Complément Sup - Introduction à la topologie et au calcul différentiel

Emett Haddad

06/06/2024

1 Introduction à la topologie

On note dans la suite E en espace vectoriel normé (evn) i.e. doté d'une norme notée $||.||$. On pourra considérer que $E = \mathbb{R}^2$ et $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ la norme 2 sans perte de généralité. Toute les propriétés évoquées ici sont similaires dans les deux cas.

Définition 1. Boule ouverte, boule fermée et sphère

Soit $a \in E$ et $r > 0$ alors on définit :

- *La boule ouverte de centre a, rayon r:* $B_o(a, r) = \{x \in E, ||x - a|| < r\}$
- *La boule fermée de centre a, rayon r:* $B_f(a, r) = \{x \in E, ||x - a|| \leq r\}$
- *La sphère de centre a, rayon r:* $S(a, r) = \{x \in E, ||x - a|| = r\}$

1.1 Ouverts et fermés

Définition 2. Ouvert d'un espace vectoriel normé

On dit que $\mathcal{U} \subset \mathbb{E}$ est ouvert dès lors que : $\forall x \in \mathcal{U}, \exists r_x > 0, B_o(x, r_x) \subset \mathcal{U}$

Exemples: On a $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ et $B_o(a, r)$ et $B_f(a, r)^C$ sont des ouverts.

On peut aussi définir la notion de voisinage d'un point.

Définition 3. Voisinage d'un point

On dit que V est voisinage de a, que l'on note $V \in \mathcal{V}(a)$, dès lors qu'il existe $\mathcal{U}$ un ouvert tel que: $x \in \mathcal{U} \subset V$.

Remarque: Les ouverts sont les seuls ensembles qui sont voisinages de tous leurs points.
Exemple: $[-1, 1[$ est voisinage de 0, mais n'est ni ouvert, ni fermé.

Proposition 1. Propriétés des ouverts

Avec $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ des ouverts

- $\varnothing$ *et E sont ouverts*
- $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ *est ouvert*
- $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ *est ouvert si* $|I| < +\infty$

Démonstration 1. *Les deux premiers points sont naturels. Pour le dernier point, on prend le minimum des rayons, qui est bien non nul.*

Définition 4. Fermé

On dit que $F \subset E$ *est fermé dès lors que* F^C *est ouvert.*

Remarque: Les boules fermées sont fermées. Les singletons sont fermés.

Proposition 2. Propriétés des fermés

Avec $(F_i)_{i\in I}$ *des fermés*

- $\varnothing$ *et* E *sont fermés*
- $\bigcap_{i\in I} F_i$ *est fermé*
- $\bigcup_{i\in I} F_i$ *est fermé si* $|I| < +\infty$

Démonstration 2. *Passage au complémentaire sur la proposition 1.*

Proposition 3. Caractérisation séquentielle des fermés d'un evn

On a $[F \subset E \text{ est fermé}] \iff [\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, [u_n \underset{n\to\infty}{\to} l] \implies [l \in F]]$

Démonstration 3. $\Rightarrow$*: Si on suppose* F *fermé, alors supposons par l'absurde qu'une suite* u *de* F *ne converge pas dans* F*. On a alors* $u_n \to l \in F^C$ *qui est ouvert car* F *est fermé. D'où APCR,* u_n *est dans un voisinage de* l *contenu dans* F^C *et donc APCR* N $\forall n > N, u_n \in F^C$*. Absurde car la suite* u *est dans* F *i.e.* $\forall n, u_n \in F$*.*

$\Leftarrow$*: Si l'on suppose que les suites de* F *convergentes convergent dans* F*, supposons par l'absurde que* F *n'est pas fermé. Alors* $\exists x \notin F, \forall \epsilon > 0, B_o(x,\epsilon) \nsubseteq F^C$*. D'où en posant* $\epsilon = \frac{1}{n+1}$ *et* $x_n \in B_o(x, \frac{1}{n+1}) \cap F$ *donné par l'assertion précédente, on a* $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$*, depuis* F*, et l'on rappelle que* $x \notin F$*. Absurde.*

Exemple: $S(a,r) = B_f(a,r) \cap B_o(a,r)^C$ est donc un fermé, car intersection de fermés.

1.2 Adhérence et intérieur

Définition 5. Adhérence

Soit $A \subset E$*. On pose* $\overline{A} := \{x \in E |\ \forall \epsilon > 0, B_o(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing\}$ *l'adhérence de l'ensemble* A*.*
On dit que $x \in E$ *est adhérent à* A *si et seulement si* $x \in \overline{A}$

Exemples et remarques:

- On a $\overline{A}$ est un fermé de E.
- On a $A \subset \overline{A}$ par la définition et si $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$ (croissance de l'adhérence).
- On remarque que $\overline{A} = \cap_{A\subset F} F$ où les F sont fermés (le plus petit des fermés contenant A).
- $\forall a \in E, r > 0, \overline{B_o(a,r)} = B_f(a,r)$.

Proposition 4. *On a* $[A = \overline{A}] \iff [A \text{ est fermé}]$

Démonstration 4.

$$A \text{ est fermé} \Leftrightarrow A^C \text{ est ouvert} \Leftrightarrow \forall x \notin A, \exists r > 0, B_o(x,r) \subset A^C$$
$$\Leftrightarrow \forall x \notin A, \exists r > 0, B_o(x,r) \cap A = \varnothing \Leftrightarrow \forall x \notin A, x \notin \overline{A} \Leftrightarrow A = \overline{A}$$

Définition 6. Intérieur

Soit $A \subset E$. On pose $\mathring{A} := \{x \in E | \exists \epsilon > 0, B_o(x, \epsilon) \subset A\}$ l'intérieur de l'ensemble A.

Remarques:

- On a $\mathring{A}$ est un ouvert de E.
- On a $\mathring{A} \subset A$ par la définition et si $A \subset B$, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ (croissance de l'intérieur).
- On remarque que $\mathring{A} = \cup_{\theta \subset A} \theta$ où les θ sont ouverts (le plus grand des ouverts contenus dans A).
- $\forall a \in E, r > 0, \mathring{B_f}(a, r) = B_o(a, r)$.

Définition 7. Frontière

Soit $A \subset E$. On pose $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$, la frontière de A.

Remarque: On a alors $\overline{A} = A \cup \partial A$ et $\mathring{A} = A \backslash \partial A$.

2 Fonctions à plusieurs variables

On peut alors commencer a faire de l'analyse sur des fonctions de plusieurs variables. On considère donc ici $E = \mathbb{R}^n$ des fonctions $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose ici $\mathcal{U}$ un ouvert.

2.1 Gradient et développement limité

Définition 8. *Fonctions $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$*
On dit que $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ dès lors que pour tout i, $\partial_i f$ sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Théorème 1. *Développement limité d'ordre 1*
Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ alors pour $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in \mathcal{U}$ on a :

$$f(a + h) = f(a) + < \nabla f(a), h > + \underset{h \to 0}{o}(||h||)$$

On peut alors définir le gradient et la dérivée directionnelle de f selon une direction.

Définition 9. *Gradient et dérivée directionnelle*
Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, avec $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

- $D_h f(a) := \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$
- $\nabla f(a) := (\partial_i f(a))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$

Remarque: L'existence de la première grandeur est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5. *Lien entre gradient et dérivée directionnelle*
Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, avec $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Alors on a :

$$D_h f(a) =< \nabla f(a), h >= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i$$

Démonstration 5. *Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ on peut appliquer le développement limité à l'ordre 1 en a quitte à poser $u = th$ et faire tendre t vers 0. Ce qui donne*

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \frac{f(a)+<\nabla f(a),th> + \underset{t\to 0}{o}(||th||) - f(a)}{t} =< \nabla f(a), h> + \frac{|t|||h||}{t}\epsilon(||th||) \underset{t\to 0}{\to} <\nabla f(a),h>$$

Remarques:

- $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui a $h \mapsto <\nabla f(a), h>$ est linéaire et continue par rapport à h (C.S.) et en un certain sens $df : a \mapsto df(a)$ est continue car les dérivées partielles sont continues. On l'appelle la différentielle de f en a. On constate ici que h est quelconque.
- On peut comprendre a l'aide des lignes de niveau de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ que le gradient, ici $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, pointe l'orthogonale des lignes de niveau, et pointe la direction de plus forte croissance, ce que l'on démontre ci-après.
- Si $\nabla f(a) \neq 0$, on a $\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} = \underset{||h||=1}{\text{argmax}}\ D_h f(a)$ (argmax désigne l'élément qui atteint le maximum, ici parmi ceux de norme 1). De même, $\frac{-\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} = \underset{||h||=1}{\text{argmin}}\ D_h f(a)$, on dit qu'il s'agit d'une direction de descente ...

  Preuve: On a, en considérant $||h|| = 1$ que $D_h f(a) =< \nabla f(a), h> \leq ||\nabla f(a)|| \cdot ||h|| = ||\nabla f(a)||$. Le cas d'égalité est pour $h_0 = \lambda \nabla f(a)$ où $\lambda > 0$. Or $||h_0|| = 1$. D'où le résultat , on a $h_0 = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$.

2.2 Arc paramétré et ligne de niveau

Définition 10. *Arc paramétré $\mathcal{C}^1$*
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
On dit que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (\gamma_1(t), \cdots \gamma_n(t))$ est un arc paramétré $\mathcal{C}^1$ dès lors que les γ_i sont $\mathcal{C}^1(I)$.

Remarque: On peut donc le dériver composante par composante.

Définition 11. *Ligne de niveau*
On appelle ligne de niveau λ d'une fonction l'ensemble: $C_\lambda = \{x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, f(x) = \lambda\}$.

Proposition 6. *Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau i.e. si l'on suppose qu'il existe $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, C_\lambda \subset \mathcal{U})$ tel que $f \circ \gamma = \tilde{\lambda}$ alors $< \nabla f \circ \gamma, \gamma' >= 0$.*

Démonstration 6. *On rappelle la règle de la chaîne : $(f \circ \gamma)' =< \nabla f \circ \gamma, \gamma' >$. Et donc en appliquant a l'égalité $f \circ \gamma = \tilde{\lambda}$ on trouve bien le résultat.*

Exemple: En considérant la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ on peut paramétrer la ligne de niveau $\lambda \geq 0$ par l'arc $\gamma(t) = \sqrt{\lambda}(cos(t), sin(t))$. En effet $f \circ \gamma(t) = \lambda(cos(t)^2 + sin(t)^2) = \lambda$.

2.3 Plan tangent à une surface

Pour mieux comprendre la notion, on va introduire la notion d'espace tangent à un ensemble.

Définition 12. *Espace tangent*
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. On appelle espace tangent a X en a:

$$T_a X := \{\gamma'(0) |\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I, X) \text{ un arc paramétré, tel que } \gamma(0) = a\}$$

Le plan tangent est donné par $\mathcal{P}_a X := a + T_a X$.

Remarque: Intuitivement, l'espace tangent est l'ensemble des vecteurs vitesses d'une trajectoire restreinte à l'ensemble, en un point a. C'est donc bien l'ensemble des vecteurs tangents à l'ensemble X en un point a.

Proposition 7. *Espace et plan tangent d'une surface paramétrée*
On rappelle que la surface associée à $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ *est donnée par* $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} | \ x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n\}$ *On a ainsi:*

$$T_{(a,f(a))}\Gamma = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} | \ z = < \nabla f(a), x >\}$$

$$\mathcal{P}_{(a,f(a))}\Gamma = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} | \ z = f(a) + < \nabla f(a), x - a >\}$$

Démonstration 7. $\subset$: *Soit* $(x_0, z_0) \in T_{(a,f(a))}\Gamma$ *alors il existe* $\gamma : I \to \Gamma$ *arc paramétré* $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ *tq* $\gamma'(0) = (x_0, z_0)$ *et* $\gamma(0) = (a, f(a))$.

On a alors $\forall t \in I, \gamma(t) = (x(t), f(x(t))) \in \Gamma$ *et par définition d'un arc, x ici est aussi un arc* $\mathcal{C}^1(I)$. *D'où* $(x_0, z_0) = (x'(0), < \nabla f(x(0)), x'(0) >)$ *par règle de la chaîne appliquée en t=0. Or* $\gamma(0) = (a, f(a)) = (x(0), f(x(0)))$ *d'où* $z_0 = < \nabla f(a), x_0 >$ *Cependant,* $\mathcal{P}_{(a,f(a))}X = (a, f(a)) + T_{(a,f(a))}X$. *D'où le résultat.*

$\supset$: *Réciproquement, si* $z_0 = < \nabla f(a), x_0 >$, *on peut considérer l'arc paramétré suivant:* $\gamma(t) := (a + tx_0, f(a + tx_0))$. *On peut alors vérifier que quitte à le définir sur* $]-\delta, \delta[$ *où* $\delta > 0$ *on a* $a + tx_0 \in \mathcal{U}$. *Ainsi on a* $\gamma(0) = (a, f(a))$ *et* $\gamma'(0) = (x_0, < \nabla f(a), x_0 >) = (x_0, z_0)$, *ce qui finit la preuve.*

Justification de la "preuve" intuitive:
Nous rappelons le problème d'origine: $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et l'on cherche à justifier la forme du plan tangent à sa surface.
A la lumière de cette preuve et de ces définitions, on observe l'explication par deux projections dans $\mathbb{R}^2$ revient à considérer les arcs paramétrés $\gamma_1(t) = (x_a + t, y_a, f(x_a + t, y_a))$ et $\gamma_2(t) = (x_a, y_a + t, f(x_a, y_a + t))$.
Et les deux vecteurs tangents $\gamma_2'(0) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a))$ et $\gamma_1'(0) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a))$ engendrent bien l'espace tangent à Γ en le point $(x_a, y_a, f(x_a, y_a))$.

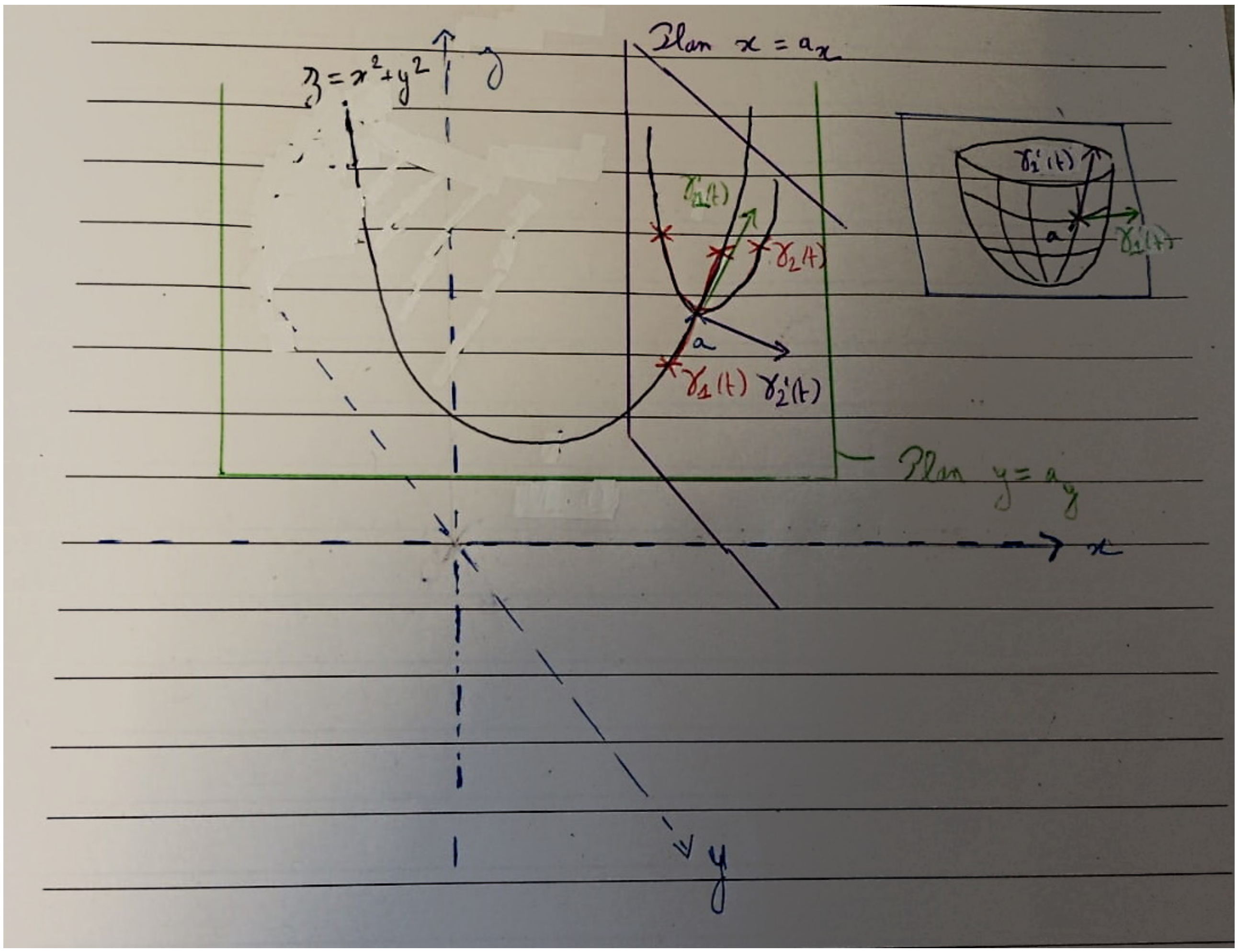

Figure 1: Schéma illustrant les coupes "canoniques" et les vecteurs engendrant l'espace tangent

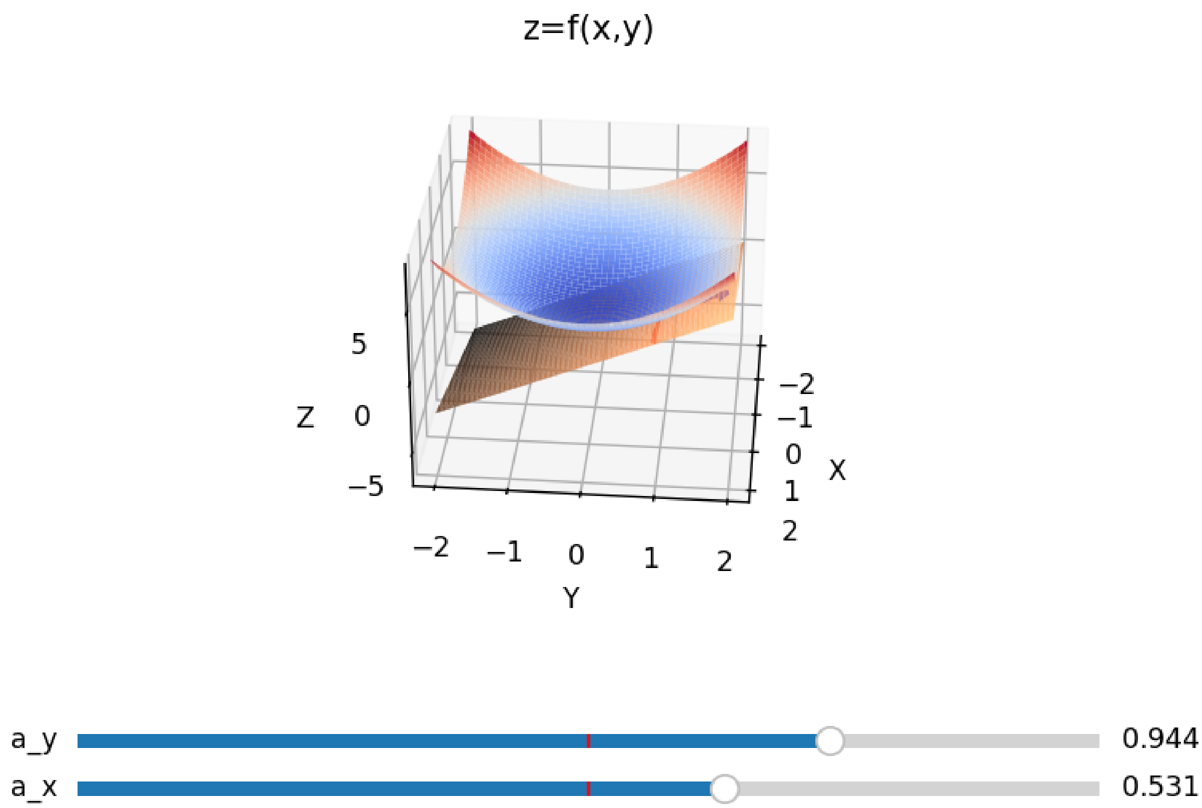

Figure 2: Exemple de rendu d'une surface et de son plan tangent associé

3 Algorithme de visualisation d'un plan tangent

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm

# Définir la fonction z=f(x,y)
def f(x, y):
    return x**2 + y**2

def grad_f(x,y):
    return np.array((2*x,2*y))

def scalaire(a,b):
    return a[0]*b[0] + a[1]*b[1]

# Créer une grille de points
x = np.linspace(-2, 2, 100)
y = np.linspace(-2, 2, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

# Initialisation
```

```python
x_a = 0
y_a = 0


fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
plt.subplots_adjust(left=0.1, bottom=0.35)


surface = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0)

# Fonction de mise à jour
def update(val):
    global x_a, y_a

    x_a = x_0.val
    y_a = y_0.val

    ax.clear()
    ax.set_title("z=f(x,y)")
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_zlabel('Z')

    ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0)

    Z1 = f(x_a,y_a) + scalaire(grad_f(x_a,y_a),(X-x_a,Y-y_a))
    ax.plot_surface(X, Y, Z1, cmap=cm.copper, linewidth=0)

    dx_a,dy_a = grad_f(x_a,y_a)

    ax.quiver(x_a, y_a, f(x_a, y_a), 1, 0, dx_a, color='r', length=2, normalize=True)
    ax.quiver(x_a, y_a, f(x_a, y_a), 0, 1, dy_a, color='b', length=2, normalize=True)


    fig.canvas.draw_idle()

# Créer les axes pour les curseurs, puis les curseurs
axcolor = 'lightgoldenrodyellow'
ax_x = plt.axes([0.1, 0.1, 0.8, 0.03], facecolor=axcolor)
ax_y = plt.axes([0.1, 0.15, 0.8, 0.03], facecolor=axcolor)

x_0 = Slider(ax_x, 'a_x', -2, 2, valinit=x_a)
y_0 = Slider(ax_y, 'a_y', -2, 2, valinit=y_a)
x_0.on_changed(update)
y_0.on_changed(update)

plt.show()

```