Gráficas y Juegos: Tarea 02

Martínez Méndez Ángel Antonio
Pinzón Chan José Carlos
Rendón Ávila Jesús Mateo

February 21, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesor: César Hernández Cruz

1. Sea D una digráfica de orden n. Demuestre que si D no tiene ciclos dirigidos, entonces existe un orden total, $v_1, ..., v_n$ de V_D , tal que siempre que (v_i, v_j) sea una flecha de D, se tiene que $i < j$.

Hipotesis

D no tiene ciclos dirigidos

Definiciones

Def. Un **ciclo dirigido** de tres o más vértices es una digráfica simple en la que su conjunto de vértices admite un orden cíclico de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en el orden.

Al trabajar en una digráfica acíclica, recordemos que existe por lo menos un vértice con ingrado cero, de lo contrario, D sería una digráfica con un ciclo dirigido inducido. Tomaremos a dicho vértice como el primero en nuestro orden de vértices debido a que, por definición, no hay ninguna flecha que incida en él.

Sea D una digráfica simple, de orden n y acíclica. Si el conjunto de sus vértices esta denotado por $V_D = \{v_1, v_2 ..., v_n\}$, $i.e$, tienen un orden n, podemos suponer que $v_1 \in V_D$ y demostramos por inducción que:

$(Base)$ Si D tiene solo un vertice, entonces $v_1 \in V_D$ tiene ingrado $d^-(v_1) = 0$ y, necesariamente, cumple con ser un orden total.

$(HipotesisInductiva)$ Supongamos que si D tiene k vertices, existe un orden k de la forma $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que si $v_i v_j \in A_D$, por definición sabemos que debe existir $d^-(v_i) = 0$, que si se cumple, podemos eliminar este vertice y la flecha que sale de él y comprobar para los siguientes dos vertices $(v_j v_j + 1)$. En caso contrario, tendremos que probar esto mismo para los dos vertices anteriores $v_i - 1 v_i$.

$(Pasoinductivo)$ Sea D una digrafica con $k + 1$ vertices.

Por defınción, debe existir un vertice $v_i \in V_D$ con ingrado cero que cumpla con ser el primero en nuestro orden. Por $H.I.$ si vamos revisando vértice por vértice, si alguno de estos $\{v_i, v_i + 1, ..., v_k, v_k + 1\}$ cae en tener ingrado 1 o 0, llegaremos a nuestro caso base en v_{k+1}, donde tendremos un orden de la forma $v_k < v_i$.

2. Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3, entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3.

Hipotesis

G tiene un diámetro mayor que 3.

Definiciones

Def. El **diámetro** de una gráfica G se define como $max_{u \in V_G}\{max_{v \in V_G}\{d(u, v)\}\}$, en otras palabras, la distancia mas grande entre cualesquiera vértices de G.

Def.El **complemento** de una gráfica G, denotada como $\overline{G}$, es la gráfica con el conjunto de vértices:

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

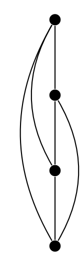
y el conjunto de aristas:
$$E(\overline{G}) = \{uv \in V(G) \times V(G) \mid uv \notin E(G)\}$$

Sea G un grafica cuyo diámetro es mayor que 3. De antemano podemos descartar que la grafica sea conexa, pues en ese caso su diametro sería igual a 1.

Por hipotesis sabemos que existen 2 vértices $u, v \in G$ tales que $d(u,v) \geq 4$. Esto nos indica que no existe una arista entre u y v, tampoco existe un vértice adyacente a ambos y mucho menos dos vértices adyacentes entre si y adyacentes a u y a v.

Si definimos una biparticion (X,Y) en G, sabemos que para cualesquiera vértices $v_i, v_j \in X$ entonces la arista $v_iv_j \notin E_G$. De forma similar, para cualesquiera dos vértices $u_i, u_j \in Y$ ocurre que la arista $u_iu_j \notin E_G$. En consecuencia, las aristas v_iv_j y u_iu_j pertenecen al conjunto de aristas de $\overline{G}$. Esto significa que todo vértice v_i en X, si nos situamos en $\overline{G}$, es adyacente a cualquier otro vertice v_j que tambien pertenezca a X y por lo tanto la distancia entre cualesquiera vértices en X y en $\overline{G}$ es 1.

(a) Biparticion X, situada en G



(b) Biparticion X, situada en $\overline{G}$

Sean los vértices $v_i \in X$ y $u_j \in Y$, como tenemos una bipartición sabemos que existe al menos una arista que una a algún v_i con algún vértice en Y. Sea uno o multiples elementos en X (no todos) adyacentes a algún u_j, entonces habrá un elemento X tal que no sea adyacente a u_j en G pero si en $\overline{G}$, de modo que (como todos los elementos en $\overline{G}$ y X son adyacentes entre si) puede ser alcanzado y funcionar como "intermediario" para llegar a u_j. En este caso la distancia entre los vértices en X y u_j (en el peor de los casos) es 2.

Si la gráfica fuera bipartita completa entonces al aplicar el complemento de G, los vértices en X no podrían alcanzar a los vértices en Y, siendo los vértices en X adyacentes sólo entre ellos, en este otro caso la distancia entre cualesquiera vértices en X es igual a 1. Todo lo anterior es análogo para los vértices en Y.

En conclusión, para todos los casos se cumple que la distancia es menor que 3, por lo tanto el diámetro es menor que 3 y la propiedad se cumple.

3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a $P3$ como subgráfica inducida.

Hipotesis

D es una gráfica conexa.

Definiciones

Def. Una gráfica G se dice que es **completa** si cualquier par de sus vértices es adyacentes, es decir, para cualesquiera dos vértices u y v en V_G, tenemos que la arista uv está en E_G.

Def. Una gráfica G es **conexa** si y sólo si entre cualesquiera dos vértices existe un camino.

Sea G una gráfica conexa,cuyo número de vértices sea mínimo 4, sabemos que entre cualesquiera vértices de G existe un camino, si G no es una gráfica completa, entonces existen vértices en G que no tienen un arista entre si, lo que nos permite decir que no existe un ciclo. Dado que la gráfica es conexa entonces la longitud del camino mas largo sera igual al número de vértices menos-1 , una subgrafica tendra menos vertices, y por tanto menos aristas, si se considera que se conserva la conexidad en la subgrafica inducida, entonces lo que sucede es que la longitud del camino mas largo tambien se reduce, si quitamos los suficientes vertices para solo dejar 3, entonces tenemos a $P3$, pero si quitamos menos al ser conexa P3 seguira estando ahi.

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.

Hipotesis

Existen dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica G que es conexa.

Definiciones

Def. G es conexa si para todos $u, v \in V$ existe un uv-camino.

Def. Un trayectoria es un camino que no repite vertices.

Sea G una gráfica conexa, en donde existen dos trayectorias P y Q de longitud máxima.

Supongamos que $P \cap Q = \emptyset$, i.e, que nuestras dos trayectorias de longitud máxima no comparten vertices en común. Como sabemos que G es conexa, si tomamos cualquier par de vértices de P y Q, digamos $u \in P$ y $v \in Q$, entonces existe un uv-camino en G que los conecta.

Imaginemos que F es ese uv-camino que conecta a los vertices que tomamos de forma arbitrariamente de P y Q. Ahora, si consideremos la trayectoria generada al tomar un vertice de P desde uno de sus extremos, digamos v_i hasta uv, seguida por el camino dado F, y luego la parte de Q desde un u_i hasta uno de sus extremos. Esta nueva trayectoria es estrictamente más larga que P y Q, lo que contradice la suposición de que P y Q eran de longitud máxima.

Lo que nos arroja una contradicción, por lo que esto implica que cualquier par de trayectorias de longitud máxima en cualquier gráfica G deben compartir al menos un vértice.

5. Caracterice a las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

Definiciones

Def. Una gráfica G es k-regular si $d(v) = k$ para cada $v \in V(G)$

a) Para $k = 0$

Una gráfica G es 0-regular si y sólo si G es vacia.

$\Longrightarrow$) Sea G una gráfica 0-regular, entonces $d(v) = 0$ para cada $v \in V(G)$.

De lo anterior deducimos que cada vértice v en el conjunto de vértices $V(G)$ no es extremo de ninguna arista, *i.e* $E(G) = \varnothing$.

Por lo tanto G es vacia.

$\Longleftarrow$) Sea G una gráfica vacia, entonces $E(G) = \varnothing$, entonces no hay aristas entre vertices.

Por lo tanto $d(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, así G es 0-regular

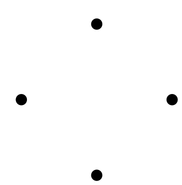


Figure 2: Representación de una gráfica 0-regular

b) Para $k = 1$

Una gráfica G es 1-regular si y solo si G es una gráfica nK_2 con $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$) Sea G una gráfica 1-regular, entonces $d(v) = 1$ para cada $v \in V(G)$.

De lo anterior deducimos que para cada vértice v existe un único vértice u tal que $uv \in E(G)$, es decir, G es una gráfica K_2 cuando $n = 1$.

Cuando $n > 1$, entonces por ser G 1-regular, G es la unión de las n gráficas K_2.

$\Longleftarrow$) Sea G una gráfica nK_2, entonces G es una gráfica generada por la unión de las n gráficas completas de dos vértices.

Como G es la unión de las n gráficas K_2, podemos decir que para todo $v \in V(G)$, se cumple que $d(v) = 1$.

Por lo tanto G es 1-regular.

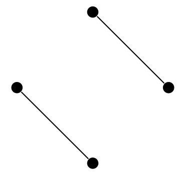


Figure 3: Representación de una gráfica 1-regular

c) Para $k = 2$

Una Grafica G es 2-regular si y sólo si cada vértice de G tiene exactamente 2 *vecinos*.

$\Longrightarrow$) Sea G una gráfica 2-regular, entonces $d(v) = 2$ para cada $v \in V(G)$.

Como por ser $d(v) = 2$, no puede pasar que v sea adyacente a un vértice u y no sea adyacente a algún otro vértice w, por lo que todo vértice $v \in V(G)$ deber ser adyacente a algún otro vértice u y w de forma que $uv \in E(G)$ y $vw \in E(G)$.

por lo tanto $\forall v \in V(G)$, se cumple v tiene exactamente 2 vecinos.

$\Longleftarrow$) sea G una gráfica tal que cada vértice de G tiene exactamente 2 vecinos.

Como cada vértice $v \in V(G)$ tiene exactamente 2 vecinos, entonces $d(v) = 2$ para todo $v \in V(G)$.

Por lo tanto G es 2-regular.

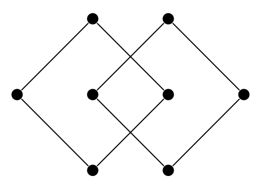


Figure 4: Representación de una gráfica 2-regular

6. Demuestre que si $\mid E \mid \geq \mid V \mid$, entonces G contiene un ciclo.

Hipotesis

$\mid E \mid \geq \mid V \mid$.

Definiciones

Def. Un **ciclo** de tres o mas vértices es una gráfica simple en la que su conjunto de vértices admite un orden cíclico de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en el orden.

Def Una gráfica es **regular** si es k-regular para algún $k \in \mathbb{N}$.

Dem. por casos

Caso1. G es una gráfica regular, *i.e* es k-regular con $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Si fuera que todos los $v \in V$ tienen grado $d(v) \geq 2$, entonces G contiene un ciclo, o bien es un C_n, de ser así hemos terminado y concluimos que G contiene un ciclo.

Caso2. G no es regular.

Supongamos que G no es regular, entonces demostraremos por inducción fuerte sobre n, con n el número de vértices de G, que cualquier gráfica con $\mid E(G) \mid \geq \mid V(G) \mid$ contiene un ciclo.

Cuando $n = 3$, como debe ser $\mid E(G) \mid \geq \mid V(G) \mid$, entonces G en un C_3 y por lo tanto hay un ciclo en G.

Si a la gráfica de nuestro caso base le añadimos un vértice, por la condición de $\mid E(G) \mid \geq \mid V(G) \mid$ tendremos que añadir uno o mas vértices, llamemosles v', enotnces v' se va volver vecino de algún $v \in V(G)$ que a su vez tiene grado 2, por lo tanto, la nueva grafica G', generada de añadirle un vértice a G, contiene un ciclo.

Para cualquier cantidad n de vértices v^* que se añadan a G', entonces tendremos que en G^* habrá al menos un ciclo de 3 vértices o, en caso de que v^* sea vecino de mas de un $v' \in V(G')$ tendremos múltiples ciclos.

Por lo tanto concluimos que cuando $\mid E(G) \mid \geq \mid V(G) \mid$, entonces G contiene al menos un ciclo de tres vértices o más.