

# Rapport - Double Descente - Emmett Haddad

Emmett Haddad, Encadrants: Nicolas Vayatis, Samuel Gruffaz

22/05/2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Régimes et Double Descente</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Modèles</b>	<b>3</b>
3.1	Modèle par MLP: (Multi Layer Perceptron)	3
3.2	Modèle linéaire:	3
<b>4</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Focus techniques</b>	<b>4</b>
5.1	Théorèmes de Belkin et al.	4
5.2	Théorème de Schaeffer et al.	5
5.3	Théorème de Kuzborskij et al.	5
5.4	Théorème de Francis Bach	5
5.5	Théorème de Zhenyu et al.	5
<b>6</b>	<b>Des résultats</b>	<b>6</b>
6.1	Régression linéaires: Résultats théoriques	6
6.2	Régression polynomial: Résultats expérimentaux	8
6.3	Minimisation par descente de gradient	12
6.3.1	Descente de gradient simple	12
6.3.2	Descente de gradient à pas variable	13
6.3.3	Analyse de la plus petite valeur propre	14
6.3.4	Descente de gradient stochastique	14
6.4	Résultats sur les MLP	15
6.4.1	Résultats expérimentaux sur les MLP	15
6.4.2	Expressions théorique sur les MLP	15

## 1 Présentation du problème

Un cours expliquant ce problème : [9]

### Définition 1. Fonction cible

On souhaite approximer une fonction  $y^*$  avec  $x$  et  $y$  des variables aléatoires.  
 $y^* : x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{E}_{(x,y) \sim \mathcal{P}}(y|x) \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}$

### Définition 2. Echantillons

On se base sur un **échantillons d'apprentissage**  $\mathcal{D} := \{(x_n, y_n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\}_{n=1}^N$  où  $y_n := y(x_n)$ . On modélise ici :  $y = y^* + \epsilon$  où  $\epsilon$  représente le bruit tel que  $\mathbb{E}(\epsilon|x) = 0$ , et  $\mathbb{V}(\epsilon) = \sigma^2$ .

### Définition 3. Estimateur

- On veut trouver déterminer un **estimateur**  $\hat{y}_{\mathcal{D}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tel que  $\hat{y}_{\mathcal{D}} \approx y$  ( aus sens du risque ci-dessous)
- $\hat{y}_{\mathcal{D}} \in \mathcal{H}$  un espace de fonctions

La **complexité** de  $\mathcal{H}$  est représentée ici par  $P$  le nombre de paramètres, bien que la meilleur notion actuelle de complexité est la complexité de Rademacher[9] qui est la capacité d'une classe de fonctions à s'adapter à du bruit.

### Définition 4. Erreur ponctuelle

$\forall x_0 \in \mathcal{X}$

$$Err(x_0) := \mathbb{E}_{\mathcal{D}, \epsilon}((y - \hat{y})(x_0)^2) = \sigma^2 + \mathbb{V}_{\mathcal{D}}(\hat{y}(x_0)) + [\mathbb{E}_{\mathcal{D}}((y^* - \hat{y})(x_0))]^2 \quad (1)$$

Vrai risque et risque empirique:

$$\mathcal{R}(\hat{y}) = \mathbb{E}_{(x,y) \sim \mathcal{P}}((y - \hat{y}(x))^2), \quad \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{D}}(\hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}(x_i))^2 \quad (2)$$

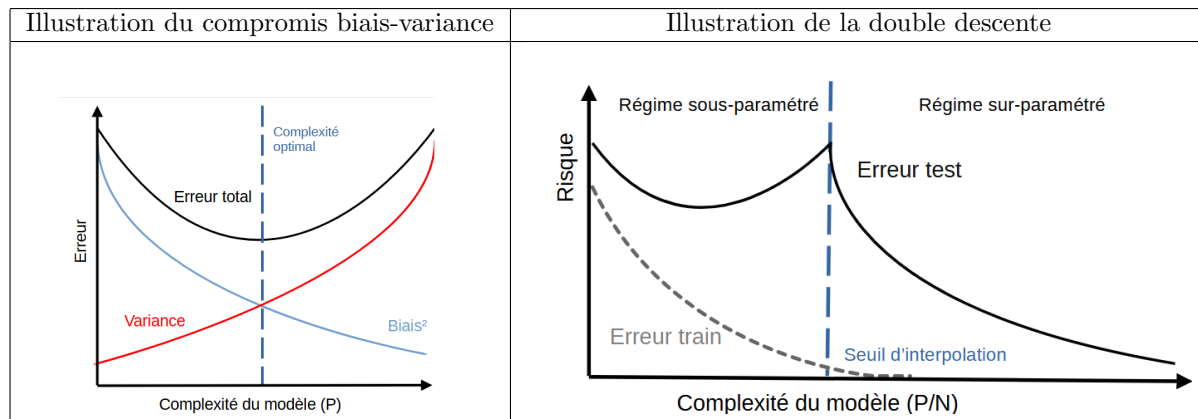
## 2 Régimes et Double Descente

Notions de régimes:

- **Régime sous-paramétré:**  $P < N$  et **régime sur-paramétré:**  $P > N$
- **Seuil d'interpolation:**  $P = N$

Notion de Double Descente: On dit qu'il y a **double descente** quand l'erreur global minimal dans le régime sur-paramétré est inférieur à celle dans le régime sous-paramétré.

En réalité, la double descente est ce même phénomène mais relativement à la complexité de la classe de fonctions[3].



### 3 Modèles

#### 3.1 Modèle par MLP: (Multi Layer Perceptron)

**Définition 5.** *Modèle MLP*

- $\hat{y}_{\mathcal{D}}(x) = W_L \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma \circ W_1(x)$ ,  $W_l(x_l) = A_l x_l + b_l$
- $\sigma(x) = \max(0, x)$  fonction *ReLU*.
- Par descente de gradient (stochastique).

En pratique, on utilise ce type de modèle, mais leur résolution étant assez compliqué, on préfère étudier le modèle suivant plus simple.

#### 3.2 Modèle linéaire:

**Définition 6.** *Modèle linéaire*

- $\mathcal{F} := \{f_i(x), i \in \mathbb{N}\}$  ensemble de features.
- $X = [x_1, \dots, x_N]^T \in \mathcal{M}_{N,D}(\mathbb{R})$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_N]^T$
- $\Phi_P(x) = [f_1(x), \dots, f_P(x)]^T$  et  $Z = [\Phi_P(x_1), \dots, \Phi_P(x_N)]^T = [f_j(x_i)] \in \mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{R})$
- $\hat{y}_{\mathcal{D}} = \Phi_P^T(x) \hat{\beta}$ , pour  $\hat{\beta} = Z^\dagger Y$
- Risque empirique  $\hat{\mathcal{R}}(y) = \frac{1}{N} \|Y - Z\beta\|_2^2$
- Modèle simple  $f_i(x) = e_i(x)$  et  $X = Z$

**Définition 7.** *Optimisation par descente de gradient*

- Descente de gradient simple:

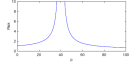
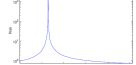
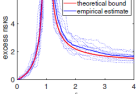
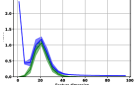
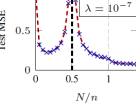
$$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \alpha_t \nabla \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_{\hat{\beta}_t})$$

- Descente de gradient stochastique:

$$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \alpha_t \nabla \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_{\hat{\beta}_t}, \beta_J)$$

où  $J$  variable aléatoire entre 1 et  $P$ .

## 4 Etat de l'art

	Features/Modèle	Résultats	Méthodes	Graphe
Belkin et al. [2]	$f_p(x) = e_{i_p}(x)$ , coordonnées aléatoires	Expression du vrai risque, non-asymptotique	Inverse de Wishart	
Belkin et al. [2]	$f_p(\omega) = \omega^{i_p}$ sur le cercle complexe Racine de l'unité aléatoires pour le dataset $\mathcal{D}$	Equivalent du vrai risque, asymptotique	Transformée de Stieltjes	
Francis Bach [1]	$\hat{y}(x) = (S^T x)^T \hat{\beta}$ et $Z = XS$ où S matrice de vecteurs sub-Gaussien.	Equivalent du risque d'excès, asymptotique	Transformée de Stieltjes	
Kuzborskij et al. [6]	$f_p(x) = e_p(x)$ Descente de gradient et non pseudo-inverse	Majoration du vrai risque non-asymptotique	Inégalité de concentration	
Zhenyu et al. [7]	$f_p(x) = \cos((v_p, x))$ ou sin, pseudo-inverse	Limite MSE, asymptotique	Etude de la résolvante	

## 5 Focus techniques

### 5.1 Théorèmes de Belkin et al.

**Théorème 1.** *Belkin et al.- base canonique [2]*

*Dans le cas où l'on sélectionne de manière uniforme  $P$  coordonnées dans la base canonique comme features.*

- Si  $P < N - 1$ :  

$$\mathbb{E}((y - \hat{y})^2) = [(1 - \frac{P}{D})\|\beta^*\|^2 + \sigma^2](1 + \frac{P}{N-P-1})$$
- Si  $P > N + 1$ :  

$$\mathbb{E}((y - \hat{y})^2) = \|\beta^*\|^2[1 - \frac{N}{D}(2 - \frac{D-N-1}{P-N-1})] + \sigma^2(1 + \frac{N}{P-N-1})$$
- Sinon:  

$$\mathbb{E}((y - \hat{y})^2) = +\infty$$

Preuve dans les grandes lignes:

On utilise les propriétés du pseudo-inverse (propriété de projecteur) et des manipulations sur la trace. On utilise ensuite l'espérance de l'inverse de Wishart.

## 5.2 Théorème de Schaeffer et al.

**Théorème 2.** *Schaeffer et al.[8]*

On se place dans le cas  $y = x^T \beta^* + e$  et  $\hat{\beta}$  donné par le pseudo inverse. On se place dans le cas ou  $X$  est de rang maximale. On se donne  $E = [e_1, \dots, e_N]^T$  et  $X = USV^T$  représentation SVD.

- **Régime sous-paramétré:**

$$\hat{y}(x) - y^*(x) = \sum_{r=1}^R \frac{1}{\sigma_r} (x^T v_r)(u_r^T E)$$

- **Régime sur-paramétré:**

$$\hat{y}(x) - y^*(x) = x^T (X^T (X X^T)^{-1} X - I) \beta^* + \sum_{r=1}^R \frac{1}{\sigma_r} (x^T v_r)(u_r^T E)$$

## 5.3 Théorème de Kuzborskij et al

**Théorème 3.** *Kuzborskij et al[6] en régime sur-paramétrisé*

$E_T := \mathcal{R}(\hat{y}_{\beta_T}) - \mathcal{R}(\hat{y}_{\beta_*})$  où  $\beta_T$  est le vecteur obtenu au bout de  $T$  itérations de descente de gradient de pas  $\alpha$ .

$$\mathcal{E}_T \leq \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{N} (\sqrt{D} - \sqrt{N} - 1)_+^2 \right)^{2T} + \frac{1}{\sqrt{N}} \right] \|\beta^*\|^2 \quad (3)$$

## 5.4 Théorème de Francis Bach

**Théorème 4.** *Francis Bach[1]*

On pose  $df_i(\lambda) = \text{tr}(\Sigma^i (\Sigma + \lambda I)^{-i})$ ,  $y = x^T S \beta^* + \epsilon$ . On pose  $y = x^T S \beta^* + \epsilon$ ,  $df_1(K_P) \sim P$ ,  $df_1(K_N) \sim N$  Alors:

- Si  $\delta < 1$ :

$$\mathbb{E}(R^{(var)}(\hat{\beta})) \sim \frac{\sigma^2 \delta}{1 - \delta}$$

$$R^{(biais)}(\hat{\beta}) \sim \frac{K_P}{1 - \delta} \|\beta^*\|_{\Sigma(\Sigma + K_P I)^{-1}}^2$$

- Si  $\delta > 1$ :

$$\mathbb{E}(R^{(var)}(\hat{\beta})) \sim \frac{\sigma^2}{\delta - 1} + \frac{\sigma^2 df_2(K_N)}{N - df_2(K_N)}$$

$$R^{(biais)}(\hat{\beta}) \sim \frac{N K_N^2}{N - df_2(K_N)} \|\beta^*\|_{\Sigma(\Sigma + K_N I)^{-2}}^2 + \frac{K_N}{\delta - 1} \|\beta^*\|_{\Sigma(\Sigma + K_N I)^{-1}}^2$$

## 5.5 Théorème de Zhenyu et al.

**Théorème 5.** *Théorème de Zhenyu et al. [7]*

Avec  $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_P \end{bmatrix}$  où  $w \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_D)$  et  $Z = \begin{bmatrix} \cos(WX) \\ \sin(WX) \end{bmatrix}^T$

On pose  $E_{test} = \frac{1}{N'} \|Y' - Z_{X'} \hat{\beta}\|_2^2$ , sous certaines hypothèses sur  $X'$  et  $N, P, D$  on a asymptotiquement:  $E_{test} - \overline{E_{test}} \rightarrow 0$

$$\overline{E_{test}} = \frac{1}{N'} \|Y' - \frac{P}{N} \Phi' \overline{Q} Y\|^2 + \frac{P^2}{N^2 N'} \left[ \frac{\Theta_{cos}}{(1 + \delta_{cos})^2} \frac{\Theta_{sin}}{(1 + \delta_{sin})^2} \right] \Omega \begin{bmatrix} Y^T \overline{Q} K_{cos} \overline{Q} Y \\ Y^T \overline{Q} K_{sin} \overline{Q} Y \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 6 Des résultats

### 6.1 Régression linéaires: Résultats théoriques

On considère:  $\Phi_P(x) = [f_1(x), \dots, f_P(x)]^T$  où  $f_p : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\hat{y}(x) = \Phi_P^T(x)\hat{\beta}$ .

Avec  $(f, g)_X = \sum_{n=1}^N f g(x_n)$ ,  $\{f, g\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})}$  et  $G_P^x(z) = \sum_{p=1}^P f_p(x) z^p$

**Théorème 6.** *Expression de l'estimateur*

Si  $P < N$ :

$$\hat{y}(x) = \Phi_P^T(x)(Z^T Z)^{\dagger} Z^T Y = [f_1(x), \dots, f_P(x)][(f_i, f_j)_X]^{\dagger} \begin{bmatrix} (f_1, y)_X \\ \vdots \\ (f_P, y)_X \end{bmatrix} \quad (5)$$

Si  $P > N$ :

$$\hat{y}(x) = \Phi_P^T(x) Z^T (Z Z^T)^{\dagger} Y = ([\{G_P^{x_i}, G_P^{x_j}\}]^{\dagger} [\{G_P^{x_i}, G_P^{x_j}\}])^T Y \quad (6)$$

**Théorème 7.** *Décroissance du paramètre  $\hat{\beta}$*

Dans le régime sur-paramétré,  $\|\hat{\beta}(P)\|_2$  est décroissante à partir du moment où le rang de la matrice  $Z$  devient maximale i.e  $\text{rg}(Z) = N$ .

*Proof.* En effet, en supposant  $\text{rg}(Z) = N$ , nous avons ce résultat par l'étude du Lagrangien [8], qu'il s'agit du minimum global pour la norme euclidienne dans l'espace affine  $\hat{\beta} + \text{Ker}(Z) = \{\beta, Y = Z(P)\beta\}$ :

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^P, \forall \gamma \in \mathbb{R}^N \mathcal{L}_P(\beta, \gamma) = \|\beta\|_2^2 + \gamma^T (Y - Z(P)\beta) \quad (7)$$

En effet la solution de  $\nabla \mathcal{L}_P(\beta, \gamma) = 0$  est  $\hat{\beta}(P)$ . C'est donc l'unique solution de  $Y = Z(P)\beta$  de norme minimale.

Et on a  $\hat{\beta}'(P+1) := \begin{bmatrix} \hat{\beta}(P) \\ 0 \end{bmatrix}$  est aussi solution de  $Y = Z(P+1)\beta$  donc  $\|\hat{\beta}(P+1)\|_2 \leq \|\hat{\beta}'(P+1)\|_2 = \|\hat{\beta}(P)\|_2$ . □

On remarque que ce phénomène ( $\text{rg}(Z) = N$ ) survient APCR dans le cas de la régression polynomial à  $D$  variables car il suffit de pouvoir extraire une matrice de Vandermonde (quitte à changer de base) par exemple, quelle que soit la dimension.

On note  $E$  paramètres pour l'espace global, et on note  $P$  paramètres et  $P^C$  les autres paramètres parmi ces  $E$  paramètres. On rappelle  $Z_P = \Phi_P^T(X)$ ,  $Z_{P^C} = \Phi_{P^C}^T(X)$ ,  $Z_{\infty} = \Phi_E^T(X) = [Z_P, Z_{P^C}]$

**Théorème 8.** *Expression de l'excès de risque renormalisé*

On pose  $\Phi_{\infty}(x) = \begin{bmatrix} \Phi_P(x) \\ \Phi_{P^C}(x) \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{E}(\hat{y}, \beta^*) := \mathcal{R}(\hat{y}) - \mathcal{R}(y^*)$ , où l'on suppose  $y^*(x) = \Phi_{\infty}(x)^T \beta^*$  avec  $E \in \mathbb{N}$  features quelconques. On suppose que  $x$  est réparti dans ce système de features tel que  $\mathbb{E}(\Phi_{\infty}(x)\Phi_{\infty}(x)^T) = \sigma_x^2 I_E$ .

On a alors:

$$\mathcal{E}(\hat{y}, \beta^*) = \sigma_x^2 \cdot \mathbb{E}(\|\hat{\beta} - \beta^*\|^2) = \sigma_x^2 \cdot (\mathbb{E}(\|\beta^*\|^2) + \mathbb{E}(\|Z_P^{\dagger} Z_{P^C} \beta_{P^C}^*\|^2) - \text{tr}[\mathbb{E}(Z_P^{\dagger} Z_P) \mathbb{E}(\beta_P^* \beta_P^{*T})]) \quad (8)$$

Remarque: Dans le cas d'une base orthonormée sur un cube  $I$ , avec  $x$  suivant une loi uniforme, on a  $\mathbb{E}_{x \rightarrow \mathcal{U}(I)}(f_i(x)f_j(x)) = \frac{1}{V(I)} \delta_{i,j}$

Ainsi on a:  $\mathbb{E}(\Phi_{\infty}(x)\Phi_{\infty}(x)^T) = \frac{1}{V(I)} I_E$  et alors  $\mathcal{E}(\hat{y}) = \frac{1}{V(I)} \cdot \mathbb{E}(\|\hat{\beta} - \beta^*\|^2)$

Remarque :

On a dans le cas de la descente de gradient:

$$\mathcal{E}(\hat{y}_{grad}, \beta^*) = \sigma_x^2 \cdot \mathbb{E}(\|\hat{\beta}_{grad} - \beta^*\|^2) = \sigma_x^2 \cdot \mathbb{E}(\|\hat{\beta}_{grad} - \hat{\beta}_{inv}\|^2 + 2 \langle \hat{\beta}_{grad} - \hat{\beta}_{inv}, \hat{\beta}_{inv} - \beta^* \rangle + \|\hat{\beta}_{inv} - \beta^*\|^2)$$

*Proof.* On s'inspire de la preuve de Belkin et al [2]. On note de même  $\beta_P$  pour parler de P composante de  $\beta$ , de même pour les vecteurs colonnes des matrices. On note  $\beta_{PC}$  pour les autres composantes.

$\mathcal{R}(\hat{y}) = \mathbb{E}_{\mathcal{P}}((y - \hat{y}(x))^2) = \mathcal{R}(y^*) + \mathbb{E}_{\mathcal{P}}((y^*(x) - \hat{y}(x))^2)$  car  $\mathbb{E}(y(x) - y^*|x) = 0$  par hypothèse sur le bruit.

D'où on a  $\mathcal{R}(\hat{y}) - \mathcal{R}(y^*) = \text{tr}[\mathbb{E}(\Phi_{\infty}(x)\Phi_{\infty}(x)^T)\mathbb{E}((\hat{\beta} - \beta^*)(\hat{\beta} - \beta^*)^T)] = \sigma_x^2 \mathbb{E}(\|\hat{\beta} - \beta^*\|^2)$

On pose donc :  $\mathcal{E}(\hat{y}) := \mathcal{R}(\hat{y}) - \mathcal{R}(y^*)$  que l'on va tenter d'exprimer.

On a  $Y = Z_{\infty}\beta^*$  et  $Z_{\infty} = [Z_P, Z_{PC}]$  D'où  $Y = Z_P\beta_P^* + Z_{PC}\beta_{PC}^*$ . On pose  $\Pi_{Z_P} := Z_P^{\dagger}Z_P$  le projecteur orthogonale sur  $\text{Im}(Z_P)$ . De plus on a  $\hat{\beta}_P = Z_P^{\dagger}Y$  et  $\hat{\beta}_{PC} = 0$

On a alors:  $\|\hat{\beta} - \beta^*\|^2 = \|\hat{\beta}_P - \beta_P^*\|^2 + \|\beta_{PC}^*\|^2 = \|(\Pi_{Z_P} - I_P)\beta_P^*\|^2 + \|Z_P^{\dagger}Z_{PC}\beta_{PC}^*\|^2 + \|\beta_{PC}^*\|^2$ , par les propriétés de projecteur.

De plus on a de même:  $\|(\Pi_{Z_P} - I_P)\beta_P^*\|^2 = \text{tr}[\beta_P^{*T}(\Pi_{Z_P} - I_P)^T(\Pi_{Z_P} - I_P)\beta_P^*] = \|\beta_P^*\|^2 - \text{tr}[\Pi_{Z_P}\beta_P^*\beta_P^{*T}]$

D'où  $\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \cdot (\mathbb{E}(\|\beta^*\|^2) + \mathbb{E}(\|Z_P^{\dagger}Z_{PC}\beta_{PC}^*\|^2) - \text{tr}[\mathbb{E}(\Pi_{Z_P})\mathbb{E}(\beta_P^*\beta_P^{*T})])$

□

**Corollaire 1.** *Expression de l'excès de risque, cas rang maximale*

On suppose ici que  $Z_P$  est de rang maximale ie  $\text{rg}(Z_P) = \max(P, N)$ .

- Si  $P < N$ :

$$\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \cdot (\mathbb{E}(\|\beta_{PC}^*\|^2) + \text{tr}[\mathbb{E}(Z_{PC}^T Z_P (Z_P^T Z_P)^{-2} Z_P^T Z_{PC})\mathbb{E}(\beta_{PC}^*\beta_{PC}^{*T})]) \quad (9)$$

- Si  $P > N$ :

$$\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \cdot (\mathbb{E}(\|\beta^*\|^2) + \text{tr}[\mathbb{E}(Z_{PC}^T (Z_{\infty} Z_{\infty}^T - Z_{PC} Z_{PC}^T)^{-1} Z_{PC})\mathbb{E}(\beta_{PC}^*\beta_{PC}^{*T})] - \text{tr}[\mathbb{E}(\Pi_{Z_P})\mathbb{E}(\beta_P^*\beta_P^{*T})]) \quad (10)$$

*Proof.* Du corollaire 1

On a que  $Z_{\infty} Z_{\infty}^T = Z_P Z_P^T + Z_{PC} Z_{PC}^T$

On suppose que  $\text{rg}(Z_P) = \max(P, N)$  d'où en régime sous-paramétré, on a  $Z_P^{\dagger} = (Z_P^T Z_P)^{-1} Z_P^T$  et  $\Pi_{Z_P} = I_P$ . Et en régime sur-paramétré on a  $Z_P^{\dagger} = Z_P^T (Z_P Z_P^T)^{-1}$  et  $\Pi_{Z_P} = Z_P^T (Z_P Z_P^T)^{-1} Z_P$ . On utilise la linéarité de la trace. On a  $\|Z_P^{\dagger}Z_{PC}\beta_{PC}^*\|^2 = \text{tr}[Z_{PC}^T (Z_P Z_P^T)^{\dagger} Z_{PC}\beta_{PC}^*\beta_{PC}^{*T}] = \text{tr}[Z_{PC}^T (Z_{\infty} Z_{\infty}^T - Z_{PC} Z_{PC}^T)^{\dagger} Z_{PC}\beta_{PC}^*\beta_{PC}^{*T}]$ .

Enfin on a  $(Z_P Z_P^T)^{\dagger} = Z_P^{\dagger} Z_P^{\dagger T} = Z_P (Z_P^T Z_P)^{\dagger T} Z_P^T$

□

**Corollaire 2.** *Expression de l'excès de risque dans notre modèle*

En supposant de plus que  $\mathbb{E}(\beta^*\beta^{*T}) = \sigma_{\beta^*}^2 I_E$  et en notant  $S_P := (Z_{\infty} Z_{\infty}^T)^{-1} Z_{PC} Z_{PC}^T \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ .

- Régime sous-paramétré:

$$\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \sigma_{\beta^*}^2 [E - P + \mathbb{E}(\text{tr}[Z_{PC}^T Z_P (Z_P^T Z_P)^{-2} Z_P^T Z_{PC}])] \quad (11)$$

- Régime sur-paramétré:

$$\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \sigma_{\beta^*}^2 [E - N + \mathbb{E}(\text{tr}[(I_N - S_P)^{-1}])] \quad (12)$$

*Proof.* On a supposé que  $\mathbb{E}(\beta^*\beta^{*T}) = \sigma_{\beta^*}^2 I_E$ .

On pose  $S_P := (Z_{\infty} Z_{\infty}^T)^{-1} Z_{PC} Z_{PC}^T \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

- Si  $P < N$ : On a  $\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \|\beta_{PC}^*\|^2 + \sigma_x^2 \sigma_{\beta^*}^2 \mathbb{E}(\text{tr}[Z_{PC}^T Z_P (Z_P^T Z_P)^{\dagger}])$

Et on a alors:  $\mathcal{E}(\hat{y}) = \sigma_x^2 \mathbb{E}(\|\beta_{PC}^*\|^2) + \sigma_x^2 \sigma_{\beta^*}^2 \mathbb{E}(\text{tr}[Z_{PC}^T Z_P (Z_P^T Z_P)^{-2} Z_P^T Z_{PC}])$ .

On écrit  $(Z_P^T Z_P)^{-2} = (\frac{V(I)}{N^D})^2 (I_P + \Delta_P)$  en supposant les features orthonormales sur un cube I. On peut alors avoir:

$$\mathbb{E}(\text{tr}[Z_{PC}^T Z_P (Z_P^T Z_P)^{-2} Z_P^T Z_{PC}]) = \frac{V(I)^2}{N^{2D}} \mathbb{E}(\text{tr}[Z_{PC} Z_{PC}^T (Z_\infty Z_\infty^T - Z_{PC} Z_{PC}^T)]) + \frac{V(I)^2}{N^{2D}} \mathbb{E}(\text{tr}[Z_{PC} Z_{PC}^T Z_P \Delta_P Z_P^T])$$

De plus  $\mathbb{E}(\|\beta_{PC}^*\|^2) = \sigma_{\beta^*}^2 (E - P)$

- Si  $P > N$ :

$$\mathbb{E}(\|Z_P^T Z_{PC} \beta_{PC}^*\|^2) = \text{tr}[\mathbb{E}(Z_{PC}^T (Z_\infty Z_\infty^T - Z_{PC} Z_{PC}^T)^{-1} Z_{PC}) \mathbb{E}(\beta_{PC}^* \beta_{PC}^{*T})] = \sigma_{\beta^*}^2 \mathbb{E}(\text{tr}[(Z_\infty Z_\infty^T)^{-1} Z_{PC} Z_{PC}^T (I - (Z_\infty Z_\infty^T)^{-1} Z_{PC} Z_{PC}^T)^{-1}]) = \sigma_{\beta^*}^2 \text{tr}[\mathbb{E}(S_P (I_N - S_P)^{-1})] = -\sigma_{\beta^*}^2 N + \sigma_{\beta^*}^2 \mathbb{E}(\text{tr}[(I_N - S_P)^{-1}])$$

On reconnait la transformée de Stieljes de  $S_P$ .

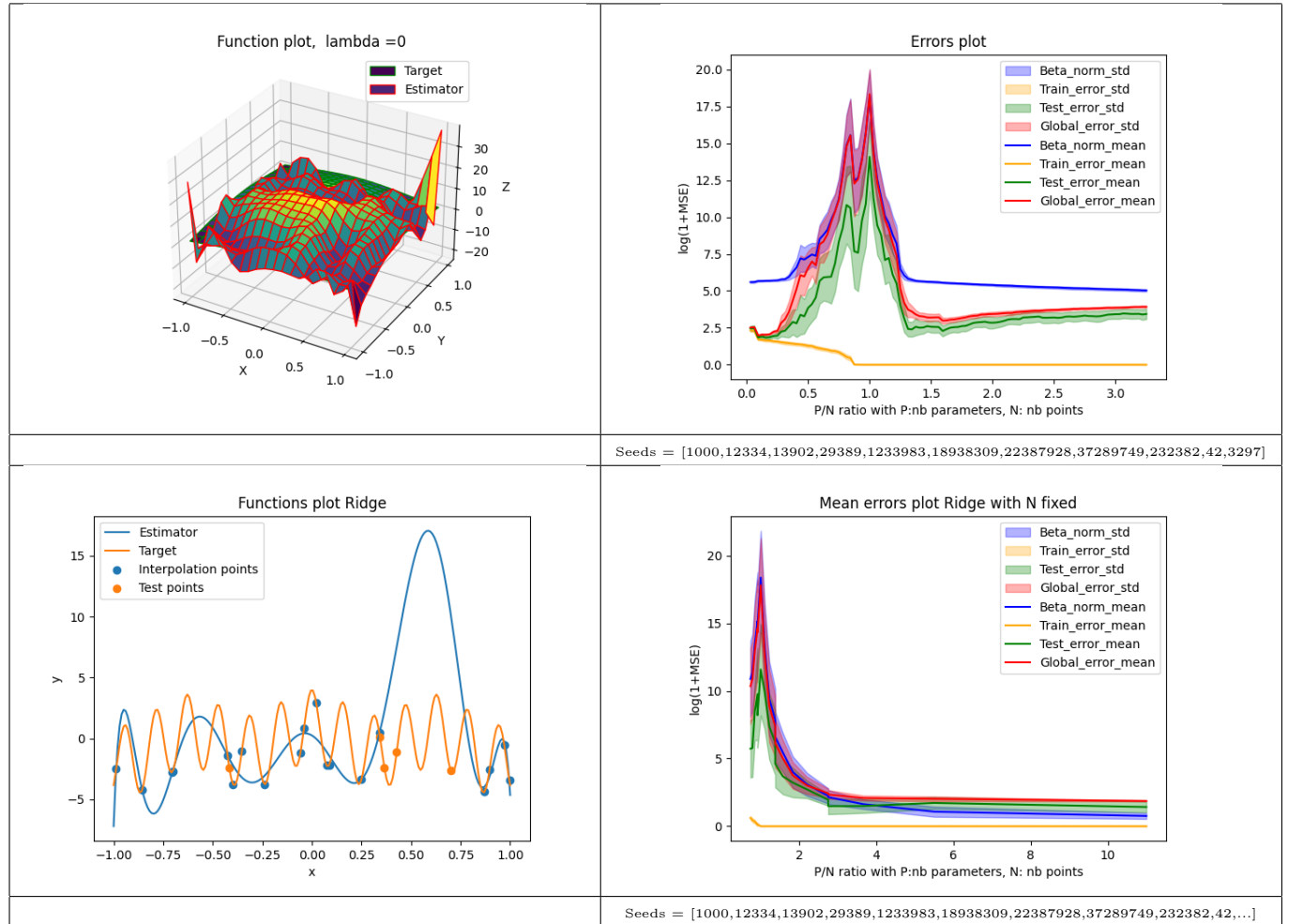
$$\text{De plus } \mathbb{E}(\|\beta^*\|^2) = \sigma_{\beta^*}^2 E$$

$$\text{Et } \text{tr}[\mathbb{E}(\Pi_{Z_P}) \mathbb{E}(\beta_P^* \beta_P^{*T})] = \sigma_{\beta^*}^2 \mathbb{E}(\text{tr}[(\Pi_{Z_P})]) = \sigma_{\beta^*}^2 N$$

□

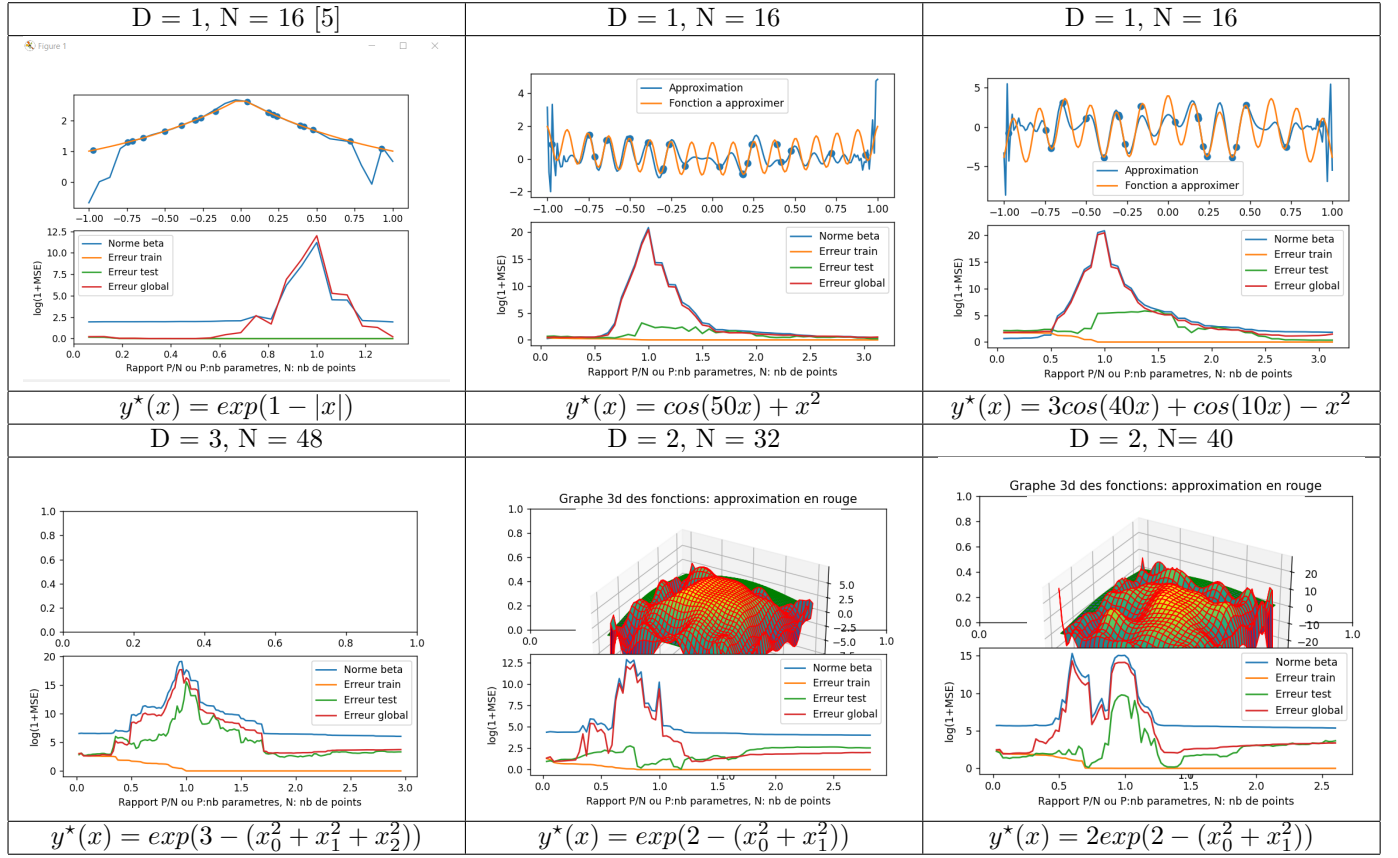
## 6.2 Régression polynomiale: Résultats expérimentaux

Demo en ligne [4] et github associé [5].

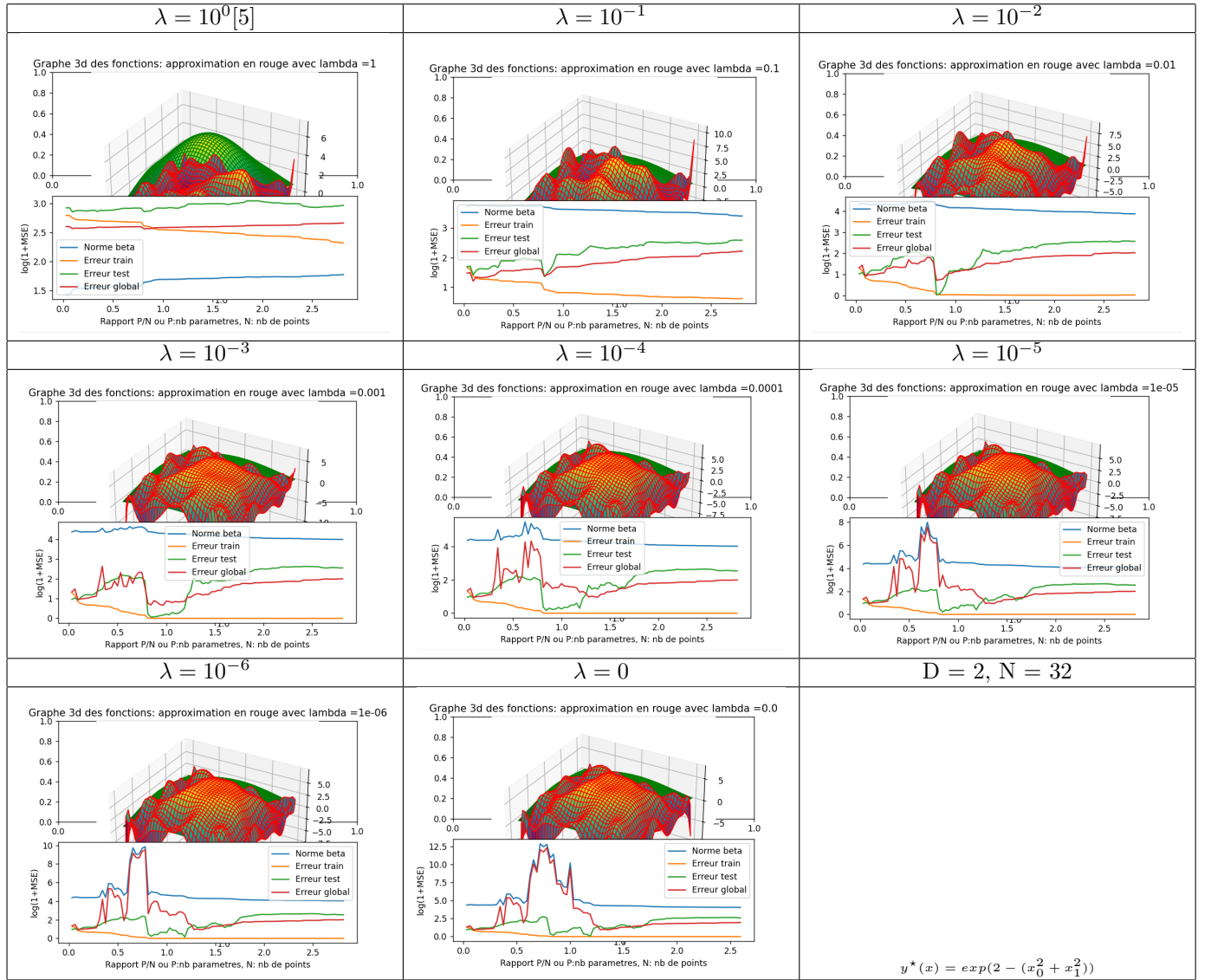


a, nexample = 1, 1, typepolynome = 2, D, Deg= 2,13, n = 20,M = 40 ,r = 0.2, Lambda = 0



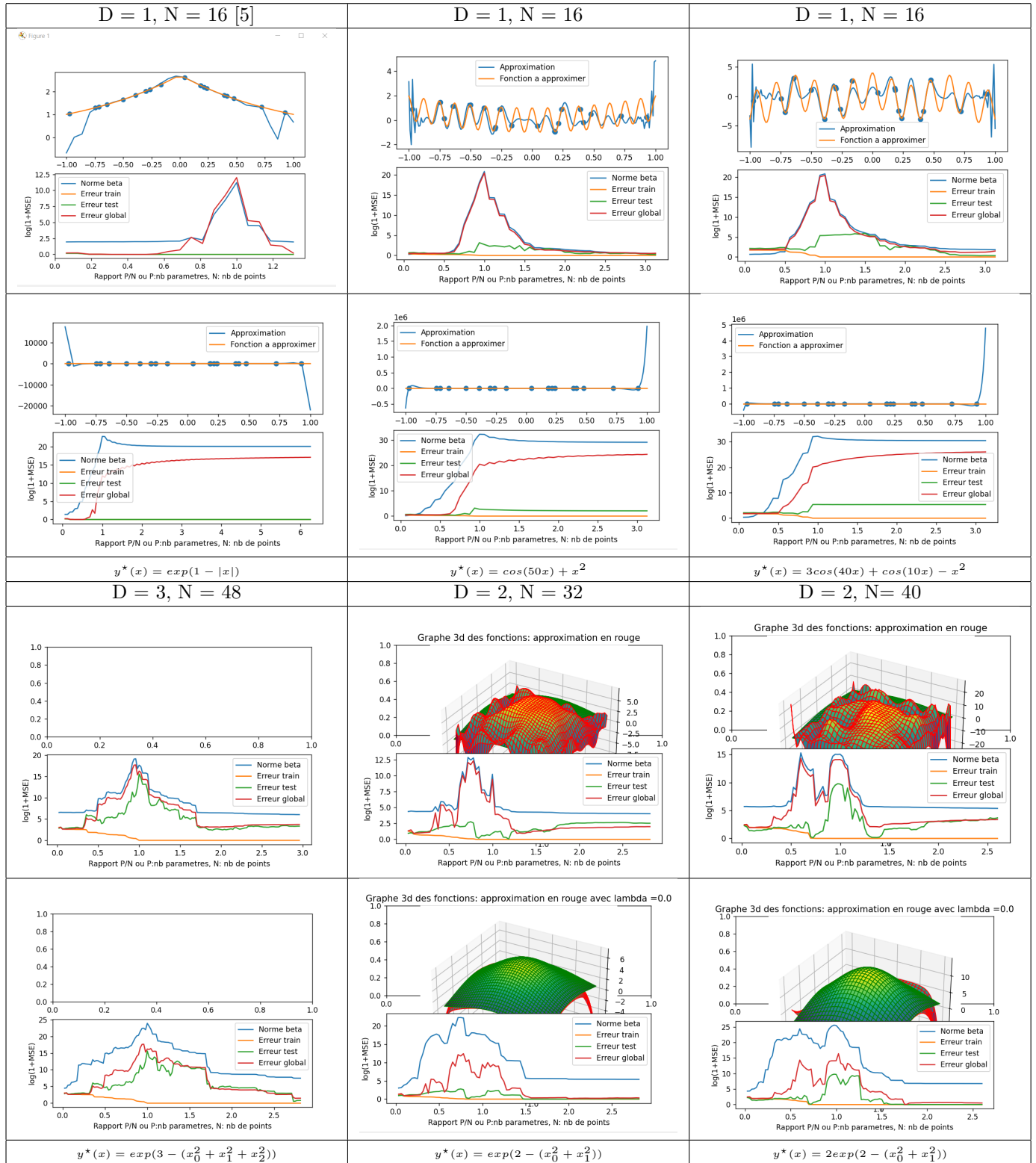


Résultats exhibant un phénomène de double descente en dimension 1, 2 et 3 pour des features polynomiales.



Résultats exhibant l'influence d'un facteur de régulation sur l'apparition du phénomène de double descente.

On remarque que la régulation permet d'empêcher totalement la venue d'un phénomène de double descente par rapport au nombre de paramètre. En effet, on peut considérer que la réelle complexité réside dans la norme du paramètre  $\beta$ . Or, on a une descente simple par rapport à ce paramètre. D'où le résultat.



Résultats exhibant l'influence d'une base orthonormalisée sur la double descente. Première ligne: Base orthonormalisée sur l'espace, Deuxième ligne: Base canonique

On remarque qu'orthonormaliser l'espace permet d'accélérer l'avenue du phénomène de double descente en faible dimension.

## 6.3 Minimisation par descente de gradient

### 6.3.1 Descente de gradient simple

La descente de gradient a pas constant est donnée par:

$$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \alpha \nabla \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_{\hat{\beta}_t})$$

On a  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{y}) = \frac{1}{N} \|Y - Z\hat{\beta}\|_2^2$  et  $\nabla \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}) = \frac{2}{N} Z^T [Z\hat{\beta} - Y]$  ainsi  $\hat{\beta}_{t+1} = [I_p - \frac{2\alpha}{N} Z^T Z] \hat{\beta}_t + \frac{2\alpha}{N} Z^T Y$

On sait qu'avec des suites du type  $x_{n+1} = ax_n + b$  on a  $x_n = [\sum_{k=0}^{n-1} a^k]b + a^n x_0$

D'où

$$\hat{\beta}_t = \left( \sum_{k=0}^{t-1} [I_p - \frac{2\alpha}{N} Z^T Z]^k \right) \frac{2\alpha}{N} Z^T Y + [I_p - \frac{2\alpha}{N} Z^T Z]^t \hat{\beta}_0$$

On fixe  $\hat{\beta}_0 = 0$ .

Dans le cas général:

**Théorème 9.** *Approximation par descente de gradient simple Avec  $\hat{\beta}_t$  le résultat de t descente de gradient de pas  $\alpha < \frac{N}{2\|Z\|_2^2}$  et  $\hat{\beta}_0 = 0$ . Avec  $\sigma_{\min} > 0$  la plus petite valeur singulière non-nulle de Z, on a:*

$$\|\hat{\beta}_t - \hat{\beta}\|_2 \leq \sigma_{\min}^{-1} (1 - \alpha' \sigma_{\min}^2)^t \|Y\|_2 \quad (13)$$

*Proof.* On s'attend classiquement a une convergence géométrique de la descente de gradient.

Avec  $R = \text{rg}(Z)$  et  $Z = U\Sigma V^T$  décomposition SVD tq  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . On a  $Z^T Z = V\Sigma^T \Sigma V^T = V \begin{bmatrix} \Sigma_R^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$ .

On note  $\alpha' = \frac{2\alpha}{N}$  D'où  $\hat{\beta}_t = V \begin{bmatrix} (\alpha' \Sigma_R^2)^{-1} [I_R - (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t] & 0 \\ 0 & t I_{P-R} \end{bmatrix} \alpha' \begin{bmatrix} \Sigma_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y + V \begin{bmatrix} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t & 0 \\ 0 & I_{P-R} \end{bmatrix} V^T \hat{\beta}_0$

$\hat{\beta}_t = V \begin{bmatrix} \Sigma_R^{-1} - \Sigma_R^{-2} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t \Sigma_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y + V \begin{bmatrix} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t & 0 \\ 0 & I_{P-R} \end{bmatrix} V^T \hat{\beta}_0$

Si  $\hat{\beta}_0 = 0$  on a:

$$\hat{\beta}_t - \hat{\beta} = -V \begin{bmatrix} \Sigma_R^{-1} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y$$

Dans le cas général on a  $\hat{\beta}_t - \hat{\beta} = V \begin{bmatrix} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t & 0 \\ 0 & I_{P-R} \end{bmatrix} V^T [\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}]$

Or on rappelle que  $\hat{\beta} = Z^\dagger Y$ . Si de plus  $\alpha < \frac{N}{2\|Z\|_2^2}$  alors:

$$\|\hat{\beta}_t - \hat{\beta}\|_2 \leq \rho(\Sigma_R^{-1} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t) \|Y\|_2 \leq (1 - \alpha' \sigma_{\min}^2)^t \frac{\|Y\|_2}{\|Z\|_2} \rightarrow 0$$

On peut étudier la fonction  $f(\sigma) = \frac{(1 - \alpha' \sigma^2)^t}{\sigma}$  pour être plus précis, et on a alors deux annulations de la dérivée en  $\sigma = \pm \alpha'^{-\frac{1}{2}}$ . Donc, sous nos hypothèses, on a  $\rho(\Sigma_R^{-1} (I_R - \alpha' \Sigma_R^2)^t) = \frac{1}{\sigma_{\min}} (1 - \alpha' \sigma_{\min}^2)^t$ .  $\square$

Remarque: On remarque que l'on retrouve un résultat proche de celui de la descente de gradient classique, ici  $\hat{\mathcal{R}}$  étant  $\mu = \frac{2}{N}$  fortement convexe.

**Théorème 10.** *Résultat de la descente de gradient simple, cas du rang maximale*  
*On suppose que  $\hat{\beta}_0 = 0$  et que  $\alpha$  constant le pas de la descente.*

- Si  $P < N$  et  $\text{rg}(Z) = P$ :

$$\hat{\beta} - \hat{\beta}_t = (Z^T Z)^{-1} (I_P - \frac{2\alpha}{N} Z^T Z)^t Z^T Y \quad (14)$$

- Si  $P > N$  et  $\text{rg}(Z) = N$ :

$$\hat{\beta} - \hat{\beta}_t = Z^T (I_N - \frac{2\alpha}{N} Z Z^T)^t (Z Z^T)^{-1} Y \quad (15)$$

*Proof.* On s'attend à avoir une forme simple dans le cas du rang maximal

- Dans le régime sous-paramétré: (cas du rang maximale)

$\lambda_{\min}(Z^T Z) > 0$  d'où il suffit pour avoir la convergence ici que  $\lambda_{\max}(Z^T Z) < \frac{N}{\alpha}$  ie  $\alpha < \frac{N}{\|Z\|_2^2}$ .

Et on a  $\hat{\beta}_t = (\sum_{k=0}^{t-1} [I_P - \alpha' Z^T Z]^k) \alpha' Z^T Y = (Z^T Z)^{-1} [I_P - (I_P - \alpha' Z^T Z)^t] Z^T Y = Z^\dagger Y - (Z^T Z)^{-1} (I_P - \alpha' Z^T Z)^t Z^T Y$

- Dans le régime sur-paramétré: (cas du rang maximale)

On a ici  $Z Z^T = U \Sigma_N^2 U^T$  et  $Z^\dagger Y - \hat{\beta}_t = V \begin{bmatrix} \Sigma_N^{-1} (I_N - \alpha' \Sigma_N^2)^t \\ 0 \end{bmatrix} U^T Y = V \begin{bmatrix} \Sigma_N \\ 0 \end{bmatrix} (U^T U) (I_N - \alpha' \Sigma_N^2)^t (U^T U) \Sigma_N^{-2} U^T Y = (V \Sigma^T U^T) (I_N - \alpha' U \Sigma_N^2 U^T)^t (U \Sigma_N^2 U^T)^{-1} Y$

D'où:  $\hat{\beta}_t = Z^\dagger Y - Z^T (I_N - \alpha' Z Z^T)^t (Z Z^T)^{-1} Y$

□

### 6.3.2 Descente de gradient à pas variable

La descente de gradient a pas variable est donnée par:

$$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \alpha_t \nabla \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_{\hat{\beta}_t})$$

Et donc :  $\hat{\beta}_{t+1} = [I_P - \frac{2\alpha_t}{N} Z^T Z] \hat{\beta}_t + \frac{2\alpha_t}{N} Z^T Y$ , on est dans le cas  $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$ . Dans ce cas on a  $a_n = [\Pi_{k=0}^{n-1} a_k] u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [\Pi_{i=k+1}^{n-1} a_i] b_k$ .

D'où:

$$\hat{\beta}_t = (\Pi_{k=0}^{t-1} [I_P - \frac{2\alpha_k}{N} Z^T Z]) \hat{\beta}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} (\Pi_{i=k+1}^{t-1} [I_P - \frac{2\alpha_i}{N} Z^T Z]) \frac{2\alpha_k}{N} Z^T Y$$

On suppose  $\hat{\beta}_0 = 0$  et on pose  $Z = U \Sigma V^T$  où  $R = \text{rg}(Z)$ ,  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans ce contexte en notant  $\alpha'_i = \frac{2\alpha_i}{N}$ , avec la décomposition SVD de  $Z = U \Sigma V^T$  on a:

$$\hat{\beta}_t = \sum_{k=0}^{t-1} (\Pi_{i=k+1}^{t-1} [I_P - \frac{2\alpha_i}{N} Z^T Z]) \frac{2\alpha_k}{N} Z^T Y = V [\sum_{k=0}^{t-1} (\Pi_{i=k+1}^{t-1} [I_P - \alpha'_i \Sigma^T \Sigma]) \alpha'_k] \Sigma^T U^T Y$$

$$\hat{\beta}_t = V \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{t-1} (\Pi_{i=k+1}^{t-1} I_R - \alpha'_i \Sigma_R^2) \alpha'_k & 0 \\ 0 & (\sum_{k=0}^{t-1} \alpha'_k) I_{P-R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T U^T Y = V \begin{bmatrix} \Sigma_R \sum_{k=0}^{t-1} (\Pi_{i=k+1}^{t-1} I_R - \alpha'_i \Sigma_R^2) \alpha'_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y$$

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta} + V \begin{bmatrix} \Sigma_R \sum_{k=0}^{t-1} (\Pi_{i=k+1}^{t-1} I_R - \alpha'_i \Sigma_R^2) \alpha'_k - \Sigma_R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y$$

On va tenter de simplifier le problème en considérant un pas  $\alpha_t$  constant par morceaux et cela permettra d'obtenir une forme explicite de l'erreur, commençons par un cas simple.

Supposons que  $\forall t \leq t_1 - 1, \alpha_t = \underline{\alpha}_1$  et que  $\forall t > t_1 - 1, \alpha_t = \underline{\alpha}_2$ .

Alors:  $\forall t > t_1$

$$\hat{\beta}_t - \hat{\beta} = V \begin{bmatrix} \Sigma_R (I_R - \underline{\alpha}_2' \Sigma_R^2)^{t-t_1} \sum_{k=0}^{t_1-1} (I_R - \underline{\alpha}_1' \Sigma_R^2)^{t_1-k-1} \underline{\alpha}_1' + \Sigma_R \sum_{k=t_1}^{t-1} (I_R - \underline{\alpha}_2' \Sigma_R^2)^{t-k-1} \underline{\alpha}_2' - \Sigma_R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y$$

$$\hat{\beta}_t - \hat{\beta} = -V \begin{bmatrix} \Sigma_R^{-1}(I_R - \underline{\alpha}'_2 \Sigma_R^2)^{t-t_1}(I_R - \underline{\alpha}'_1 \Sigma_R^2)^{t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y$$

On suppose maintenant  $t_1, \dots, t_r$  changements de pas de descente de gradient. On a alors avec  $t_0 = 0$  et  $t_{r+1} = t - 1$ :  $\forall j \leq r \forall t \in [t_j, t_{j+1}[$ ,  $\alpha'_t = \underline{\alpha}'_j$ . On s'appuie sur l'expression générale par récurrence sur le nombre de phase, avec  $\beta_0! = 0$

**Théorème 11.** *Descente de gradient à pas constant par morceaux tq  $\hat{\beta}_0 = 0, \forall t > t_r$*

$$\hat{\beta} - \hat{\beta}_t = V \begin{bmatrix} \Sigma_R^{-1}(I_R - \underline{\alpha}'_r \Sigma_R^2)^{t-t_r} \prod_{j=0}^{r-1} (I_R - \underline{\alpha}'_j \Sigma_R^2)^{t_{j+1}-t_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T Y \quad (16)$$

On remarque qualitativement avec cette expression à l'aide des variations de la fonction  $f(\sigma) = \sigma^{-1} \prod_{j=0}^r (1 - \alpha_j \sigma^2)^{\Delta t_j}$ , tq  $f(\sigma) \underset{\sigma \rightarrow 0}{\sim} 1 \backslash \sigma$  et dont les points critiques sont les solutions de  $\sum_{j=0}^r \sigma^2 \Delta t_j (1 - \alpha_j \sigma^2)^{-1} = -1 \backslash 2$  et les points  $\sigma = \alpha_j^{-1 \backslash 2}$ . Sous la condition  $\max(\alpha'_j) \leq \sigma_{\max}^{-2}$ , la première équation n'a pas de solution et l'on se place dans la zone de décroissance de f, on peut donc se ramener à la plus petites des valeurs propres  $\sigma_{\min}$ .

On aurait alors:

$$\|\hat{\beta}_t - \hat{\beta}\|_2 \leq \rho [\Sigma_R^{-1}(I_R - \underline{\alpha}'_r \Sigma_R^2)^{t-t_r} \prod_{j=0}^{r-1} (I_R - \underline{\alpha}'_j \Sigma_R^2)^{t_{j+1}-t_j}] \|Y\|_2 \text{ qui se simplifierait en :}$$

**Théorème 12.** *Approximation par descente de gradient à pas variable*

*Dans le cas où  $\hat{\beta}_0 = 0$  et  $\max(\alpha_j) \leq \frac{N}{2\|Z\|_2^2}$ , en notant  $t_{r+1} := t > t_r$  on a:*

$$\|\hat{\beta}_t - \hat{\beta}\|_2 \leq \sigma_{\min}^{-1} \prod_{j=0}^r (1 - \frac{2\alpha_j}{N} \sigma_{\min}^2)^{t_{j+1}-t_j} \|Y\|_2$$

Ainsi, on a une erreur décroissante par rapport à  $t$  et  $\sigma_{\min}$ . Donc  $\sigma_{\min}$  ayant une courbe en U (voir section suivante) on a bien une courbe en U inversée pour l'erreur en fonction du quotient  $P \backslash N$ . Ainsi l'erreur apporté par la descente de gradient présente bien un apport au phénomène de double descente.

### 6.3.3 Analyse de la plus petite valeur propre

"On the limit of the largest eigenvalue" donne pour  $P \rightarrow +\infty$  et  $P \backslash N$  converge, alors  $\sigma_{\min} \simeq (1 - \sqrt{P \backslash N})^2$  qui présente bien une courbe en U.

### 6.3.4 Descente de gradient stochastique

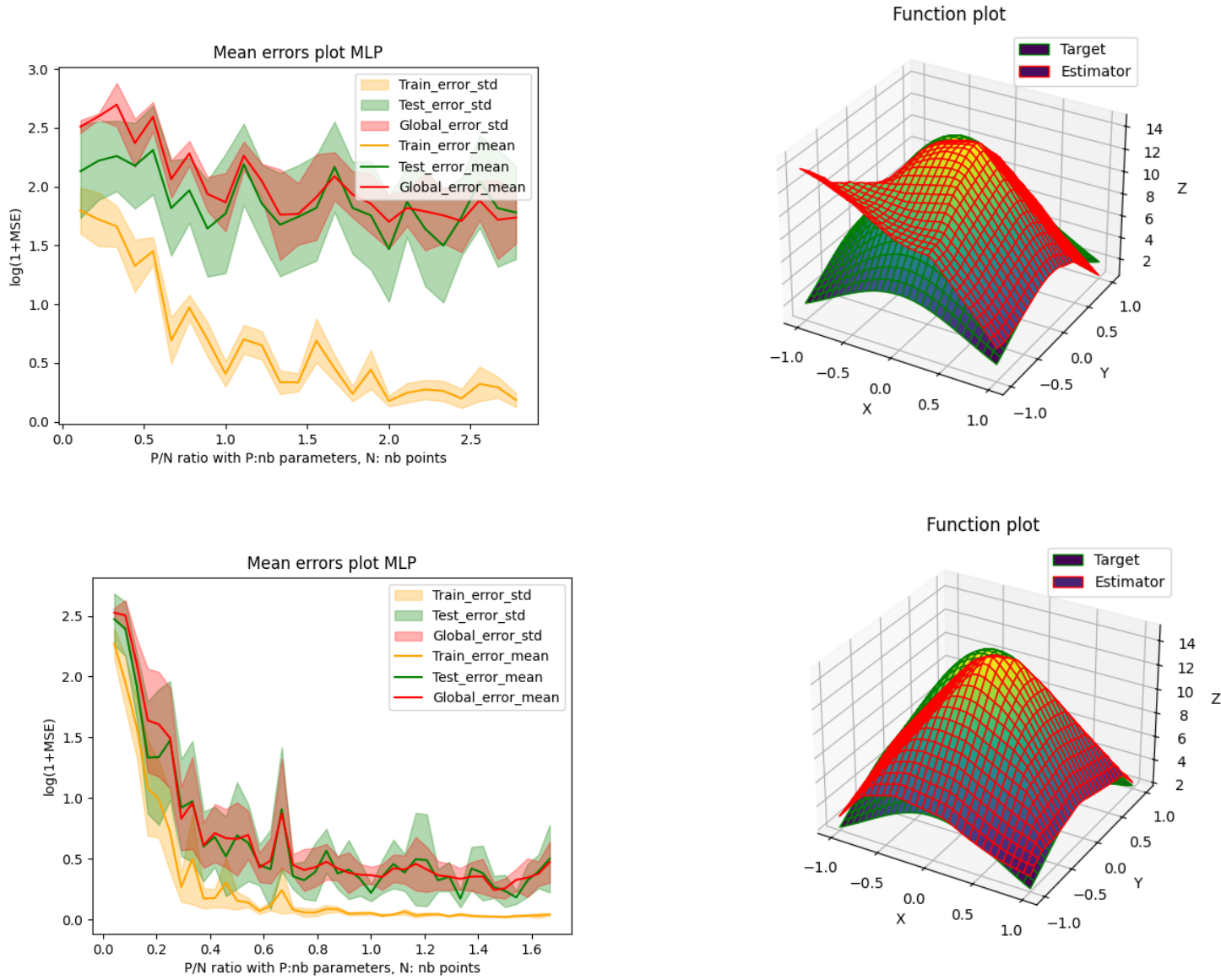
La descente de gradient stochastique est donnée par:

$$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \alpha_t \nabla \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_{\hat{\beta}_t}, \beta_J)$$

où J variable aléatoire entre 1 et P.

## 6.4 Résultats sur les MLP

### 6.4.1 Résultats expérimentaux sur les MLP



Graphe de la MSE d'un algo MLP

### 6.4.2 Expressions théorique sur les MLP

$\hat{y}_\beta(x) = W_L \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma \circ W_1(x)$  On a

$W_l(x_l) = A_l x_l + b_l$  Et  $\sigma(x) = \max(0, x)$  fonction ReLU tq  $\sigma'(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0}$

Cas particulier: Dans le cas suivant,  $\hat{y}_\beta(x) = W_2 \circ \sigma \circ W_1(x) = A_2 \sigma(A_1 x + b_1) + b_2$ ,  $\hat{y}_\beta : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ . On a ici :  $A_1 \in \mathcal{M}_{P,D}(\mathbb{R})$  et  $A_2 \in \mathcal{M}_{1,P}(\mathbb{R})$  D'où avec :  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{D}}(\hat{y}_\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_\beta(x_i) - y_i)^2$  on a :

$$\text{Avec } \beta = \begin{bmatrix} A_1 \\ b_1 \\ A_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ on a } \nabla_\beta \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_\beta) = \begin{bmatrix} \nabla_{A_1} \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_\beta) \\ \nabla_{b_1} \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_\beta) \\ \nabla_{A_2} \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_\beta) \\ \nabla_{b_2} \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_\beta) \end{bmatrix} = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i (\hat{A}_2 \odot \sigma'(\hat{A}_1 x_i + \hat{b}_1)^T) (\hat{y}_\beta(x_i) - y_i) \\ \sum_{i=1}^N (\hat{A}_2 \odot \sigma'(\hat{A}_1 x_i + \hat{b}_1)^T) (\hat{y}_\beta(x_i) - y_i) \\ \sum_{i=1}^N \sigma(\hat{A}_1 x_i + \hat{b}_1) (\hat{y}_\beta(x_i) - y_i) \\ \sum_{i=1}^N (\hat{y}_\beta(x_i) - y_i) \end{bmatrix}$$

Avec  $\odot$  le produit d'Hadamard.

Et on a :  $\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \alpha \nabla_{\beta} \hat{\mathcal{R}}(\hat{y}_{\hat{\beta}_t})$ . On comprend donc qu'il n'est pas aisé d'obtenir une expression manipulable théoriquement.

## References

- [1] Francis Bach. “High-dimensional analysis of double descent for linear regression with random projections”. In: *SIAM Journal on Mathematics of Data Science* 6.1 (2024), pp. 26–50.
- [2] Mikhail Belkin, Daniel Hsu, and Ji Xu. “Two models of double descent for weak features”. In: *SIAM Journal on Mathematics of Data Science* 2.4 (2020), pp. 1167–1180.
- [3] Mikhail Belkin et al. “Reconciling modern machine-learning practice and the classical bias–variance trade-off”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 116.32 (2019), pp. 15849–15854.
- [4] Emmett Haddad. *Demo Double Descente*. <https://ipolcore.ipol.im/demo/clientApp/demo.html?id=77777000515>. [Online]. 2024.
- [5] Emmett Haddad. *Github Double Descente*. <https://github.com/EmettGabrielH/Double-descente---Emett-Haddad>. [Online]. 2024.
- [6] Ilja Kuzborskij et al. “On the role of optimization in double descent: A least squares study”. In: *Advances in Neural Information Processing Systems* 34 (2021), pp. 29567–29577.
- [7] Zhenyu Liao, Romain Couillet, and Michael W Mahoney. “A random matrix analysis of random fourier features: beyond the gaussian kernel, a precise phase transition, and the corresponding double descent”. In: *Advances in Neural Information Processing Systems* 33 (2020), pp. 13939–13950.
- [8] Rylan Schaeffer et al. “Double descent demystified: Identifying, interpreting & ablating the sources of a deep learning puzzle”. In: *arXiv preprint arXiv:2303.14151* (2023).
- [9] MM Wolf. “Mathematical foundations of supervised learning (growing lecture notes)”. In: (2018).