# Домашнее задание по АиСД №1

Эмиль Гарипов M3138

2019-09-08

## Задача №1

Докажите по определению: $\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$

**Доказательство** :

По определению $\Omega$ :

$$f(n) = \Omega(g(n)), \text{ если } \exists\ c > 0, N \in \mathbb{N} : \forall\ n > N : f(n) \geq c \cdot g(n)$$

.
Найдем константу $c$, удовлетворяющую определению $\Omega$. Для такой константы $c$ верно следующее неравенство :

$$f(n) \geq c \cdot g(n) \quad (\text{для } n > N) \tag{1}$$

Подставим $f(n)$ и $g(n)$ из условия и преобразуем неравенство.

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq c \cdot (n^3)$$

$$n^3 - 42n^2 \geq 6cn^3$$

$$n^2((1-6c)n - 42) \geq 0$$

Функция $f(n)$ определена на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, следовательно $n^2 > 0$. Тогда разделим обе части неравенства на $n^2$ и раскроем скобки.

$$n - 6cn - 42 \geq 0$$

$$n - 6cn \geq 42$$

Из неравенства видно, что значение $c$, равное, например, $\frac{1}{12}$, удовлетворяет условию (1) для заданных $f(n)$ и $g(n)$ для $n \geq 84$, ч.т.д.

## Задача №2

Упорядочите функции так, чтобы, если $f(n)$ стоит раньше $g(n)$, то $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.
**Порядок функций**:

1. $1$
2. $n^{\frac{1}{\log n}}$
3. $\frac{3}{2}^2$
4. $\log\log n$
5. $\sqrt{log\ n}$
6. $(\sqrt{2})^{\log n}$
7. $\log^2 n$
8. $n$
9. $2^{\log n}$
10. $n \log n$
11. $\log n!$
12. $n^2$
13. $4^{\log n}$
14. $n^3$
15. $\log n!$
16. $n^{\log\log n}$
17. $(\log n)^{\log n}$
18. $n \cdot 2^n$
19. $e^n$
20. $n!$
21. $(n+1)!$
22. $2^{2^n}$
23. $2^{2^{n+1}}$

## Задача №3

Докажите или опровергните, что $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.
**Доказательство** : Предположим, что $\log(n!) = \Theta(n \log n)$. Тогда по определению $\Theta$ :

$$\exists\ c_1, c_2 > 0, N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : c_1 \cdot n \log n \leq \log(n!) \leq c_2 \cdot n \log n$$

Найдем такие константы $c_1$, $c_2$ и $N$.

### 1. $\Omega$ (Нижняя граница)

Рассмотрим первое неравенство и преобразуем его:

$$c_1 \cdot n \log n \leq \log(n!)$$

Возведем двойку в степени, равные левой и правой части неравенства. Заметим,что полученное неравенство равносильно исходному.

$$(2^{\log n})^{c_1 \cdot n} \leq 2^{\log(n!)}$$

$$n^{c_1 \cdot n} \leq n!$$

$$\underbrace{n^{c_1} \cdot \ldots \cdot n^{c_1}}_{n} \leq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n}$$

Возьмем,к примеру, $c_1$ равное $\frac{1}{2}$ и рассмотрим два случая, первый для всех $n$ кратных двум, второй - для $n$ не кратных двум.

### 1.1 $n$ - четно

$$\underbrace{n^{\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot n^{\frac{1}{2}}}_{n} \leq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n} \tag{2}$$

$$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{n/2} \leq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n}$$

Справа разобьем множители на пары вида $(i, n-i+1)$ и сравним произведение каждой такой пары с $n$. Понятно, что таким образом мы сравним значения левой и правой частей.

$$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{n/2} \leq \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} i \cdot (n-i+1)$$

Докажем, что $n \leq i \cdot (n-i+1)$ :

$$n \leq i \cdot n - i^2 + i$$

$$n \cdot (i-1) - i \cdot (i-1) \geq 0$$

$$(n-1)(i-1) \geq 0$$

Множители $n-1$ и $i-1$ всегда положительны, а значит неравенство (2) верно при $c_1$, равном $\frac{1}{2}$ и четном натуральном $n$.

### 1.2 $n$ - нечетно

Этот случай почти аналогичен случаю при четном $n$. При нечетном $n$ слева будет дополнительный множитель $n^{\frac{1}{2}}$ а справа у числа $\frac{(n+1)}{2}$ не будет пары. Тогда осталось сравнить $n^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{(n+1)}{2}$:

$$\sqrt(n) \leq \frac{(n+1)}{2}$$

$$n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

Видно,что это неравенство всегда верно при натуральных $n$. Таким образом доказано неравенство для всех $n$.

### 2. $\mathcal{O}$ (Верхняя граница)

Таким же образом преобразуем второе неравенсто:

$$\log(n!) \leq c_2 \cdot n \log n$$

$$\dots$$

$$\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n} \leq \underbrace{n^{c_2} \cdot \ldots \cdot n^{c_2}}_{n}$$

Очевидно, что для любого $c_2 > 1$ неравенство верно для любых натуральных $n$.

Итого: $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

## Задача №4

Решите рекурренту: найдите верхнюю и нижнюю границы ($\mathcal{O}$ и $\Omega$), докажите по индукции. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

**Решение** : Сначала найдем верхнюю границу.Предположим, $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$ и докажем по индукции.
$T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$, если $\exists\ c > 0, N \in \mathbb{N} : \forall\ n > N : f(n) \leq c \cdot g(n)$ по определению $\mathcal{O}$.
**База индукции** : $T(1) = 1$
**Переход** : Докажем предположение для $n$ ,считая что для всех меньших значений оно верно. Тогда по нашему предположению :

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n} \leq 2c \cdot \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + \frac{n}{\log n}$$

$$T(n) \leq cn \log \frac{n}{2} + \frac{n}{\log n}$$

Если $cn\log\frac{n}{2}+\frac{n}{\log n}\leq cn\log n$, то индукционное предположение доказано, убедимся в верности этого неравенства.

$$cn\log\frac{n}{2}+\frac{n}{\log n}\leq cn\log n$$

$$\frac{n}{\log n}\leq cn(\log n-\log n+1)$$

$$\frac{n}{\log n}\leq cn$$

$$\frac{1}{\log n}\leq c$$

$$1\leq\log n\cdot c$$

Полученное неравенство верно при $c$ равном,например 2, и $n$, на которых определена функция $T$. Следовательно наше предположение тоже, так как найдено $c$ и $n$, удовлетворяющее определению.

Аналогичным образом найдем нижнюю границу. Предположим, $T(n)=\Omega(n)$ и докажем по индукции.
$T(n)=\Omega(n)$, если $\exists\ c>0, n\in\mathbb{N}:\forall\ n>N: f(n)\geq c\cdot g(n)$ по определению $\mathcal{O}$.
**База индукции** : $T(1)=1$
**Переход** : Докажем предположение для $n$ ,считая что для всех меньших значений оно верно. Тогда по нашему предположению :

$$T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\log n}\geq 2c\cdot\frac{n}{2}\cdot\log\frac{n}{2}+\frac{n}{\log n}$$

$$T(n)\geq cn\cdot\log\frac{n}{2}+\frac{n}{\log n}$$

Если неравенство $cn\cdot\log\frac{n}{2}+\frac{n}{\log n}\geq cn\cdot$ верно, то индукционное предположение доказано, убедимся в верности этого неравенства.

$$cn(\log\frac{n}{2}-1)+\frac{n}{\log n}\geq 0$$

$$cn(\log n-2)+\frac{n}{\log n}\geq 0$$

Таким образом получаем,что при любом $c\geq 1$ и любом $n\geq 4$ неравенство обращается в верное, значит верно наше предположение.

Итак, $T(n)=\mathcal{O}(n\log n)$ и $T(n)=\Omega(n)$

## Задача №5

Оцените время работы обоих алгоритмов, если считать, что их вызывают от двух чисел длины $n$.

## Первый алгоритм

Запишем рекуррентное соотношение для рекурсивного алгоритма:

1. Функции,работающие за линейное время от длины аргумеента вызываются 8 раз.

2. Функция multiply вызывает сама себя 4 раза, передавая аргументы с длиной,в два раза меньшей длины переданного ей аргумента.

Запишем рекуррентное соотношение:

$$T(n) = 8 \cdot n + 4 \cdot T(\frac{n}{2})$$

Решим рекурренту, используя Мастер-теорему:

- $a = 4$
- $b = 2$
- $c = 1 \quad$ (т.к $8 \cdot n = \mathcal{O}(n)$)

Получаем, что $c < \log_b a$, а значит $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) = \mathcal{O}(n^2)$.

## Второй алгоритм

Имеем:

$$T(n) = 8 \cdot n + 3 \cdot T(\frac{n}{2})$$

Так же решим рекурренту при помощи Мастер-теоремы:

- $a = 3$
- $b = 2$
- $c = 1 \quad$ (т.к $8 \cdot n = \mathcal{O}(n)$)

Получаем, что $c < \log_b a$, а значит $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$.