

Modélisation Géométrique

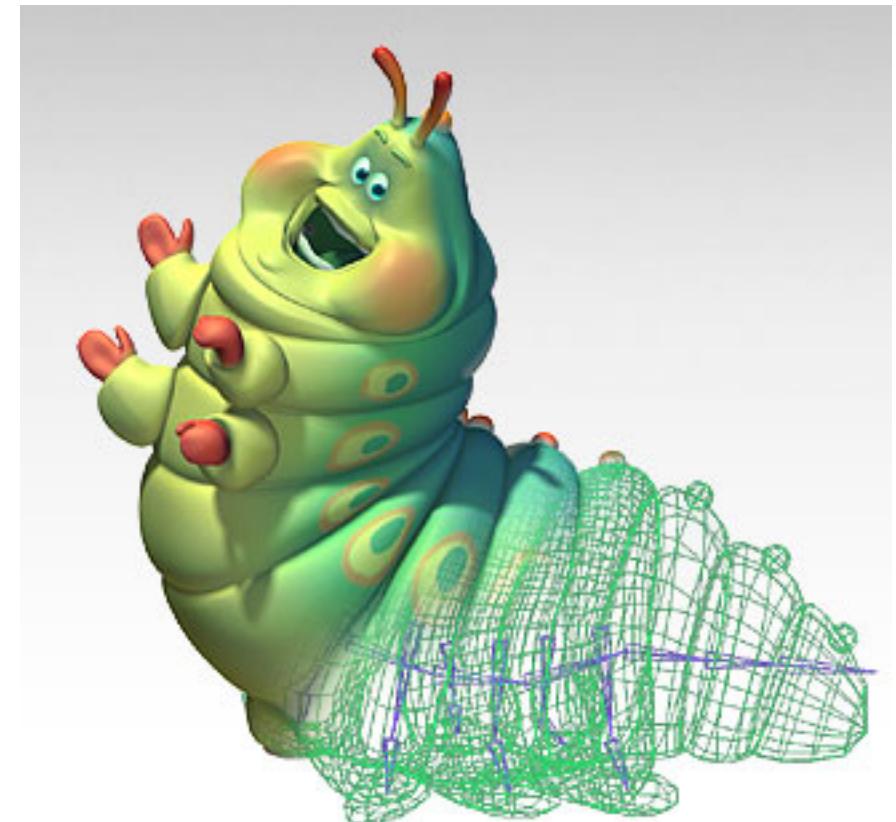
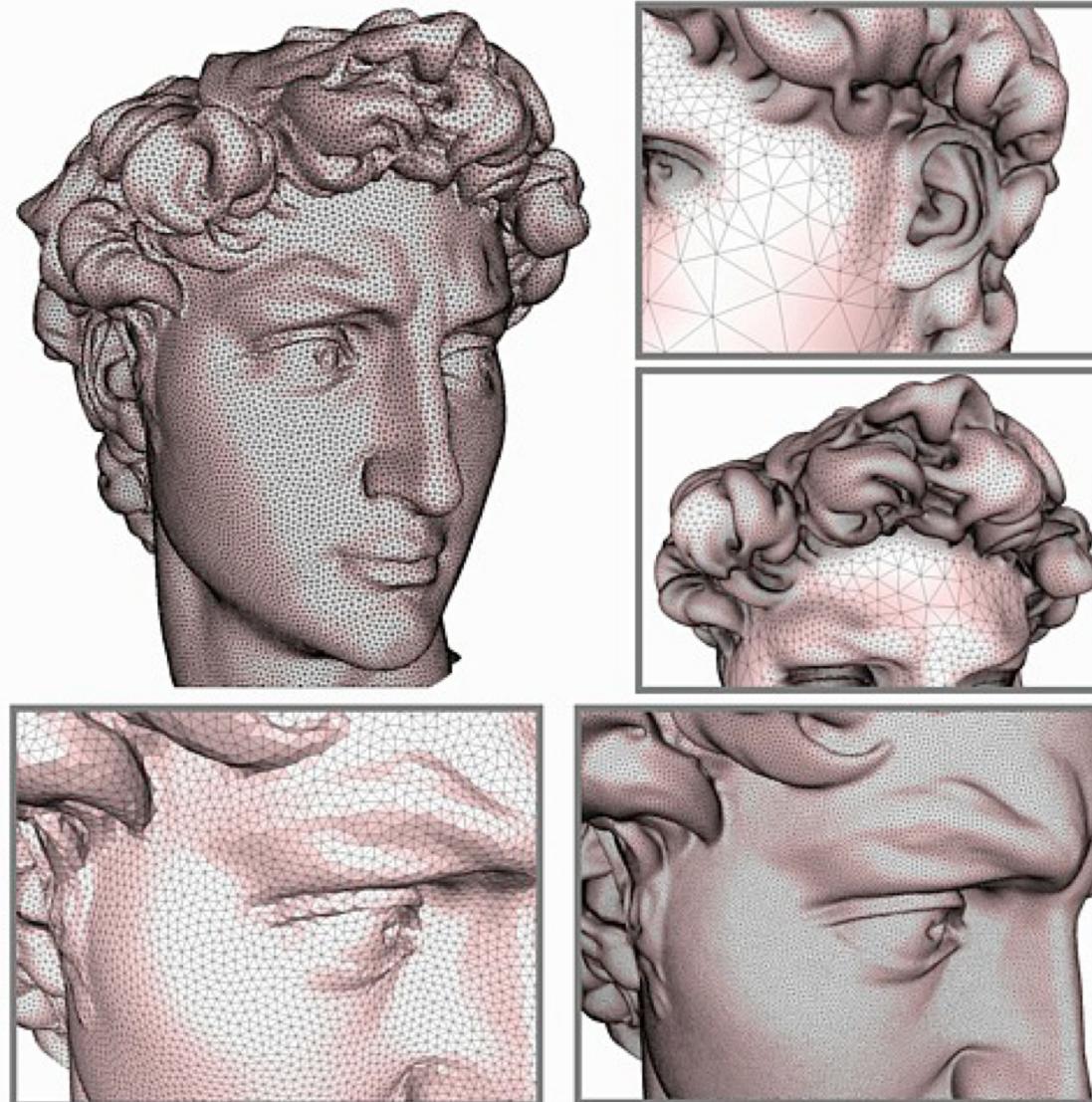
Quelques propriétés des maillages

**Représentation par
Cartes Combinatoires Généralisées**

Fred Boudon

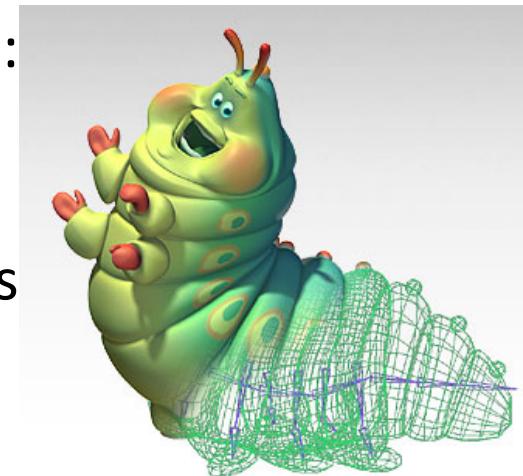
Inspiré des présentations de O. Terraz, G. Damiand et G. Cerutti.

Les maillages



Les maillages

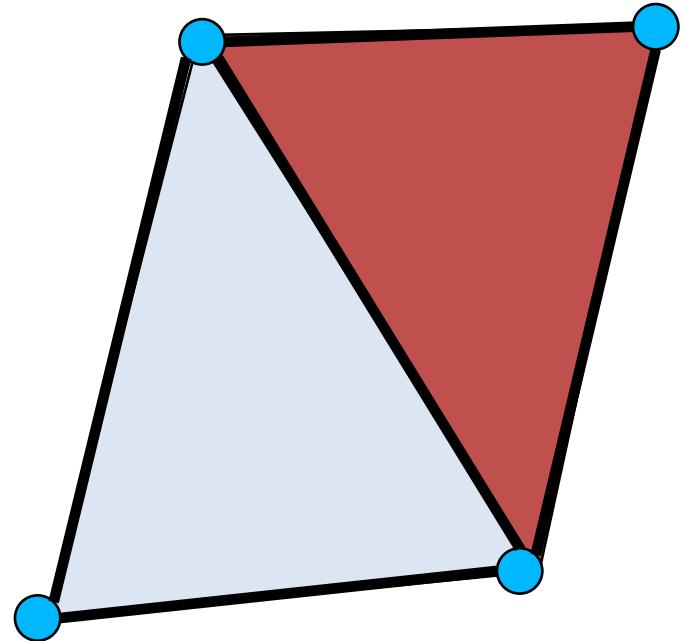
- B-Rep formant un complexe linéaire par morceaux : surfaces représentées par des polygones.
- Triangle souvent utilisé (simplexe pour une face) mais quadrilatères fréquents.
- La continuité globale est C^0 (discontinuité de normales au niveau des arêtes) .
- Information sur la géométrie et la topologie de la surface
- Structure standard pour afficher des scènes complexes en 3D
- Leur visualisation et leur manipulation est optimisée par la grande majorité des cartes graphiques actuelles.



Les maillages

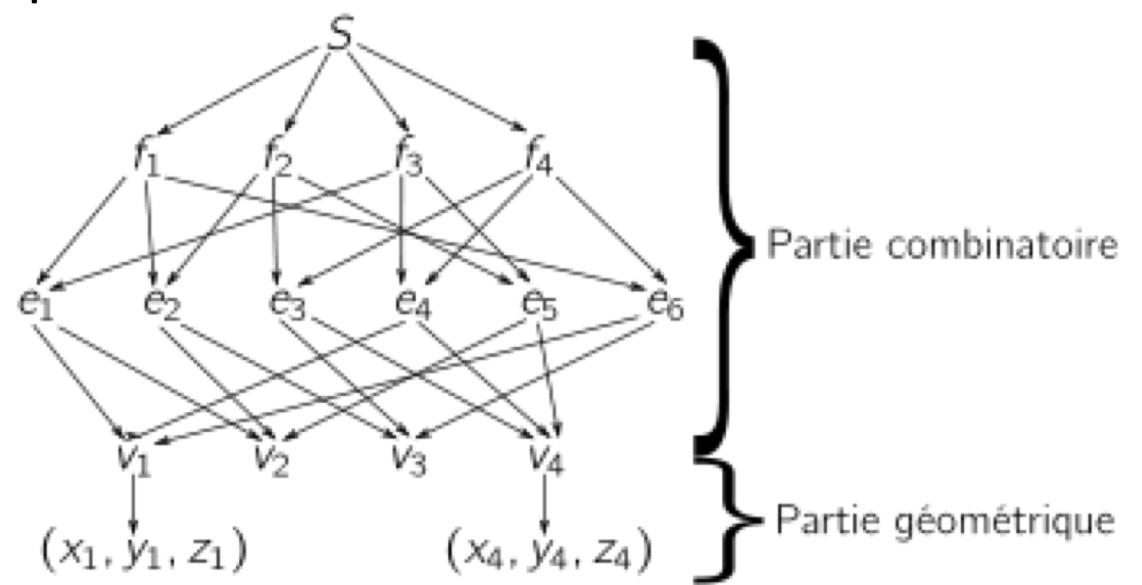
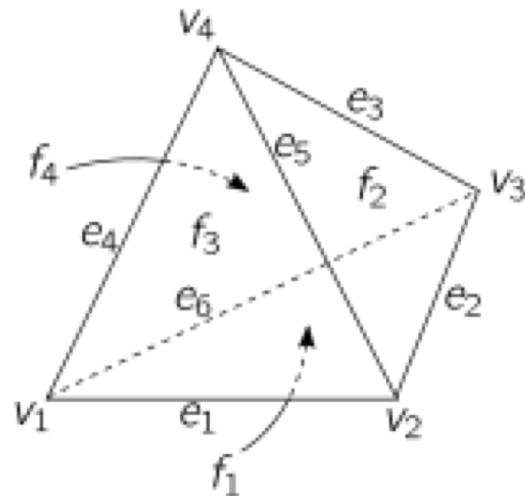
Un maillage polygonal consiste en 3 types d'éléments :

- Les sommets (x,y,z)
- Les arêtes
 - Définies par 2 sommets
- Les faces
 - Définies par n sommets
 - Ou définies par n arêtes
- Les cellules ...
 - Chaque éléments peut posséder différentes caractéristiques (couleur, normale, coordonnées de texture, etc.)
 - On peut être amené à considérer plus que des objets de dimension 2 si on considère des volumes, des objets dans le temps ou à plusieurs résolutions ...



Les maillages

- Un maillage est décrit par sa *topologie* (connectivité) et sa *géométrie*
- La topologie d'un maillage décrit ses *relations d'incidences et d'adjacence* entre ses éléments (sommets adjacent, arête incident d'une face)
- La géométrie spécifie la *position* ou d'autres *caractéristiques géométriques* pour chaque élément.



Incidence

Deux éléments d'un maillages sont incidents si l'un est la frontière de l'autre.

Peuvent être incidents :

- Un sommet et une arête
- Une arête et un triangle
- Un triangle et une volume

Adjacence

Deux éléments de même dimension N d'un maillages sont adjacent si ils partagent un élément de dimension $N - 1$ ou $N + 1$.

Peuvent être adjacents :

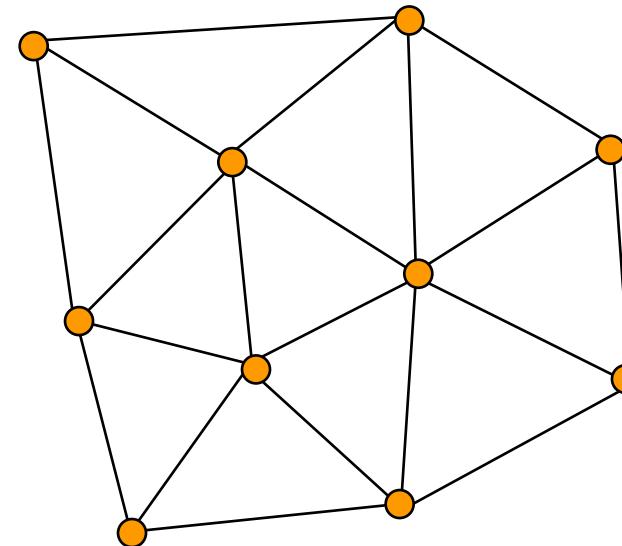
- Deux sommets
- Deux arêtes
- Deux faces
- ...

Quelques propriétés topologiques des maillages

- Dualité
- Fermeture
- 2-manifold
- Orientabilité
- Formule d'Euler

Dualité

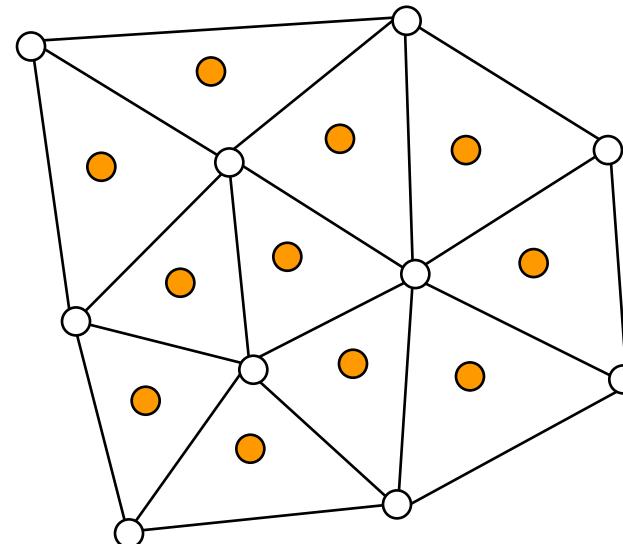
Chaque entité du maillage primal de dimension k est remplacé par une entité de dimension $(2-k)$ dans le maillage dual:



Dualité

Chaque entité du maillage primal de dimension k est remplacé par une entité de dimension $(2-k)$ dans le maillage dual:

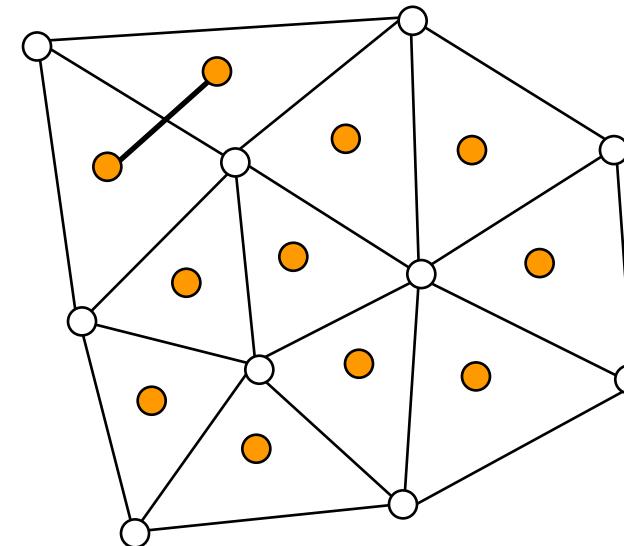
- Chaque face remplacée par un sommet avec pour coordonnées le barycentre de la face



Dualité

Chaque entité du maillage primal de dimension k est remplacé par une entité de dimension $(2-k)$ dans le maillage dual:

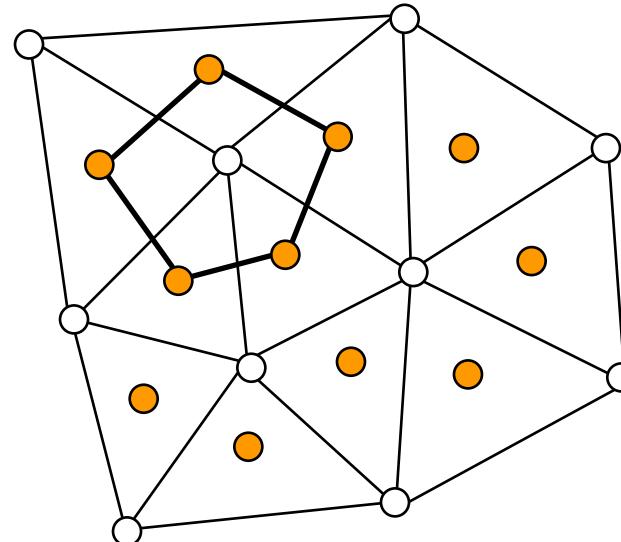
- Chaque face remplacée par un sommet avec pour coordonnées le barycentre de la face
- L'arête du dual relie deux sommets si les faces d'origines sont voisines



Dualité

Chaque entité du maillage primal de dimension k est remplacé par une entité de dimension $(2-k)$ dans le maillage dual:

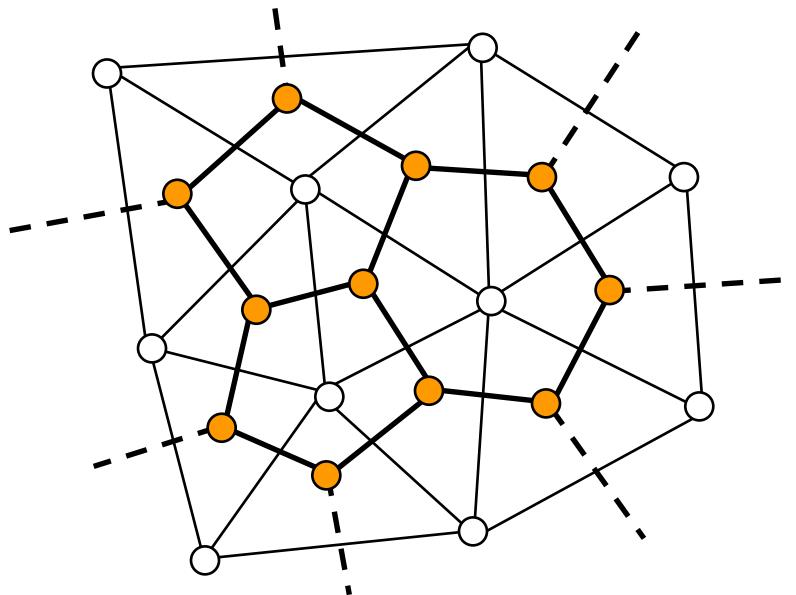
- Chaque face remplacée par un sommet avec pour coordonnées le barycentre de la face
- L'arête du dual relie deux sommets si les faces d'origines sont voisines
- Les points sont remplacés par les faces résultantes



Dualité

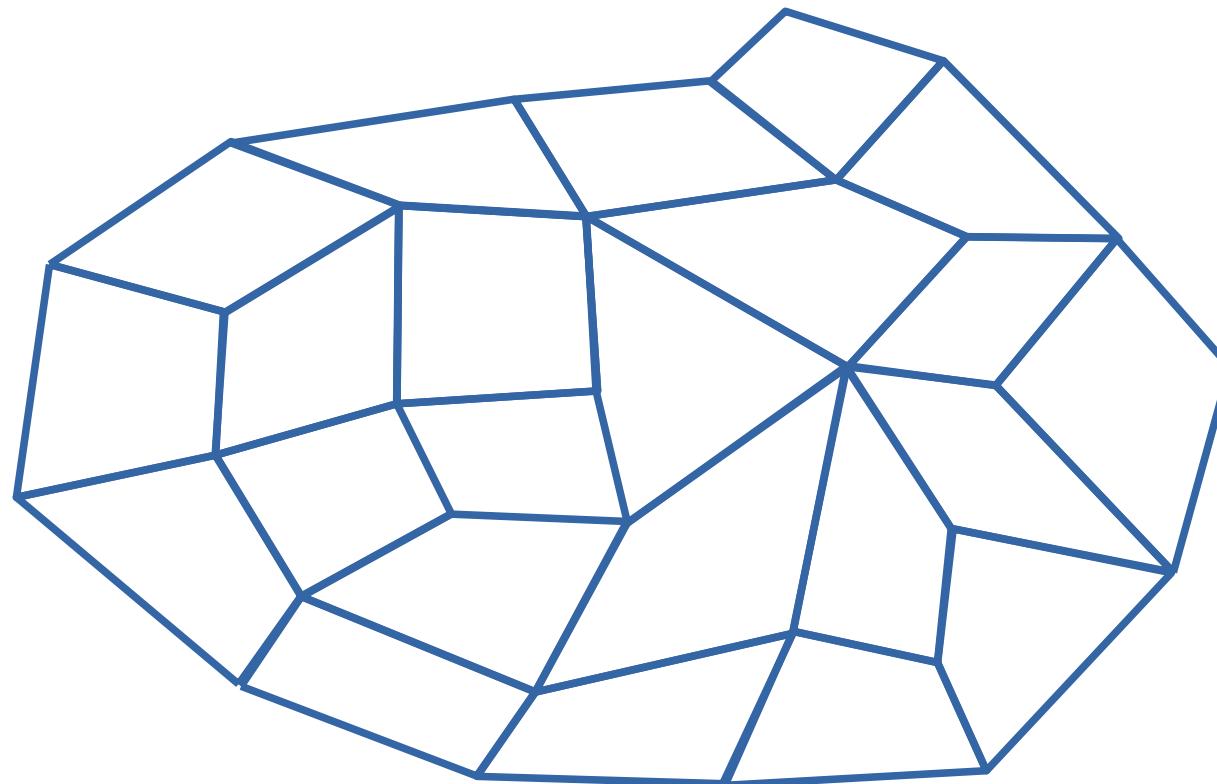
Chaque entité du maillage primal de dimension k est remplacé par une entité de dimension $(2-k)$ dans le maillage dual:

- Chaque face remplacée par un sommet avec pour coordonnées le barycentre de la face
- L'arête du dual relie deux sommets si les faces d'origines sont voisines
- Les points sont remplacés par les faces résultantes



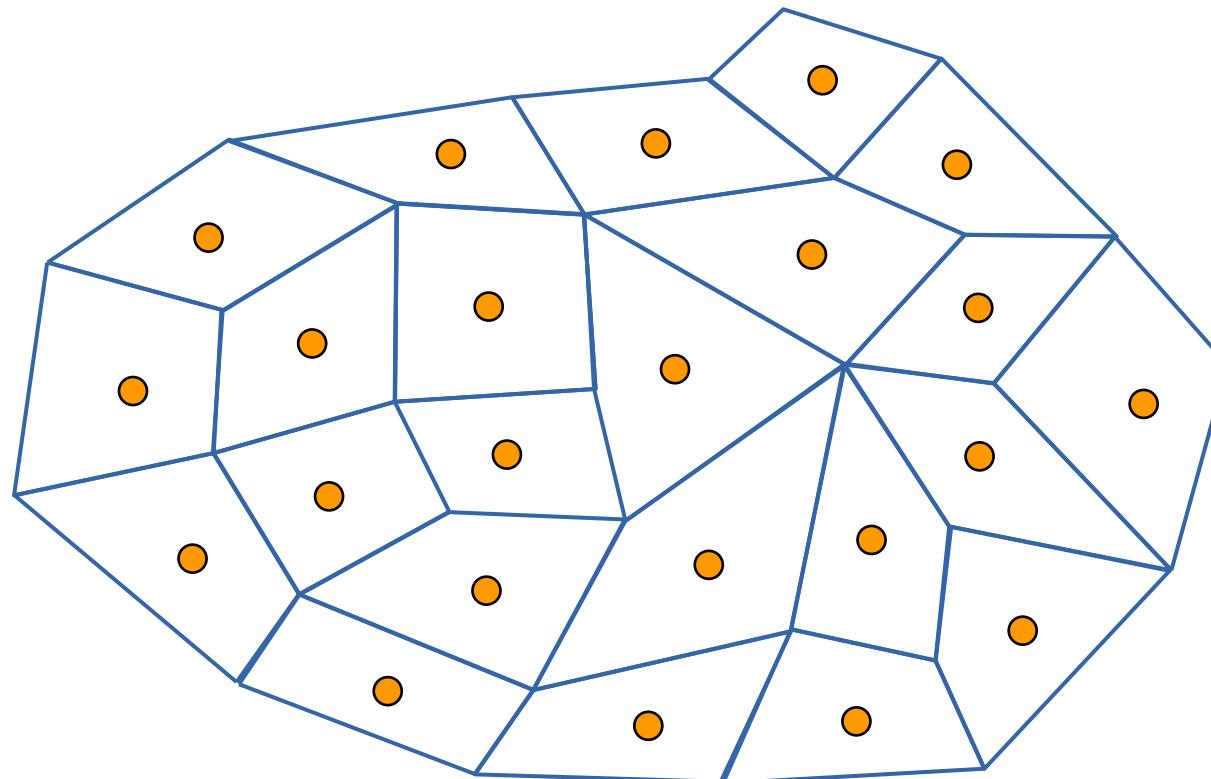
Exercice sur le dual

Tracez le dual du maillage suivant :



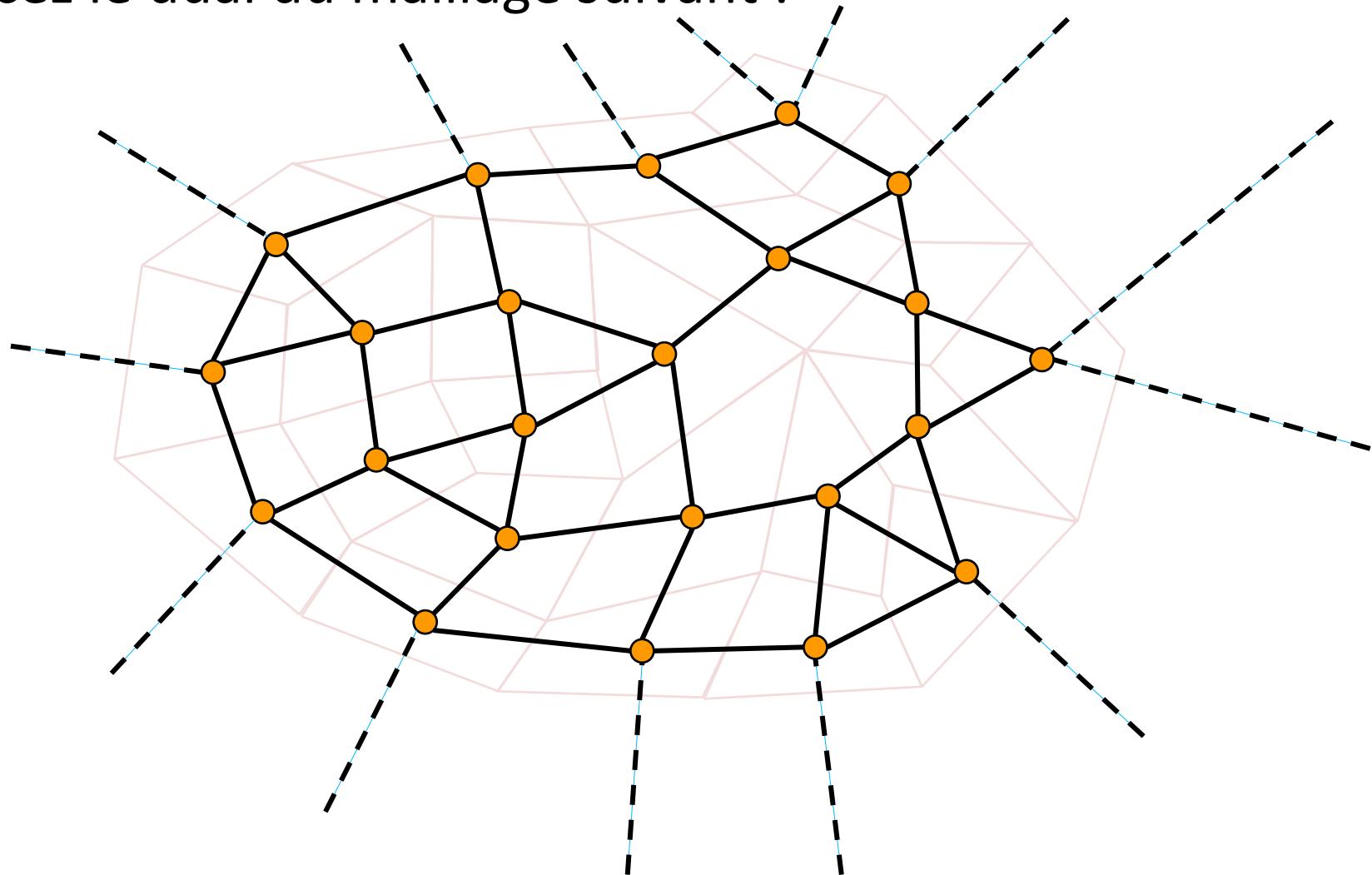
Exercice sur le dual

Tracez le dual du maillage suivant :



Exercice sur le dual

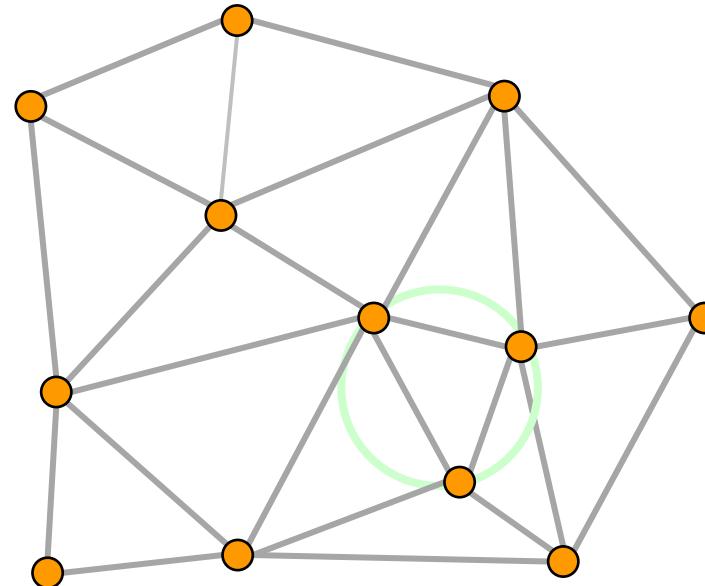
Tracez le dual du maillage suivant :



- Que remarquez vous au niveau des faces ?
- Que dire sur le dual du dual ?

Application : Diagramme de Voronoï

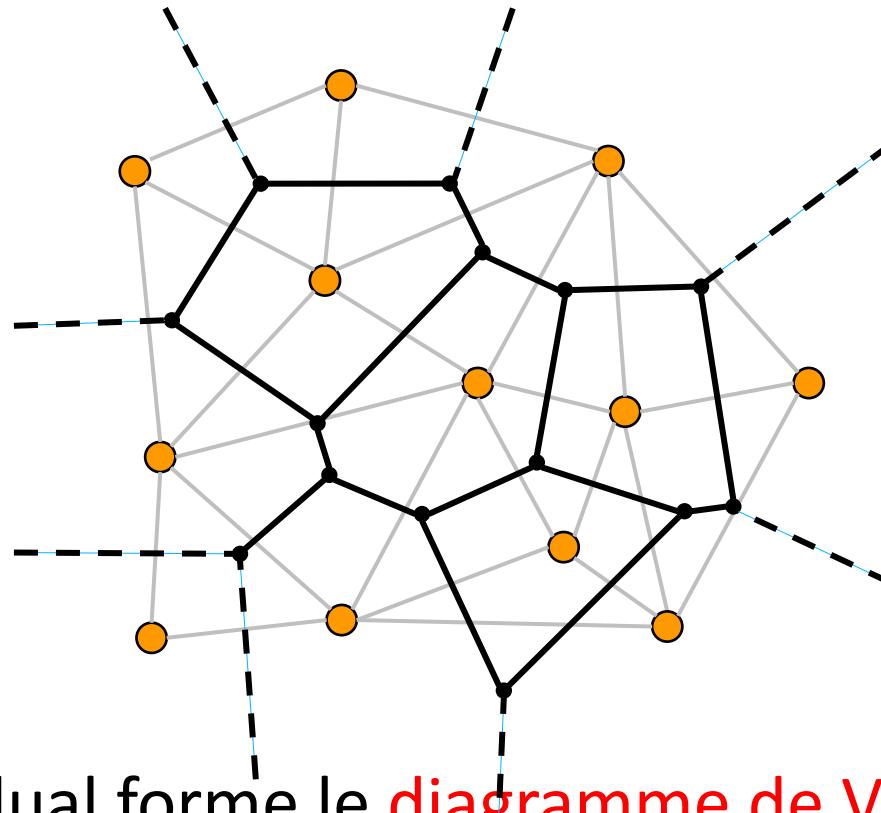
A partir d'un ensemble de points on peut construire (facilement) leur **triangulation de Delaunay**



- Maillage triangulaire (unique) tel que aucun sommet ne soit à l'intérieur du cercle circonscrit à une face

Application : Diagramme de Voronoi

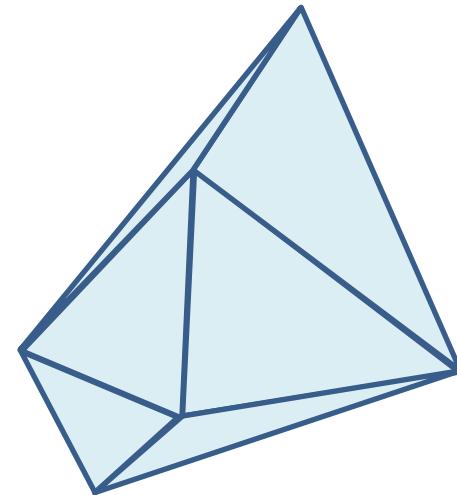
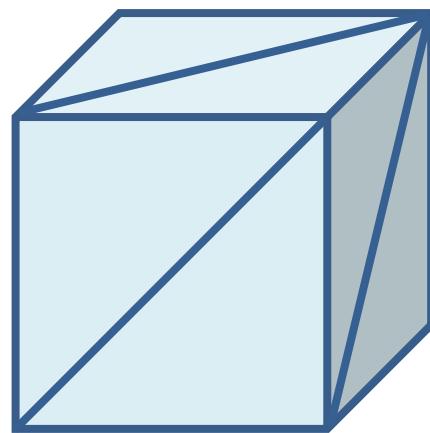
A partir d'un ensemble de points on peut construire (facilement) leur **triangulation de Delaunay**



- Le maillage dual forme le **diagramme de Voronoi** des points : partition de l'espace où chaque face (duale) représente l'ensemble des plus proches voisins du point (primal)

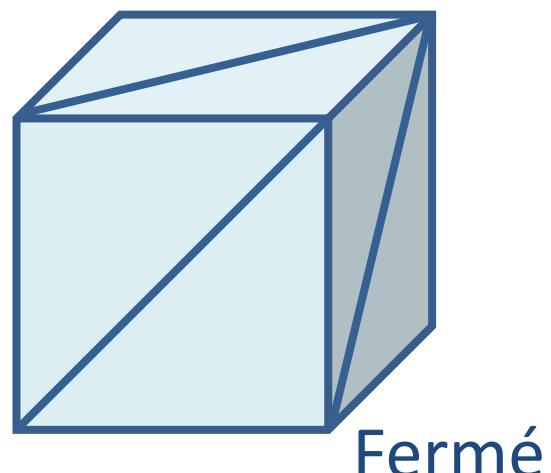
Fermeture

- Un maillage est dit fermé s'il n'a pas de bord.
 - Toutes les arêtes du maillage sont partagées par 2 triangles

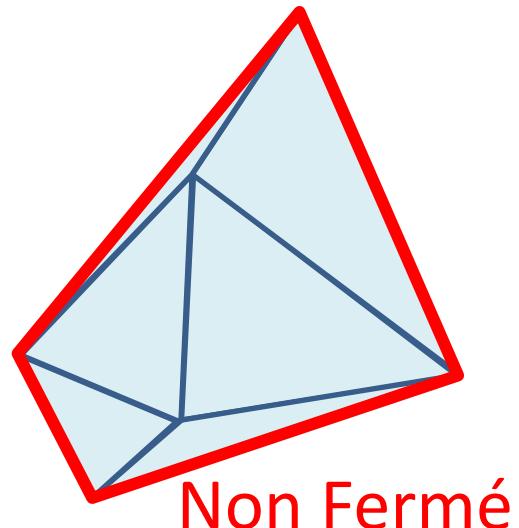


Fermeture

- Un maillage est dit fermé s'il n'a pas de bord.
 - Toutes les arêtes du maillage sont partagées par 2 triangles



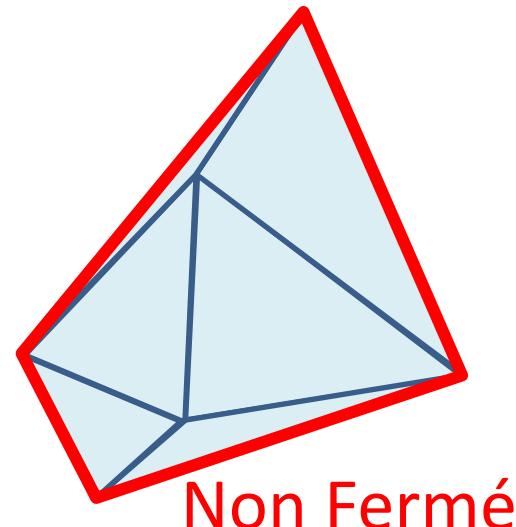
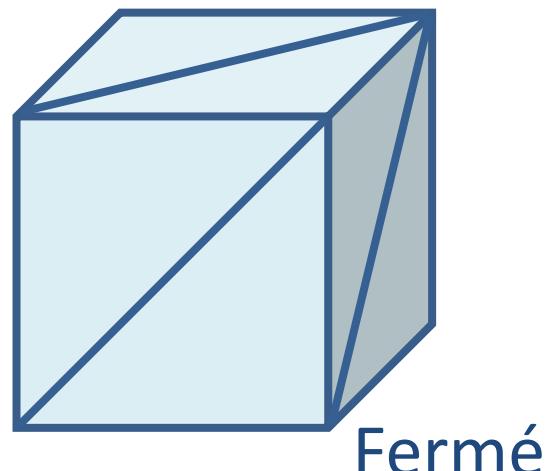
Fermé



Non Fermé

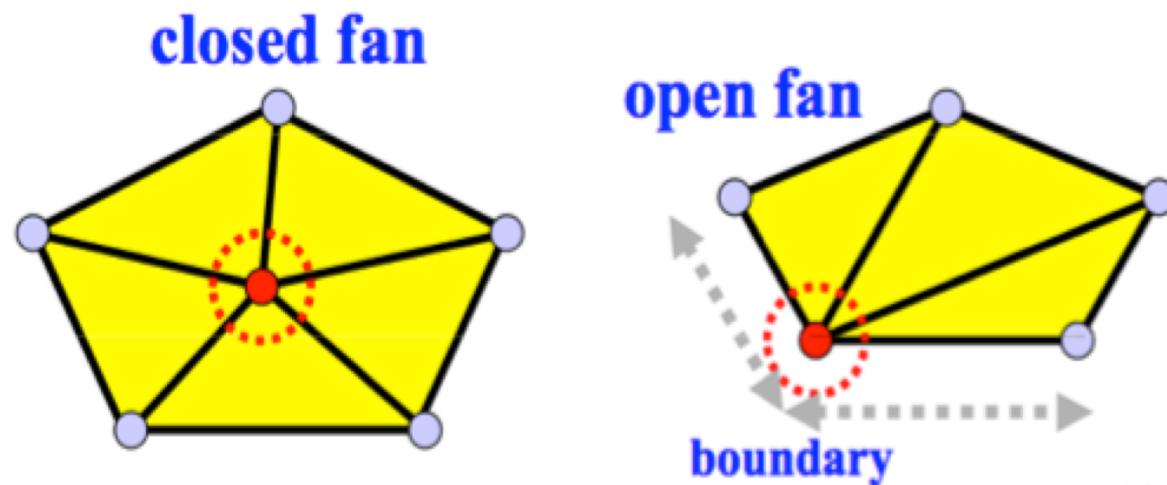
Fermeture

- Un maillage est dit fermé s'il n'a pas de bord.
 - Toutes les arêtes du maillage sont partagées par 2 triangles
- Pour un maillage ouvert, les arêtes incidentes à seulement une face forment la frontière.



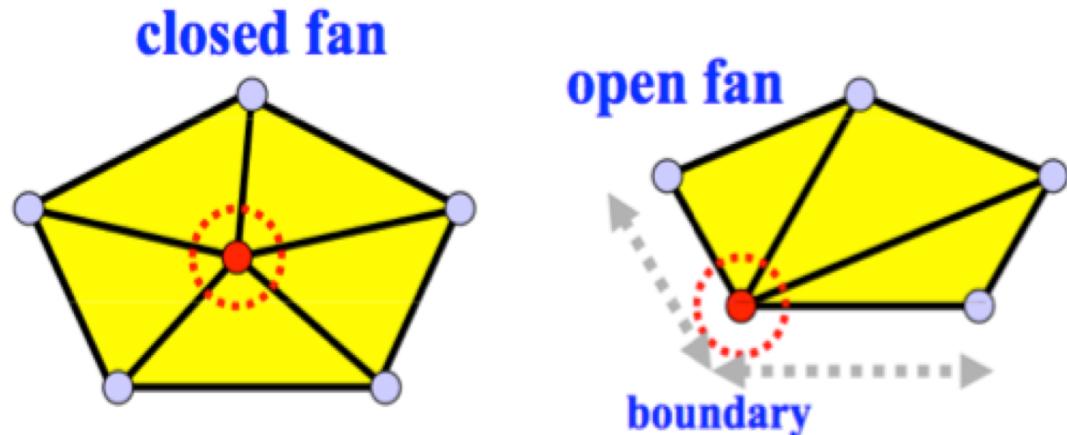
Fermeture

- Pour un maillage fermé, les polygones et les arêtes autour d'un sommet forment une orbite.



Manifold - Définition

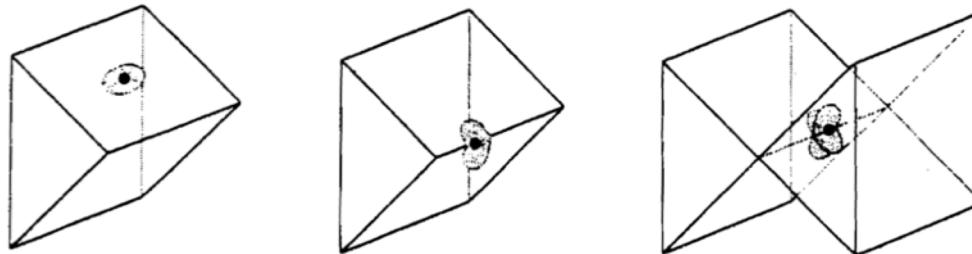
- Un maillage est **manifold** si
 - Chaque arête est incidente à seulement 1 ou 2 faces
 - Chaque sommet n'est incident qu'à 0 ou 2 arêtes du bord.



- De façon informelle, si un maillage fermé et 2-manifold (ou manifold) alors l'objet qu'il représente est « usinable ».
- C'est un critère de régularité topologique (et non géométrique)

Manifold – Définition alternative

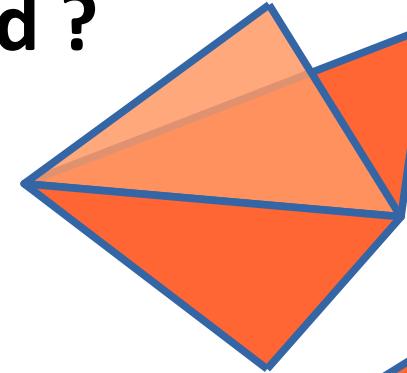
- Un maillage est 2-manifold si:
 - En chaque point du maillage, il existe une sphère de rayon $r > 0$ telle que l'intersection entre la sphère et le maillage est *homothétique* à un **disque**



- Pour un maillage 2-manifold ouvert, à la bordure, l'intersection entre la sphère et le maillage doit être topologiquement équivalente à un **demi-disque**.

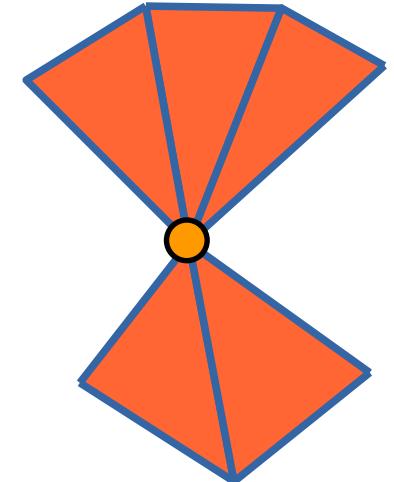
Exercice : manifold / non-manifold ?

Sur des maillages triangulaires:



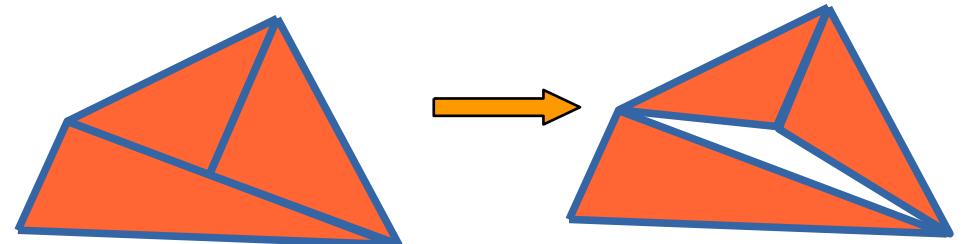
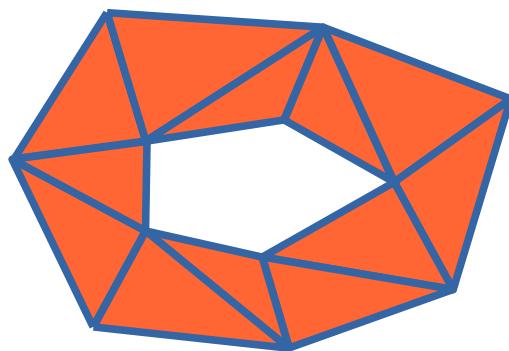
Une arête partagée par plus de 2 triangles ?

Un sommet partagé par deux ensembles de facettes non connectés ?



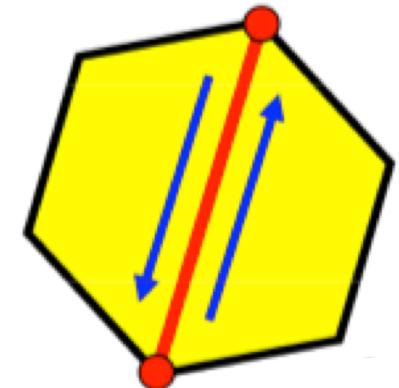
Une jonction en T ? Problème de Crack ?

Un trou dans le maillage ?



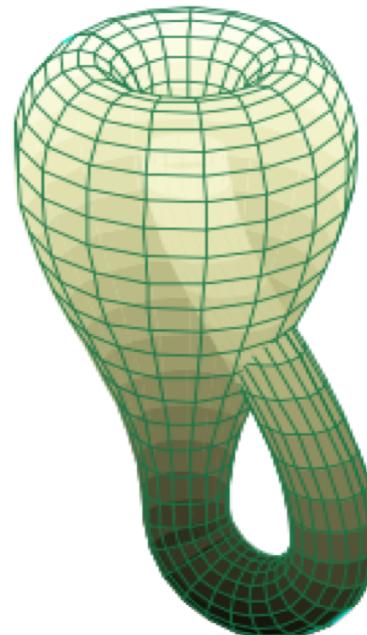
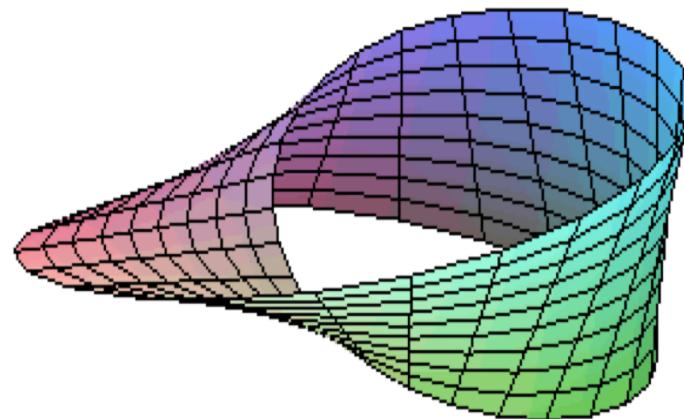
Orientation des faces

- L'orientation d'une face est donnée par l'ordre cyclique de ces sommets incidents
- L'orientation de deux faces adjacentes est compatible si les 2 sommets de leurs arêtes communes sont dans un ordre opposé
- Un maillage manifold est orientable si chaque paires de faces adjacentes ont des orientations compatibles
- Équivalent au sens de la normale
- Utilisée pour définir l'intérieur et l'extérieur d'une surface



Manifolds non orientables

- Tous les maillages manifold ne sont pas orientables. Les plus connus sont le ruban de Möbius et la bouteille de Klein.
- Le ruban de Möbius n'a qu'un coté. La bouteille de Klein n'a pas d'intérieur et d'extérieur.



Formule d'Euler-Poincaré (1752)

Correspondance entre le nombre de composant de chaque entité du maillage
(sommets, arêtes, faces)

$$S - A + F = X = 2(1-g)$$

S : nombre de sommets,

A : nombre d'arêtes

F : nombre de faces.

g est le genre (génus) de l'objet = le nombre de trous (poignées) dans un objet fermé



genre 0



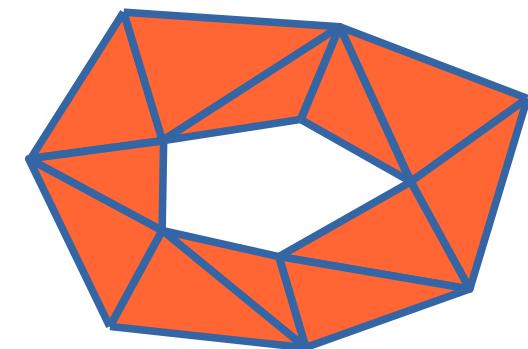
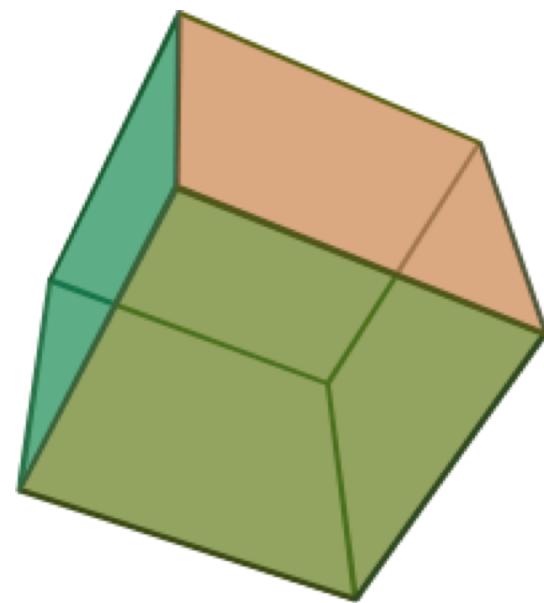
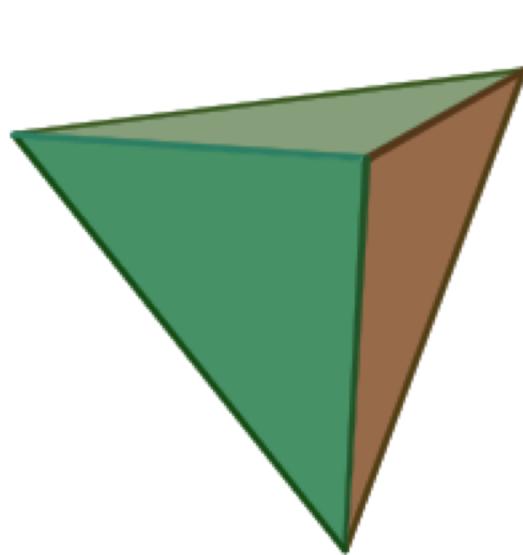
genre 1



genre 2

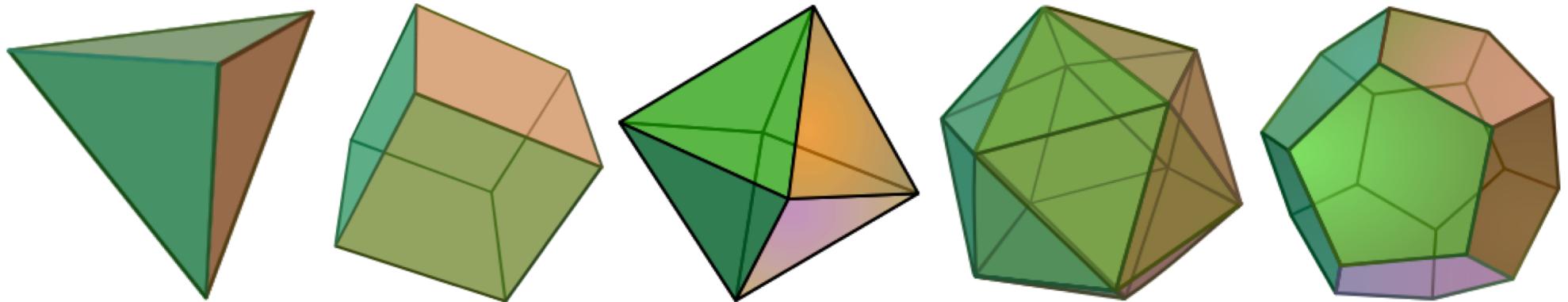
Formule d'Euler-Poincaré (1752)

$$S - A + F = X = 2(1-g)$$



Formule d'Euler-Poincaré (1752)

Solide platoniciens



Tétraèdre : $4 - 6 + 4 = 2$

Hexaèdre (cube) : $8 - 12 + 6 = 2$

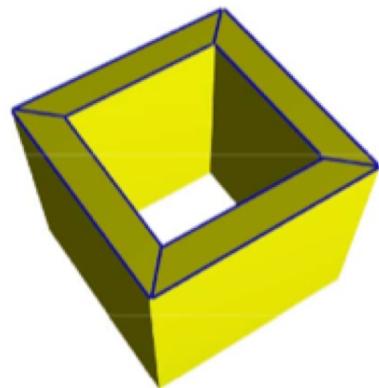
Octaèdre : $6 - 12 + 8 = 2$

Dodécaèdre : $20 - 30 + 12 = 2$

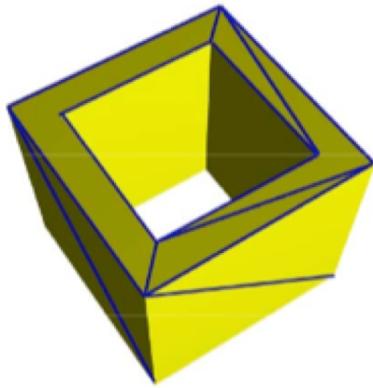
Icosaèdre : $12 - 30 + 20 = 2$

Formule d'Euler-Poincaré (1752)

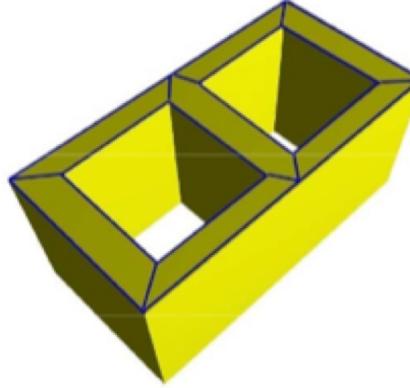
- Indépendant de la tessellation



$$\begin{aligned}V &= 16, E = 32, F = 16 \\ \chi(\mathbf{M}) &= V - E + F = 0\end{aligned}$$

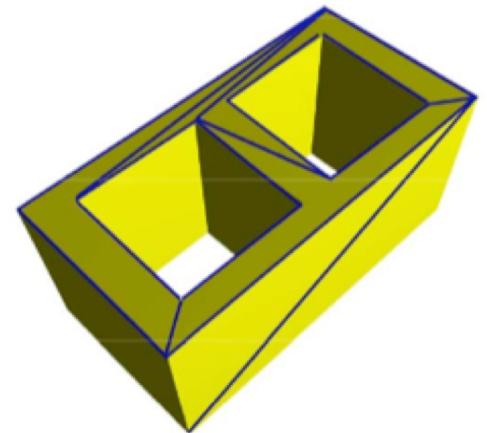


$$\begin{aligned}V &= 16, E = 36, F = 20 \\ \chi(\mathbf{M}) &= V - E + F = 0\end{aligned}$$



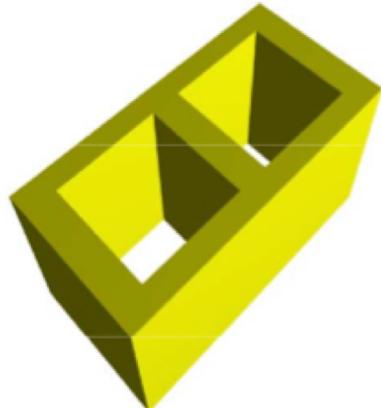
$$\begin{aligned}V &= 28, E = 56, F = 26 \\ \chi(\mathbf{M}) &= V - E + F = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= 24, E = 48, F = 22 \\ \chi(\mathbf{M}) &= V - E + F = -2\end{aligned}$$

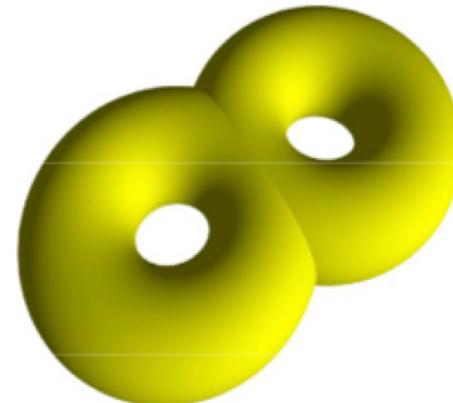


Homéomorphisme

- Deux maillage manifold A et B sont homéomorphe si leur surfaces peuvent être transformé l'une en l'autre en les déformant.
- Deux maillages manifold fermé sont homéomorphe s'il ont la même caractéristique Euler-Poincaré



is homeomorphic to



Représentation des maillages pour leur manipulation

- Arêtes ailées
- Demi arêtes
- Cartes combinatoires
- Cartes généralisées

Représentation de subdivisions volumiques

Très nombreuses structures pour la représentation de subdivisions topologiques:

- **Surfaces orientables sans bord** (dimension 2)
 - Graphe d'incidence des faces [AFF85]
 - *Structure d'arête ailée* [Baum74]
- **Surfaces, orientables ou non, avec ou sans bords** (dimension 2)
 - Quad-edge [GS85]
 - *Half-edge* [Weil85]
 - *Cartes combinatoires* [Tutt84], [Lien91a]
- **Objets volumiques réguliers, orientables ou non, avec ou sans bords** (dimension 3)
 - Structure facet-edge [DL87]
 - Structure cell_tuple [Bris89]
 - Graphes d'incidence [Sobh89]
- **Objets volumiques complexes (dimension 3)**
 - Structure radial-edge [Weil86]
- Objets de dimension n... [LL90], [CR91]
 - *Cartes combinatoires généralisées* [EL94]

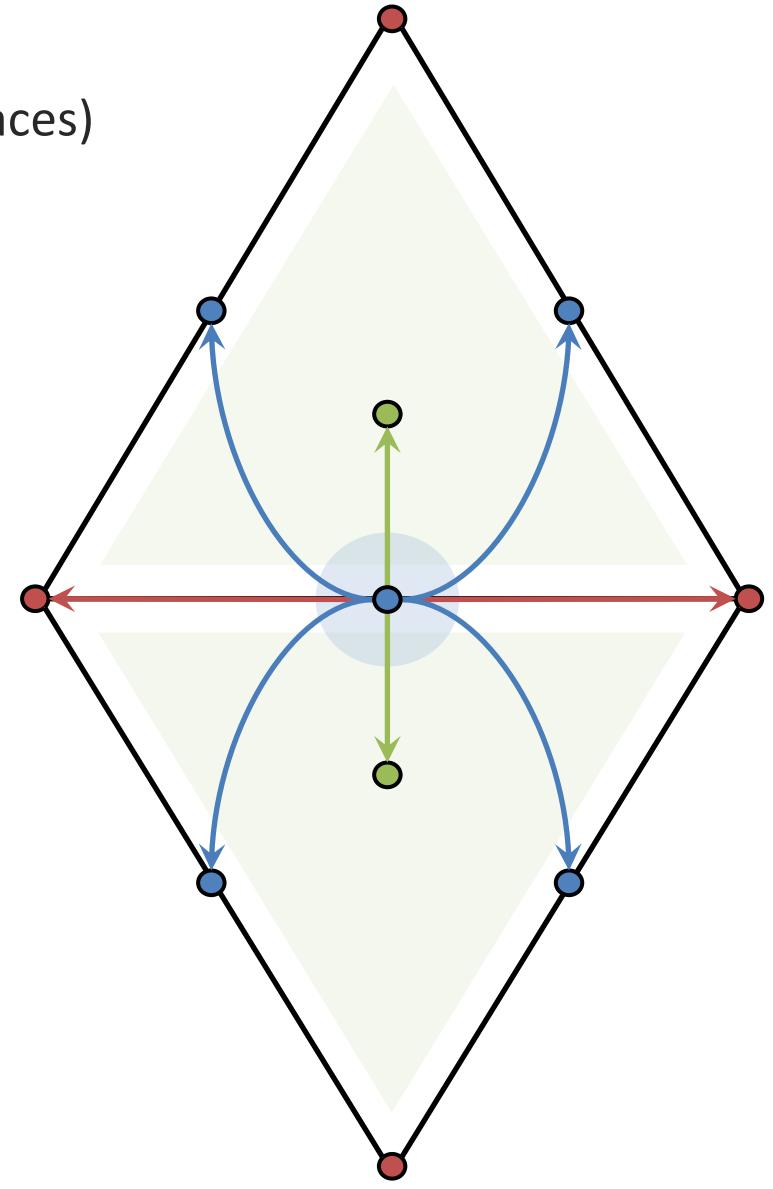
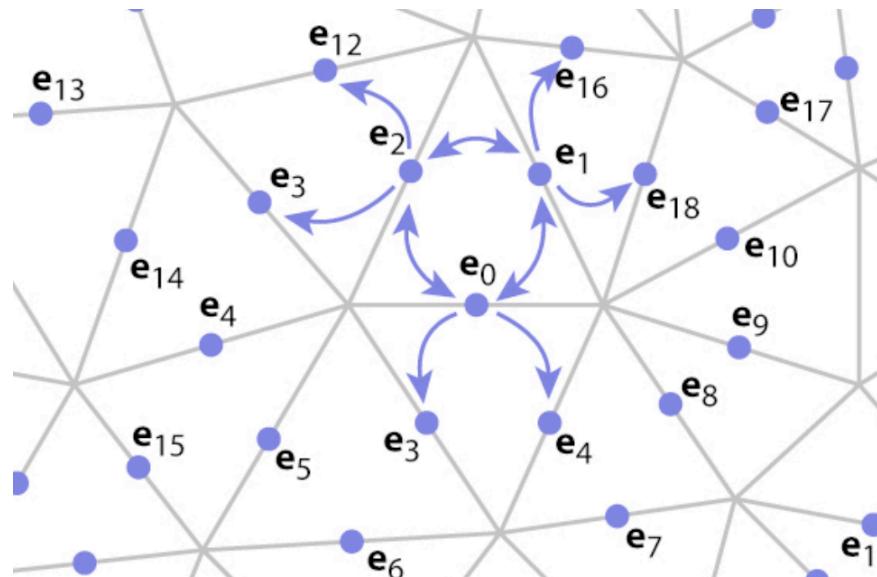
Winged Edge [BAUMGART 74]

Représentation centrée sur les **arêtes** (et non les faces)

Chaque arête pointe sur:

- Sommets avant et arrière
- Faces gauche et droite
- Arêtes avant gauche et droite
- Arêtes arrières gauche et droite

Chaque sommet/face pointe sur **1** arête



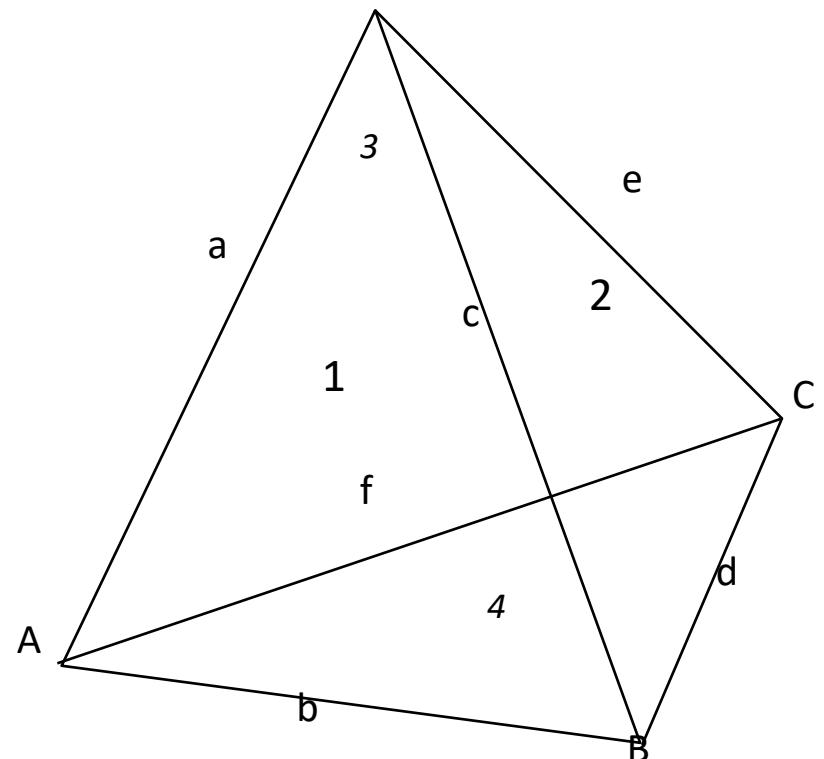
Winged Edge [BAUMGART 74]

Volume de stockage

- Trois tableaux, 8 indices par arête

Vert	Edge
A	a
B	b
C	d
D	e

Face	Edge
1	a
2	c
3	a
4	b



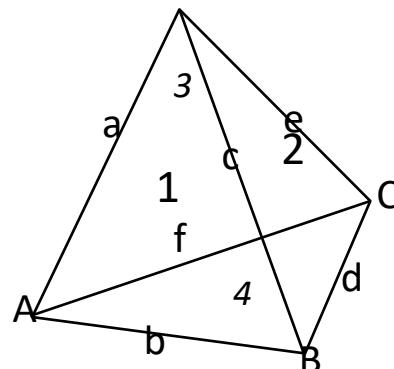
Edge	Vert		Face		Left		Right		
	Nom	Tail	Head	Left	Right	Tail	Head	Tail	Head
a	A	D	B	3	1	e	f	b	c
b	A	B	D	1	4	c	a	f	d
c	B	D	C	1	2	a	b	d	e
d	B	C	C	2	4	e	c	b	f
e	C	D	D	2	3	c	d	f	a
f	A	C	C	4	3	d	b	a	e

Winged Edge [BAUMGART 74]

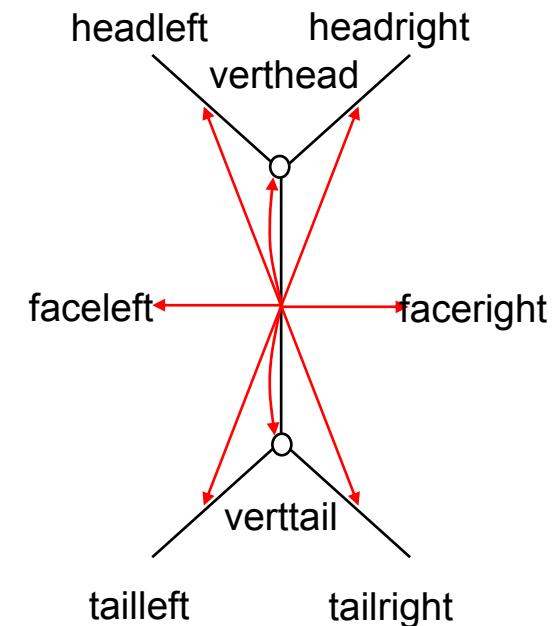
Ambigüité de l'orientation des arêtes

- Problème de la navigation : parcourir les arêtes d'une face?

Face	Edge
1	a
2	c
3	a
4	b



Edge		Vert		Face		Left		Right	
Nom	Tail	Head	Left	Right	Tail	Head	Tail	Head	
a	A	D	3	1	f	e	b	c	
b	A	B	1	4	c	a	f	d	
c	B	D	1	2	a	b	d	e	
d	B	C	2	4	e	c	b	f	
e	C	D	2	3	c	d	f	a	
f	A	C	4	3	d	b	a	e	

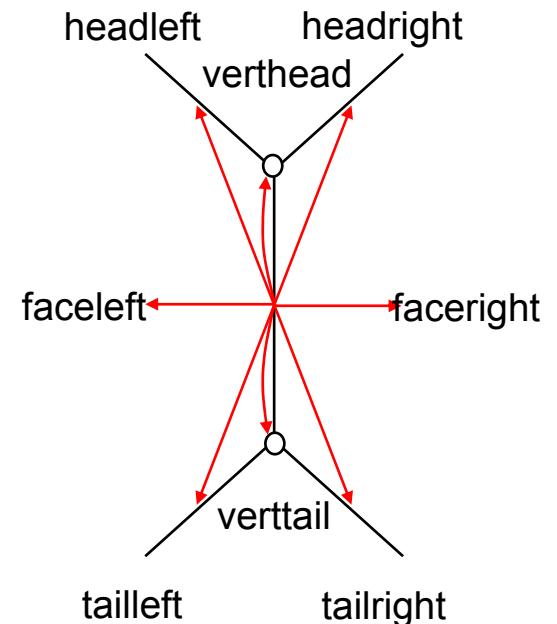


Winged Edge [BAUMGART 74]

Ambigüité de l'orientation des arêtes

- Problème de la navigation : parcourir les arêtes d'une face :

```
def edges_of_a_face(f):
    e0 = f.edge
    e = e0
    while True:
        if e.faceleft == f:
            e = e.headleft
        else :
            e = e.tailright
        if e == e0: break
```



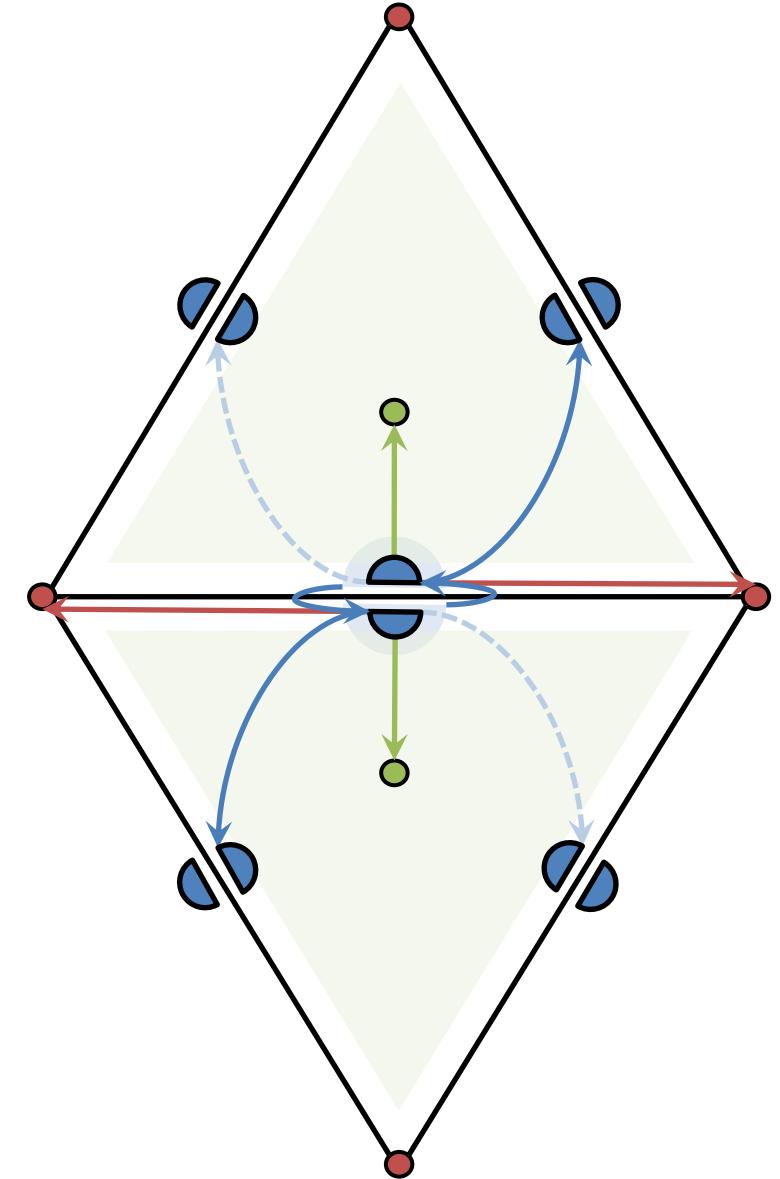
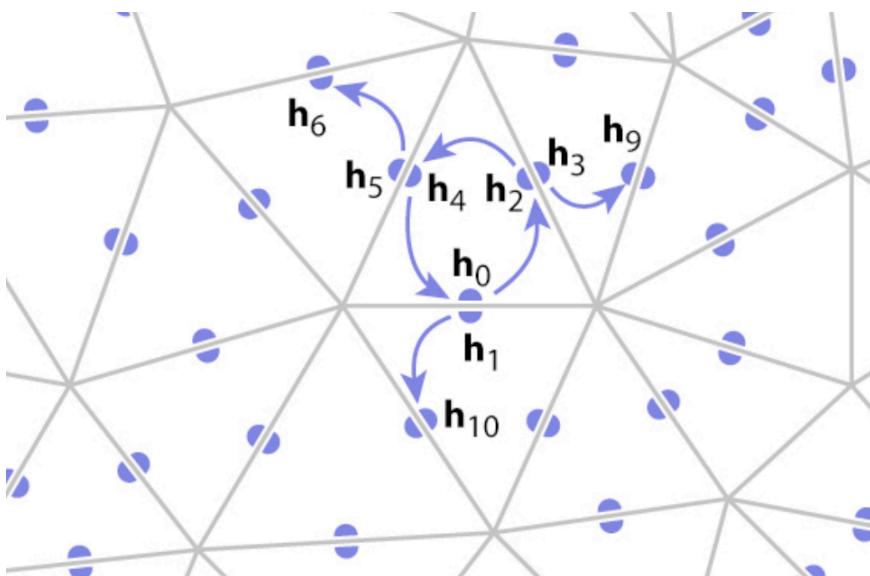
Half Edge [Weiler 85]

Représentation simplifiée et désambiguisee

Chaque demi-arête pointe sur:

- Sommet avant
- Face incidente
- Demi-arête opposée
- Demi-arête avant (même face)
- Demi-arête arrière (optionnel)

Chaque sommet/face pointe sur **1** demi-arête



Half Edge [Weiler 85]

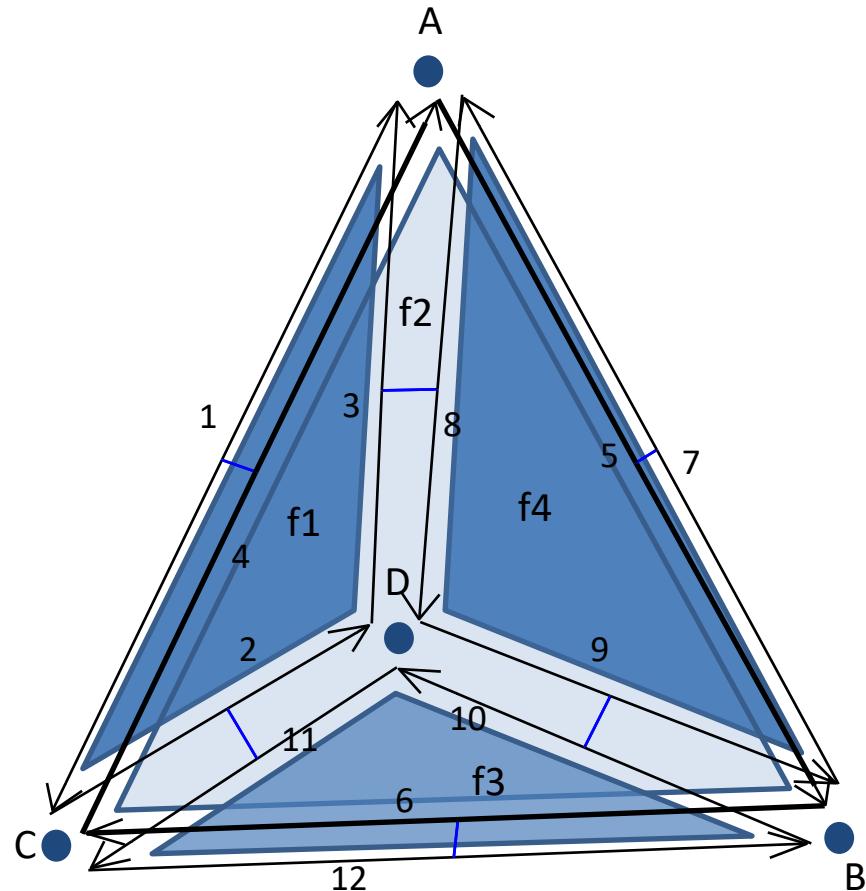
Volume de stockage comparable

- Trois tableaux, 4 indices par demi-arête

Vert	Demi-arêtes
A	8
B	10
C	2
D	9

Face	Demi-arêtes
f1	1
f2	5
f3	10
f4	4

Demi-arêtes	vert	face	opposite	head	(tail)
1	A	f1	4	2	3
2	C	f1	11	3	1
3	D	f1	8	1	2
4	C	f4	1	5	6
5	A	f4	7	6	4
6	B	f4	12	4	5
7	B	f2	5	8	9
8	A	f2	3	9	7
9	D	f2	10	7	8
10	B	f3	9	11	12
11	D	f3	2	12	10
12	C	f3	6	10	11

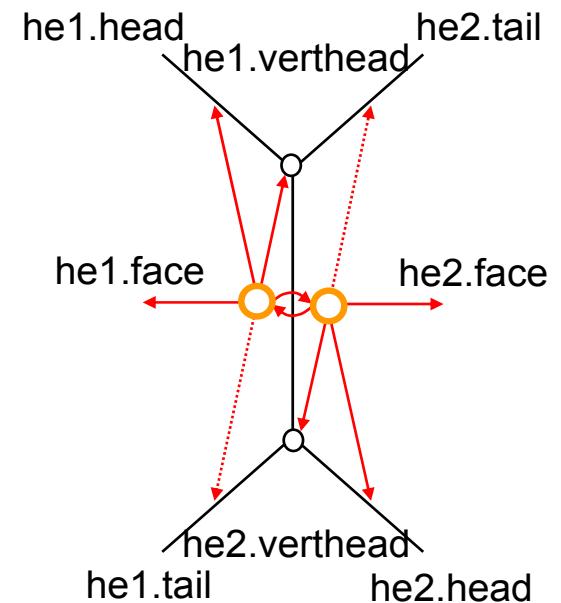


Half Edge [Weiler 85]

Parcours plus simple

- Problème de la navigation : parcourir les arêtes d'une face :

```
def edges_of_a_face(f):
    e0 = f.edge
    e = e0
    while True:
        e = e.head
        if e == e0: break
```

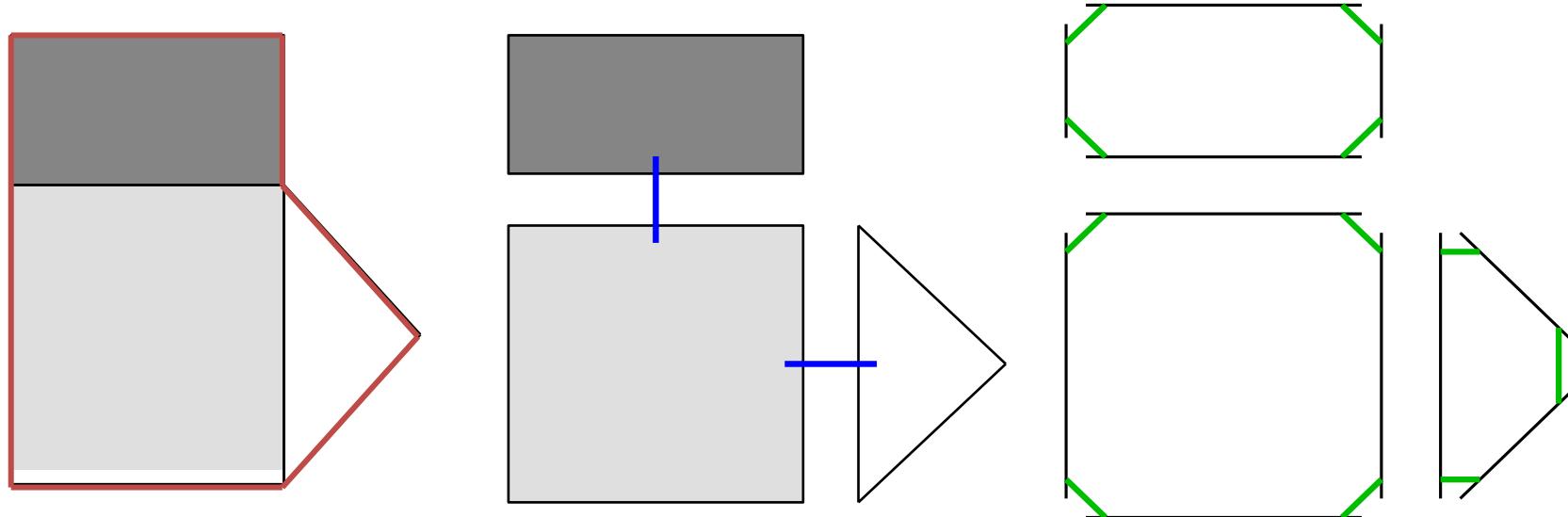


Décomposition en éléments plus simples pour mieux représenter la topologie

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

Décompositions successives des cellules d'un objet

- Exemple en 2D :



Objet 2D

Faces

Arêtes
 \Rightarrow Brins

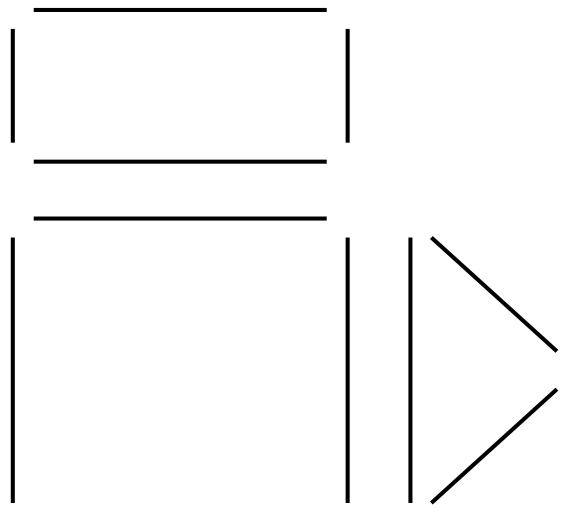
Représenter les cellules de l'objet avec uniquement les brins comme éléments

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

Construction d'une 2-Carte

- Brins

Intuitivement un brin peut être vu et être graphiquement représenté comme une « portion » d'arête :

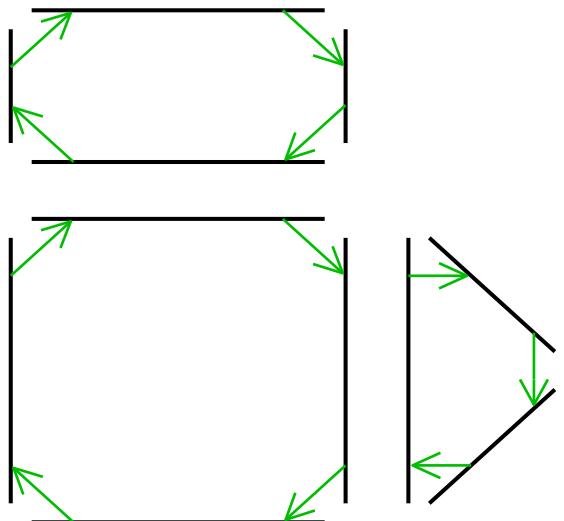


Opérateurs d'assemblage β_1 et β_2

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

Construction d'une 2-Carte

- Report des relations d'adjacence sur les brins



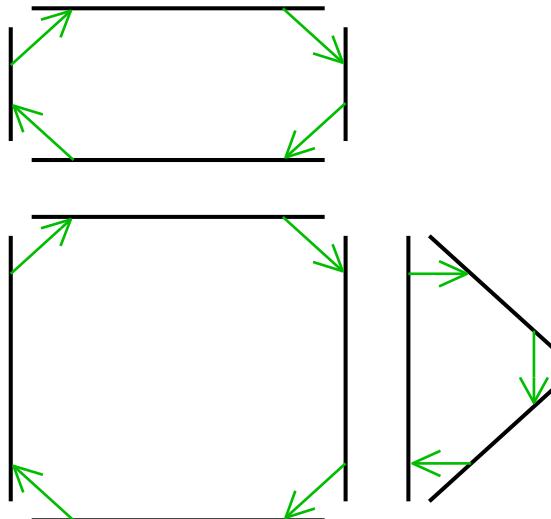
β_1 : brin \rightarrow brin suivant de la même face

β_1 est une permutation (bijection de B vers B) représentant l'orientation de la face.

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

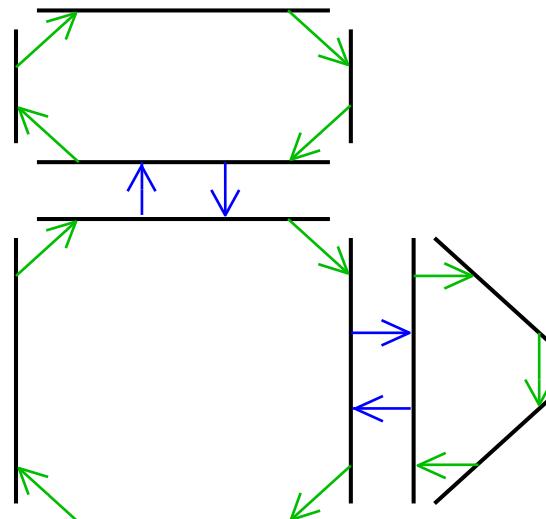
Construction d'une 2-carte

- Report des relations d'adjacence sur les brins



β_1 : brin \rightarrow brin suivant de la même face

β_1 est une permutation (bijection de B vers B) représentant l'orientation de la face.



β_2 : brin \rightarrow brin de l'autre face incidente à la même arête

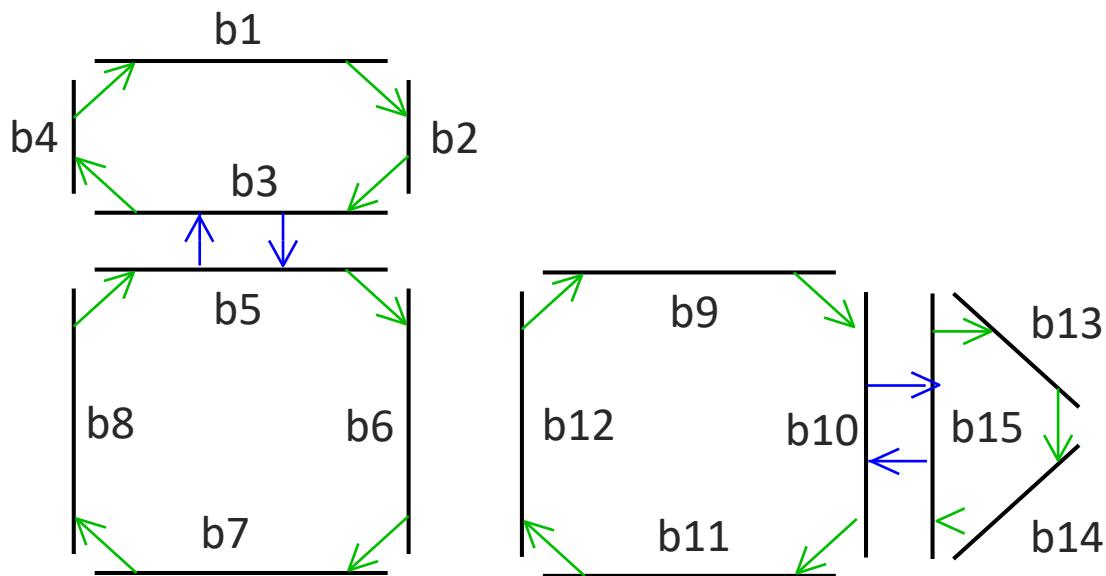
β_2 est une involution (bijection de B vers B qui est sa propre réciproque) représentant le collage de faces.

2-cartes : définition

- Une 2-carte est un triplet (B, β_1, β_2) où :
 - B est un ensemble fini de brins ;
 - β_1 est une permutation (1) ;
 - β_2 est une involution avec ou sans point fixe (2) ;
- (1) $\forall b, \exists p, \beta_1(b)^p = b$ (permutation) ;
- (2) $\forall b \beta_2(\beta_2(b)) = b$ (involution) ; Si $\beta_2(b) = b$ alors b est un point fixe par β_2

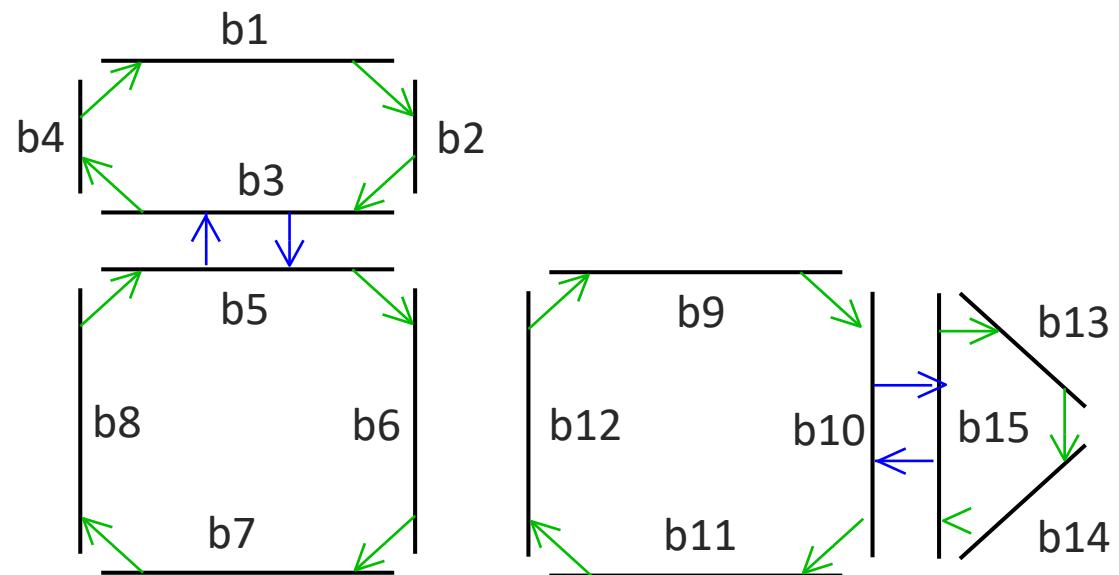
Composante Connexe

- Une *composante connexe* d'une 2-carte (B, β_1, β_2) est l'ensemble des brins que l'on peut obtenir à partir de l'un d'eux par application de β_1 et β_2 dans un ordre quelconque.
- Exemple : Ici la 1-G-carte possède 2 composantes connexes :
 - $\{b_1, b_2, \dots, b_7, b_8\}$ et $\{b_9, b_{10}, \dots, b_{14}, b_{15}\}$



Orbite

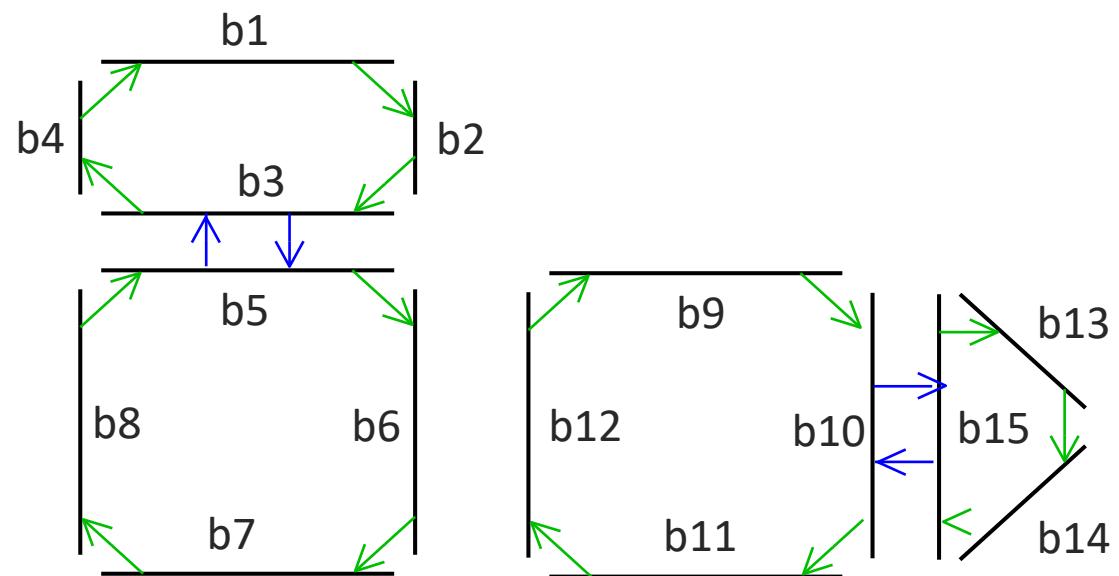
- Plus généralement, on définit *l'orbite* d'un brin b par rapport à un ensemble d'involutions β_1, \dots, β_j comme l'ensemble des brins que l'on peut obtenir à partir de b par application de β_1, \dots, β_j dans un ordre quelconque.
On note cette orbite $\langle\beta_1, \dots, \beta_j\rangle(b)$
- Exemples :
 - $\langle\beta_1, \beta_2\rangle(b_1) = ?$
 - $\langle\beta_1, \beta_2\rangle(b_{12}) = ?$



Orbite

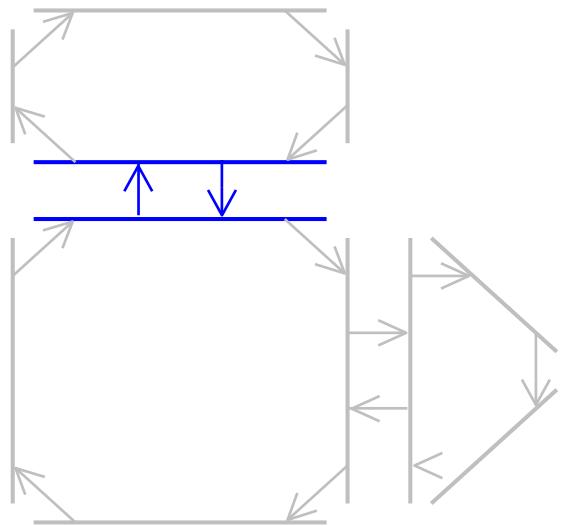
- Plus généralement, on définit *l'orbite* d'un brin b par rapport à un ensemble d'involutions β_1, \dots, β_j comme l'ensemble des brins que l'on peut obtenir à partir de b par application de β_1, \dots, β_j dans un ordre quelconque.
On note cette orbite $\langle \beta_1, \dots, \beta_j \rangle(b)$

- Exemples :
 - $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle(b_1) = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$
 - $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle(b_{12}) = b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}$

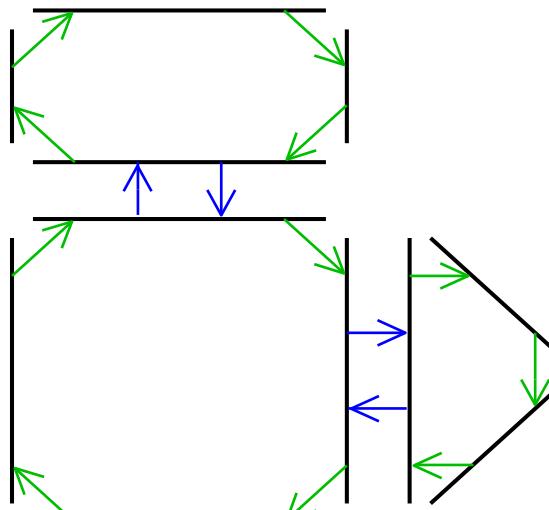


Obtention intuitive d'une carte combinatoire

Les cellules sont des **orbites** de brins



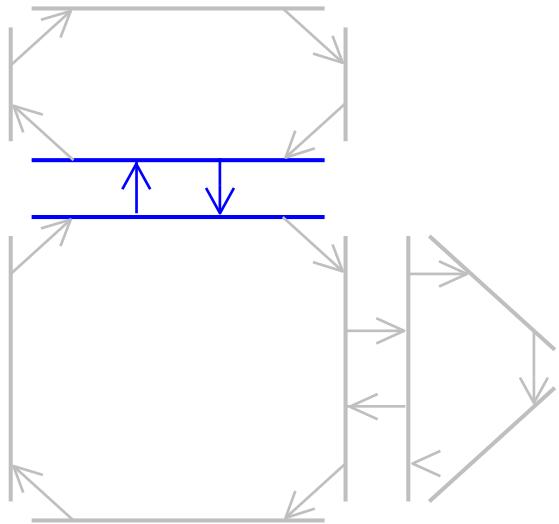
Arêtes (1-cellules) :
orbites d'un brin suivant
 β_2



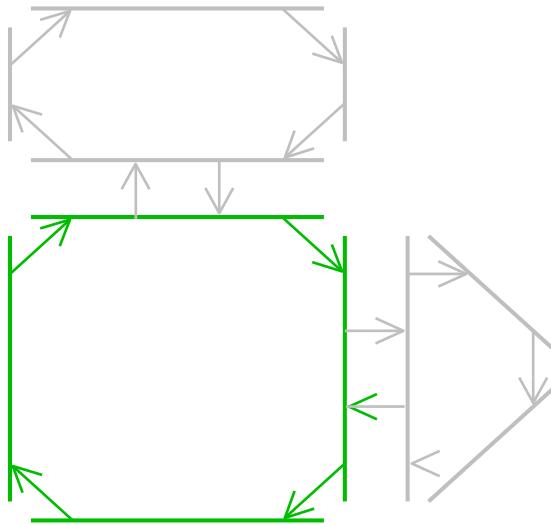
Faces (2-cellules)?

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

Les cellules sont des **orbites** de brins



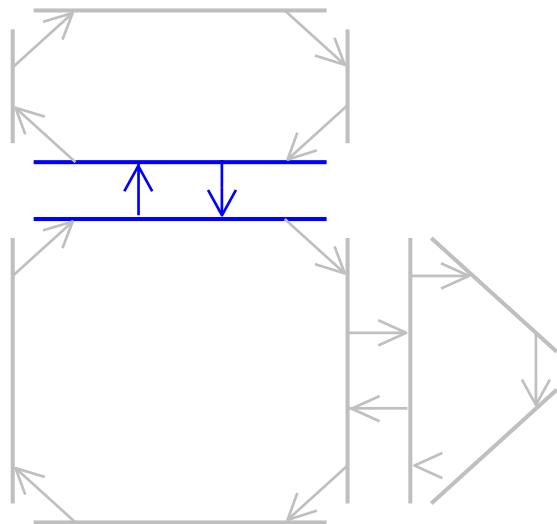
Arêtes (1-cellules) :
orbites d'un brin suivant
 β_2



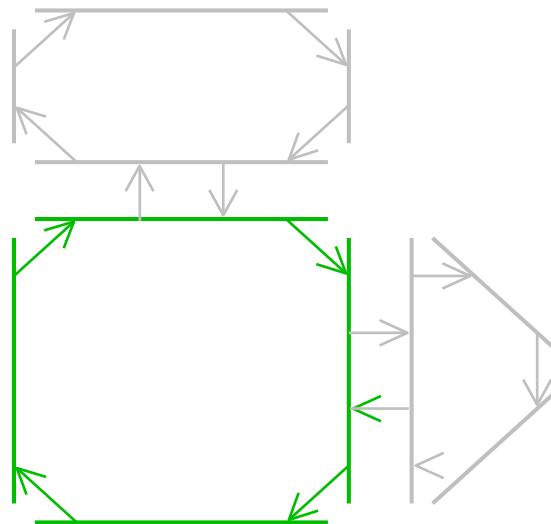
Faces (2-cellules) : orbites
d'un brin suivant β_1

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

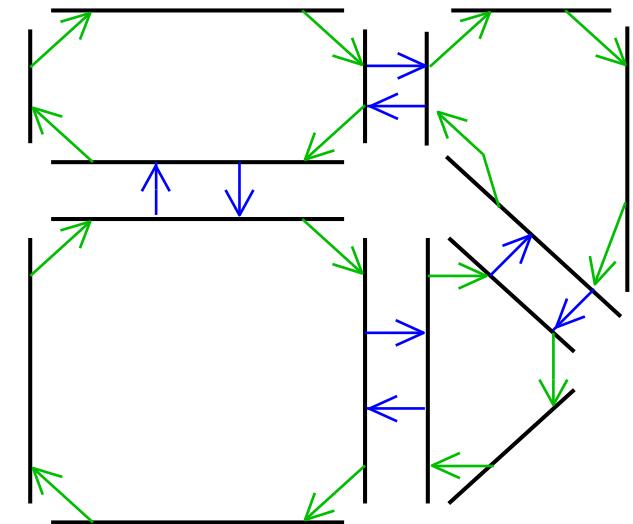
Les cellules sont des **orbites** de brins



Arêtes (1-cellules) :
orbites d'un brin suivant
 β_2



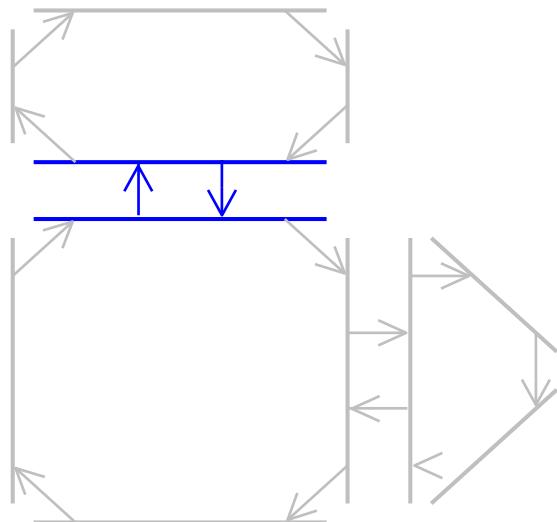
Faces (2-cellules) : orbites
d'un brin suivant β_1



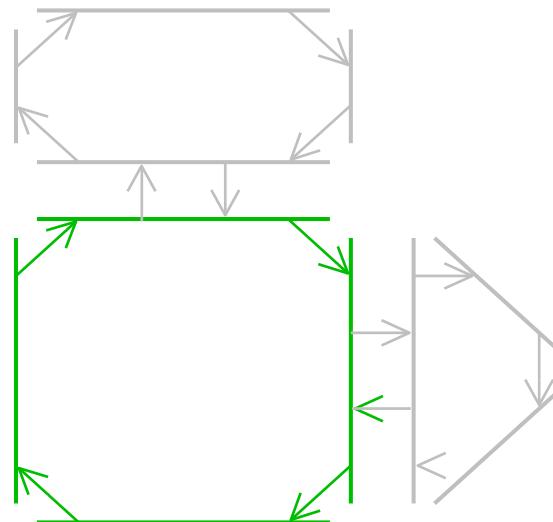
Sommets (0-cellules) : orbites
plus complexes...
(si relations définies partout)

Obtention intuitive d'une carte combinatoire

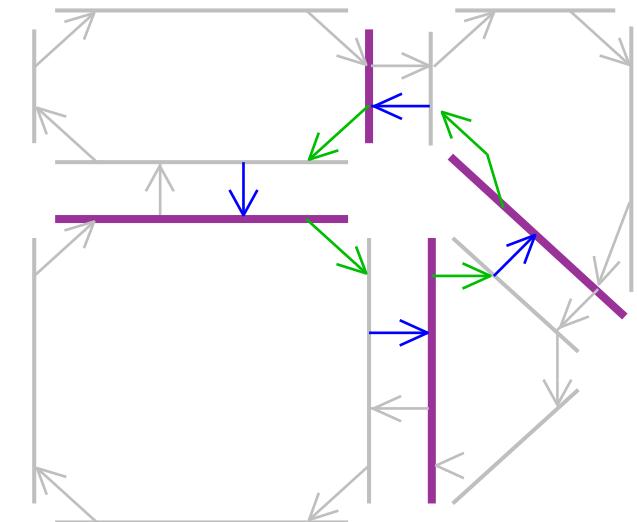
Les cellules sont des **orbites** de brins



Arêtes (1-cellules) :
orbites d'un brin suivant
 β_2



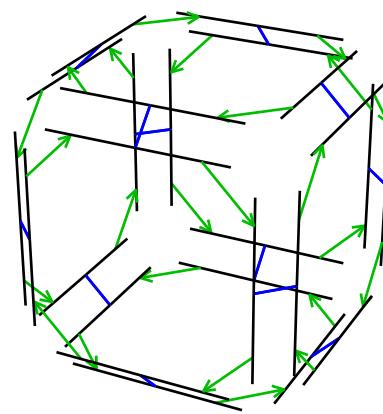
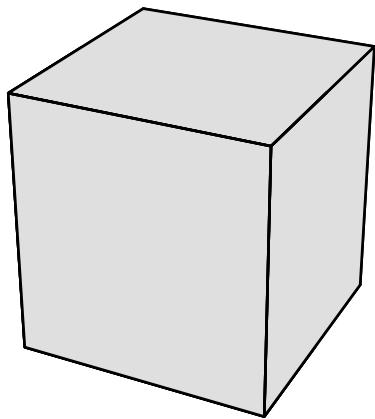
Faces (2-cellules) : orbites
d'un brin suivant β_1



Sommets (0-cellules) : orbites
d'un brin suivant $\beta_2 \circ \beta_1$

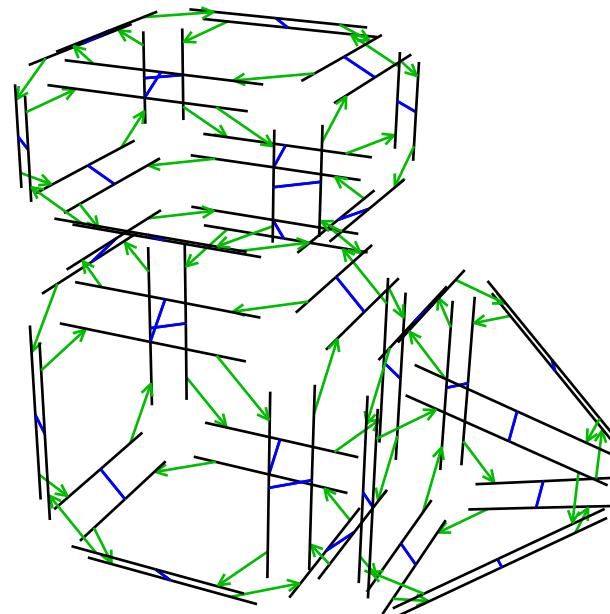
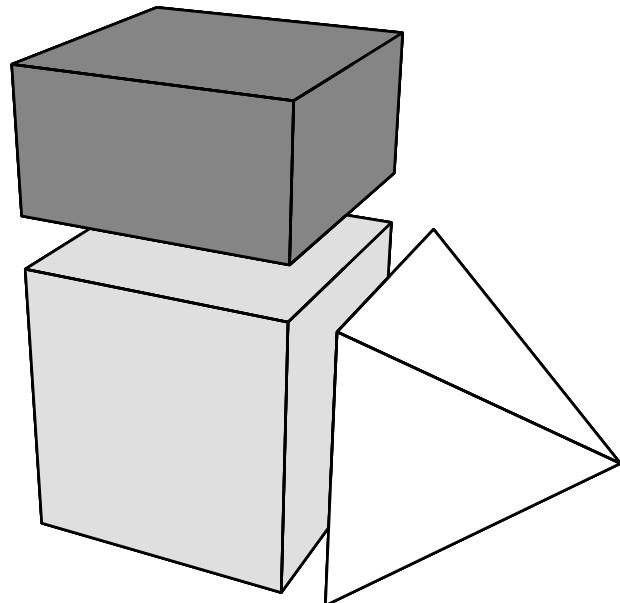
Cartes combinatoires de dimension 3 (3-Cartes)

2-Carte (fermée) avec un plongement dans \mathbb{R}^3 : représentation d'un volume (3-cellule)



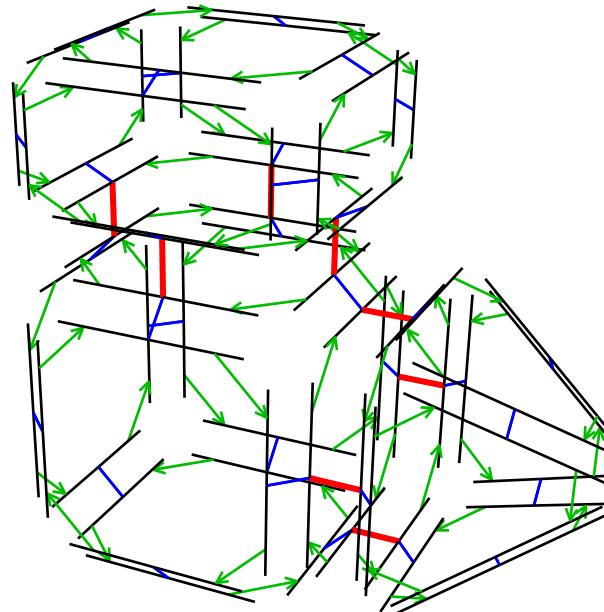
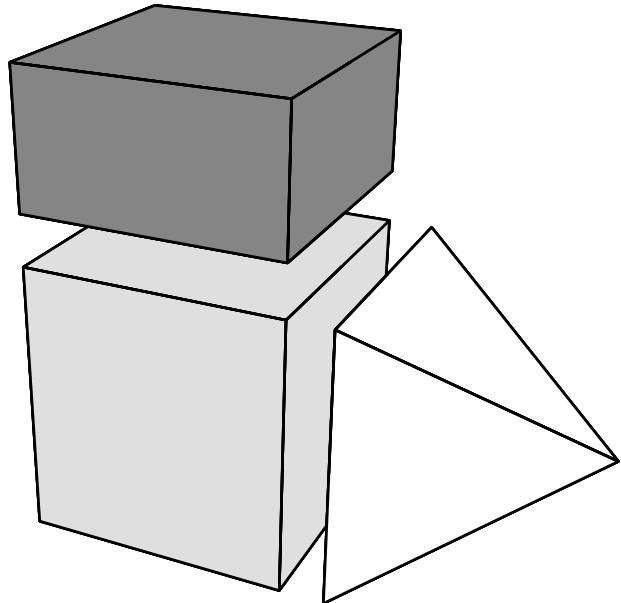
Cartes combinatoires de dimension 3 (3-Cartes)

Ensemble de 2-Cartes : chacune représente un sous-volume d'un objet 3D



Cartes combinatoires de dimension 3 (3-Cartes)

3-Carte : ensemble de 2-cartes reliées entre elles

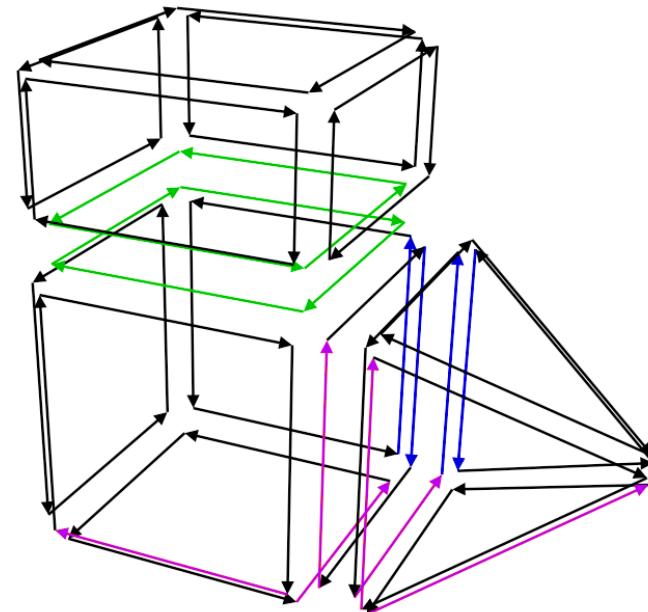
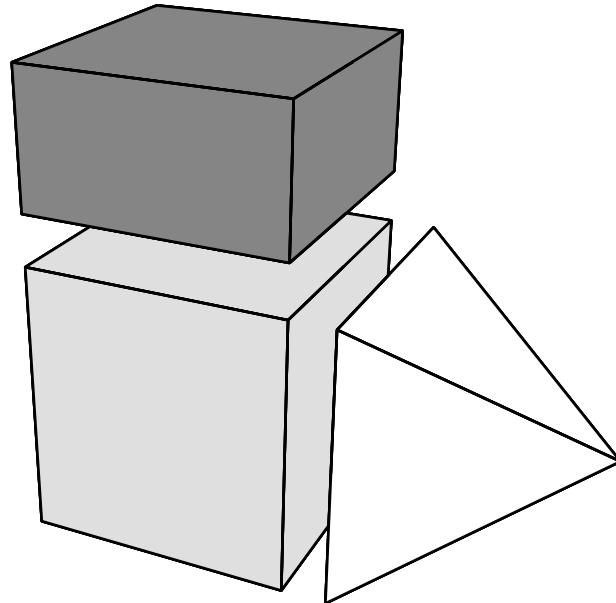


Ajout de la relation β_3 : relie les volumes adjacents par leurs faces

- Ajout de contraintes de cohérence pour une topologie valide

Cartes combinatoires de dimension 3 (3-Cartes)

Ensemble de 2-cartes : chacune représente un volume



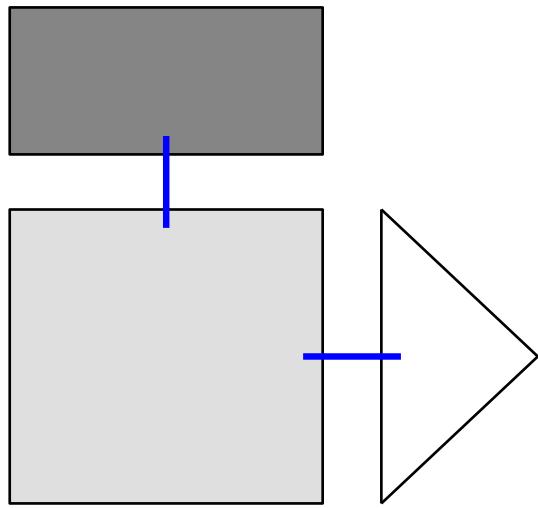
- Cellules comme des orbites de brins suivant plusieurs relations ($\beta_1 + \beta_3$ pour les faces)
- Définition hétérogène :
 - Les relations sont toutes des **involutions** sauf β_1 qui est une **permutation**
 - Les sommets (0-cellules) sont représentés par des orbites différentes

Cartes combinatoires généralisées pour une définition plus homogène

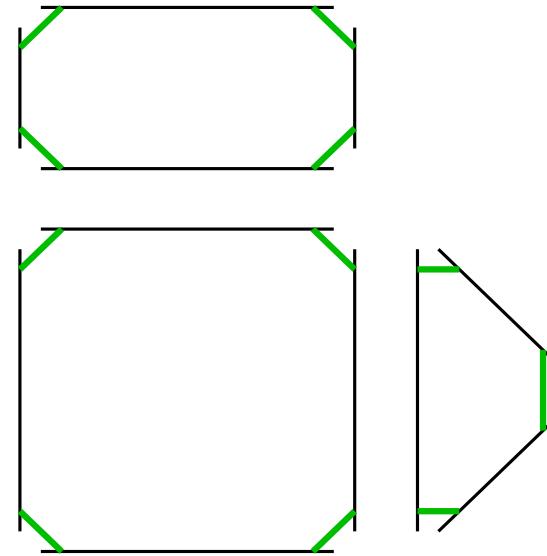
Cartes généralisées (G-Cartes)

Introduction d'un niveau de décomposition supplémentaire

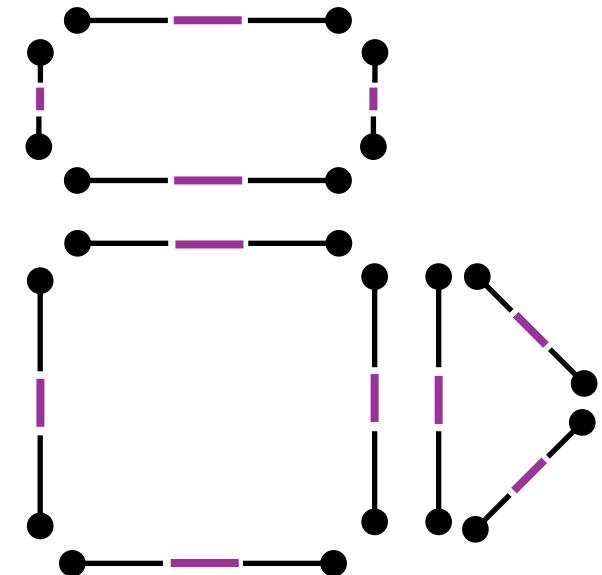
- Exemple en 2D :



Faces



Arêtes



Sommets
⇒ Brins

Les brins sont des éléments de "dimension" la plus petite possible

Cartes généralisées (G-Cartes)

Topologie de subdivisions d'objets réguliers de l'espace

- Orientables ou non
- Avec ou sans bord

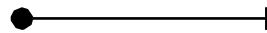
Définition générale des **n-G-Cartes** pour des objets de dimension n

- **Progressivement**, en commençant par les 1-G-cartes...

Cartes généralisées de dimension 1 ou 1-G-Cartes

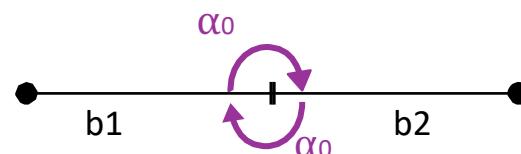
Brins

Intuitivement un brin peut être vu (et être graphiquement représenté) comme une portion d'arête (ou une portion de sommet appartenant à une arête)



Opérateurs d'assemblage α_0 et α_1

- La relation α_0 permet de relier deux brins entre eux pour former une arête.

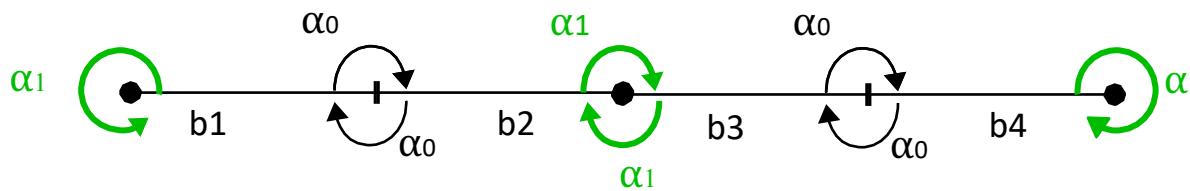


$$\begin{aligned}\alpha_0(b1) &= b2 \\ \alpha_0(b2) &= b1\end{aligned}$$

α_0 est une **involution**

- La relation α_1 permet de relier deux arêtes entre elles.

$$\begin{aligned}\alpha_1(b1) &= b1 \\ \alpha_1(b2) &= b3 \\ \alpha_1(b3) &= b2 \\ \alpha_1(b4) &= b4\end{aligned}$$



α_1 est une **involution**

1-G-Cartes : Définition

Une 1G-carte est un triplet (B, α_0, α_1) où :

- B est un ensemble fini de brins ;
- α_0 est une involution sans point fixe (1) ;
- α_1 est une involution avec ou sans point fixe (2) ;

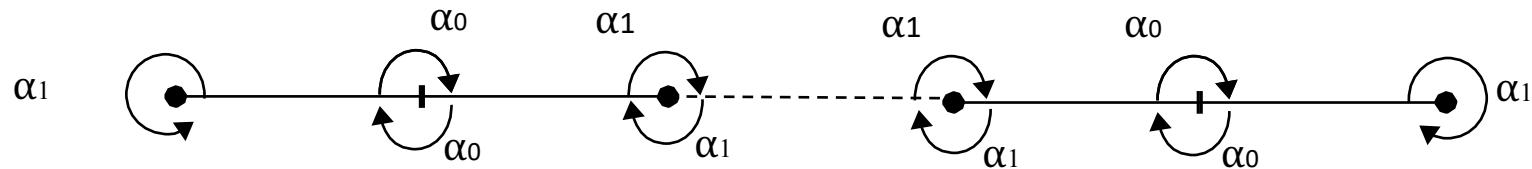
$$\forall b \in B, \alpha_0(\alpha_0(b)) = b \quad \alpha_0(b) \neq b \quad (1)$$

$$\forall b \in B, \alpha_1(\alpha_1(b)) = b \quad (2)$$

1-G-Cartes

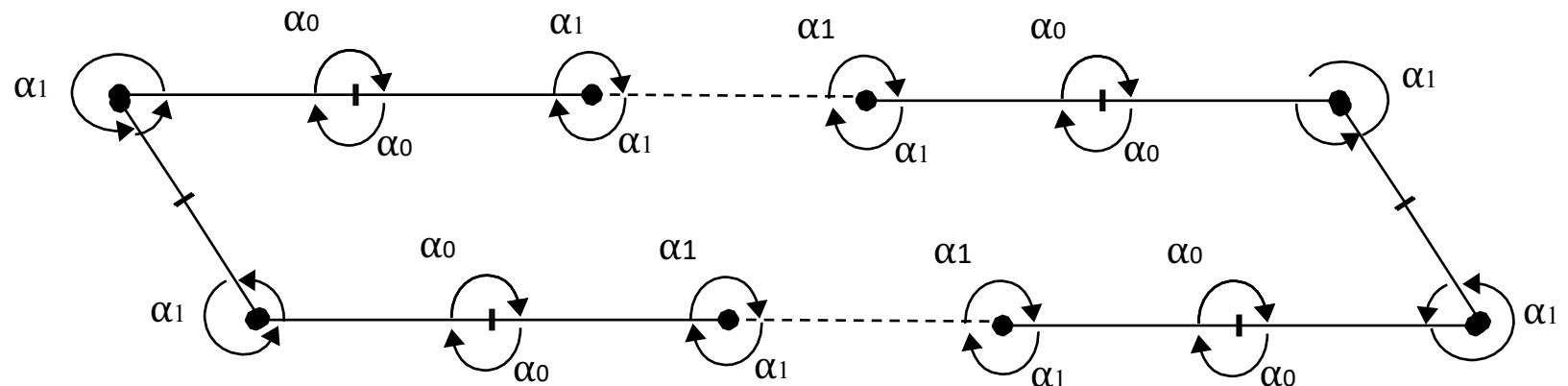
- Le modèle des 1-G-cartes permet de représenter :

- des arcs topologiques (1-cellule) :



Ici l'arc possède deux extrémités (α_1 possède 2 points fixes).

- ou des faces topologiques (2-cellule) :

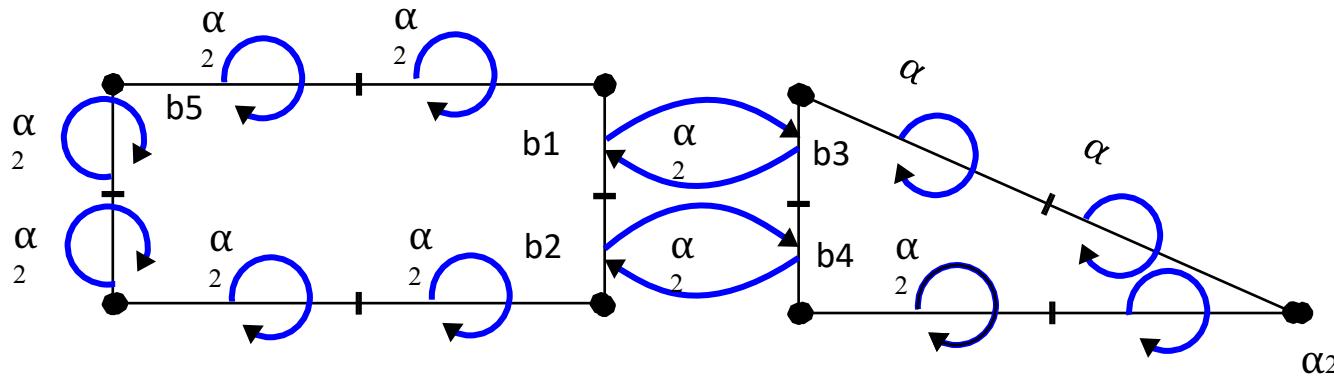


Ici α_1 ne possède pas de points fixes.

Cartes généralisées de dimension 2 ou 2-G-Cartes

Opérateur d'assemblage α_2

- L'opérateur d'assemblage α_2 permet d'assembler 2 faces entre elles le long des arêtes de leur bord.
- On parle de **collage** ou de **couture** de faces entre elles. Exemple (ici les involutions α_0 et α_1 ne sont pas représentées) :



$$\alpha_2(b1) = b3$$

$$\alpha_2(b2) = b4$$

$$\alpha_2(b3) = b1$$

$$\alpha_2(b4) = b2$$

$$\alpha_2(b5) = \dots$$

2-G-Cartes : Définition

Une 2-G-Carte est un quadruplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ où :

- B est un ensemble fini de brins ;
- α_0, α_1 sont des involutions sans point fixe (1) ;
- α_2 est une involution avec ou sans point fixe (2) ;
- $\alpha_0 \circ \alpha_2$ est une involution (3).

$$\forall b \in B, \alpha_0(\alpha_0(b)) = b \quad \alpha_0(b) \neq b$$

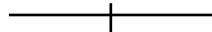
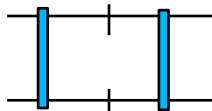
$$\forall b \in B, \alpha_1(\alpha_1(b)) = b \quad \alpha_1(b) \neq b \quad (1)$$

$$\forall b \in B, \alpha_2(\alpha_2(b)) = b \quad (2)$$

$$\forall b \in B, \alpha_0\left(\alpha_2\left(\alpha_0\left(\alpha_2(b)\right) \right)\right) = b \quad (3)$$

2-G-Cartes : Définition

Dans ce qui suit nous utiliserons une notation graphique simplifiée pour les involutions α_0 , α_1 et α_2 :

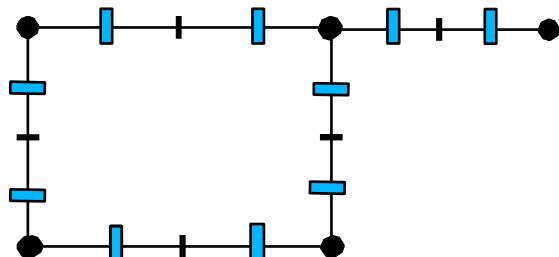
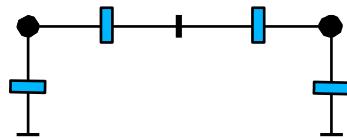
- α_0 : 
- α_1 : 
- α_2 : 

avec point fixe :



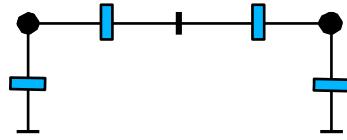
2-G-Cartes : Définition

Validité des 2-G-Cartes suivantes?



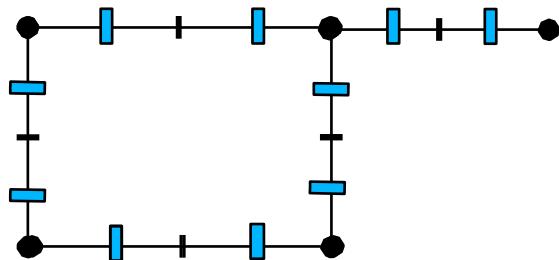
2-G-Cartes : Définition

Validité des 2-G-Cartes suivantes?



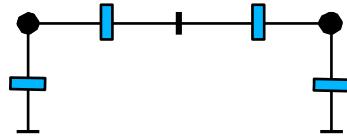
Non-valide selon (1)

$$\exists b \in B \mid \alpha_0(b) = b$$



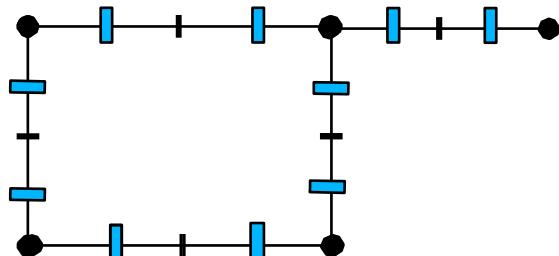
2-G-Cartes : Définition

Validité des 2-G-Cartes suivantes?



Non-valide selon (1)

$$\exists b \in B \mid \alpha_0(b) = b$$

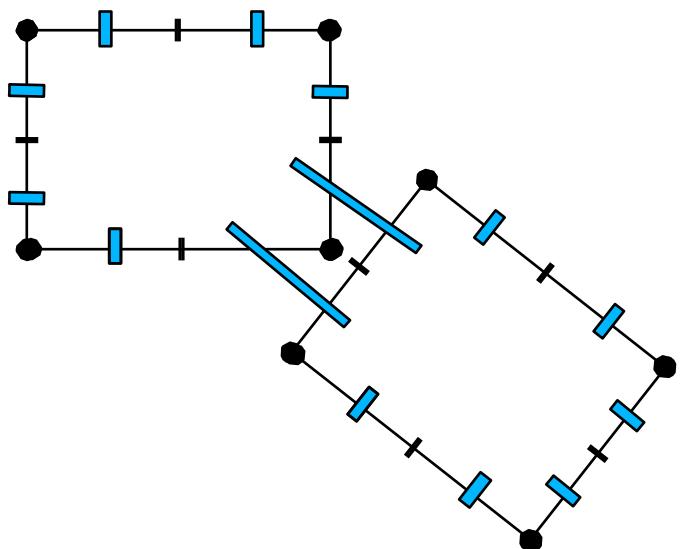
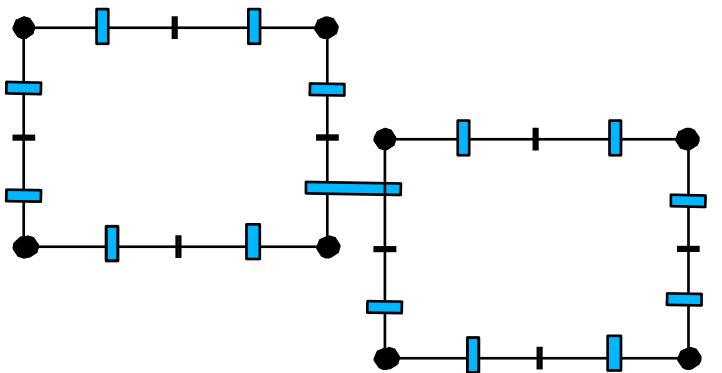


Non-valide selon (1)

$$\exists b \in B \mid \alpha_1(b) = b$$

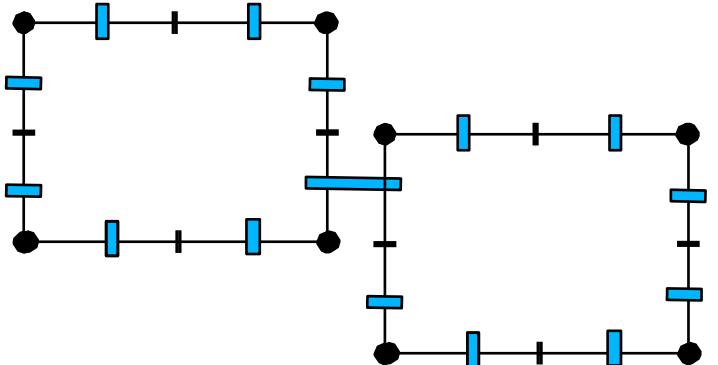
2-G-Cartes : Définition

Validité des 2-G-Cartes suivantes?



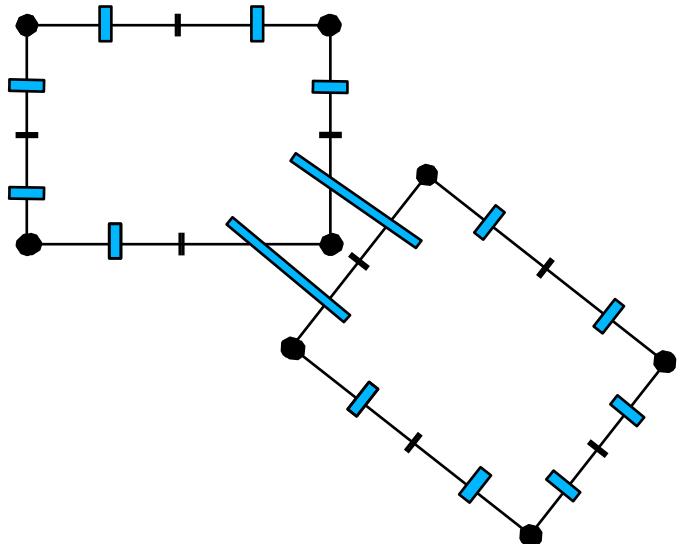
2-G-Cartes : Définition

Validité des 2-G-Cartes suivantes?



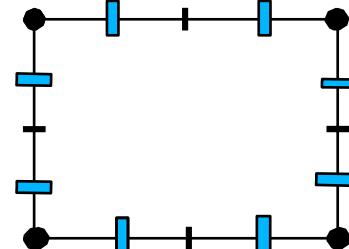
Non-valides selon (3)

$$\exists b \in B \mid \alpha_0 \circ \alpha_2 \circ \alpha_0 \circ \alpha_2(b) \neq b$$

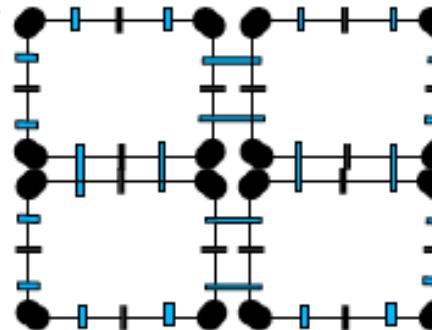


2-G-Cartes : Exemples

- Exemple 1 : Subdivision de surface avec bords et orientable ; surfaces homéomorphes à un disque topologique.

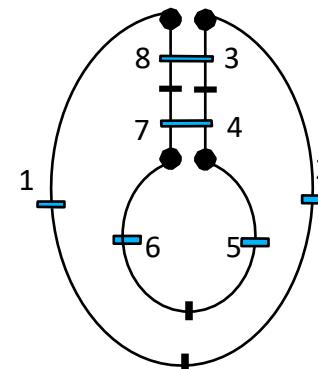
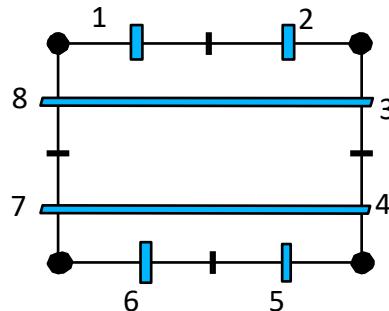


Avec une seule face.



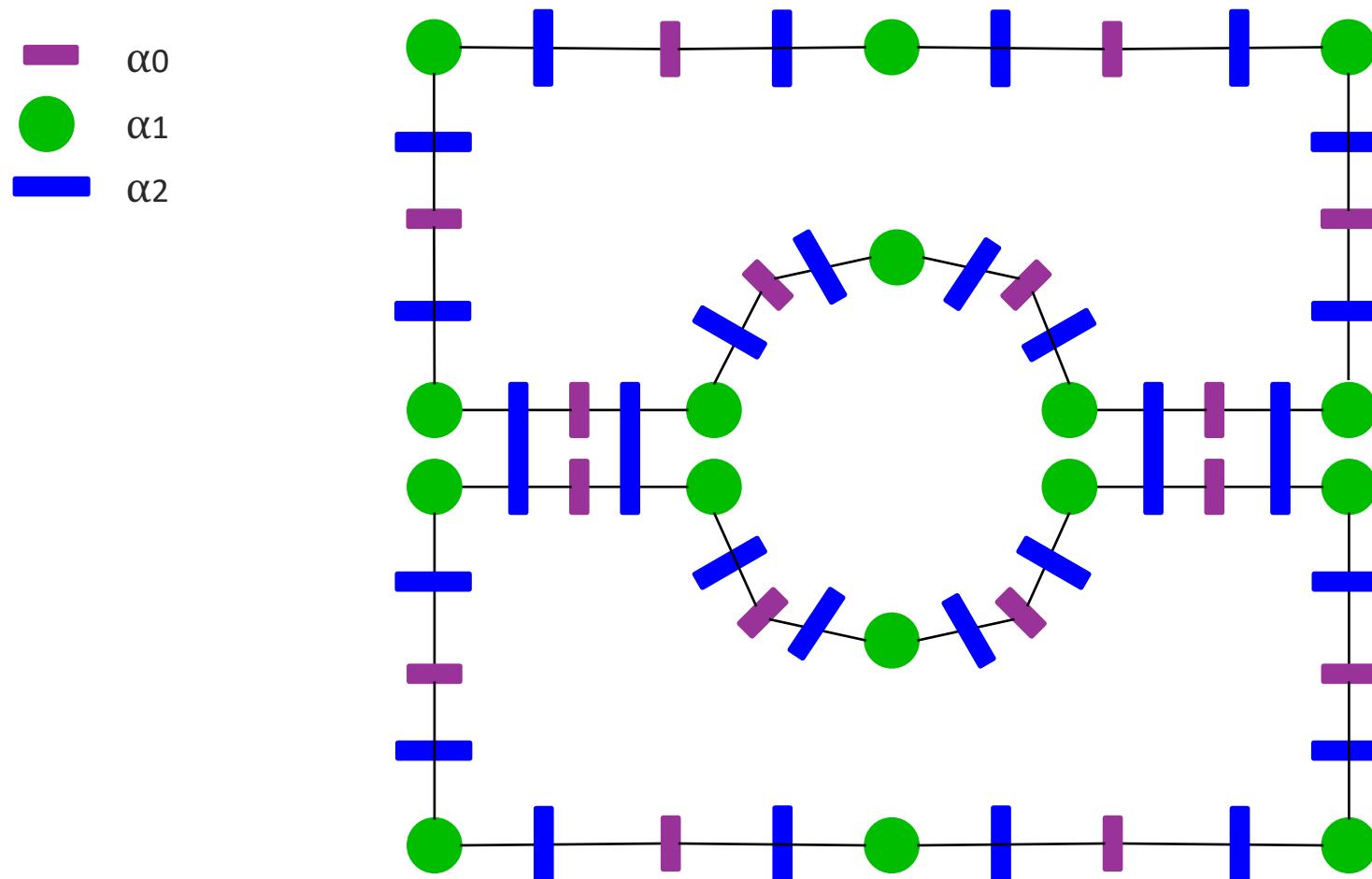
Avec 4 faces

- Exemple 2 : Subdivision de surface avec bords et orientable ; Surfaces homéomorphes à un anneau.



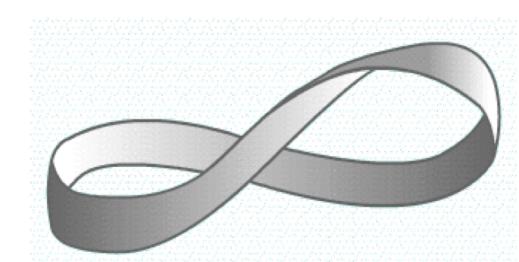
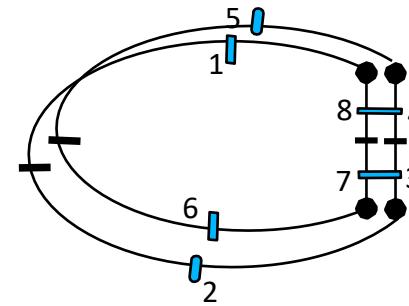
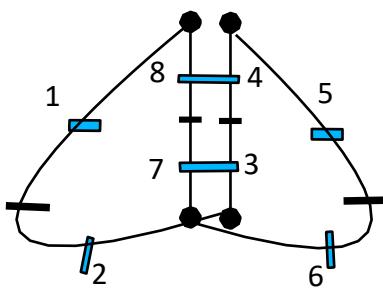
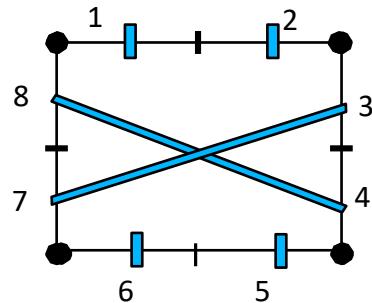
Exercice : Donner une 2-G-Carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à un anneau et composée de 2 faces de degré 8 (le degré d'une face est égal à son nombre d'arêtes).

Exercice : Donner une 2-G-Carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à un anneau et composée de 2 faces de degré 8 (le degré d'une face est égal à son nombre d'arêtes).

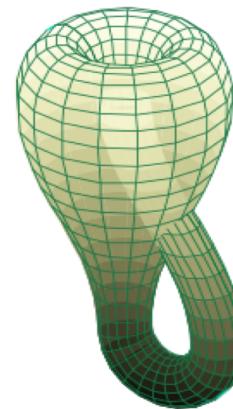
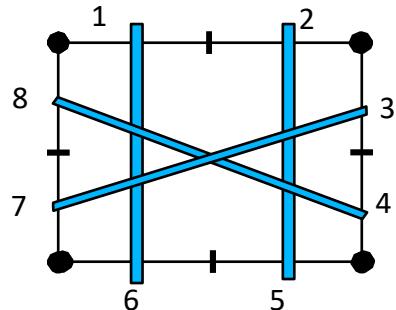


2-G-Cartes : Exemples

- Exemple 3 : Subdivision de surface avec bords et non orientable ; Surfaces homéomorphes à une bande de moebius.

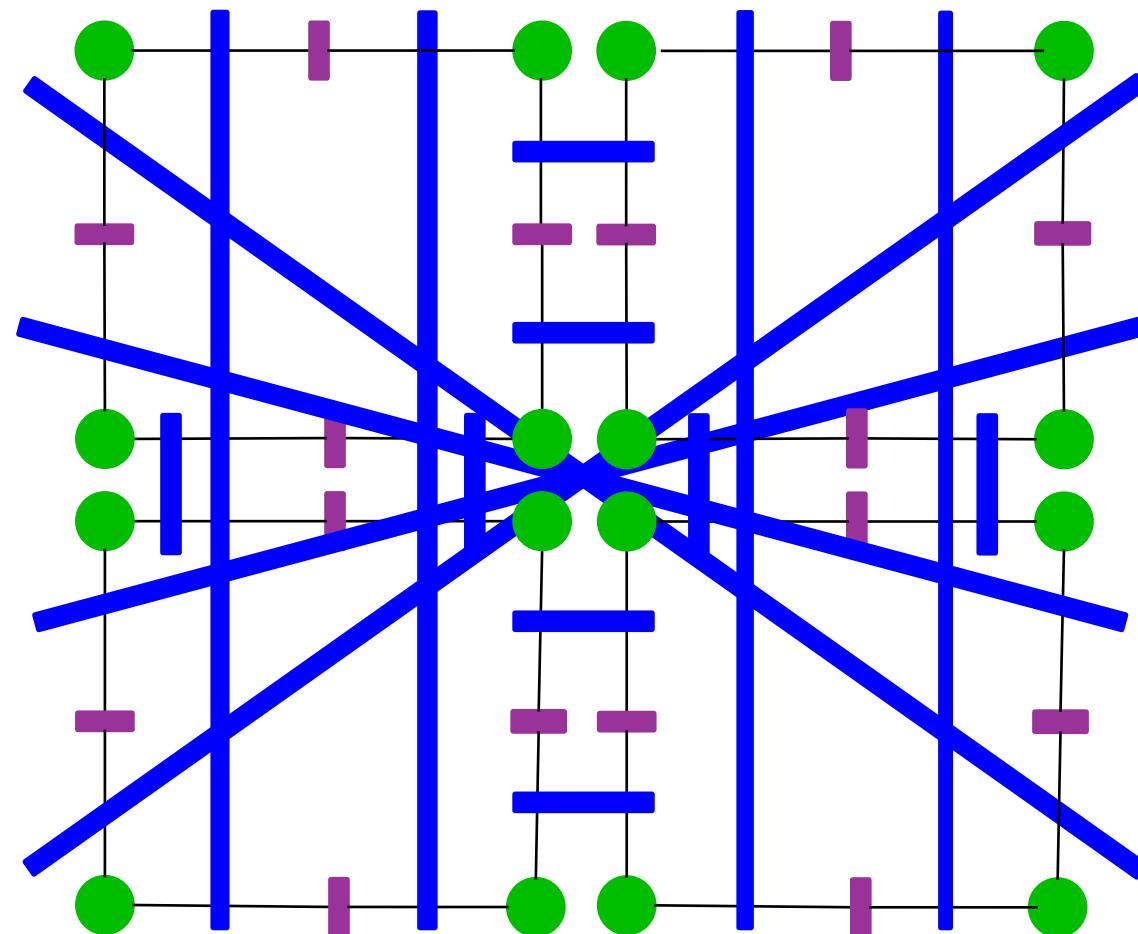


- Exemple 4 : Subdivision de surface sans bords et non orientable ; Surfaces homéomorphes à une bouteille de Klein.



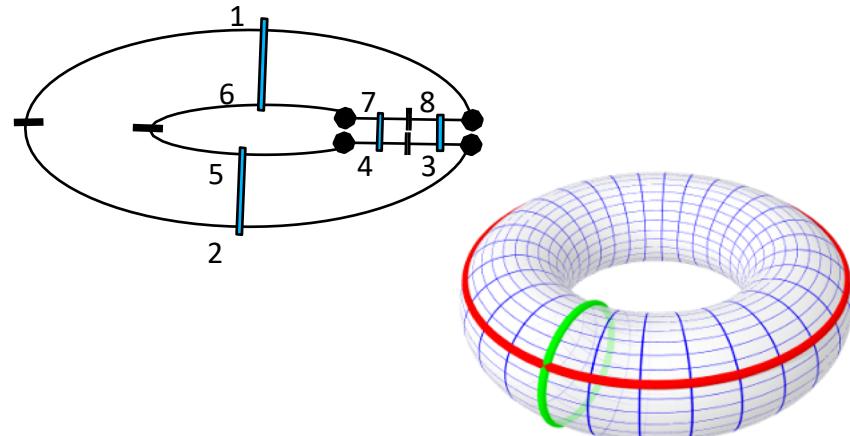
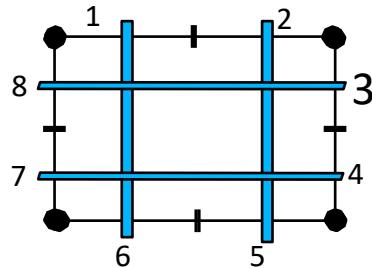
Exercice : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à une bouteille de klein et composée de 4 faces de degré 4.

Exercice : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à une bouteille de klein et composée de 4 faces de degré 4.

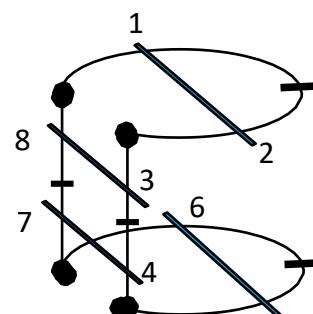
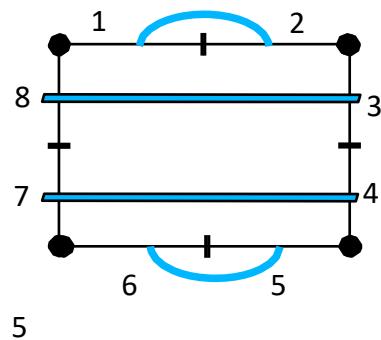


2-G-Cartes : Exemples

- Exemple 5 : Subdivision de surface sans bords et orientable ; Surfaces homéomorphes à un tore.



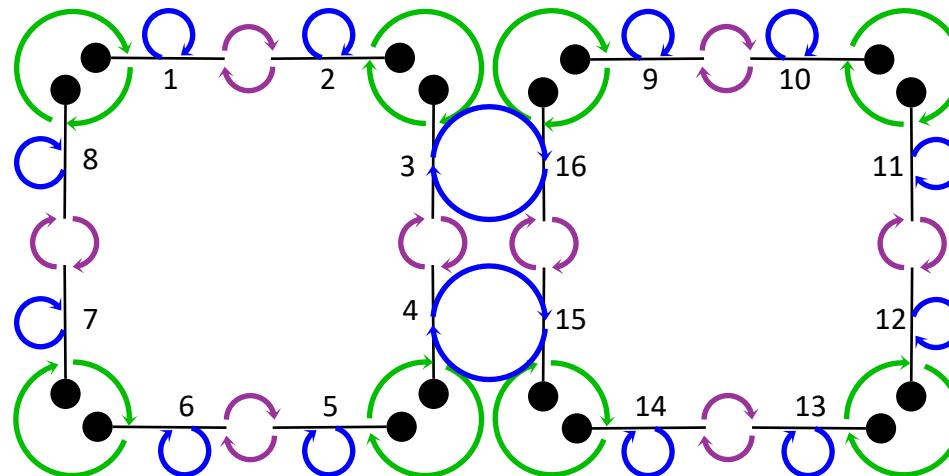
- Exemple 6 : Subdivision de surface sans bords et orientable ; Surfaces homéomorphes à une sphère



2-G-Cartes : Cellules et Orbites

Les n-cellules sont toujours représentées par des **orbites** selon plusieurs relations

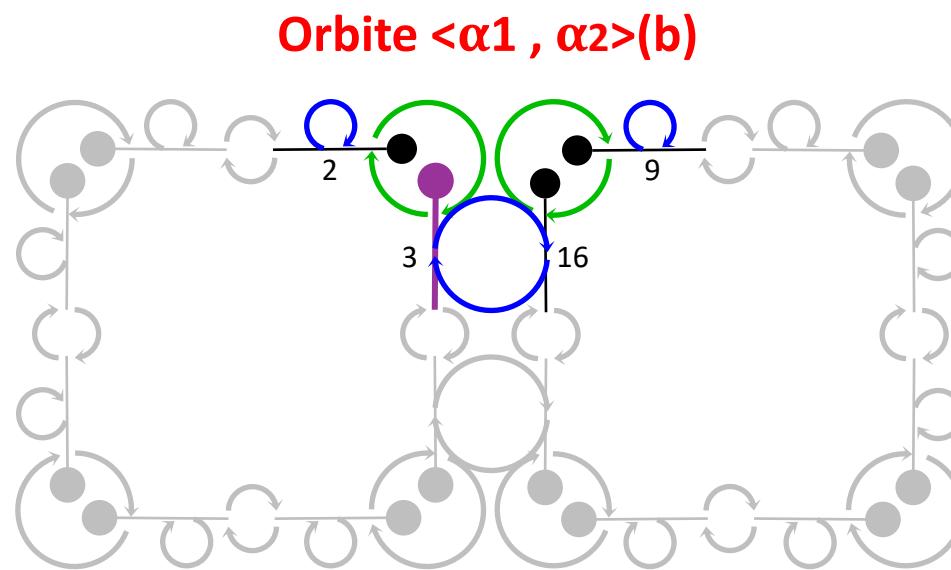
Ensemble de brins correspondant au **sommet (0-cellule)** incident à un brin b?



2-G-Cartes : Cellules et Orbites

Les n-cellules sont toujours représentées par des **orbites** selon plusieurs relations

Ensemble de brins correspondant au **sommet (0-cellule)** incident à un brin :



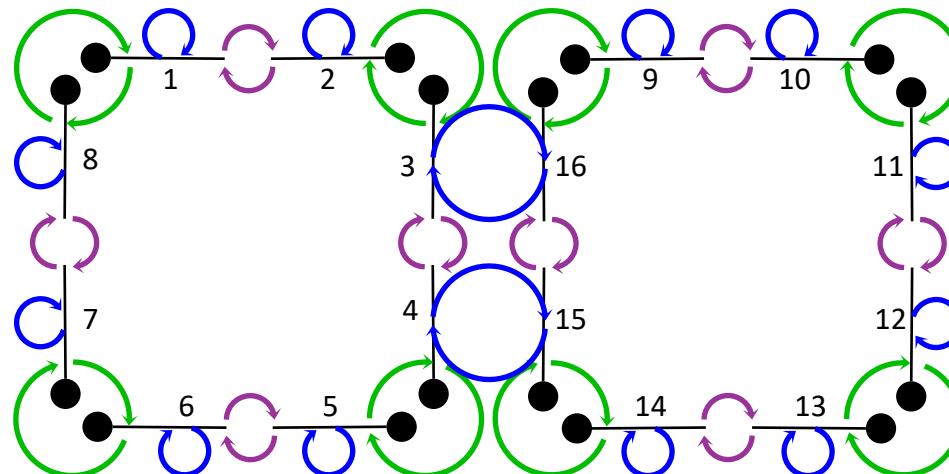
Sur l'exemple $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(3) = \{2, 3, 16, 9\}$

Sommets d'une 2-G-Carte : **composantes connexes** de la 1-G-Carte (B, α_1, α_2)

2-G-Cartes : Cellules et Orbites

Les n-cellules sont toujours représentées par des **orbites** selon plusieurs relations

Ensemble de brins correspondant à l'arête (**1-cellule**) incidente à un brin b?

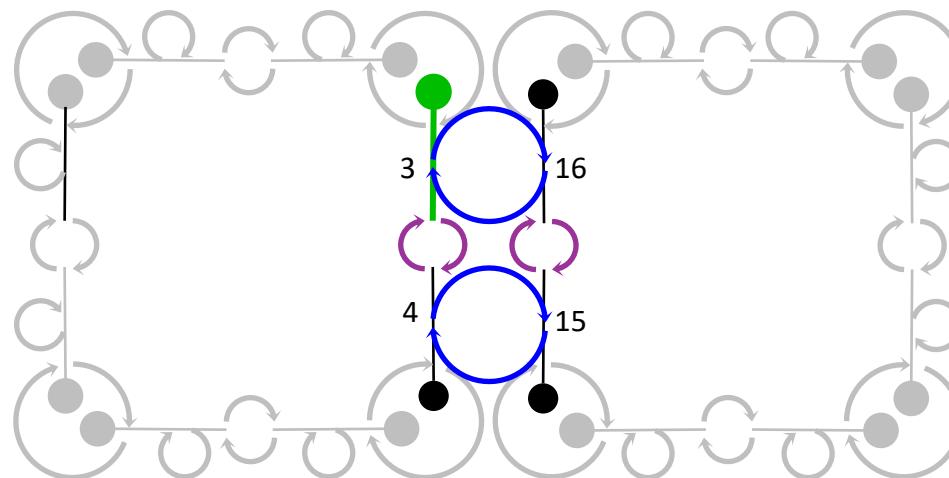


2-G-Cartes : Cellules et Orbites

Les n-cellules sont toujours représentées par des **orbites** selon plusieurs relations

Ensemble de brins correspondant à l'arête (**1-cellule**) incidente à un brin b :

Orbite $\langle\alpha_0, \alpha_2\rangle(b)$



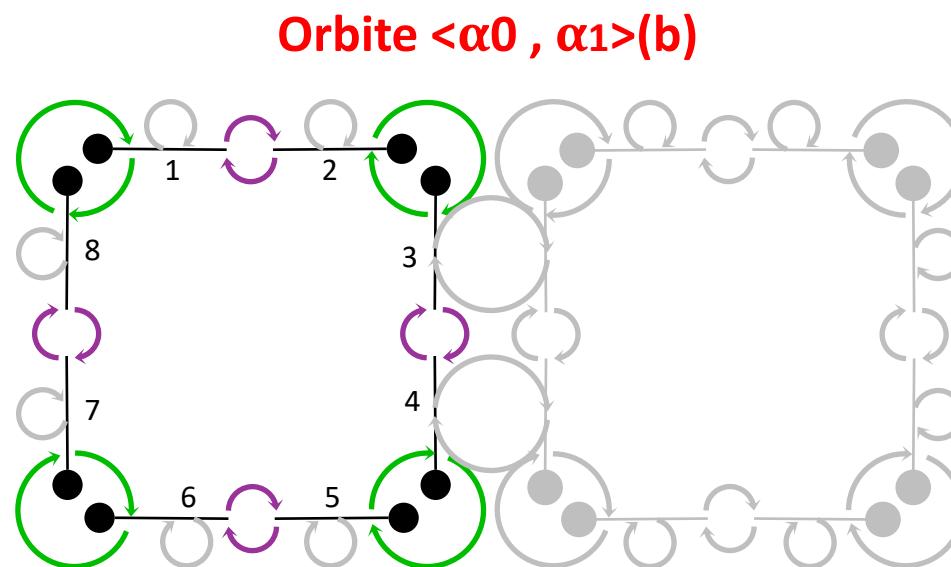
Sur l'exemple $\langle\alpha_0, \alpha_2\rangle(3) = \{3, 4, 15, 16\}$

Arêtes d'une 2-G-Carte : **composantes connexes** de la 1-G-Carte (B, α_0, α_2)

2-G-Cartes : Cellules et Orbites

Les n-cellules sont toujours représentées par des **orbites** selon plusieurs relations

Ensemble de brins correspondant à la **face (2-cellule)** incidente à un brin b :



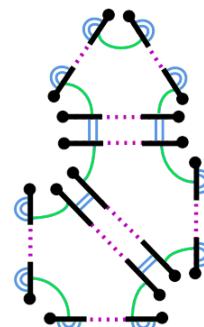
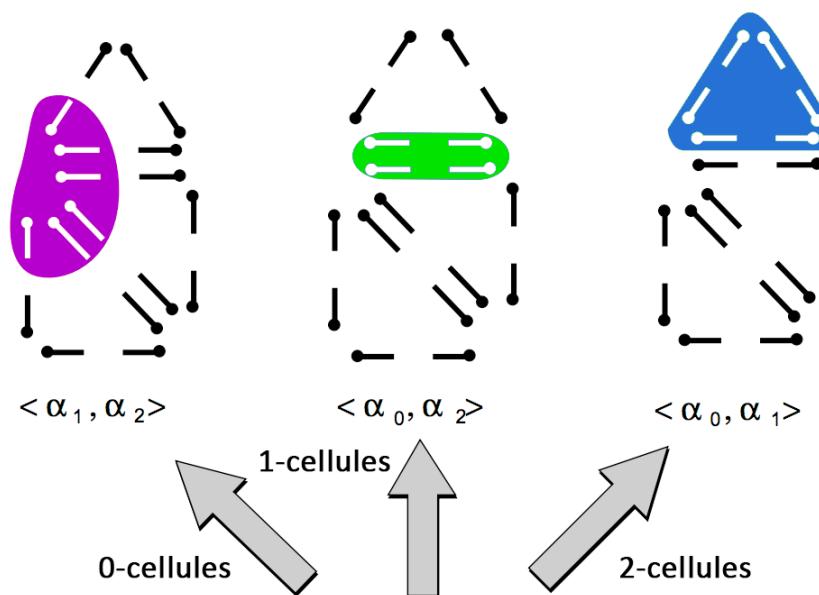
Sur l'exemple $\langle\alpha_0, \alpha_1\rangle(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Faces d'une 2-G-Carte : **composantes connexes** de la 1-G-Carte (B, α_0, α_1)

2-G-Cartes : Cellules et Orbites

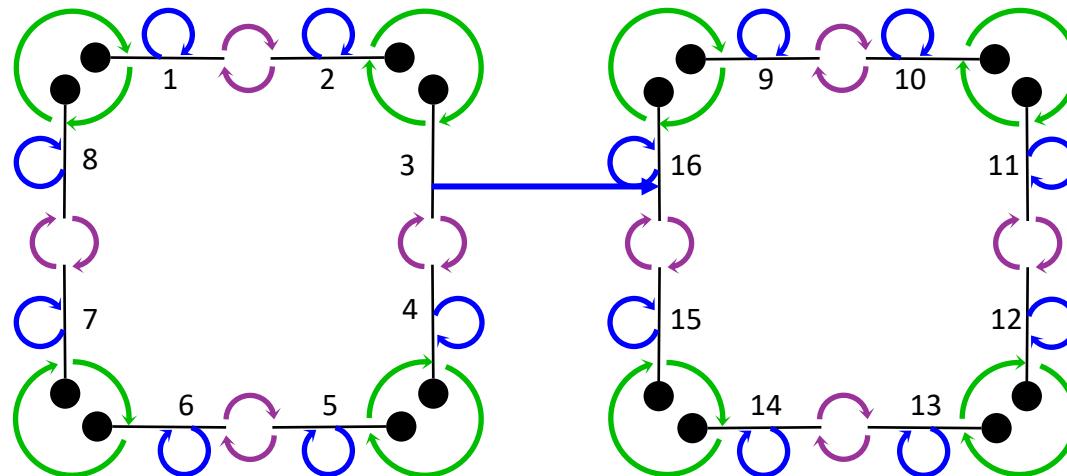
Définition générale :

Une i-cellule incidente à un brin b est définie par l'**orbite** de b utilisant toutes les involutions sauf α_i .



2-G-Cartes : Couture de Faces

Assembler deux faces par une arête commune

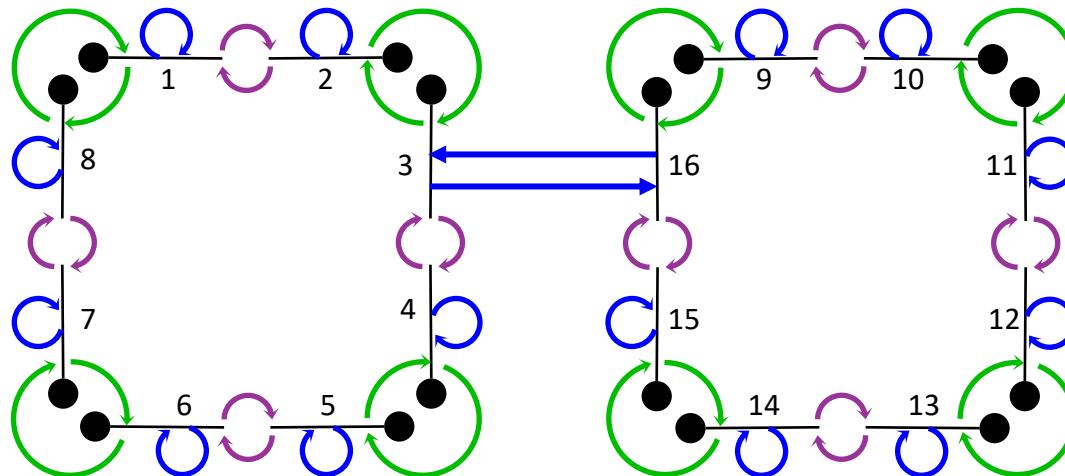


- Associer deux brins libres (exemple : 3 et 16)

$$\alpha_2(b) \leftarrow b'$$

2-G-Cartes : Couture de Faces

Assembler deux faces par une arête commune

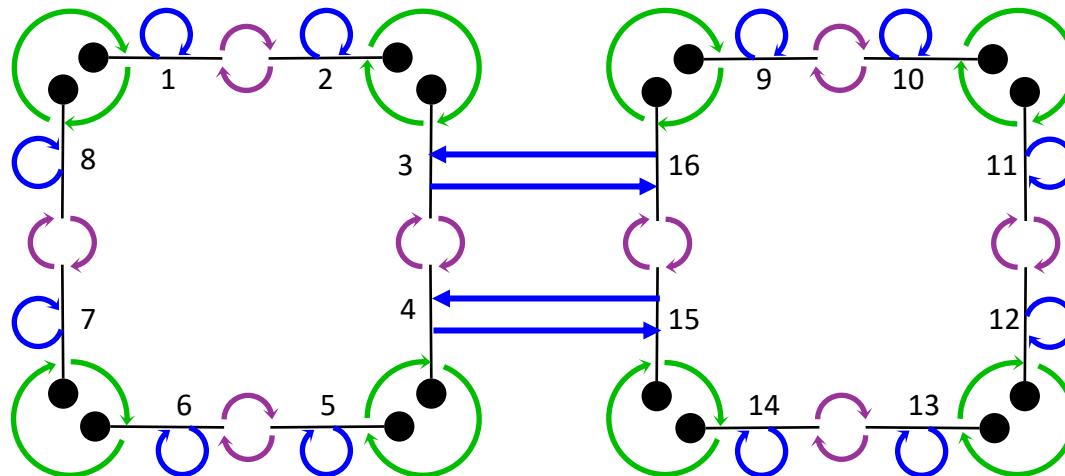


- Associer deux brins libres (exemple : 3 et 16)
- Assurer la contrainte α_2 involution

$$\begin{aligned}\alpha_2(b) &\leftarrow b' \\ \alpha_2(b') &\leftarrow b\end{aligned}$$

2-G-Cartes : Couture de Faces

Assembler deux faces par une arête commune

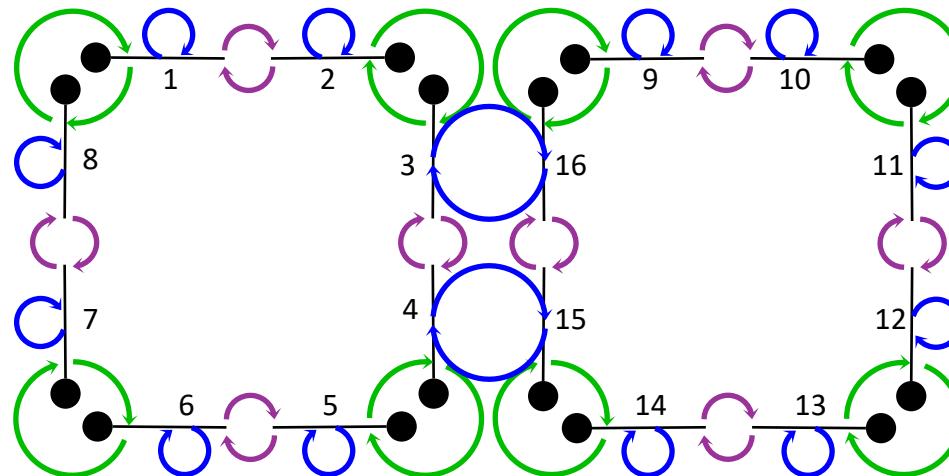


- Associer deux brins libres (exemple : 3 et 16)
- Assurer la contrainte α_2 involution
- Assurer les contraintes de cohérence $\alpha_0 \circ \alpha_2$ involution

$$\begin{aligned}\alpha_2(b) &\leftarrow b' \\ \alpha_2(b') &\leftarrow b \\ \alpha_2(\alpha_0(b)) &\leftarrow \alpha_0(b') \\ \alpha_2(\alpha_0(b')) &\leftarrow \alpha_0(b)\end{aligned}$$

2-G-Cartes : Couture de Faces

Assembler deux faces par une arête commune



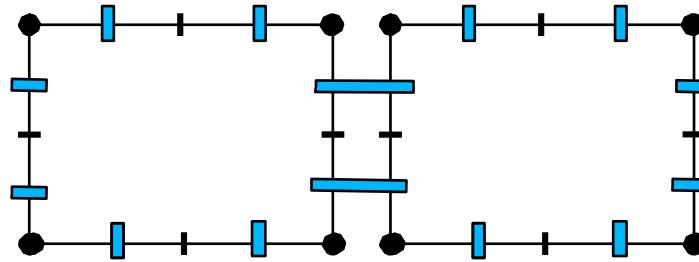
- Associer deux brins libres (exemple : 3 et 16)
- Assurer la contrainte α_2 involution
- Assurer les contraintes de cohérence $\alpha_0 \circ \alpha_2$ involution

$$\begin{aligned}\alpha_2(b) &\leftarrow b' \\ \alpha_2(b') &\leftarrow b \\ \alpha_2(\alpha_0(b)) &\leftarrow \alpha_0(b') \\ \alpha_2(\alpha_0(b')) &\leftarrow \alpha_0(b)\end{aligned}$$

Couture (dans les deux sens) par α_2 des orbites $\langle\alpha_0\rangle$ de b et b'

2-G-Cartes : Bord

Définition du bord d'une 2-G-Carte



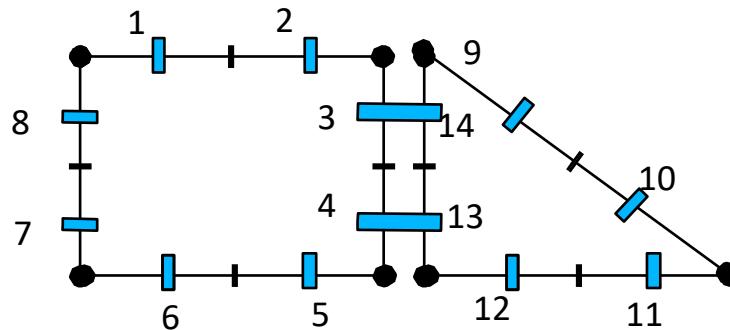
Le bord d'une 2-G-carte est constitué par l'ensemble des brins ayant un point fixe pour l'involution α_2 . On parle de brins libres par α_2 .

$$\delta B = \{b \in B \mid \alpha_2(b) = b\}$$

2-G-cartes : Bord

Le bord d'une 2-G-Carte $G(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ est définie par la 1-G-Carte $(B', \alpha'_0, \alpha'_1)$ où

- B' est un sous-ensemble de B réduit aux brins du bord (tels que $\alpha_2(b) = b$) ;
- α'_0 est la restriction de α_0 aux brins du bord ;
- α'_1 est la restriction de $\alpha_1 \circ \alpha_2$ aux brins du bord ;

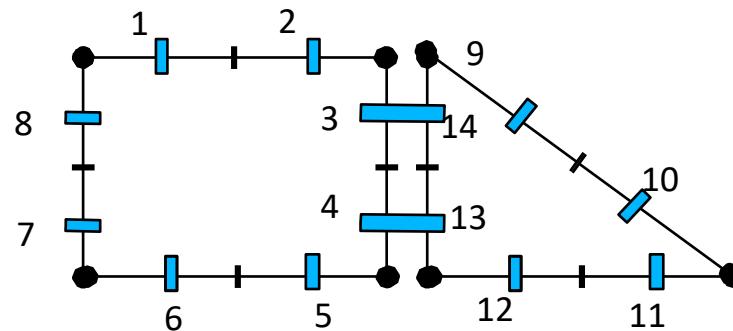


Exercice : donner la 1-G-Carte du bord de la 2-G-Carte ci-dessus.

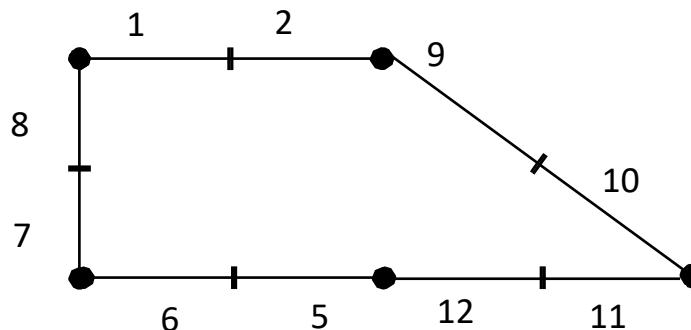
2-G-cartes : Bord

Le bord d'une 2-G-Carte $G(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ est définie par la 1-G-Carte $(B', \alpha'_0, \alpha'_1)$ où

- B' est un sous-ensemble de B réduit aux brins du bord (tels que $\alpha_2(b) = b$) ;
 - α'_0 est la restriction de α_0 aux brins du bord ;
 - α'_1 est la restriction de $\alpha_1 \circ \alpha_2$ aux brins du bord ;



Exercice : donner la 1-G-Carte du bord de la 2-G-Carte ci-dessus.



2-G-Cartes : Exercice

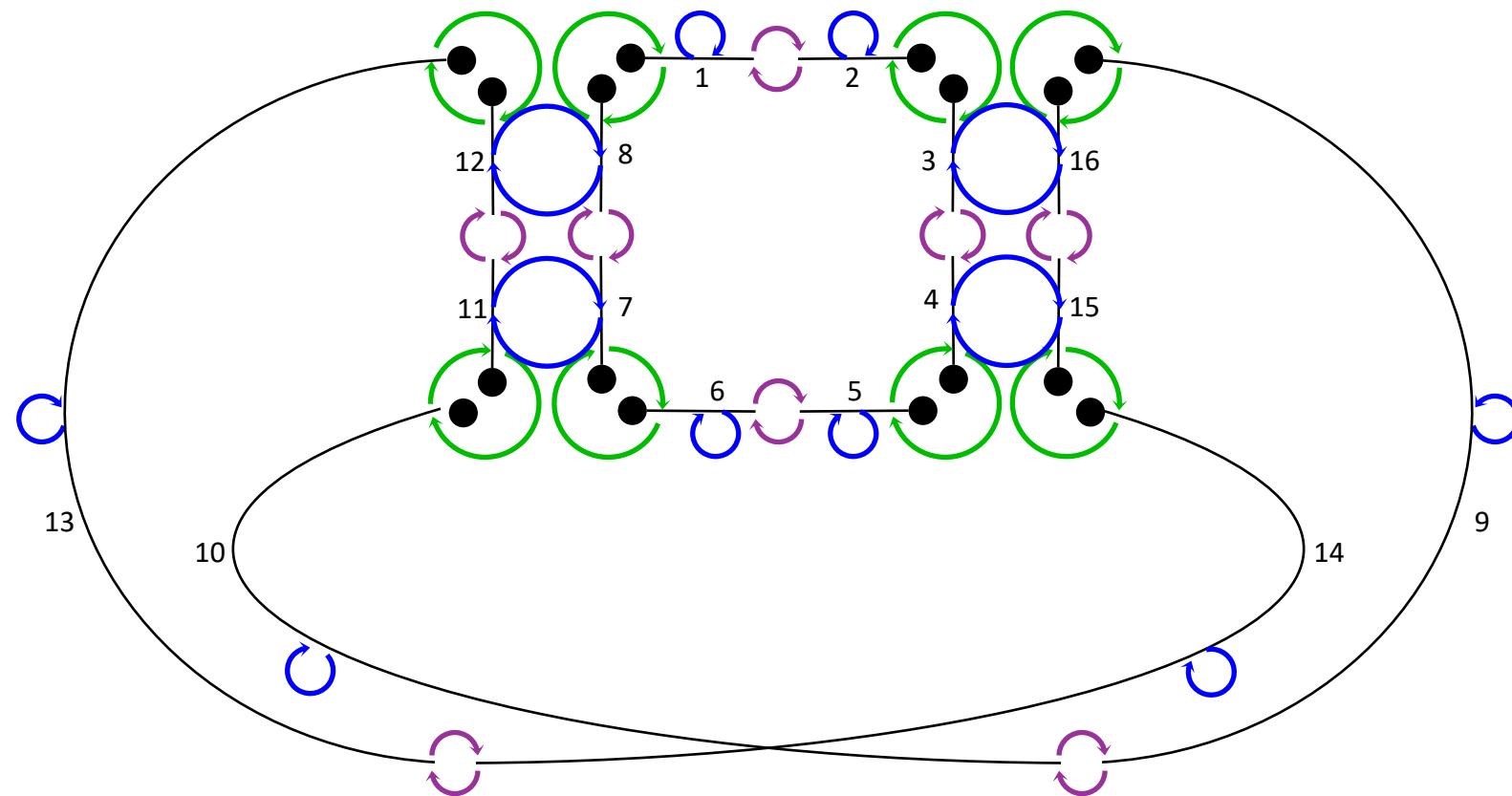
La 2-G-carte suivante est représentée par un tableau. Les brins sont numérotés de 1 à 16 et le tableau décrit les liens (par exemple, la valeur 4 dans la case référencée $[\alpha_0, 3]$ indique que $\alpha_0(3) = 4$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
α_0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
α_1	8	3	2	5	4	7	6	1	16	11	10	13	12	15	14	9
α_2	1	2	16	15	5	6	11	12	9	10	7	8	13	14	4	3

Questions :

- Donnez une représentation graphique de la 2-G-cartes ci-dessus.
- Indiquez à quelle surface connue la surface représentée par cette carte est homéomorphe.

2-G-Cartes : Exercice



2-G-Cartes : Exercice

La 2-G-carte suivante est représentée par un tableau. Les brins sont numérotés de 1 à 16 et le tableau décrit les liens (par exemple, la valeur 4 dans la case référencée $[\alpha_0, 3]$ indique que $\alpha_0(3) = 4$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
α_0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
α_1	8	3	2	5	4	7	6	1	16	11	10	13	12	15	14	9
α_2	1	2	16	15	5	6	11	12	9	10	7	8	13	14	4	3

Questions :

- Donnez une représentation graphique de la 2-G-cartes ci-dessus.
- Indiquez à quelle surface connue la surface représentée par cette carte est homéomorphe.
- On fait les modifications suivantes : $\alpha_2(3) = 3 ; \alpha_2(4) = 4 ;$
 $\alpha_2(15) = 15 ; \alpha_2(16) = 16 ;$

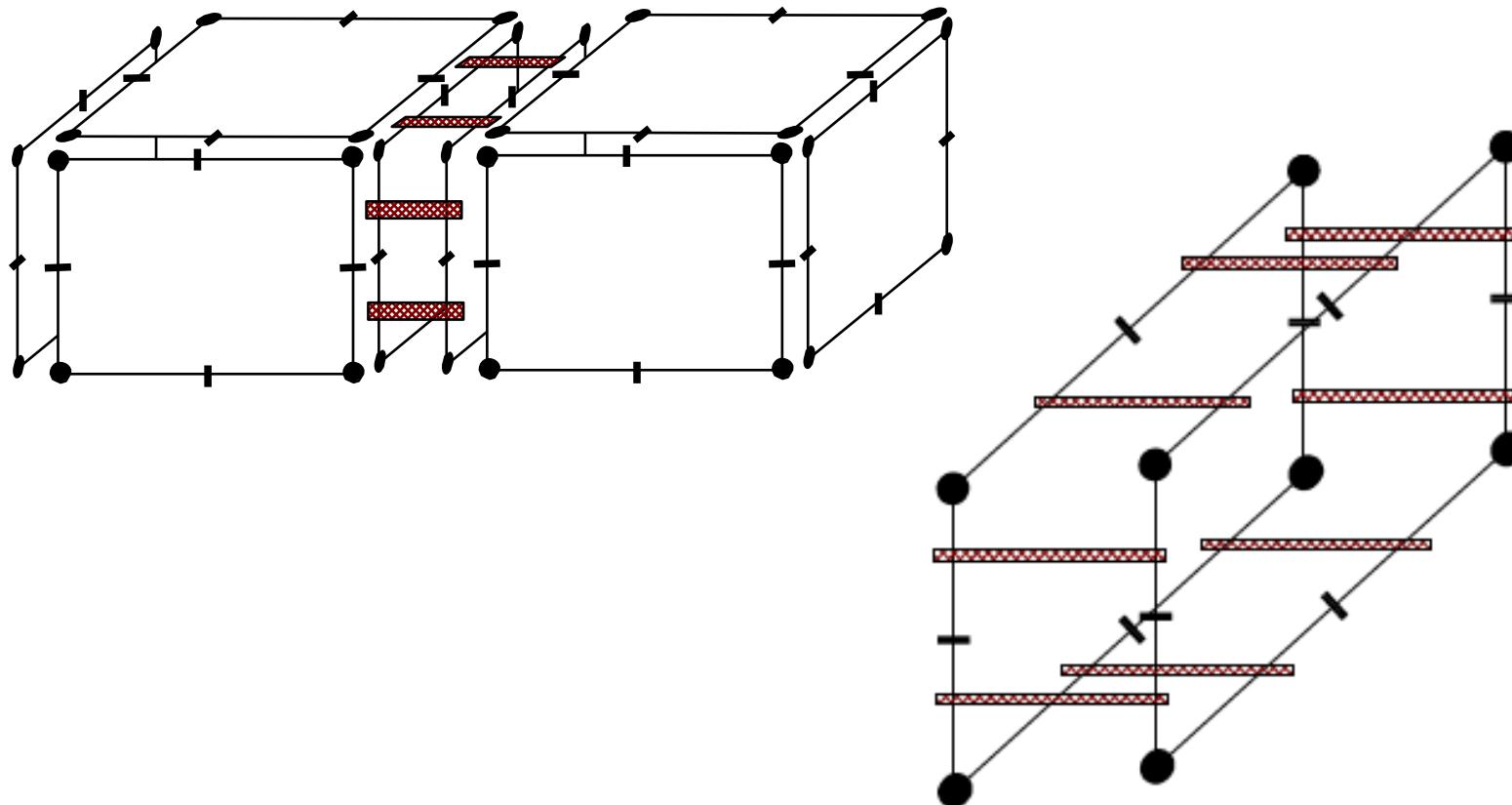
A quelle surface connue la 2-G-carte résultante est-elle homéomorphe ?

Cartes généralisées de dimension 3 ou 3-G-Cartes

Cartes généralisées de dimension 3 ou 3-G-Cartes

Opérateur d'assemblage α_3

L'opérateur d'assemblage α_3 permet d'assembler des volumes entre eux le long des faces de leur bords.



Définition des 3-G-Cartes

Une 3G-carte est un n-uplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

- B est un ensemble fini de brins
- $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des involutions sans point fixe (1)
- α_3 est une involution avec ou sans point fixe (2)
- $\alpha_0 \circ \alpha_2, \alpha_0 \circ \alpha_3$ et $\alpha_1 \circ \alpha_3$ sont des involutions (3)

$$\forall b \in B, \alpha_0(\alpha_0(b)) = b, \quad \alpha_0(b) \neq b$$

$$\forall b \in B, \alpha_1(\alpha_1(b)) = b, \quad \alpha_1(b) \neq b$$

$$\forall b \in B, \alpha_2(\alpha_2(b)) = b, \quad \alpha_2(b) \neq b$$

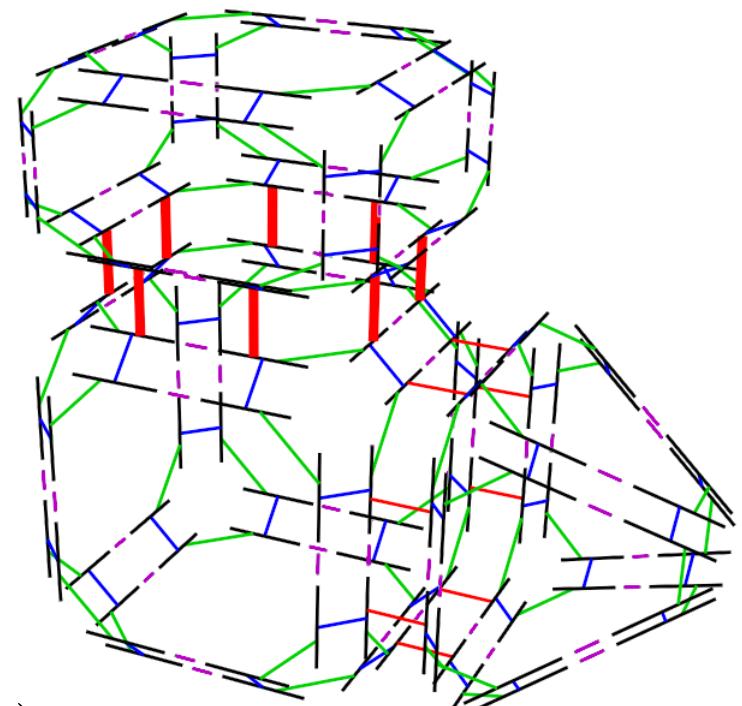
(1)

$$\forall b \in B, \alpha_3(\alpha_3(b)) = b \quad (2)$$

$$\forall b \in B, \alpha_0\left(\alpha_2\left(\alpha_0\left(\alpha_2(b)\right)\right)\right) = b$$

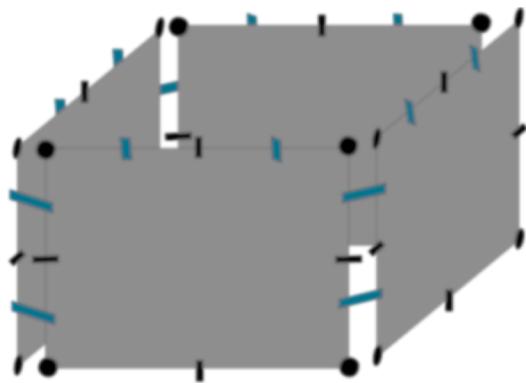
$$\forall b \in B, \alpha_0\left(\alpha_3\left(\alpha_0\left(\alpha_3(b)\right)\right)\right) = b$$

$$\forall b \in B, \alpha_1\left(\alpha_3\left(\alpha_1\left(\alpha_3(b)\right)\right)\right) = b \quad (3)$$



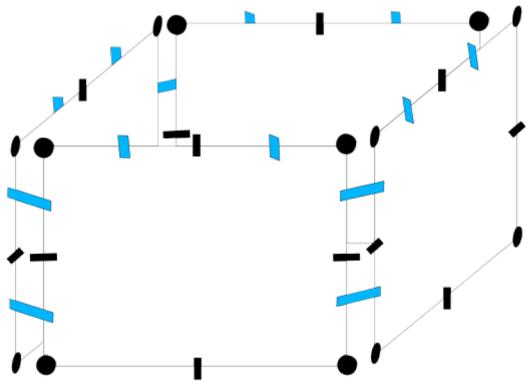
3-G-Cartes : Définition

Validité de la 3-G-Carte suivante?



3-G-Cartes : Définition

Validité de la 3-G-Carte suivante?

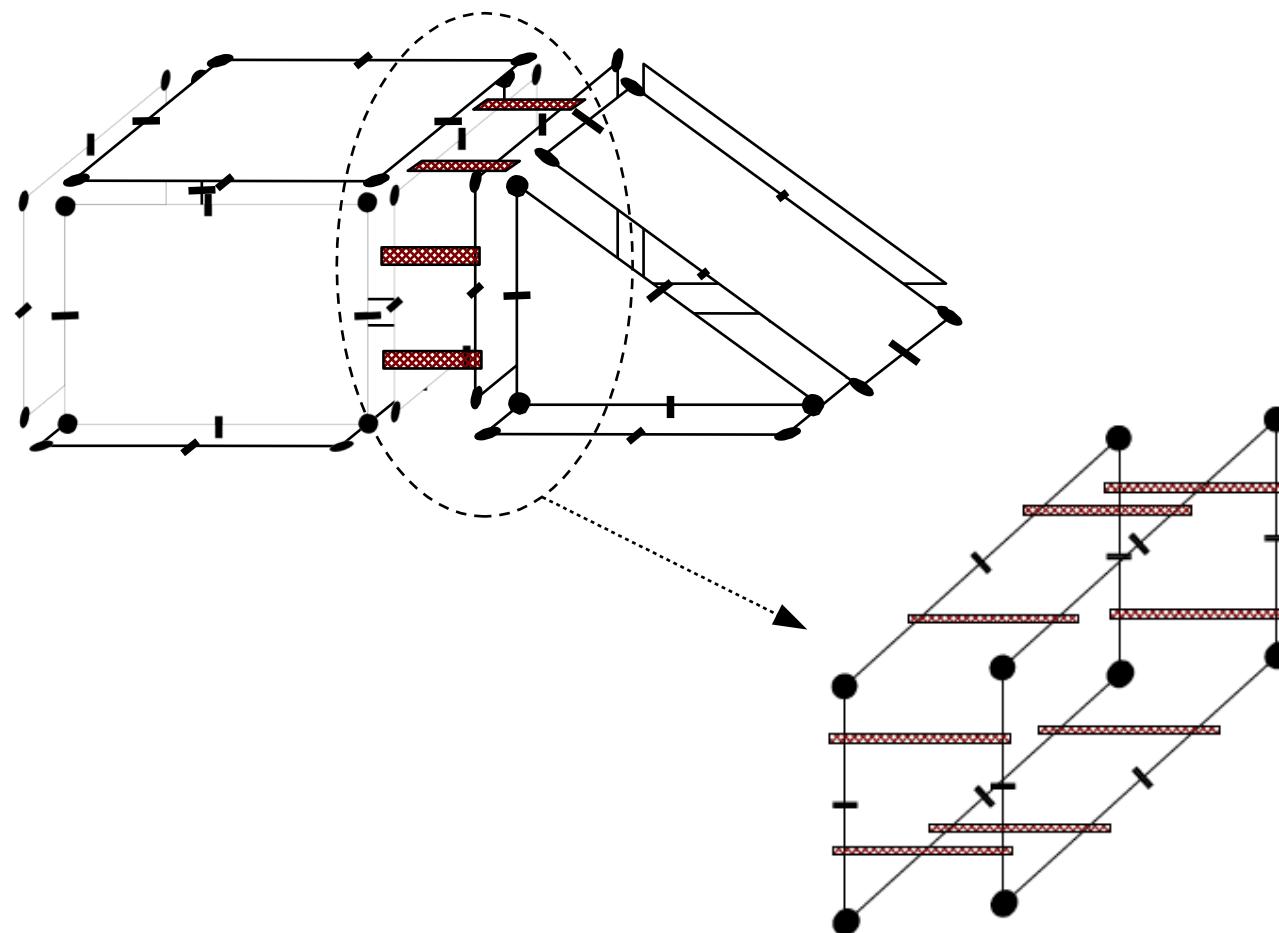


Non-valide selon (1)

$$\exists b \in B \mid \alpha_2(b) = b$$

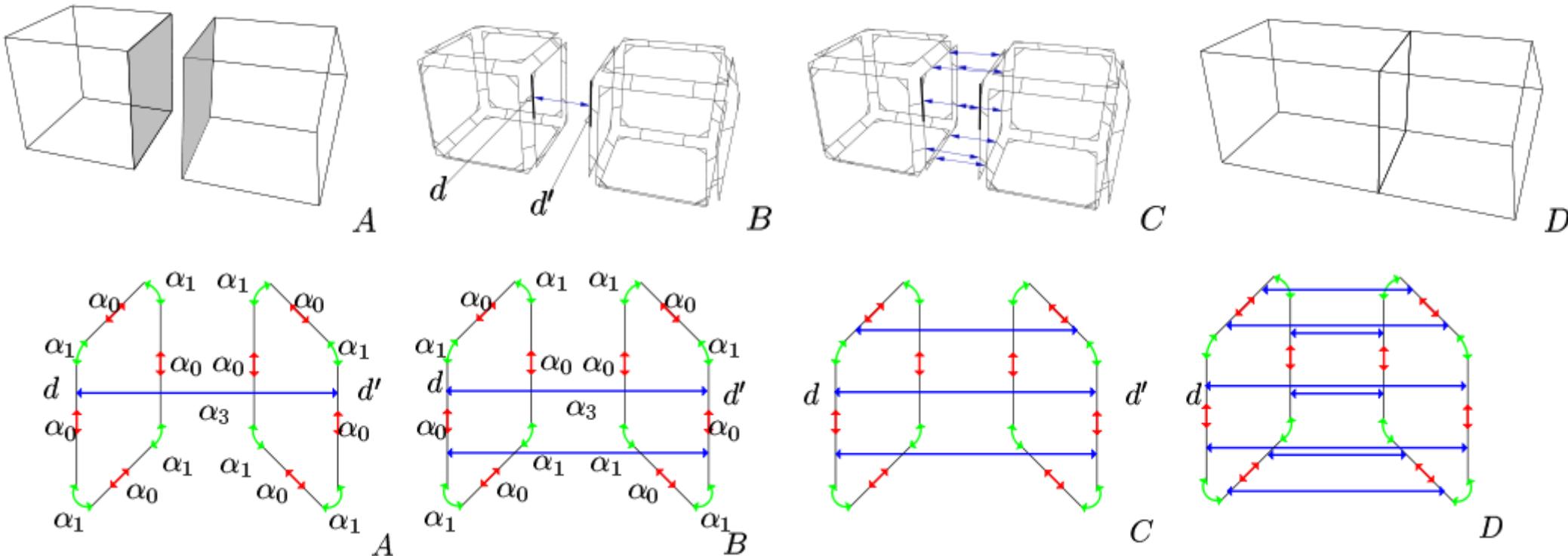
3-G-Cartes : Définition

- Du fait que $\alpha_0 \circ \alpha_2$, $\alpha_0 \circ \alpha_3$ et $\alpha_1 \circ \alpha_3$ soient des involutions, cela oblige à coudre les volumes élémentaires pour tous les brins.
- Exemple de 3-G-carte (les liaisons α_2 ne sont pas représentées)



Opération de Couture de face

- On détermine les brins de l'orbite qu'on lie par une relation α_3 .



Du fait que $\alpha_0 \circ \alpha_2$, $\alpha_0 \circ \alpha_3$ et $\alpha_1 \circ \alpha_3$ soient des involutions, on doit coudre par α_3 tous les brins de l'orbite $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle$ de d et d' .

Couture par α_i des brins sur les orbites $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle$ de d et d' .

Propriétés des 3G-cartes

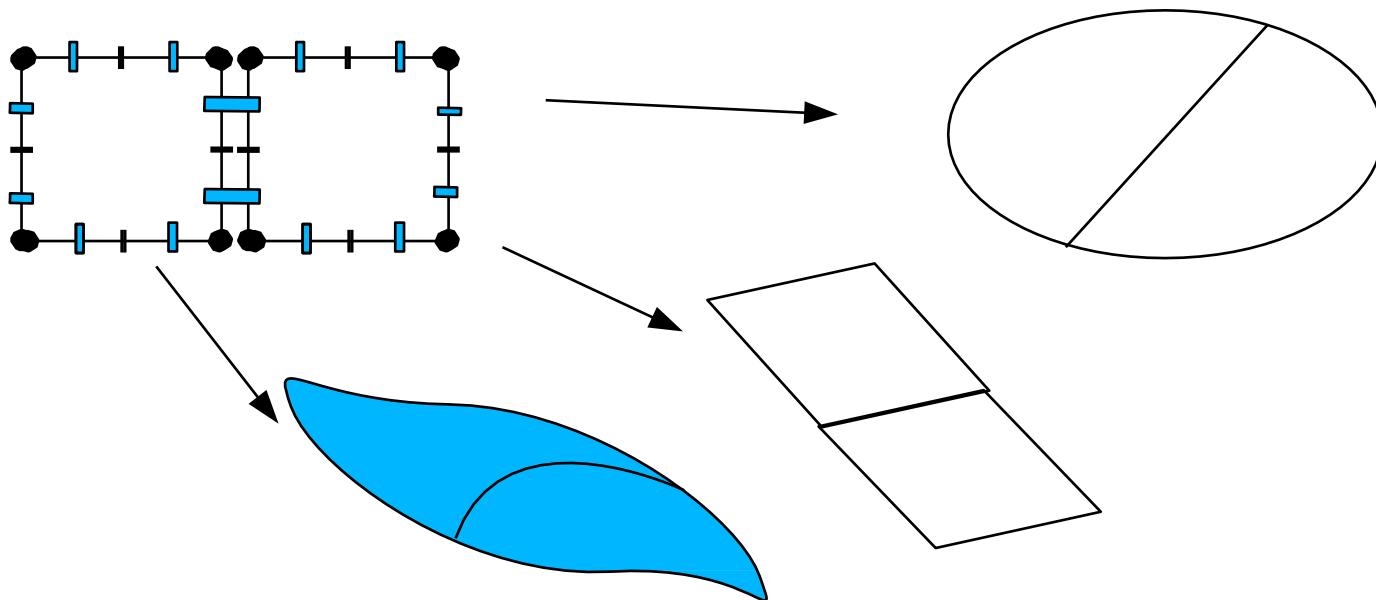
- On retrouve toutes les propriétés énoncées pour les 2-G-cartes, notamment les notions de cellules et de bords.
- Une i -cellule incidente à un brin b est définie par l'ensemble des brins incidents à l'orbite composée de toutes les involutions sauf α_i .
- Le bord d'une 3-G-carte $G(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est définie par la 2-G-carte $(B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ où
 - B' est un sous-ensemble de B réduit aux brins du bord (tels que $\alpha_3(b) = b$)
 - α'_0 et α'_1 sont les restrictions de α_0 et α_1 aux brins du bord ;
 - α'_2 est la restriction de $\alpha_2\alpha_3$ aux brins du bord ;

Cartes généralisées de dimension n ou n-G-cartes

- Une n-G-carte est un n-uplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
 - B est un ensemble fini de brins ;
 - Pour i , $0 \leq i < n-1$, α_i est une involution sans point fixe ;
 - α_n est une involution avec ou sans point fixe ;
 - Pour i, j , $0 \leq i < i+2 \leq j \leq n$, $\alpha_i \alpha_j$ est une involution.

Plongement

- Plusieurs plongements géométriques possibles pour une même carte (topologie des objets)



- Plongement simple : 1 position géométrique par (groupe de) brin(s) associé à un sommet
- Gros avantage pour les algorithmes : traiter séparément topologie et géométrie

Implémentation et opérations

- Structure de donnée très simple pour stocker la topologie d'une 3-G-Carte
 - Plongement simple à part : 1 point par brin ou par orbite de sommet

Class Brin

 Brin* alpha[4]

 Point* P

 bool marked

Class Point

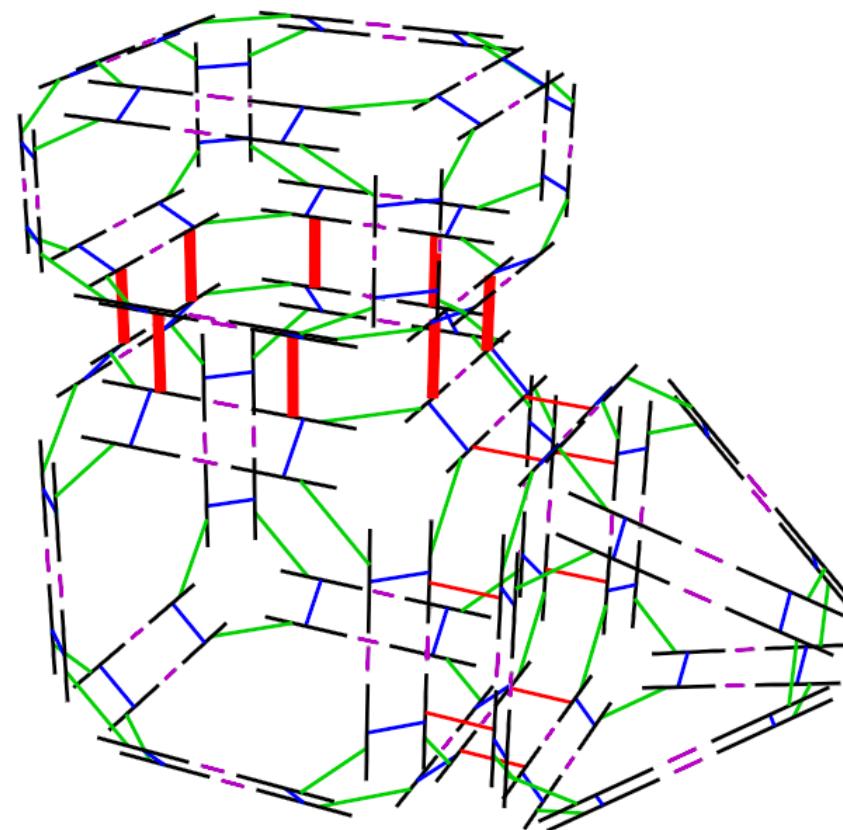
 x, y, z : double

- Manipulation par des opérations topologiques simples garantissant la cohérence
 - Parcours
 - Collage de 2 volumes par couture de faces
 - Éclatement de volume, de face, d'arête
 - Fusion de deux volumes
 - Dualisation
 - Chanfreinage de sommets ou d'arêtes
 - ...

Parcours

Outil de base pour retrouver les orbites (et donc les cellules)

Exemple : parcours d'une face en 3D ?



Parcours

Outil de base pour retrouver les orbites (et donc les cellules)

Exemple : parcours d'une face en 3D

Algorithme 1 : Parcours de la face incidente à b (Version naïve)

$F :: \text{File}$

$\text{push}(F, b)$

Tant que F non-vide:

| $b' \leftarrow \text{pop}(F)$

| Si b' non-marqué:

| | (... traiter b' ...)

| | marquer b'

| | Pour a dans $[0, 1, 3]$:

| | | $\text{push}(F, \text{alpha}[a](b'))$

Démarquer les brins marqués

Parcours

Outil de base pour retrouver les orbites (et donc les cellules)

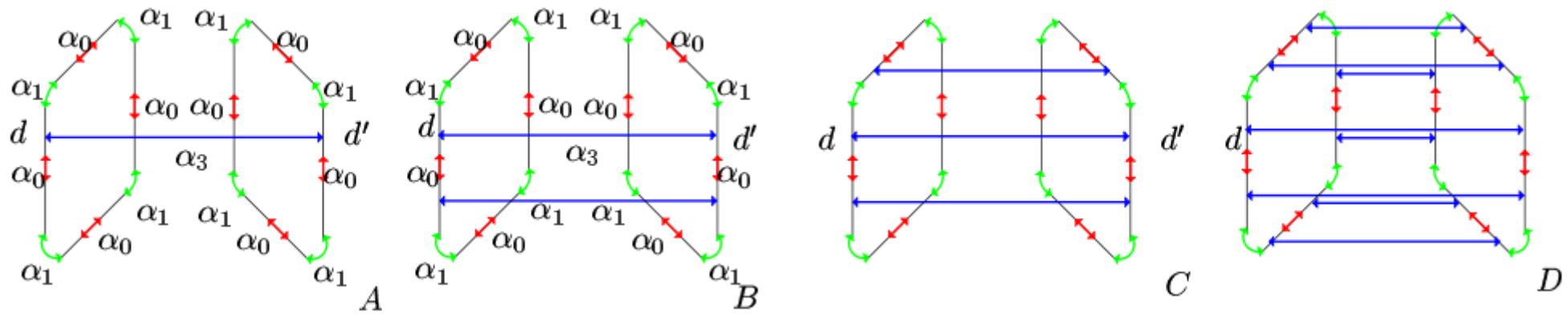
Exemple : parcours d'une face en 3D en utilisant le fait que $\alpha_1 \circ \alpha_3$ et $\alpha_1 \circ \alpha_3$ sont des involutions

Algorithme 2 : Parcours de la face incidente à b (Version optimisée et ordonnée)

```
b' <- b
a_list = [3,0,3,1]
a_index = 0
Faire:
| (... traiter b' ...)
| a_index <- a_index+1 % 4
| a_suiv <- a_list[a_index]
| b' <- alpha[a_suiv](b')
Tant que b' != b
```

Couture de faces

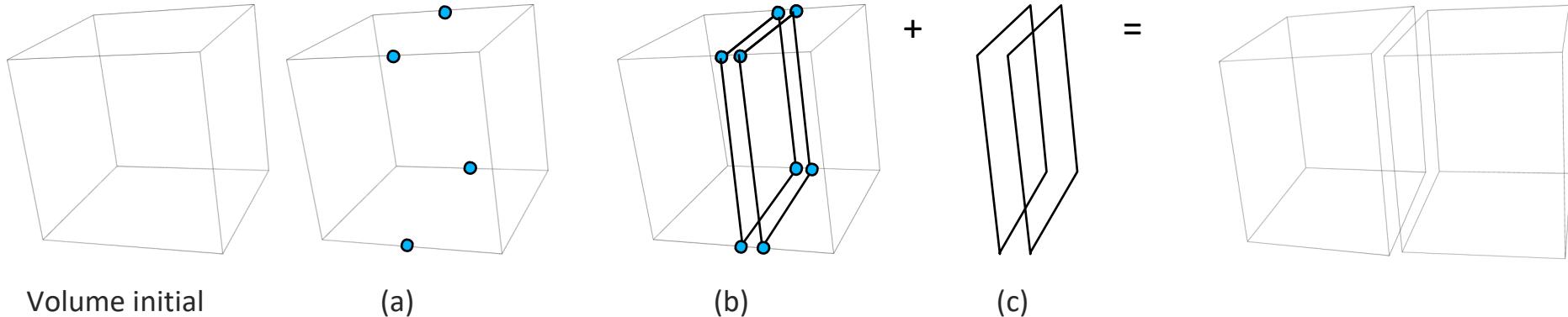
- Doit vérifier que les faces à coudre sont de même degré



- Dans le cas contraire : éclatement d'arête pour les rendre isomorphes

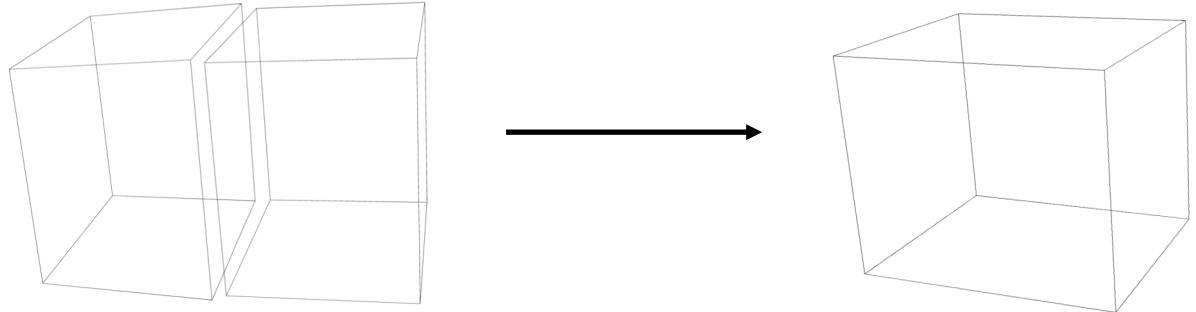
Eclatement de volume

- L'opération d'éclatement de volume peut se décomposer en plusieurs opérations simples :
 - Éclatement d'arêtes (a)
 - Éclatement de faces (b)
 - Ajout de 2 faces (c)

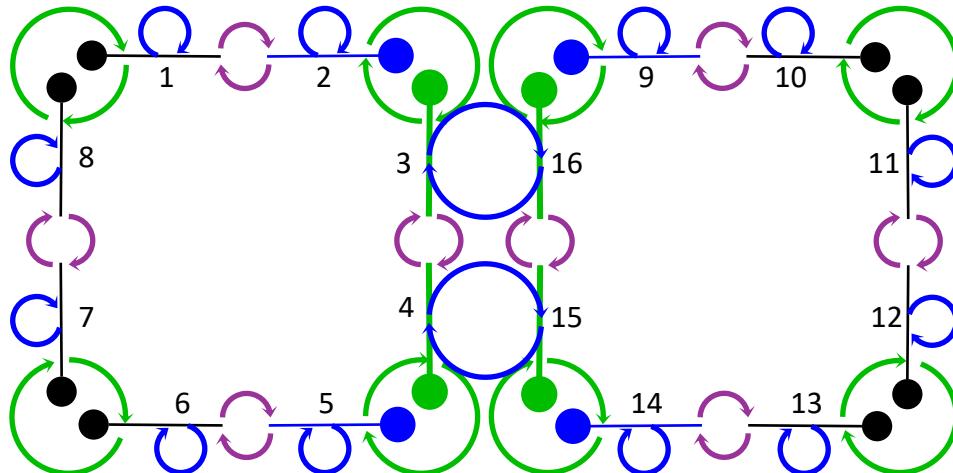


Fusion de cellules

- Opération inverse :



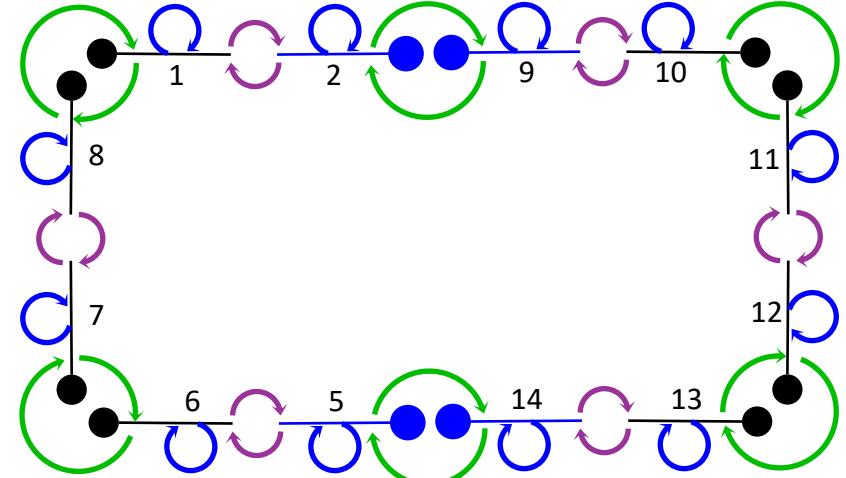
Bien déterminer les brins à supprimer et à recoller : exemple sur un 2-G-Carte



Suppression de l'arête incidente à b:

- Supprimer $C = \langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(b)$
- Recoller $B^S = \alpha_1(C) - C$

$$\forall b' \in B^S, \alpha_1(b') \leftarrow \alpha_1(\alpha_2(\alpha_1(b')))$$



Suppression de cellules

- De façon générale : suppression d'une i-cellule ($i < n$) incidente au brin b

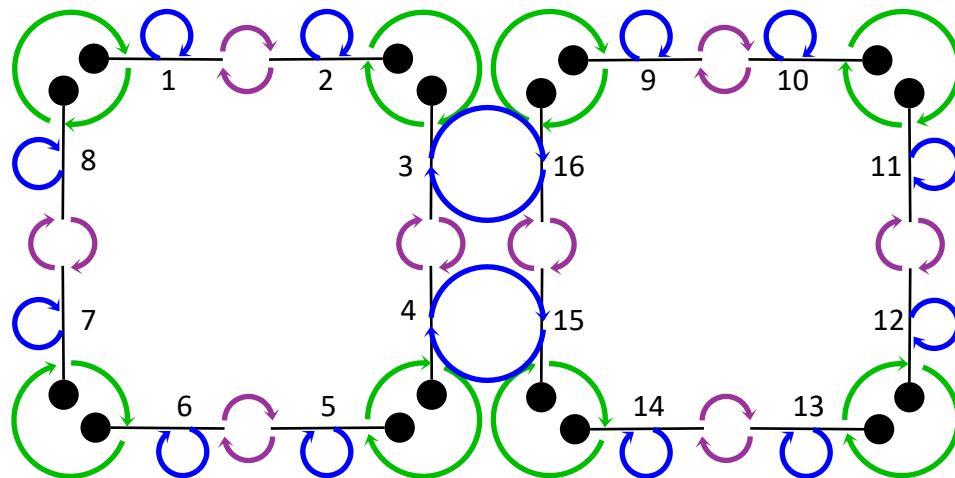
- Orbite à supprimer : $C = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n \rangle(b)$
- Vérifier la cohérence résultante :

$$\forall b' \in C, \alpha_{i+1}(\alpha_{i+2}(b')) = \alpha_{i+2}(\alpha_{i+1}(b'))$$

- Si valide, supprimer C et recoller $B^S = \alpha_i(C) - C$ tel que:

$$\forall b' \in B^S, \alpha_i(b') \leftarrow \alpha_i(\alpha_{i+1}(\alpha_i(b')))$$

Exercice : suppression du sommet incident au brin 10



Suppression de cellules

- De façon générale : suppression d'une i-cellule ($i < n$) incidente au brin b

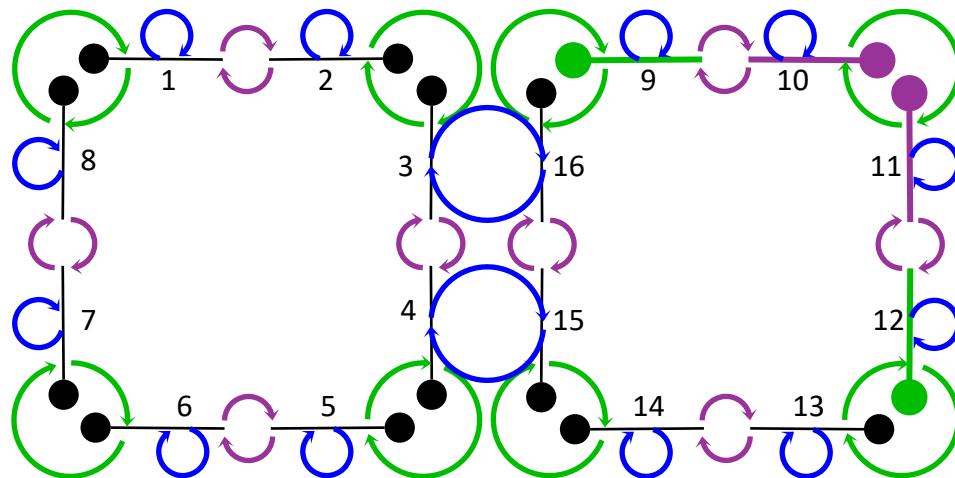
- Orbite à supprimer : $C = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n \rangle(b)$
- Vérifier la cohérence résultante :

$$\forall b' \in C, \alpha_{i+1}(\alpha_{i+2}(b')) = \alpha_{i+2}(\alpha_{i+1}(b'))$$

- Si valide, supprimer C et recoller $B^S = \alpha_i(C) - C$ tel que:

$$\forall b' \in B^S, \alpha_i(b') \leftarrow \alpha_i(\alpha_{i+1}(\alpha_i(b')))$$

Exercice : suppression du sommet incident au brin 10



Suppression de cellules

- De façon générale : suppression d'une i-cellule ($i < n$) incidente au brin b

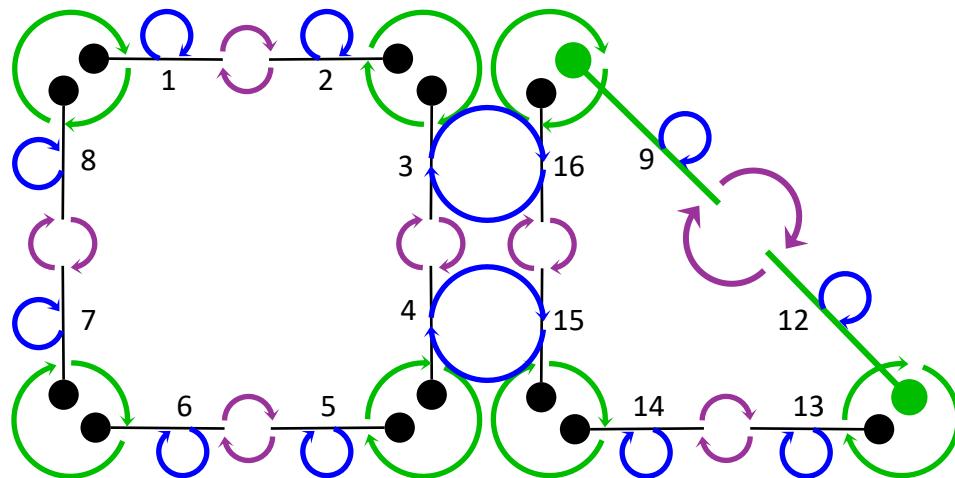
- Orbite à supprimer : $C = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n \rangle(b)$
- Vérifier la cohérence résultante

$$\forall b' \in C, \alpha_{i+1}(\alpha_{i+2}(b')) = \alpha_{i+2}(\alpha_{i+1}(b'))$$

- Si valide, supprimer C et recoller $B^S = \alpha_i(C) - C$ tel que:

$$\forall b' \in B^S, \alpha_i(b') \leftarrow \alpha_i(\alpha_{i+1}(\alpha_i(b')))$$

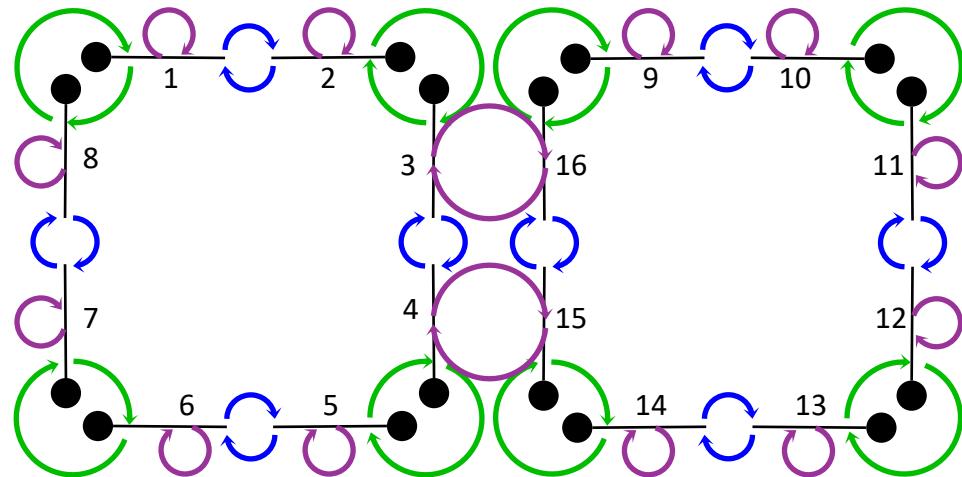
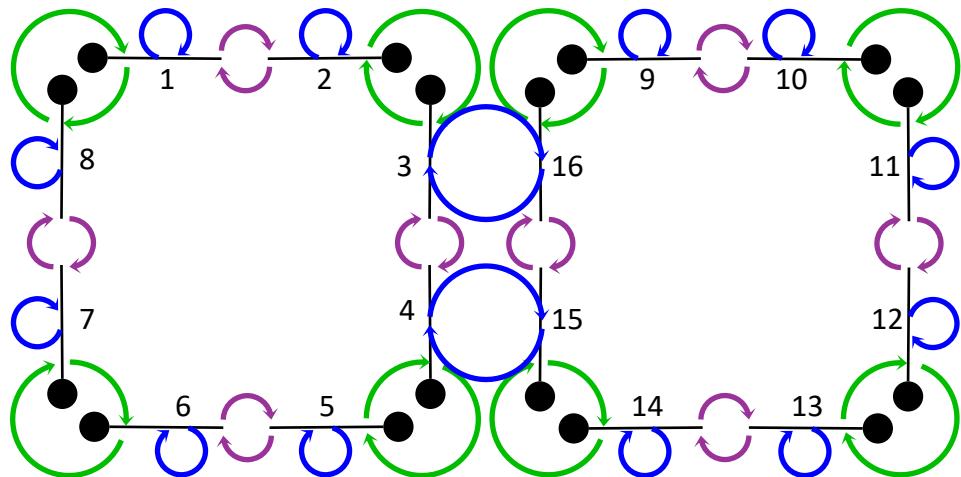
Exercice : suppression du sommet incident au brin 10



Dualisation

- Préserver tous les brins et renverser les relations α_i

$$\forall i \in \{0..n\}, \forall b \in B, \alpha_i b \leftarrow \alpha_{n-i}(b)$$

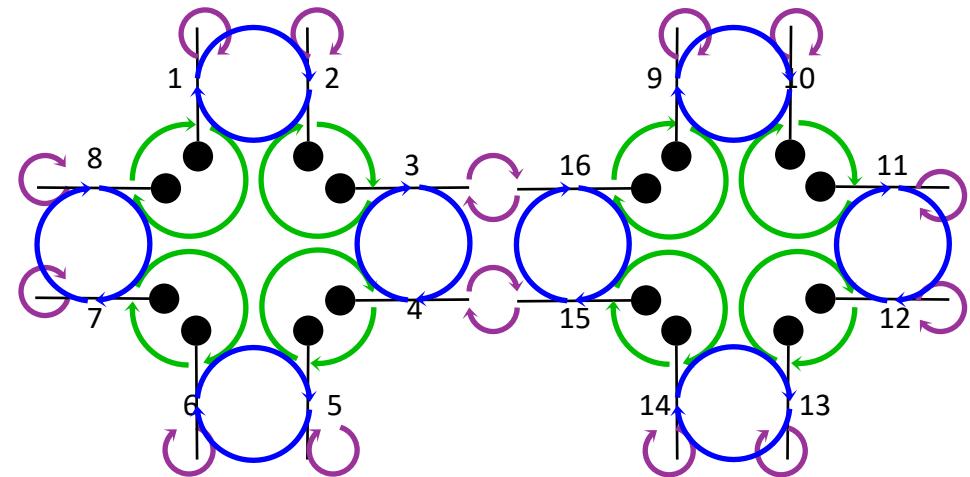
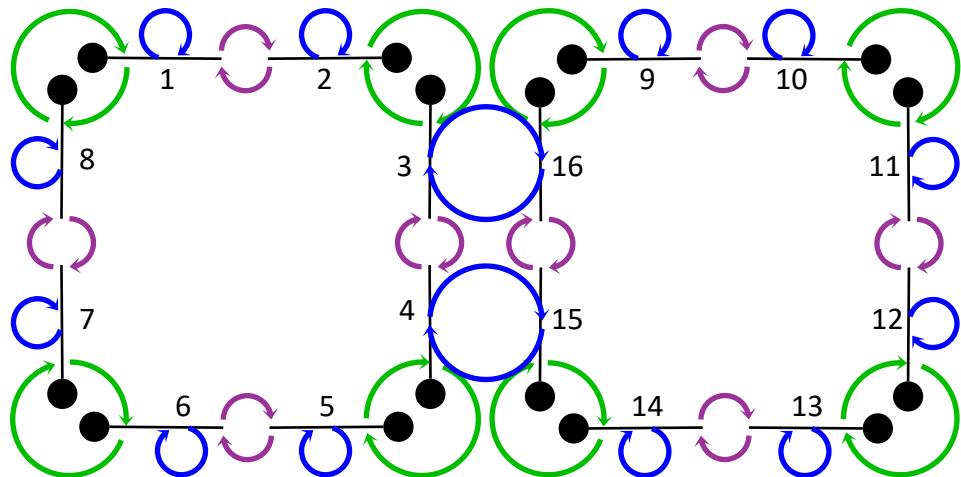


- Changement des orbites décrivant les sommets $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$

Dualisation

- Préserver tous les brins et renverser les relations α_i

$$\forall i \in \{0..n\}, \forall b \in B, \alpha_i b \leftarrow \alpha_{n-i}(b)$$

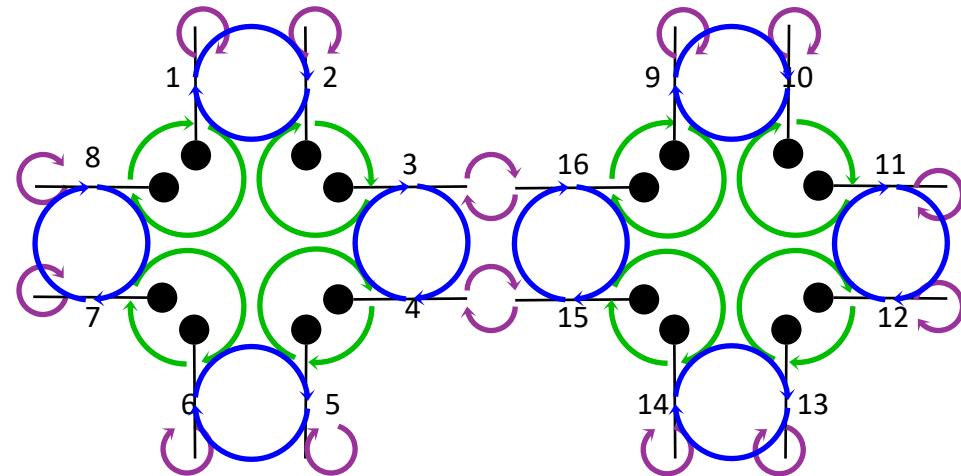
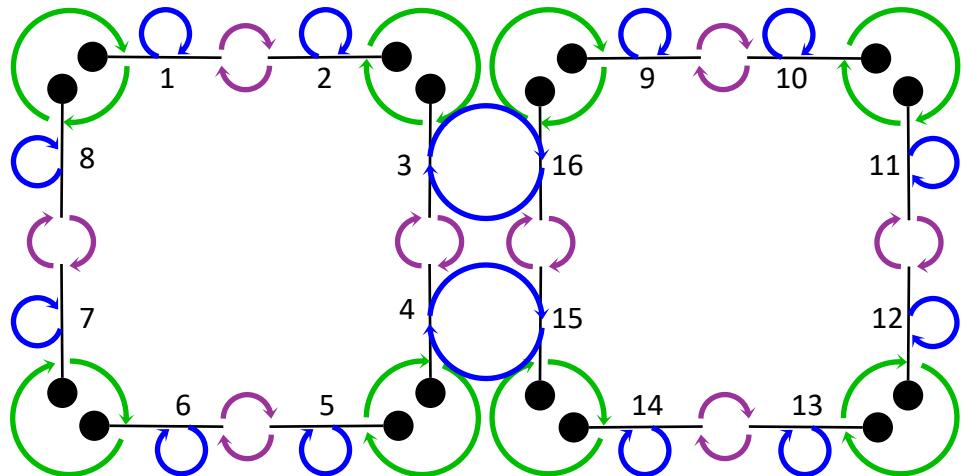


- Changement des orbites décrivant les sommets $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$
- Nécessairement, changement du plongement géométrique

Dualisation

- Préserver tous les brins et renverser les relations α_i

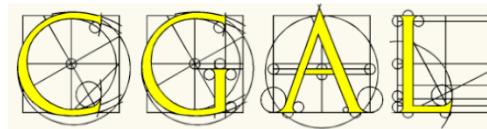
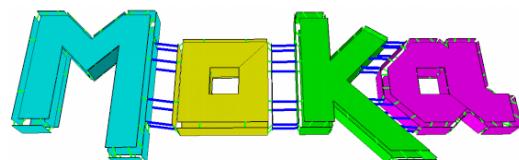
$$\forall i \in \{0..n\}, \forall b \in B, \alpha_i b \leftarrow \alpha_{n-i}(b)$$



- Changement des orbites décrivant les sommets $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$
- Nécessairement, changement du plongement géométrique
- Valide uniquement si α_n sans point fixe...

Conclusion

- **Cartes généralisées :**
 - Un des modèles B-Rep les plus intuitifs et concis en termes de définition
 - Générique, pouvant représenter des objets en n-dimensions
 - Implémentation relativement simple, quoique gourmande en mémoire
- Manipulation de subdivisions volumiques complexes:
 - Avec une grande variété et flexibilité d'opérations sur la topologie (extension, fusion, division, ...)
 - En ayant un traitement indépendant de la géométrie
- Implémentations dans plusieurs librairies open-source

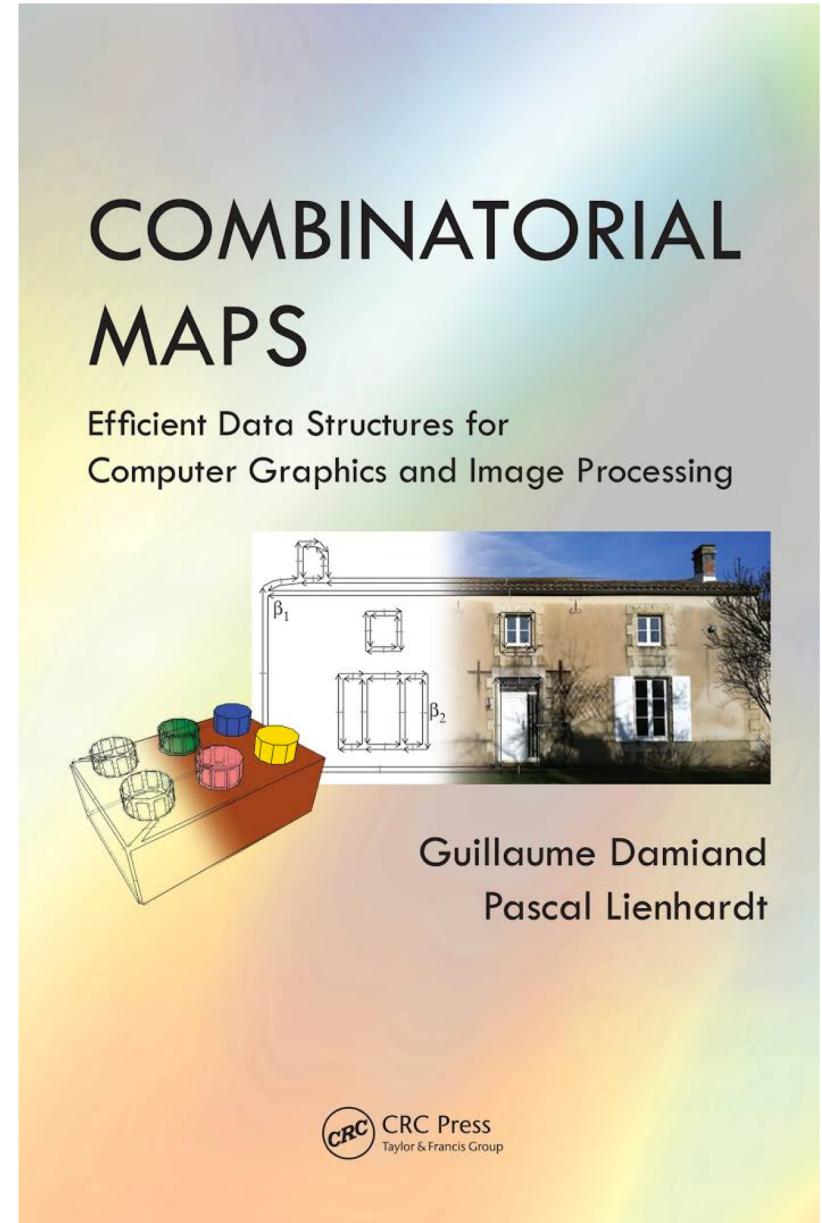


Références

Références sur les cartes généralisées :

- P. Lienhardt. *Topological models for boundary representation: a comparison with n-dimensional generalized maps.* Computer-Aided Design, Volume 23, Issue 1 Jan./Feb. 1991.
- P. Lienhardt. *N-dimensional generalized topological maps. and cellular quasi-manifolds.* Journal of Computational Geometry and Applications , 1994.
- P. Lienhardt. *Aspects in Topology-Based Geometric Modeling.* Proceedings of the 7th International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery, 1997.
- J.F. Dufourd. *An obj3 functional specifications for the boundary representation.* ACM Symposium on Solid Modeling Foundation and CAD/CAM Applications, 1991
- Y. Bertrand, J.F. Dufourd, J. Françon, and P. Lienhardt. *Algebraic specifications and developments in geometric modeling.* Avril 1993. TAPSOFT'93, Orsay.

Références



Références

Références sur les "autres" structures combinatoires

- [AFF85] S. Ansaldi, L. de Floriani, B. Falcidieno, *Geometric Modeling of Solid Objects by Using a Face Adjacency Graph Representation*, Computer Graphics, 19, 3, 131-139, 1985.
- [Baum75] B. Baumgart, *A polyhedron Representation for Computer Vision*, AFPIIS Nat. Conf. Proc., 44, 589-596, 1975.
- [Bris89] E. Brisson, *Representing Geometric Structures in D Dimensions :Topology and Order*. Actes de 5th A.C.M. Symposium on Computational Geometry, Saarbrücken, 218-227, juin 1989.
- [CR91] G. Crocker, W. Reinke. *An editable Non-Manifold Boundary Representation*. Computer Graphics and Applications, 11, 2, 1991
- [DL87] D. Dobkin, M. Laszlo. *Primitives for the Manipulation of Three-Dimensional Subdivisions*. In Third ACM Symposium on Computational Geometry. Juin 1987

Références

Références sur les "autres" structures combinatoires (suite)

- [GS85] Guibas, L. and Stolfi, J., *Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams*, ACT Transactions On Graphics, 4(2), April, 1985.
- [LL90] Y. Luo, G. Lukacs, *A boundary representation for form features and non-manifold solid objects*. In Proceedings of Symposium on Solid Modeling and Applications'1991.
- [Sobh89] C. Sobhanpanah, *Extension of a boundary representation technique for the description of N dimensional polytopes*. Computers & Graphics 13(1): 17-23, 1989
- [Tutt84] W. Tuttle, *Graph theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison Wesley, 1984
- [Weil85] K. Weiler, *Edge-Based Data Structures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments*, IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 5, no. 1, pp. 21-40, Jan., 1985
- [Weil86] K. Weiler, *The radial edge structure: a topological representation for non-manifold geometric boundary modeling*, IFIP WG5.2 Working Conference on Geometric Modeling for CAD Applications, Rensselaerville, NY, 12-14, May 1986

TP

https://github.com/fredboudon/gmap_exercise

The screenshot shows a GitHub repository page for 'gmap_exercise'. At the top, there are buttons for 'Branch: master' (with a dropdown arrow), 'New pull request', 'Create new file', 'Upload files', 'Find File', and a green 'Clone or download' button. Below this, a list of files with their commit history is shown:

File	Commit Message	Time Ago
common	first draft	13 hours ago
external	first draft	13 hours ago
src	improve TP	2 hours ago
.gitignore	Initial commit	13 hours ago
CMakeLists.txt	first draft	13 hours ago
README.md	improve TP	2 hours ago

Below the file list is a single-line commit for 'README.md':

fredboudon improve TP

Latest commit a573dc5 2 hours ago

At the bottom of the page is the content of the 'README.md' file:

```
Cartes Combinatoires
```

Le canevas du projet implémentant la structure de données GMap sont dans le répertoire src. Comme les TPs précédents pour compiler le projet, dézippez le, créez un répertoire build et utilisez `cmake ...`.

Les spécifications de la structure sont dans le fichier `gmap.hpp`. Les fonctions à compléter sont dans `gmap.cpp`. Les fonctions déjà implémentées sont dans `gmap_helper.cpp`. La fonction d'affichage (inspirée du TP précédent) est dans le fichier `gmap_display.cpp`. Le fichier de test des différentes fonctions s'appelle `gmap_main.cpp`. Ses fonctions sont nommées `questionX` et correspondent aux exercices qui suivent. Pour les tester, il suffit de les appeler dans la fonction `main` à la fin du fichier `gmap_main.cpp`.

1/ Implémenter une structure de 2-G-carte.

Cette GMap sera encodée en représentant chaque brin par un identifiant. Chaque relation alpha (0, 1 et 2) sera codée par un dictionnaire (dict). Etudiez et complétez si nécessaire la structure suivante

```
class GMap {
public:

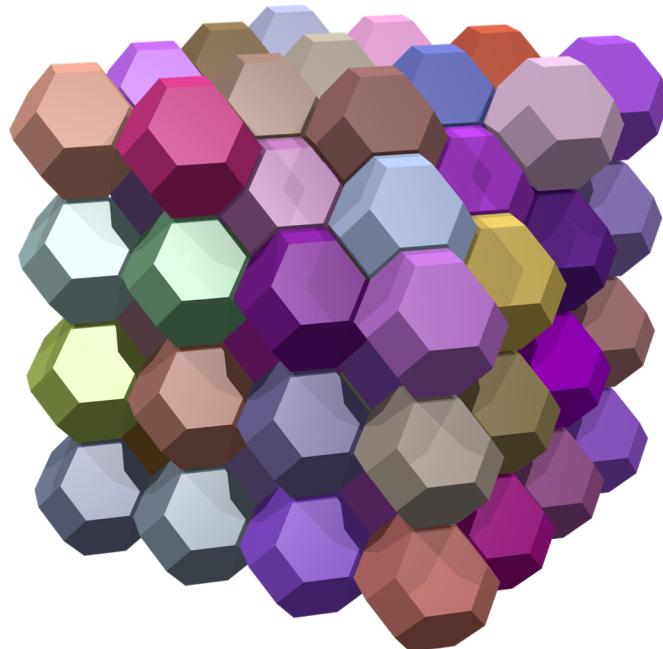
    // id type
    typedef unsigned long int id_t;
    // degree type. should be in [0,1,2]
    typedef unsigned char degree_t;

    // a triplet of alpha value
    struct alpha_container_t {
        alpha_container_t(id_t a0 = 0, id_t a1 = 0, id_t a2 = 0) {
            values[0] = a0; values[1] = a1; values[2] = a2;
        }
        id_t& operator[](degree_t index) { return values[index]; }
        const id_t& operator[](degree_t index) const { return values[index]; }
    };
};
```


Représentation des subdivisions d'un espace topologique

Partition d'un espace en un complexe formé de **cellules**

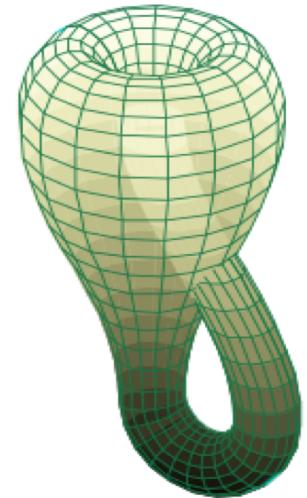
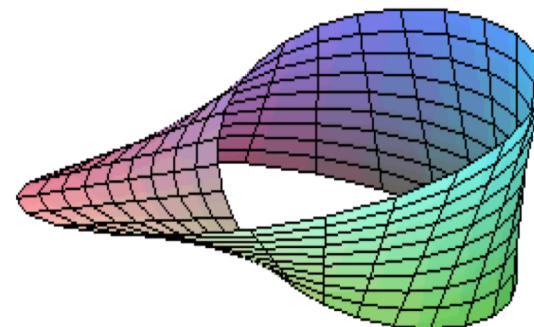
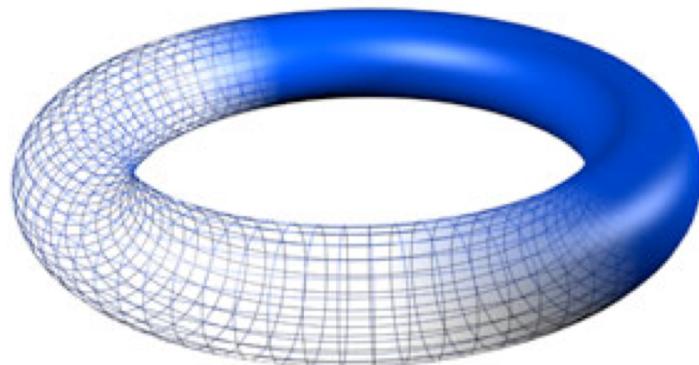
- Cellules de dimension 0, 1, 2, 3...
- Subdivision de \mathbb{R}^2 : partition en sommets, arêtes et cellules (surficiques)
- Subdivision de \mathbb{R}^3 : partition en sommets, arêtes, faces et cellules



Topologie / Géométrie :

- Adjacence
- Incidence
- Plongement

Formule d'Euler-Poincaré (1752)



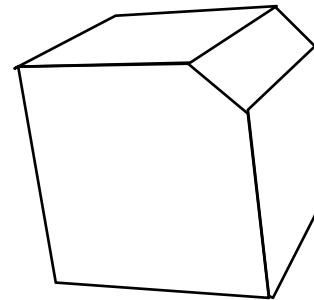
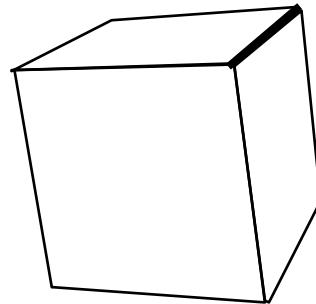
Tore: 0

Ruban de Möbius : 0

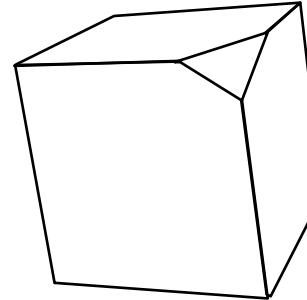
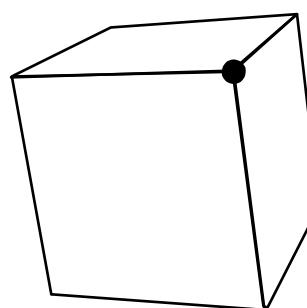
Bouteille de Klein : 0

Chanfreinage

- Les opérations de chanfreinage consistent en l'ajout de faces :
 - En remplacement d'une arête (a) ;
 - En remplacement d'un sommet (b).



(a) Chanfreinage d'une arête.



(b) Chanfreinage d'un sommet.