Gráficas y Juegos: Tarea 01

Martínez Méndez Ángel Antonio
Pinzón Chan José Carlos
Rendón Ávila Jesús Mateo

February 12, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesor: César Hernández Cruz

1. Dibuje todas las gráficas no isomorfas de cuatro vértices. Justifique brevemente por qué son todas, es decir, justifique por qué la lista que exhibe es exhaustiva.

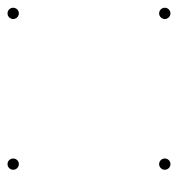
Figure 1: Gráfica G_1

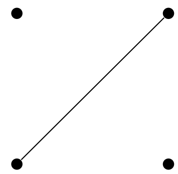
Figure 2: Gráfica G_2

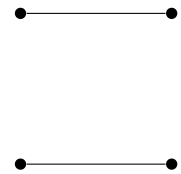
Figure 3: Gráfica G_3

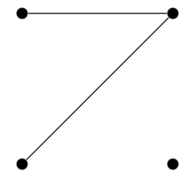
Figure 4: Gráfica G_4

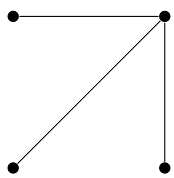
Figure 5: Gráfica G_5

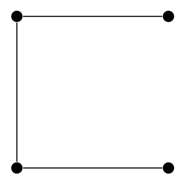
Figure 6: Gráfica G_6

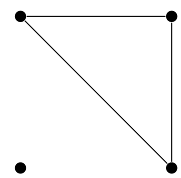
Figure 7: Gráfica G_7

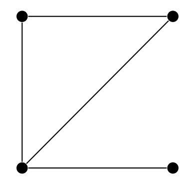
Figure 8: Gráfica G_8

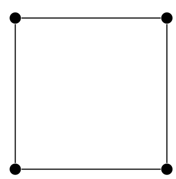
Figure 9: Gráfica G_9

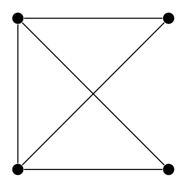
Figure 10: Gráfica G_10

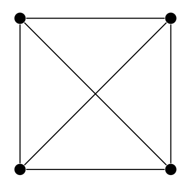
Figure 11: Gráfica G_11

Parece haber un patrón en la forma de dibujar las gŕaficas:

Para 0 y 6 aristas se tiene una sola posibilidad de gráfica. Lo mismo sucede para las graficas de 1 y 5 aristas.

Ahora, para las gráficas de 2 y 4 aristas se tienen dos posibilidades de gráfica para cada una. Ya sea añadiendo una arista a la grafica de secuencia de grados $[1, 1, 0, 0]$, vemos que podemos añadir la nueva arista tal que tenga un extremo en un vértice con $d(V(G)) = 1$ o $d(V(G)) = 0$, de forma que no repitan las aristas existentes, de ahí las 2 posibilidades de graficas.

Este proceso aplica para la gráfica de 5 aristas, cuya secuencia de grados es $[3, 3, 2, 2,]$, vemos que podemos aliminar una arista tal que tenga un extremo en un vértice con $d(V_g) = 2$ o $d(V_g) = 3$

De las gráficas anteriormente obtenidas, ya sea quitando o añadiendo aristas, ahora tendremos secuencias de grados con tres posibilidades para colocar nuevas aristas, de ahí que para 3 aristas tenemos 3 posibles gráficas.

2. Sean G y H gráficas.

a) Demuestre que G es isomorfa a H si y sólo si $\overline{G}$ es isomorfa a $\overline{H}$.
$\Rightarrow$)

Hipotesis

G es isomorfa a H.

Definiciones

Def. Una gráfica G es **isomorfa** a una gráfica H si existe una función φ biyectiva, tal que:

$$\varphi : V(G) \to V(H)$$

Tal que para cualesquiera vertices $u, v \in V(G)$, se cumple que:

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$$

*Def.*El **complemento** de una gráfica G, denotada como $\overline{G}$, es la gráfica con el conjunto de vértices:

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

y el conjunto de aristas:

$$E(\overline{G}) = \{uv \in V(G) \times V(G) \mid uv \notin E(G)\}$$

P.D.

$$\overline{G} \cong \overline{H}$$

Tenemos que encontrar una función ? que satisfaga la definición de isomorfismo para $\overline{G}$ y $\overline{H}$.
Como por nuestra Hipotesis sabemos que $G \cong H$ entonces existe una funcion φ biyectiva.

Por definición de complemento de una gráfica, tenemos que:

$$V(\overline{G}) = V(G) \text{ y } V(\overline{H}) = V(H)$$

y

$$E(\overline{G}) = \{uv \in V(G) \times V(G) \mid uv \notin E(G)\} \text{ y } E(\overline{H}) = \{uv \in V(H) \times V(H) \mid uv \notin E(H)\}$$

Con ello podemos proponer la misma función φ para el isomorfismo de $\overline{G}$ y $\overline{H}$, ya que por definición de complemento $V(G) = V(\overline{G})$ y $V(H) = V(\overline{H})$, tenemos aśi que:

$$\varphi : V(\overline{G}) \to V(\overline{H})$$

que cumple, de nuevo por definición de complemento:

$$\text{Si } uv \notin E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \notin E(H)$$

$$\text{entonces, por def. de complemento } uv \in E(\overline{G}) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(\overline{H})$$

Por lo tanto, $\overline{G} \cong \overline{H}$.

$\Leftarrow$)

La demostración es analoga a la anterior, simplemente intercambiando $V(G)$ por $V(\overline{G})$ y $V(H)$ por $V(\overline{H})$.

b) Usando la definición de conexidad vista en clase, demuestre que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

Hipotesis

G es inconexa, lo que implica la negación de conexidad.

Definiciones

Def. Una grafica G es **conexa** si para cualquier partición (X, Y) de $V(G)$, existe al menos una arista con un extremo en X y el otro en Y.

P.D.

$$\overline{G} \text{ es conexa.}$$

Sea una gráfica G inconexa, bajo cualquier partición (X, Y) de $V(G)$, no existe una arista con un extremo en X y el otro en Y.

De lo anterior, aseguramos que el complemento de G, denotado por $\overline{G}$, debe ser conexa, ya que bajo la partición (X, Y) de $V(G)$ existe al menos una arista con un extremo en X y el otro en Y.

Por lo tanto, $\overline{G}$ es conexa.

3. Sea D una digráfica. Utilizando un análogo para digráficas de las matrices de incidencia, dmeuestra que:

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Hipotesis

D es una gŕafica dirigida (digráfica).

Definiciones

Def. Una gráfica D es una **gráfica dirigida** si D es una pareja ordenada $D = (V, A)$, donde V es un conjunto arbitrario y A es un subconjunto de $V \times V$ (parejas ordenadas).

Def. La **matríz de incidencia** M de G es la matriz de $m \times n$ con entradas en $\{0, 1\}$ tal que:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } v_i \in e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

P.D.

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Sea M^+ y M^- las matrices de incidencia de los exgrados e ingrados respectivamente, si tenemos una gráfica dirigida D y su conjunto de vértices $V(D)$ tal que:

$$V(D) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

y su conjunto de aristas $A(D)$ tal que:

$$A(D) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$$

Para la matríz de incidencia de una digráfica, tanto para los exgrados e ingrados, la suma de los elementos de cada columna es igual a 1. Sea la suma de los elementos de la columna igual a 0, se concluye que la arista no existe, por otro lado, si la suma es igual a 1, la arista *sale* de algún vértice (exgrado) o se dirige a algún vértice (ingrado).

Suponiendo que la suma de la columna sea ≥ 2, esto no es posible puesto que una arista sólo puede partir de un solo punto y viceversa, $i.e$ sólo puede dirigirse a un solo punto.

Como resultado al sumar todas las columnas de M^+ o M^- obtenemos el número de aristas de la gráfica, $i.e$ se obtiene la cardinalidad de $A(D)$.

De forma similar, si sumamos las entradas del $i - esimo$ renglón de M^+ obtenemos el exgrado (o ingrado en el caso de M^-) del vértice v_i.

En base a lo anterior se puede argumentar que:

$$\mid A(D) \mid = \sum_{j=1}^{m} 1$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{n} M_{ij}^+$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}^+$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)$$

$$= \sum_{v \in V(D)} d^+(v_i)$$

Analogamente podemos hacerlo para ingrados, por lo que:

$$\mid A(D) \mid = \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$$

4. Sea n un entero positivo. Definimos la *Retícula Boleana, BL_n*, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, ..., n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia tiene exactamente un elemento.

(a) Dibuje BL_1, BL_2, BL_3 y BL_4.

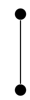

Figure 12: Gráfica de BL_1

Para BL_1 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1\}$, es decir:

$$V(BL_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

Para BL_2 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2\}$, es decir:

$$V(BL_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\{1, 2\}\}$$

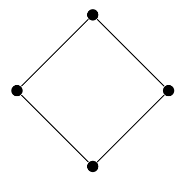

Figure 13: Gráfica de BL_2

Para BL_3 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$, es decir:

$$V(BL_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

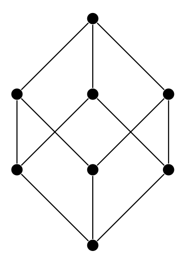

Figure 14: Gráfica de BL_3

Para BL_4 tenemos que el conjunto de vértices V es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$, es decir:

$$V(BL_4) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$$

$$\{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

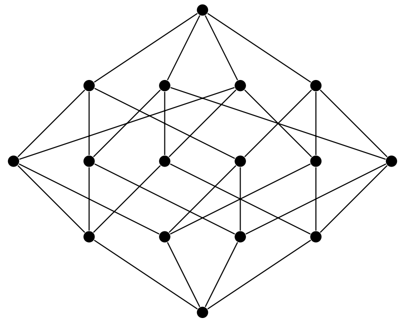

Figure 15: Gráfica de BL_4

b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$ (Demuestre su respuesta).

Definiciones

Def. Sea A un conjunto, definimos al **conjunto potencia** de A, denotado como $\mathcal{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A. *i.e*:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Como sabemos que $V(BL_n)$ es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, ..., n\}$, entonces podemos verlo como el conjunto potencia de $\{1, ..., n\}$, es decir:

$$V(BL_n) = \mathcal{P}(\{1, ..., n\})$$

cuya cardinalidad se define como:

$$|V(BL_n)| = 2^n$$

Como ya hemos demostrado $|V(BL_n)| = 2^n$. De tal modo que, para saber $|E(BL_n)|$, nos basaremos en la construcción de aristas en la gráfica BL_n

Por definición de BL_n, sabemos que u es adyacente a v si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

Notemos que, sin importar quien sea n, $d(\varnothing) = d(\{1, 2, ..., n\}) = n$ es decir, sus grados son iguales.

Así podemos ver al conjunto de vértices de la sigueinte manera:

$$V(BL_n) = \{d(V_1) = n, v_2, ..., d(u) = n\}$$

De esta forma, $|V(BL_n)| = n \times 2^n$

Sin embargo, recordemos que $d(v_i) = n$ solo aplica para los vertices extremos, y con la formula dada, estaríamos asumiendo que todos los vertices de $V(BL_n)$ tienen el mismo grado, es decir, estariamos contado dos veces nuestros *"vertices internos"*, tal que:

$$V(BL_n) = \{d(v_1) = n, d(v_2) = n, ..., d(u_n) = n\}$$

Así que, solamente dividimos todo nuestra operación entre 2 y tendríamos que $|E(BL_n)| = (n \times 2^n)/2$ O bien, $|E(BL_n)| = n \times 2^(n - 1)$ Así, nos aseguramos de contar bien los vertices de BL_n.

c) Demuestre que BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 0$.

Definiciones

Def. Sea n un entero positivo. la **Retícula Boleana, BL_n**, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, ..., n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia tiene exactamente un elemento.

Def. Una gráfica G es **bipartita** si $V(G)$ admite una patición $V = (X, Y)$ tal que X y Y son conjuntos independientes.

$P.D$ BL_N es bipartita para cualquier $N \in \mathbb{Z}^+$.

Sean u, v vertices de $V(BL_n)$. Notemos que por definición, los vértices de BL_n tienen cardinalidad par e impar.

Supongamos que tomamos dos vértices pares u y v de nuestra gŕafica BL_n, de tal forma que los podemos representar como $\#u = 2m$ y $\#v = 2t$ donde m y t son enteros positivos.

Digamos que $m > t$ y $m \neq t$ por lo que m es igual a $t + g$, con $g \in \mathbb{N}$. Sin importar si hacemos la operación $2m-2t$ o $2t-2m$ tendremos que $2(t+g)-2t = 2g$ o $2t-2(t+g) = 2g$ (por conmutatividad de la suma).

Es decir, siempre nos quedara un vértice con cardinalidad par si tratamos de sacar su diferencia simétrica. Analogamente se puede probar lo mismo para los vértices impares.

Recordemos que si tenemos un vértice de cardinalidad par o impar estos siempre van a tener al menos una arista por definición de BL_n, de tal manera que vamos a tener una partición $(X, Y) en V(BL_n)$ tal que $X \cap Y = \varnothing$

Por lo que en nuestro conjunto de vértices $V(BL_n)$ siempre va a existir una bipartición:

$$X = \{x \mid \#x \text{ es par}\} \text{ y}$$

$$Y = \{y \mid \#y \text{ es impar}\}$$

De esta manera aseguramos que la gráfica BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

5. El algoritmo de Euclides es uno de los algoritmos más antiguos que sigue siendo usado hoy en día. Este se basa en el hecho que el máximo común divisor de dos números a y b con $a > b$, es igual al máximo común divisor de b y a mod b.

Pseudocódigo del Algoritmo de Euclides (Iterativo)

```
Algoritmo Euclides(a, b)
    mientras b != 0 hacer
        temp ← b
        b ← a mod b
        a ← temp
    retornar a
```

Pseudocódigo del Algoritmo de Euclides (Recursivo)

```
Algoritmo Euclides(a, b)
    si b = 0 entonces
        retornar a
    sino
        retornar Euclides(b, a mod b)
```