

Nota: No tenia acentos en el teclado, sepan disculpar

Contents

1	Metodos iterativos de aproximacion	2
1.1	Biseccion	2
1.2	Metodo de Newton	4
1.3	Punto fijo	6
2	Interpolacion	9
2.1	Polinomio interpolante	10
2.2	Lagrange	11
2.3	Aproximar el error de una interpolacion	12

1 Metodos iterativos de aproximacion

1.1 Biseccion

Theorem 1 (Sobre el metodo de biseccion) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(a)f(b) < 0$ y $\exists r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$. Entonces las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. Definidas como:

$$a_0 = a, b_0 = b$$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{Si } f(c_n)f(b_n) < 0 \\ a_n & \text{Si } f(a_n)f(c_n) < 0 \end{cases}$$
$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{Si } f(c_n)f(b_n) < 0 \\ c_n & \text{Si } f(a_n)f(c_n) < 0 \end{cases}$$

Entonces sucede que

1) a_n, b_n, c_n son convergentes.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = r$

3) Se tiene que $c_n - r \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Notar que no definimos el caso $f(c_n) = 0$ pues en ese caso habriamos encontrado la raiz $r = c_n$.

Proof: Ya vimos que si $f(c_n) \neq 0$ se generan a_n y b_n tal que:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$$

Asi que a_n es monotona creciente y acotada superiormente por b_n . $\implies a_n$ es convergente a r_1 .

Del mismo modo $\implies b_n$ es convergente a r_2

Ahora la resta $b_{n+1} - a_{n+1}$ se puede definir de la siguiente manera

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - c_n = b_n - \frac{b_n + a_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \\ c_n - a_n = \frac{b_n + a_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \end{cases}$$

Osea que simplemente

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(b_n - a_n) \\
 &= \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\
 &= \frac{1}{2^3}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\
 &\dots \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)
 \end{aligned}$$

Luego tomando limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}}(b - a) = 0$$

Pero

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} - a_{n+1} &= 0 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= 0 \\
 r_1 - r_2 &= 0 \\
 \implies r_1 &= r_2
 \end{aligned}$$

Llamaremos a partir de ahora $r = r_1 = r_2$

Ahora:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \frac{1}{2}(r + r) = r$$

Por la forma en que se definen a_n, b_n se deduce que

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$$

Como f es continua

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

y

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Finalmente tenemos:

$$0 \geq f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \implies 0 \geq (\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n))(\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)) = f(r)f(r) = f(r)^2$$

En resumen

$$0 \geq f(r)^2$$

y esto sucede si $f(r) = 0$

Por ultimo veamos la cota para el error. Recordemos que:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a) \quad \forall n \implies b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

$$\begin{aligned} |c_n - r| &\leq |c_n - a_n| = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^n}(b - a) \\ &= \frac{b - a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

1.2 Metodo de Newton

Theorem 2 (Sobre el método de Newton) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con f'' continua tal que: existe $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$ y $f'(r) \neq 0$.

Entonces existe $\delta > 0$ tal que si empezamos a iterar segun el método de Newton con $x_0 \in [r - \delta, r + \delta]$ entonces la iteracion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1}$$

Produce una sucesion $\{x_n\}$ que cumplirá que:

1. $x_n \in [r - \delta, r + \delta] \quad \forall n$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$ La sucesion tiende a la raiz
3. Existe $c > 0$ tal que $|x_{n+1} - r| < c \times |x_n - r|^2$ (Converge cuadraticamente)

Proof: Para cada $h > 0$ definimos la función auxiliar $C(h)$ como:

$$C : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$C(h) = \frac{1}{2} \frac{\max\{f''(y) : y \in [r-h, r+h]\}}{\min\{f'(z) : z \in [r-h, r+h]\}} \quad (2)$$

Notar que este es cociente mas grande posible entre elementos de la image de f'' y f' al rededor de r a distancia h .

Con esto en mente, resulta que:

Si $x, \gamma \in [r-h, r+h]$ entonces $\frac{1}{2} \frac{f''(\gamma)}{f'(x)} \leq C(h)$

Ademas sucede que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(h) = \frac{1}{2} \frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} \neq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} C(h) \times h = 0 \implies \exists \delta > 0 : C(\delta) \times \delta < 1$$

(Nota: El hecho de que el limite tienda a 0, nos dice que hay algun h , que se va a acercar tanto como necesitamos)

Nombraremos esta ultima parte: $C(\delta) \times \delta = \lambda$.

Este δ nos servira mas adelante en la prueba

Tomemos el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $a = x_n$. Sea e entre x y x_n

$$f(x) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x - x_n) + \frac{f''(e)}{2!}(x - x_n)^2 \quad (3)$$

Evaluando el polinomio en r a

$$\begin{aligned} f(r) &= 0 = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(r - x_n) + \frac{f''(e)}{2!}(r - x_n)^2 \\ -f(x_n) - \frac{f'(x_n)}{1!}(r - x_n) &= \frac{f''(e)}{2!}(r - x_n)^2 \\ -f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x_n - r) &= \frac{1}{2}f''(e)(r - x_n)^2 \\ -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{1!}(x_n - r) &= \frac{1}{2} \frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\ (x_n - r) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{1}{2} \frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\ (x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}) - r &= \frac{1}{2} \frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Notar que de el lado izquierdo tenemos el error para el paso x_{n+1} de la sucesion al tomar valor absoluto

$$\begin{aligned}
 |(x_{n+1} - r)| &= \left| \frac{1}{2} \frac{f''(e)}{f'(x_n)} (r - x_n)^2 \right| \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|f''(e)|}{|f'(x_n)|} |r - x_n|^2 \\
 &\leq C(\delta) |r - x_n|^2 \\
 &\leq C(\delta) |r - x_n| |r - x_n| \\
 &< \lambda |r - x_n|
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\implies x_{n+1} \in [r - \delta, r + \delta]$$

De la misma forma como $\lambda < 0$

$$|r - x_{n+1}| < \lambda |r - x_n| < \lambda^2 |r - x_{n-1}| < \dots < \lambda^{n+1} |r - x_0| \implies |x_n - r| \rightarrow 0$$

Finalmente tomando $c = C(\delta)$ tenemos que

$$|x_{n+1} - r| \leq c |x_n - r|^2.$$

1.3 Punto fijo

Theorem 3 (Sobre la iteracion de punto fijo)

Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que su imagen esta contenida en $[a, b]$.

Entonces g tiene un punto fijo p^* . (**Existencia**)

Ademas si g' esta definida en (a, b) y $|g'(x)| \leq k$ con $k < 1 \forall x \in (a, b)$.

Entonces el punto fijo es único (**Unicidad**) y la iteración:

$$p_{n+1} = g(p_n)$$

Converge a p^* partiendo de $p_0 \in [a, b]$. Y valen estas cotas:

- 1) $|p_{n+1} - p^*| \leq k |p_n - p^*|$ (la convergencia es al menos lineal)
- 2) $|p_n - p^*| \leq k^{n+1} |p_0 - p^*|$
- 3) $|p_n - p^*| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$
- 4) $|p_n - p^*| \leq \frac{k}{1-k} |p_n - p_{n-1}|$

Veamos antes una propiedad general Dada $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en ese intervalo y $f(x) = g(x) - x$.

$$\begin{aligned} 1) \quad g(a) < a, g(b) > b &\implies f(a) < 0, f(b) > 0 \\ &\implies \text{(T.V.intermedio)} \exists p^* \in [a, b] : g(p^*) = p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad g(a) > a, g(b) < b &\implies f(a) > 0, f(b) < 0 \\ &\implies \text{(T.V.intermedio)} \exists p^* \in [a, b] : g(p^*) = p^* \end{aligned}$$

Proof: Tenemos que $g(a) \in [a, b]$ Entonces vale alguna de las siguientes

- 1.a) $g(a) > a$ Pues a es el minimo
- 2.a) O bien vale que $g(a) = a$

En caso de que pase lo segundo es trivial que g tiene punto fijo en a
 Similarmente para b

- 1.b) $g(b) < b$ Pues b es el maximo
- 2.b) O bien vale que $g(b) = b$

En caso de que pase lo segundo es trivial que g tiene punto fijo en b
 Ahora para el caso no trivial, dado que sucede 1.a y 1.b. Por la propiedad que vimos antes de la prueba sabemos que existe p^* . Entonces la funcion tiene punto fijo en p^*

Supongamos ahora que $|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in (a, b)$ veamos que p^* es único: Si $\exists q^* \neq p^*$ y $g(p^*) = p^*$ y $g(q^*) = q^* \implies$

$$\frac{g(p^*) - g(q^*)}{p^* - q^*} = 1$$

Luego por el teorema de valor medio hay un λ entre p y q tal que:

$$g(p^*) - g(q^*) = g'(\lambda)(p^* - q^*)$$

Lugo usando la hipotesis de que $g'(x) \leq k < 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |p^* - q^*| &= |g(p^*) - g(q^*)| = |g'(\lambda)| |p^* - q^*| \leq k |p^* - q^*| < |p^* - q^*| \\ |p^* - q^*| &< |p^* - q^*| \end{aligned}$$

Absurdo que vino de suponer que existen mas de un puntos fijos. Por lo que el punto fijo debe ser único.

Veamos que la iteración converge al punto fijo. Notar que como $g(x) \in [a, b]$ la sucesion siempre esta bien definida.

Ahora sea $p_0 \in (a, b)$ y sea $p_{n+1} = g(p_n)$ entonces:

$$|p_{n+1} - p^*| = |g(p_n) - g(p^*)| = |g(p_n) - p^*|$$

Por teorema de valor medio existe λ tq:

$$\begin{aligned} & |g(p_n) - p^*| = \\ & |g'(\lambda)| |p_n - p^*| \leq k |p_n - p^*| \quad (k \text{ acota a la derivada en el intervalo}) \end{aligned}$$

Entonces podemos hacer los mismo para los casos $n-1, n-2, \dots$ y tenemos:

$$|p_n - p^*| \leq k |p_{n-1} - p^*| \leq k^2 |p_{n-2} - p^*| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p^*| \quad (2)$$

Ahora tomando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p^*| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p^*| = |p_0 - p^*| \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$$

Por lo tanto la sucesion converge a p^* .

Veamos por ultimo las cotas que se pueden deducir.

1) Esta apareció durante la prueba

$$\begin{aligned} & |p_{n+1} - p^*| = \\ & |g(p_n) - p^*| \stackrel{T.V.M}{=} |g'(\lambda)| |p_n - p^*| \\ & \leq k |p_n - p^*| \end{aligned}$$

2) Tambien aparecio durante la prueba

$$|p_n - p^*| \leq k |p_{n-1} - p^*| \leq k^2 |p_{n-2} - p^*| \leq \dots \leq k^{n+1} |p_0 - p^*|$$

3) Partiendo de la anterior

$$\begin{aligned} & |g(p_{n-1}) - g(p_{n-2})| = |p_n - p_{n-1}| \leq k |p_{n-1} - p_{n-2}| \\ \implies & |p_n - p^*| \leq \frac{k}{1-k} k |p_{n-1} - p_{n-2}| \\ \implies & |p_n - p^*| \leq \frac{k}{1-k} k^2 |p_{n-1} - p_{n-2}| \\ & \dots \\ \implies & |p_n - p^*| \leq \frac{k}{1-k} k^{n-1} |p_1 - p_0| = \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \end{aligned}$$

4) Partiendo de la anterior

$$|p_{n+1} - p *| \leq k|p_n - p *|$$

Sumo y resto p_{n+1}

$$|p_{n+1} - p *| \leq k|p_n - p_{n+1} + p_{n+1} - p *|$$

Desigualdad trianguar:

$$\begin{aligned} |p_{n+1} - p *| &\leq k|p_n - p_{n+1} + p_{n+1} - p *| \\ |p_{n+1} - p *| &\leq k|p_n - p_{n+1}| + k|p_{n+1} - p *| \\ |p_{n+1} - p *| - k|p_{n+1} - p *| &\leq k|p_n - p_{n+1}| \\ (1 - k)|p_{n+1} - p *| &\leq k|p_n - p_{n+1}| \\ |p_{n+1} - p *| &\leq \frac{k}{(1 - k)}|p_n - p_{n+1}| \end{aligned}$$

2 Interpolacion

Enunciamos y probamos a continuacion una propiedad que nos servira para probar la unicidad en el proximo teorema.

Lemma 4 *Un polinomio $p(x)$ con $gr(p) = k$ tiene a lo sumo k raices*

Proof: Veamos por induccion

$gr(p) = 0$:

Es trivial.

$gr(p) = 1$:

el polinomio es de la forma

$$p(x) = x - a$$

Que tiene raiz solamente en a

$gr(p) = k$: Hipotesis inductiva: Los polinomios de grado $k - 1$ tienen a lo sumo $k - 1$ raices.

Sea $p(x)$ un polinomio tal que $gr(p) = k$ con al menos una raiz en a . Entonces se puede factorizar como:

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

Donde $q(x)$ es otro polinomio, necesariamente de grado $k - 1$. Ahora la cantidad de raíces de $p(x)$ es 1 (porque a es raíz) + las raíces que tenga $q(x)$. Pero por hipótesis inductiva q tiene a lo sumo $k-1$ raíces. $\implies p(x)$ tiene a lo sumo k raíces.

2.1 Polinomio interpolante

Theorem 5 (Polinomio interpolante)

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ puntos en el plano cartesiano. Tales que $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$

Existe un **único** polinomio $p(x)$ de grado $\leq n$ tal que:

$$p(x_i) = y_i$$

Para cada punto de los dados.

Proof: Veamos por inducción en n

$n = 0$: definimos el polinomio $p(x)$ como

$$p(x) = x_0$$

$n = k$: Ahora nuestra hipótesis inductiva será que existe un polinomio $q(x)$ que interpola los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$

Plantearemos $p(x)$ como:

$$p(x) = q(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Donde α es una constante a determinar pero notemos que en caso de evaluar $p(x)$ en uno de los puntos que ya interpolaba $q(x)$ resulta en que se anula todo el término derecho, por lo que simplemente se evalúa $q(x)$

Ahora queremos despejar α para que p cumpla que interpola el n -ésimo punto

$$\begin{aligned} p(x_n) &= y_n = q(x_n) + \alpha(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1}) \\ y_n &= q(x_n) + \alpha(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1}) \\ y_n - q(x_n) &= \alpha(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1}) \\ \frac{y_n - q(x_n)}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})} &= \alpha \end{aligned}$$

Recordemos que los x_i eran todos distintos por la hipotesis del teorema osea que el denominador nunca se hace cero, por lo que el polinomio queda bien definido.

Veamos ahora que $p(x)$ es unico.

Unicidad: Supongamos que $p(x)$ y $d(x)$ dos polinomios, ambos de grado $\leq n$ y tales que $p(x_i) = d(x_i) = y_i$ para cada punto de los mencionados al inicio.

Definamos $q(x) = p(x) - d(x)$, un polinomio de grado $\leq n$ Notemos que tiene raices en cada uno de los x_i pues:

$$q(x_i) = p(x_i) - d(x_i) = y_i - y_i = 0$$

Para ser distintos p y d deben tener al menos una raiz distinta. Como el grado de q es n , usando el lemma de antes, es claro que como q tiene a lo sumo n raices. Pero como p y d interpolan exactamente los n mismos puntos es claro que esas son todas las n raices posibles de q . En conclusion $p(x) = d(x)$.

2.2 Metodo de Lagrange para dar el interpolante

Notacion: En matematica en general cuando aparece un \hat{x} en una formula, quiere decir que ese termino 'se borra' o no va en la formula, pero facilita la notacion.

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ puntos en el plano cartesiano. Tales que $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$. Definimos $\ell_i(x)$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$ como:

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots \widehat{(x_i - x_i)} \dots (x_i - x_n)}$$

los ℓ_i tienen la propiedad de que cumplen lo siguiente:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$$

y ademas hay que notar que ℓ_i es un polinomio, mas aun $gr(\ell_i) = n$

por lo que para dar un polinomio de grado $\leq n$ que interpole los puntos mencionados al principio podemos usar:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$$

2.3 Error de interpolacion

Lemma 6 Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en su dominio (por consecuencia continua). Sean $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ todos distintos, raices de g y tal que $x_i < x_{i+1}$. Entonces siempre hay un $c \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $g'(c) = 0$.

Proof: Por teorema de Rolle tomando dos raices x_i, x_{i+1} tenemos que como g es derivable en el intervalo y $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$, entonces existe c entre (x_i, x_{i+1}) tal que $g'(c) = 0$.

Lemma 7 Del lema anterior se deduce que Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en su dominio (por consecuencia continua). Sean $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ todos distintos, raices de g y tal que $x_i < x_{i+1}$. Entonces g' tiene al menos n raices en (x_0, x_n) .

Theorem 8 (Error del polinomio interpolante) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion con $n+1$ derivadas continuas. y sea $p(x)$ un polinomio de grado $\leq n$ que interpola los $n+1$ puntos: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ Donde $y_i = f(x_i)$. Con $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ todos distintos. Entonces:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Donde $c \in (a, b)$

Proof: Vale obviamente si tomamos $x = x_i$, pues el error da 0. Fijaremos un $x \in [a, b]$ tal que $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Definimos:

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) = [f(x) - p(x)] \frac{\prod_{i=0}^n (t - x_i)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} - (f(t) - p(t))$$

Notar que φ es continua y derivable $n + 1$ veces con todas derivadas continuas.

¿Cuántas raíces tiene φ ? Claramente $t = x_0, t = x_1, \dots, t = x_n$ son raíces. Y también lo es $t = x$.

Como φ es $n + 1$ veces derivable:

$$\begin{aligned} \implies \varphi' &\text{ Tiene al menos } n \text{ raíces en } (x_0, x_n) \\ \implies \varphi'' &\text{ Tiene al menos } n - 1 \text{ raíces en } (x_0, x_n) \\ \implies &\dots \\ \implies \varphi^{(n+1)} &\text{ Tiene al menos una raíz en } (x_0, x_n) \end{aligned}$$

Llamemos c a la raíz de $\varphi^{(n+1)}$. Luego calcular la derivada $n + 1$ esima es fácil:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = [f(x) - p(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n + 1)! - f^{(n+1)}(t)$$

Ahora evaluada en c tenemos que

$$0 = \varphi^{(n+1)}(c)$$

$$0 = [f(x) - p(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)! - f^{(n+1)}(c)$$

$$f^{(n+1)}(c) = [f(x) - p(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)!$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{[f(x) - p(x)]} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

$$\frac{[f(x) - p(x)]}{f^{(n+1)}(c)} = \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!}$$

$$\frac{[f(x) - p(x)]}{f^{(n+1)}(c)} = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$