Домашнее задание по АиСД №13

Эмиль Гарипов M3138

2019-12-20

Задача №4

Докажем по индукции. Индукционное предположение: для всех листовых вершин, находящихся на высоте не более n верно следующее: $\sum_{i=1}^{cnt} 2^{-d_i} \leq 1$, где cnt — кол-во листовых вершин на высоте не более n, а d_i — высота i-ой вершины.

1. **База $\mathbf{n = 1}$**. Для одной вершины, находящейся на высоте 1 утверждение верно, $1 \leq 1$. Далее будем «строить» имеющееся дерево. База верна для листьев, тогда возьмем очередной лист и подвесим его к его родителю в исходном дереве. Так же, если у листа имеется брат, подвесим его аналогчным образом. Тогда лист будет иметь высоту 2, родитель высоту 1, а утверждение для $n = 2$ будет верно в силу доказанного ниже перехода. Затем продолжим такое построение до тех пор, пока не дойдем до корня. Дойдя до корня докажем утверждение для всего дерева.

2. **Переход. Утв. верно для n, докажем для $\mathbf{n + 1}$**. Возьмем вершину, назовем ее a, находящуюся на высоте n. Подвесим ее вместе с ее братом(если он имеется), назовем его b, к их отцу в исходном дереве. Для поддерева вершины a и b(если вершины b не существует, тогда будем считать, сумму из индукционного предположения равной нулю) верно по предположение индукции следующее:

$$\sum_{i=1}^{cnt_a} 2^{-da_i} \leq 1, \text{и} \sum_{i=1}^{cnt_b} 2^{-db_i} \leq 1 \tag{1}$$

где cnt_a — количество листовых вершин в поддереве вершины a, cnt_b — количество листовых вершин в поддереве вершины b, da_i и db_i — высоты листовых вершины в поддеревьях вершин a и b соответственно.

Сложим эти две суммы и поделим на два. Получим, что утверждение верно и для (n + 1). Так как при подвешивании вершин a и b к их отцу мы увеличиваем высоту листовых вершин их поддеревьев на один. А деля на два сумму двух сумм, мы выносим за скобку 0.5, что соотвествует увеличению высоты каждого листа из поддеревьев вершин a и b на один. Индукционный переход доказан.

В силу произвольности дерева утверждение, которое необходимо доказать в задаче, верно для любого двоичного дерева.

Задача №5

Зафиксируем начальную вершину, назовем ее a, и конечную вершину, на которой мы остановимся, назовем ее b. Нетрудно заметить, что в ходе выполнения операции $veryNext$ мы посетим все вершины на путях от a до

$lca(a, b)$ и от $lca(a, b)$ до b. Таких вершин не более $2 \cdot \log_2 n$. А все остальные вершины(которые не лежат на путях от a до $lca(a, b)$ и от $lca(a, b)$ до b), которые мы посетим, их не более $\mathcal{O}(k)$, причем мы сначала в какой-то момент зайдем во все такие вершины, потом выйдем из них, значит посетим каждую два раза, следовательно посещение таких вершин займет $\mathcal{O}(k)$ времени. Отсюда получаем время работы $\mathcal{O}(k + \log_2 n)$.