Домашнее задание по АиСД №5

Эмиль Гарипов M3138

2019-10-25

Задача №1

Требуется доказать утверждение, назовем его **Утверждение 1**, что в любой сортирующей сети для любых двух соседних входных позиций i, $i+1$ найдется компоратор, который их сравнивает. Предположим, что существует сортирующая сеть, в которой нет компоратора между какой-то парой позиций $(i, i+1)$ нет компаратора. Тогда если это предположение не верно, **Утверждение 1** доказано.

Занумеруем нити(входы, на который подаются элементы) от 1 до n. По нашему предположению сеть сортирующая, значит она сортирует любую последовательность из 0 и 1. Тогда при подаче на нити $1, 2 \ldots (i-1)$ нулей, а на все остальные нити единичек, сортирующая сеть не сможет отсортировать эту последовтельность, так как любой компаратор между парой нитей $(i, x) \forall x \neq (i+1)$ не изменит значение на i-й нити (поскольку на ней стоит 1, на всех нитях с номером меньшим i стоят 0, а на нитях с номером, большим $i+1$ стоят 1, а так же нет компоратора $(i, i+1)$). Аналогично рассматривается случай для $i+1$-й нити(случаи отличаются только значениями на нитях).
Тогда наше предположение неверно. Следовательно $\forall i < n$ в сортирующей сети $\exists comp(i, i+1)$, где $comp(i, j)$ — компаратор между парой нитей (i, j).

Задача №2

Сеть должна объединять входную отсортированную последовательность a и 1 элемент. Это значит, что независимо от входной последовательности и элемента, назовем его x, она должна ставить этот элемент на такое место, при постановке на которое верно, что выходной массив будет отсортированным (всего таких мест при разных входных данных может быть n). Ведь в противном случае, можно подобрать такие входные данные, которые не будут объединены сетью, а значит сеть не будет удовлетворять нужному нам условию.

Итого, сеть должна ставить элемент x на одно любое(в силу произвольности входных данных в общем случае) из n мест в зависимости от входных данных. Назовем доказанное утверждение **Утверждение 2**.

Докажем по индукции, что сеть глубной i может ставить элемент x на 2^i различных мест(под местами подразумеваются выходные нити сети) в завивимости от входных данных.

1. **База** $i = 1$: Сеть глубиной 1. На входе имеется некая отсортированная последовательность a и элемент x. Очевидно, что компаратор, связывающий два элемента последовательности не поменяет их местами, это понятно из принципа работы компаратора, ведь он отправляет на верхний выход минимум их входов, а на нижний — минимум (на нижний вход мы подадим элемент меньший элемента на верхнем входе в

силу того, что массив отсортирован). А компараторы, связывающие элемент x и элемент последовательности a могут поменять их местами, но такой компаратор может быть только один, так как иначе это не будет сеть глубиной 1. Следовательно x может занять две различные позиции (либо x останется на прежней позиции, либо поменяется местами с каким-нибудь элементом последовательности a).

2. **Переход** $i \to (i+1)$: По индукционному предположению есть какая-то сеть глубины i, которая может поставить x на различные 2^i мест. Тогда соединим компараторами каждое из этих 2^i различных мест, множество этих мест назовем $\mathbb{C}$, с местом, на которое x еще не может быть поставлен, назовем множество этих мест $\mathbb{D}$. Этим действием мы получим сеть глубиной $i+1$ (Так как соединяем нить, имеющую глубину i с нитью глубиной 1). Верно, что $\forall c1 \neq c2\ c1, c2 \in \mathbb{C}\ c1$ и $c2$ соединены с различными элементами множества $\mathbb{D}(c1$ и $c2$ не могут быть соединены с одним и тем же элементом, так как такое сравнение не определено для компараторов). А так же, так как мы соединяем любой элемент множества $\mathbb{C}$ с элементом множества $\mathbb{D}$, то у каждого будет пара, а компаратор либо оставит x на прежнем месте, либо переместит его. Следовательно количество мест, на которых может оказаться x увеличится вдвое. А значит будет равно $2^i * 2 = 2^{(i+1)}$.

   Предположение доказано.

По **Утверждению 2** и доказанному утверждению о том, что сеть глубной i может ставить элемент x на 2^i различных мест в завивимости от входных данных, следует, что для объединения последовательности из $n-1$-го элемента и 1-го элемента сеть должна иметь глубину хотя бы $\log_2 n$.