Introduction

基本定义和符号:

设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个凸多胞体（polytope：A d-polytope P is the convex hull of finitely many points in $\mathbb{R}^d$, or A d-polytope P is the bounded intersection of finitely many half-spaces in $\mathbb{R}^d$ ）或一个一般的凸体。我们用 $S = \partial P$ 来表示P的表面。为了简化符号，我们使用 $area(S)$ 来表示P的表面积。我们使用 $area(\cdot)$ 来表示 $(d-1)-$维 体积：$area(S) = vol_{d-1}(S)$。若 P 在超平面 H 的一侧，而 $x \in H$，则称超平面 H 在 $x \in S$ 处 *支撑 (supporting)* P。

对于集合 $X \subset \mathbb{R}^d$，我们使用 $cm(X)$ 来表示其*质心*

> 注：作者注释道我们仅对分段线性的集合X的凸面考虑$cm(X)$，因此这个定义是完备的。原话是We consider cm(X) only for convex of piecewise linear sets X, so it is always well defined. 我没看懂这句话什么意思

以及用 $conv(X)$ 来表示集合 X 的凸包。我们使用 $|xy|$ 来表示点 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 之间的距离。另外，$\|\boldsymbol{e}\|$ 表示向量 $\boldsymbol{e} = \vec{xy}$ 的长度。向量永远是加粗的，比如 O 表示原点，而 $\mathbf{0}$ 表示零向量。我们用 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} >$ 来表示向量的数量积（Scalar product）。曲面（Surface）上两个点 $x, y \in S$ 的*测地线距离*用 $|xy|_S$ 来表示。我们使用 $\sphericalangle$ 来表示球角（spherical angles）。

我们的图（*graphs*）均由点和边组成，边只有在我们显式表明有向时才是有向的。在第21节的开始，出于习惯，我们研究带顶点的光滑曲线（“vertices” *smooth curves*），但为了避免混淆，我们不会在后面的章节中提及它。

> In the beginning of Section 21, following a long standing tradition, we study “vertices” *smooth curves*, but to avoid confusion we never mention them in later sections.

出于习惯，我们使用 *polygon* 来表示两个不同的事物：一个简单的闭合分段线性闭合曲线及曲线的内部。在高维空间中，当我们讨论 *space polygons* 时，这两者的相似性（等价性？）不再成立。当我们需要对它们进行区分时，我们会使用 *闭合分段线性曲线* 和 *polygon region* 这两个词语。一个*简单的 polygon* 是一个没有自交点的 *polygon*。我们使用 $Q = [v_1 \dots v_n]$ 来表示一个（周期）顺序顶点为 v_i 的闭合polygon们使用 (abc) 来表示一个三角形，并广义地使用 $(v_0 v_1 \dots v_d)$ 来表示一个 $(d+1)$-维的单纯形（simplex）。我们使用 (u, v) 来表示一个开区间

（直线段）或两顶点之间的边，使用 $[xy]$ 和 $[x, y]$ 来表示闭区间，它可以在一条直线或者曲线上，使用 (xy) 表示两个点确定的一条直线。

在大部分情况中，我们使用 $polytope$ 来表示有限点的凸包。因此除了第15-17节之外，"polytope"通常和形容词 $convex$ 一同出现。除此之外，我们假设它是满维度的（fully dimensional），即是说不是落在一个仿射超平面上的。在所有其他的情况下，我们使用 $polyhedron$ 来表示凸或非凸的曲面、非紧凑的半空间相交点等。由于我们只关系离散的结果，我们并不限制 polytopes 在 $\mathbb{R}^d$ 上是开的还是闭的，也不指定十分在每种情况下都合适。

我们区分 polytope的 $\text{细分}(subdivisions)$ 和 $\text{分解}(decompositions)$，前者需要CW复形（CW complex）而后者不需要。三角剖分 在表达上过于模糊，因此我们仅仅把它用于单纯的细分。我们称 $\text{分割}(dissections)$ 为最简单的分解，称 $\text{全三角剖分}(full\ triangulations)$ 为给定顶点集合的三角剖分（通常给定的定点为一个凸polytope的顶点）。

我们偶尔使用标准的符号来比较函数：$O(\cdot)$，$O(\cdot)$，$\Omega(\cdot)$，$\theta(\cdot)$。我们使用多种箭头形的符号，比如 $\sim$，$\simeq$，$\leftrightarrow$，$\bowtie$，$\asymp$，$\cong$ 等来表示翻转、局部移动和等价关系。我们保持 $\approx$ 为数字上的相似。

最后，在整本书中，$[n] = \{1, 2, ..., n\}$，$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$，$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$，$\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$，$\mathbb{Q}_+ = \{x > 0, x \in \mathbb{Q}\}$。我们使用 $\mathbb{R}^d$ 表示d-维欧氏空间，使用 $\mathbb{S}^d$ 表示d-维球，使用 $\mathbb{S}^d_+$ 表示d-维半球，其中 $d \geq 1$。为了简化符号，我们使用 $X - a$ 和 $X + b$ 来表示 $X \diagdown a$ 和 $X \cup b$。