gráfica completa.

En general, dada una gráfica el número cromático por aristas de  $G$  está muy acotado, este resultado se lo debemos a Vizing [32].

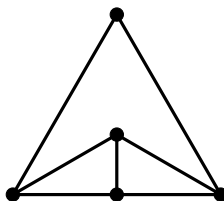
**Teorema 6.5.2** (Vizing, [32]). *Sea  $G$  una gráfica, entonces*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

En general no se sabe que condiciones debe cumplir una gráfica para satisfacer  $\chi'(G) = \delta(G)$  o  $\chi'(G) = \delta(G) + 1$ . Para un estudio más completo sobre coloración de gráficas recomendamos el libro de Jensen y Toft [22]

## 6.6. Ejercicios

1. Demuestra que la siguiente gráfica tiene número cromático por aristas cuatro.



2. Sea  $G$  una gráfica 4-conexa con  $\chi(G) = 4$ . Demuestra que  $G$  tiene al menos 4 vértices de grado al menos 3.
3. Sea  $G$  una gráfica plana tal que todos sus vértices tienen grado par. Demuestra que las caras de  $G$  pueden colorearse con dos colores de forma que dos regiones que comparten una arista reciben colores distintos.

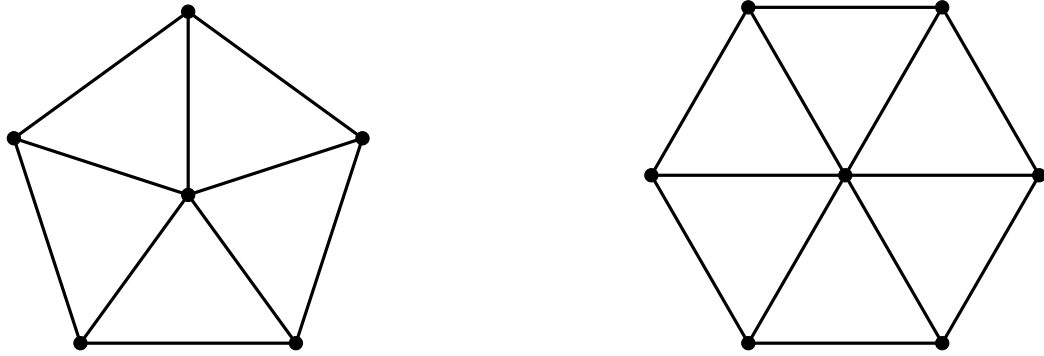
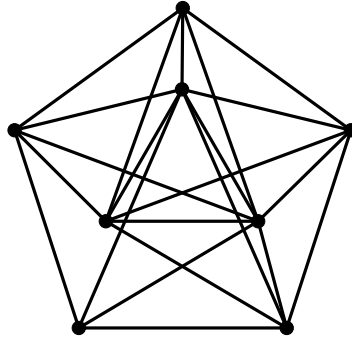


Figura 6.14: Gráficas  $W_5$  (izquierda) y  $W_6$  (derecha).

4. Sea  $H$  una subgráfica de  $G$ . Demuestra que  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .
5. Se define la gráfica **llanta**  $W_n$  como la gráfica que se obtiene al agregar un vértice  $v$  y haciéndolo adyacente a los vértices de un ciclo de longitud  $n-1$  (ver Figura 6.14). Encuentra el número cromático de  $W_n$ .
6. Sea  $G$  una gráfica con  $\chi(G) = k$ . Demuestra que  $G$  contiene al menos  $k$  vértices de grado al menos  $k-1$ .
7. Sea  $G$  un árbol con al menos dos vértices. Encuentra  $\chi(G)$ .
8. Demuestra que  $G$  una gráfica bipartita si y sólo si  $\chi(G) = 2$ .
9. Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $\chi(G) = k$ . Demuestra que

$$|E(G)| \geq \binom{k}{2}.$$

10. Sea  $G$  una gráfica y  $v$  un vértice de  $G$ . Demuestra que  $\chi(G-v) = \chi(G)$  o bien  $\chi(G-v) = \chi(G) - 1$ .
11. Demuestra que la siguiente gráfica es una gráfica 6-cromática crítica.

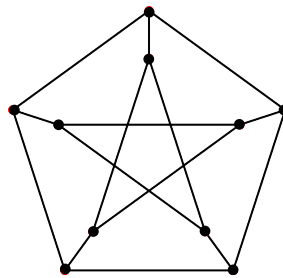


12. Sea  $G$  una gráfica 3-regular.

*a)* Demuestra que  $\chi(G) \leq 4$ .

*b)* Caracteriza a las gráficas para las cuales  $\chi(G) = 4$ .

13. Encuentra el número cromático por vértices y aristas de la gráfica de Petersen.



14. Sea  $G$  una gráfica 3-regular y Hamiltoniana. Demuestra que  $\chi'(G) = 3$ .

15. Demuestra que  $\chi'(C_n) = 3$  si  $n$  es impar.

16. Sea  $G$  una gráfica. Demuestra que  $\chi(G) \geq 3$  si y sólo si  $G$  contiene un ciclo de longitud impar.

17. Describe cómo sería una gráfica  $G$  que tenga número cromático tres pero que al quitar cualquier arista tenga número cromático 2.

18. Construye una gráfica conexa 3-regular, tal que  $\chi(G) = 4$ .

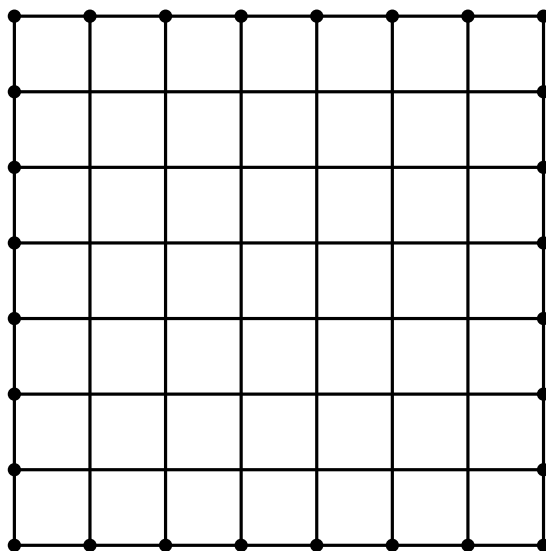
19. Sea  $G$  una gráfica 3-regular con un vértice de corte. Demuestra que

$$\chi'(G) \geq \Delta(G) + 1.$$

20. Sea  $G$  una gráfica con grado máximo  $\Delta$ .

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq 2\Delta - 1.$$

21. Encuentra una coloración de los vértices y las aristas de la siguiente gráfica.



22. Un grupo de ocho alumnos caminan todos los días de regreso a casa en parejas. Demuestra que se pueden formar parejas de forma que cada alumno tenga compañía distinta cada día de la semana.

23. Sea  $G$  una gráfica con  $\text{diam}(G) = l$ . Demuestra que  $\chi(G) \leq l + 1$ .

24. Resuelve el siguiente juego de Sudoku.

							1	
					2			3
			4					
						5		
6		1	7					
		4	1					
	5					2		
				8			6	
	3		9	1				

# Bibliografía

- [1] K. Appel, W. Haken, Every Planar Map is Four-Colourable, Illinois J. Math. 21 (1977), 491–567.
- [2] K. Appel, W. Haken, The Solution of the Four-Color Map Problem, Sci. Amer. 237 (1977), 108–121.
- [3] A. S. Asratian, T. Denley, R. Häggkvist, Bipartite Graphs and their Applications. Cambridge Tracts in Mathematics 131, Cambridge University Press, 1998.
- [4] S. Arnborg, Reduced state enumeration-Another algorithm for reliability evaluation, IEEE Trans. Reliability, R-27 (1978), 111–115.
- [5] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, 2nd Edition, Springer-Verlag, London, 2002.
- [6] L. W. Beineke, O. R. Oellermann, and R. E. Pippert, The average connectivity of a graph, Discrete Mathematics, 253 (2002) 31–45.
- [7] L. W. Beineke, R. E. Pippert, Properties and characterization of  $k$ -trees. Mathematika, 18 (1971), 141–151.
- [8] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, 2nd Edition Cambridge Mathematical Library, 1993.
- [9] B. Bollobás, Graph Theory: An Introductory Course, Springer-Verlag, New York Inc. 1979.
- [10] J.A. Bondy, V. Chvátal, A method in graph theory, Discrete Math. 15 (1976), 111–135.
- [11] A. Cayley, On the theory of the analytical forms called trees, Philosophical Magazine (4) 13 (1857), 172–176.
- [12] G. Chartrand, O. R. Oellermann, Applied and Algorithmic Graph Theory, McGraw-Hill, New York, 1992.
- [13] P. Dankelmann, O. Oellermann, Bounds on the average connectivity of a graph, Discrete Applied Math, 129 (2003), 305–318.
- [14] J. Dalgety, The icosian Game, (jul 6, 2009),  
<http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm>.

- [15] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3rd Ser. 2: 69-81.
- [16] L. Euler, *Solutio problematis and geometriam situs pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736), 128–140.
- [17] P. Erdős, G. Katona, *Theory of Graphs*, *Proc. Colloq held in Tihany, Hungary, Sept. 1966*, Academic Press, New York (1968) 361.
- [18] L. Euler, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*. *Novi Comm. Acad Sci. Imp. Petropol* (1752).
- [19] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley series in Mathematics, Perseus Books, 1994.
- [20] P. J. Heawood, *Map-Colour Theorem*, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24 (1890), 332-338.
- [21] A. M. Herzberg, M. R. Murty, *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*, *Notices of the American Mathematical Society*, 54 (2007), 708–717.
- [22] T. R. Jensen, B. Toft. *Graph Coloring Problems*, John-Wiley, 1995.
- [23] C. Jordan, *Sur les assemblages de lignes*, *J. Reine Angew Math.* 70 (1869), 185–190.
- [24] A. B. Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours*, *American Journal of Mathematics* 2(1879) 193-200.
- [25] F. Kirchhoff, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, *Ann. Phys. chem.* 72 (1847), 497–508.
- [26] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
- [27] D. König, *Graphen and Matrizen*, *Math. Fiz. Lapok* 38 (1931) 116–119.
- [28] J. B. Kruskal, *On the shortest spanning subtree and traveling salesman problem*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7 (1956), 48–50.
- [29] C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. *Fund. Math.* 15 (1930) 271–83.
- [30] W. McCuaig, *A simple proof of Menger's theorem*, *J. Graph Theory* 8 (1984), 427–429.
- [31] K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*. *Fund Math.* 10 (1927), 96–115.
- [32] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph*. *Discr. Analiz.* 3 (1964) 25–30.

- [33] H. Whitney, Non separable and planar graphs. Trans Amer. Math. Soc. 34 (1932). 339–362.
- [34] R. J. Wilson, Introduction to Graph Theory, 4th Edition, Longman Group Ltd. 1998.



# Introducción a la Teoría de las Gráficas

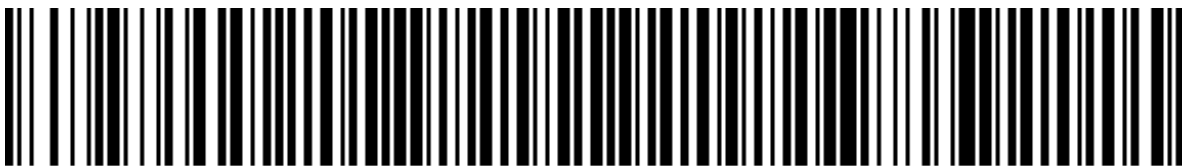
**Diego Antonio González-Moreno**

e-mail: [dgonzalez@correo.cua.uam.mx](mailto:dgonzalez@correo.cua.uam.mx)

*Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas*

Universidad Autónoma Metropolitana - Cuajimalpa.

17 de abril de 2017



ISBN: 978-607-28-1037-2