Gráficas y Juegos: Tarea 01

Martínez Méndez Ángel Antonio
Pinzón Chan José Carlos
Rendón Ávila Jesús Mateo

February 10, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesor: César Hernández Cruz

1. Dibuje todas las gráficas no isomorfas de cuatro vértices. Justifique brevemente por qué son todas, es decir, justifique por qué la lista que exhibe es exhaustiva.

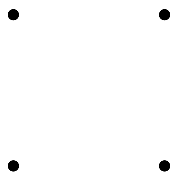
Figure 1: Gráfica G_1

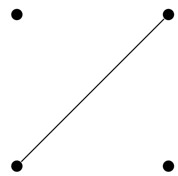
Figure 2: Gráfica G_2

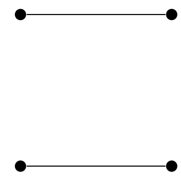
Figure 3: Gráfica G_3

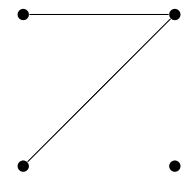
Figure 4: Gráfica G_4

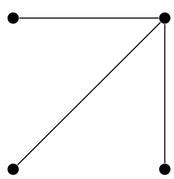
Figure 5: Gráfica G_5

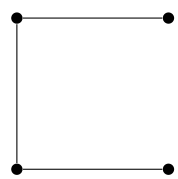
Figure 6: Gráfica G_6

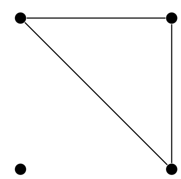
Figure 7: Gráfica G_7

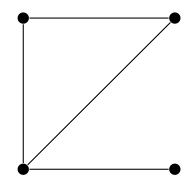
Figure 8: Gráfica G_8

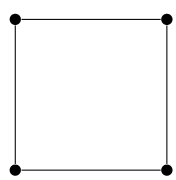
Figure 9: Gráfica G_9

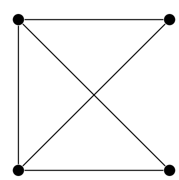
Figure 10: Gráfica $G_1$0

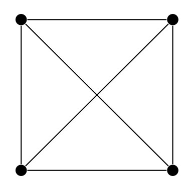
Figure 11: Gráfica $G_1$1

2. Sean G y H gráficas.

a) Demuestre que G es isomorfa a H si y sólo si $\overline{G}$ es isomorfa a $\overline{H}$.
$\Rightarrow$)

Hipotesis

G es isomorfa a H.

Definiciones

Def. Una gráfica G es **isomorfa** a una gráfica H si existe una función φ biyectiva, tal que:

$$\varphi : V(G) \to V(H)$$

Tal que para cualesquiera vertices $u, v \in V(G)$, se cumple que:

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$$

*Def.*El **complemento** de una gráfica G, denotada como $\overline{G}$, es la gráfica con el conjunto de vértices:

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

y el conjunto de aristas:

$$E(\overline{G}) = \{uv \in V(G) \times V(G) \mid uv \notin E(G)\}$$

P.D.

$$\overline{G} \cong \overline{H}$$

Tenemos que encontrar una función ? que satisfaga la definición de isomorfismo para $\overline{G}$ y $\overline{H}$.
Como por nuestra Hipotesis sabemos que $G \cong H$ entonces existe una funcion φ biyectiva.

Por definición de complemento de una gráfica, tenemos que:

$$V(\overline{G}) = V(G) \text{ y } V(\overline{H}) = V(H)$$

y

$$E(\overline{G}) = \{uv \in V(G) \times V(G) \mid uv \notin E(G)\} \text{ y } E(\overline{H}) = \{uv \in V(H) \times V(H) \mid uv \notin E(H)\}$$

Con ello podemos proponer la misma función φ para el isomorfismo de $\overline{G}$ y $\overline{H}$, ya que por definición de complemento $V(G) = V(\overline{G})$ y $V(H) = V(\overline{H})$, tenemos aśi que:

$$\varphi : V(\overline{G}) \to V(\overline{H})$$

que cumple, de nuevo por definición de complemento:

$$\text{Si } uv \notin E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \notin E(H)$$

$$\text{entonces, por def. de complemento } uv \in E(\overline{G}) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(\overline{H})$$

Por lo tanto, $\overline{G} \cong \overline{H}$.

$\Leftarrow$)
La demostración es analoga a la anterior, simplemente intercambiando $V(G)$ por $V(\overline{G})$ y $V(H)$ por $V(\overline{H})$.

b) Usando la definición de conexidad vista en clase, demuestre que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

Hipotesis

G es inconexa, lo que implica la negación de conexidad.

Definiciones

Def. Una grafica G es **conexa** si para cualquier partición (X, Y) de $V(G)$, existe al menos una arista con un extremo en X y el otro en Y.

P.D.

$$\overline{G} \text{ es conexa.}$$

Sea una gráfica G inconexa, bajo cualquier partición (X, Y) de $V(G)$, no existe una arista con un extremo en X y el otro en Y.

De lo anterior, aseguramos que el complemento de G, denotado por $\overline{G}$, debe ser conexa, ya que bajo la partición (X, Y) de $V(G)$ existe al menos una arista con un extremo en X y el otro en Y.

Por lo tanto, $\overline{G}$ es conexa.

3. Sea D una digráfica. Utilizando un análogo para digráficas de las matrices de incidencia, dmeuestra que:

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Hipotesis

D es una gŕafica dirigida (digráfica).

Definiciones

Def. Una gráfica D es una **gráfica dirigida** si D es una pareja ordenada $D = (V, A)$, donde V es un conjunto arbitrario y A es un subconjunto de $V \times V$ (parejas ordenadas).

Def. La **matríz de incidencia** M de G es la matriz de $m \times n$ con entradas en $\{0, 1\}$ tal que:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } v_i \in e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

P.D.

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Si D es una digráfica, enotnces D es una pareja ordenada $D = (V, A)$, donde V es un conjunto arbitrario y A es un subconjunto de $V \times V$.

4. Sea n un entero positivo. Definimos la *Retícula Boleana, BL_n*, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, ..., n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia tiene exactamente un elemento.

(a) Dibuje BL_1, BL_2, BL_3 y BL_4.

Para BL_1 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1\}$, es decir:

$$V(BL_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

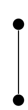

Figure 12: Gráfica de BL_1

Para BL_2 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2\}$, es decir:

$$V(BL_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\{1, 2\}\}$$

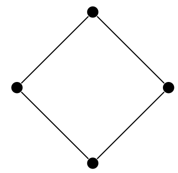

Figure 13: Gráfica de BL_2

Para BL_3 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1,2,3\}$, es decir:

$$V(BL_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

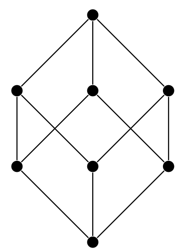

Figure 14: Gráfica de BL_3

Para BL_4 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1,2,3,4\}$, es decir:

$$V(BL_4) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\},$$

$$\{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

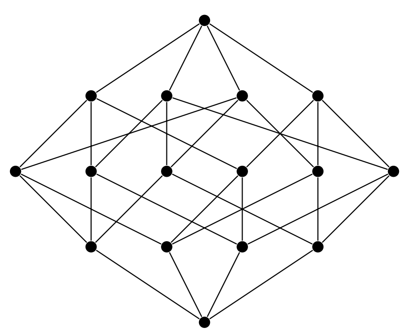

Figure 15: Gráfica de BL_4

b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$ (Demuestre su respuesta).

Definiciones

Def. Sea A un conjunto, definimos al **conjunto potencia** de A, denotado como $\mathcal{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A. *i.e*:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Como sabemos que V_{BL_n} es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, ..., n\}$, entonces podemos verlo como el conjunto potencia de $\{1, ..., n\}$, es decir:

$$V_{BL_n} = \mathcal{P}(\{1, ..., n\})$$

cuya cardinalidad se define como:

$$|V_{BL_n}| = 2^n$$

c) Demuestre que BL_n es bipartita pra cualquier $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 0$.

Definiciones

Def. Sea n un entero positivo. la **Retícula Boleana, BL_n**, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, ..., n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia tiene exactamente un elemento.

Def. Una gráfica G es **bipartita** si $V(G)$ admite una patición $V = (X, Y)$ tal que X y Y son conjuntos independientes.

5. El algoritmo de Euclides es uno de los algoritmos más antiguos que sigue siendo usado hoy en día. Este se basa en el hecho que el máximo común divisor de dos números a y b con $a > b$, es igual al máximo común divisor de b y a mod b.

Pseudocódigo del Algoritmo de Euclides (Iterativo)

```
Algoritmo Euclides(a, b)
    mientras b != 0 hacer
        temp ← b
        b ← a mod b
        a ← temp
    retornar a
```

Pseudocódigo del Algoritmo de Euclides (Recursivo)

```
Algoritmo Euclides(a, b)
    si b = 0 entonces
        retornar a
    sino
        retornar Euclides(b, a mod b)
```