Notas de Analisis Numerico

Emilio Pereyra

June 23, 2025

Nota: No tenia acentos en el teclado, sepan disculpar

Contents

1 Metodos iterativos de aproximacion

1.1 Biseccion

Theorem 1 (Sobre el metodo de biseccion) *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua, tal que* $f(a)f(b) < 0$ *y* $\exists r \in [a,b]$ *tal que* $f(r) = 0$ *. Entonces las sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$*. Definidas como:*

$$a_0 = a, b_0 = b$$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & Si\ f(c_n)f(b_n) < 0 \\ a_n & Si\ f(a_n)f(c_n) < 0 \end{cases}$$
$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & Si\ f(c_n)f(b_n) < 0 \\ c_n & Si\ f(a_n)f(c_n) < 0 \end{cases}$$

Entonces sucede que
1) a_n, b_n, c_n *son convergentes.*
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = r$
3)Se tiene que $c_n - r \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Notar que no definimos el caso $f(c_n) = 0$ *pues en ese caso habriamos encontrado la raiz* $r = c_n$*.*

Proof: Ya vimos que si $f(c_n) \neq r$ se generan a_n y b_n tal que:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n < b_n \leq ... \leq b_1 \leq b_0$$

Asi que a_n es monotona creciente y acotada superiormente por b_n. $\Longrightarrow$ a_n es convergente a r_1.

Del mismo modo $\Longrightarrow$ b_n es convergente a r_2

Ahora la resta $b_{n+1} - a_{n+1}$ se puede definir de la siguiente manera

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - c_n = b_n - \frac{b_n+a_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} \\ c_n - a_n = \frac{b_n+a_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} \end{cases}$$

Osea que simplemente

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(b_n - a_n) \\
&= \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2^3}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\
&... \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)
\end{aligned}$$

Luego tomando limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) = 0$$

Pero

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_{n+1} - a_{n+1} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} b_{n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= 0 \\
r_1 - r_2 &= 0 \\
\implies r_1 &= r_2
\end{aligned}$$

Llamaremos a partir de ahora $r = r_1 = r_2$
Ahora:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n) = \frac{1}{2}(r + r) = r$$

Por la forma en que se definen a_n, b_n se deduce que

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$$

Como f es continua

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

y

$$f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Finalmente tenemos:

$$0 \geq f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \implies 0 \geq (\lim_{n\to\infty} f(a_n))(\lim_{n\to\infty} f(b_n)) = f(r)f(r) = f(r)^2$$

En resumen

$$0 \geq f(r)^2$$

y esto sucede sii $f(r) = 0$

Por ultimo veamos la cota para el error. Recordemos que:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \quad \forall n \implies b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

$$\begin{aligned} |c_n - r| \leq |c_n - a_n| &= \frac{1}{2}(b_n - a_n) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}(b-a) \\ &= \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

1.2 Metodo de Newton

Theorem 2 (Sobre el método de Newton) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f'' continua tal que: existe $r \in [a,b]$ tal que $f(r) = 0$ y $f'(r) \neq 0$.*
Entonces existe $\delta > 0$ tal que si empezamos a iterar segun el método de Newton con $x_0 \in [r-\delta, r+\delta]$ entonces la iteracion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1}$$

Produce una sucesion $\{x_n\}$ que cumplirá que:
1. $x_n \in [r-\delta, r+\delta]$ $\forall n$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ La sucesion tiende a la raiz
3. Existe $c > 0$ tal que $|x_{n+1} - r| < c \times |x_n - r|^2$ (Converge cuadraticamente)

Proof: Para cada $h > 0$ definimos la función auxiliar $C(h)$ como:

$$\begin{aligned} &C : (0, \infty) \to \mathbb{R} \\ &C(h) = \frac{1}{2} \frac{\max\{f''(y) : y \in [r-h, r+h]\}}{\min\{f'(z) : z \in [r-h, r+h]\}} \end{aligned} \tag{2}$$

Notar que este es cociente mas grande posible entre elementos de la image de f'' y f' al rededor de r a distancia h.

Con esto en mente, resulta que:
Si $x, \gamma \in [r-h, r+h]$ entonces $\frac{1}{2}\frac{f''(\gamma)}{f'(x)} \leq C(h)$

Ademas sucede que:

$$\lim_{h\to 0} C(h) = \frac{1}{2}\frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} \neq 0 \implies \lim_{h\to 0} C(h) \times h = 0 \implies \exists \delta > 0 : C(\delta) \times \delta < 1$$

(Nota: El hecho de que el limite tienda a 0, nos dice que hay algun h, que se va a acercar tanto como necesitamos)

Nombraremos esta ultima parte: $C(\delta) \times \delta = \lambda$.

Este δ nos servira mas adelante en la prueba

Tomemos el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $a = x_n$. Sea e entre x y x_n

$$f(x) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x - x_n) + \frac{f''(e)}{2!}(x - x_n)^2 \tag{3}$$

Evaluando el polinomio en r a

$$\begin{aligned} f(r) = 0 = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(r - x_n) + \frac{f''(e)}{2!}(r - x_n)^2 \\ -f(x_n) - \frac{f'(x_n)}{1!}(r - x_n) &= \frac{f''(e)}{2!}(r - x_n)^2 \\ -f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x_n - r) &= \frac{1}{2}f''(e)(r - x_n)^2 \\ -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{1!}(x_n - r) &= \frac{1}{2}\frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\ (x_n - r) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{1}{2}\frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\ (x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}) - r &= \frac{1}{2}\frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Notar que de el lado izquierdo tenemos el error para el paso x_{n+1} de la sucesion al tomar valor absoluto

$$\begin{aligned}
|(x_{n+1} - r)| &= |\frac{1}{2}\frac{f''(e)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2| \\
&= \frac{1}{2}\frac{|f''(e)|}{|f'(x_n)|}|r - x_n|^2 \\
&\leq C(\delta)|r - x_n|^2 \\
&\leq C(\delta)|r - x_n||r - x_n| \\
&< \lambda|r - x_n|
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\implies x_{n+1} \in [r - \delta, r + \delta]$$

De la misma forma como $\lambda < 0$

$$|r - x_{n+1}| < \lambda|r - x_n| < \lambda^2|r - x_{n-1}| < ... < \lambda^{n+1}|r - x_0| \implies |x_n - r| \to 0$$

Finalmente tomando $c = C(\delta)$ tenemos que

$$|x_{n+1} - r| \leq c|x_n - r|^2.$$

1.3 Punto fijo

Theorem 3 (Sobre la iteracion de punto fijo)

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que su imagen esta contenida en $[a, b]$. Entonces g tiene un punto fijo $p*$. (**Existencia**)
Ademas si g' esta definida en (a, b) y $|g'(x)| \leq k$ con $k < 1$ $\forall x \in (a, b)$. Entonces el punto fijo es único (**Unicidad**) y la iteración:

$$p_{n+1} = g(p_n)$$

Converge a $p*$ partiendo de $p_0 \in [a, b]$. Y valen estas cotas:
1) $|p_{n+1} - p*| \leq k|p_n - p*|$ (la convergencia es al menos lineal)
2) $|p_n - p*| \leq k^n|p_0 - p*|$
3) $|p_n - p*| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$
4) $|p_n - p*| \leq \frac{k}{1-k}|p_n - p_{n-1}|$

Veamos antes una propiedad general Dada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en ese intervalo y $f(x) = g(x) - x$.

$$
\begin{aligned}
1)\ g(a) < a\ ,\ g(b) > b &\implies f(a) < 0,\ f(b) > 0 \\
&\implies {}^{(T.V.intermedio)} \exists p* \in [a, b] \,:\, g(p*) = p*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ g(a) > a\ ,\ g(b) < b &\implies f(a) > 0,\ f(b) < 0 \\
&\implies {}^{(T.V.intermedio)} \exists p* \in [a, b] \,:\, g(p*) = p*
\end{aligned}
$$

Proof: Tenemos que $g(a) \in [a, b]$ Entonces vale alguna de las siguientes

1.a) $g(a) > a$ Pues a es el minimo
2.a) O bien vale que $g(a) = a$

En caso de que pase lo segundo es trivial que g tiene punto fijo en a
Similarmente para b

1.b) $g(b) < b$ Pues b es el maximo
2.b) O bien vale que $g(b) = b$

En caso de que pase lo segundo es trivial que g tiene punto fijo en b
Ahora para el caso no trivial, dado que sucede 1.a y 1.b. Por la propiedad que vimos antes de la prueba sabemos que existe $p*$. Entonces la funcion tiene punto fijo en $p*$

Supongamos ahora que $|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in (a, b)$ veamos que $p*$ es único: Si $\exists q* \neq p*$ y $g(p*) = p*$ y $g(q*) = q* \implies$

$$\frac{g(p*) - g(q*)}{p * -q*} = 1$$

Luego por el teorema de valor medio hay un λ entre p y q tal que:

$$g(p*) - g(q*) = g'(\lambda)(p * -q*)$$

Lugo usando la hipotesis de que $g'(x) \leq k < 1$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&|p * -q * | = |g(p*) - g(q*)| = |g'(\lambda)||p * -q * | \leq k|p * -q * | \quad < |p * -q * | \\
&|p * -q * | < |p * -q * |
\end{aligned}
$$

Absurdo que vino de suponer que existen mas de un puntos fijos. Por lo que el punto fijo debe ser único.

Veamos que la iteración converge al punto fijo. Notar que como $g(x) \in [a,b]$ la sucesion siempre esta bien definida.

Ahora sea $p_0 \in (a,b)$ y sea $p_{n+1} = g(p_n)$ entonces:

$$|p_{n+1} - p*| = |g(p_n) - g(p*)| = |g(p_n) - p*|$$

Por teorema de valor medio existe λ tq:

$$\begin{gathered} |g(p_n) - p*| = \\ |g'(\lambda)||p_n - p*| \leq k|p_n - p*| \text{ (} k \text{ acota a la derivada en el intervalo)} \end{gathered}$$

Entonces podemos hacer los mismo para los casos $n-1, n-2, ...$ y tenemos:

$$|p_n - p*| \leq k|p_{n-1} - p*| \leq k^2|p_{n-2} - p*| \leq ... \leq k^n|p_0 - p*| \ (2)$$

Ahora tomando:

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p*| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p*| = |p_0 - p| \lim_{n\to\infty} k^n = 0$$

Por lo tanto la sucesion converge a $p*$.

Veamos por ultimo las cotas que se pueden deducir.

1) Esta apareció durante la prueba

$$\begin{aligned} |p_{n+1} - p*| &= \\ |g(p_n) - p*| &=^{T.V.M} |g'(\lambda)||p_n - p*| \\ &\leq k|p_n - p*| \end{aligned}$$

2) Tambien aparecio durante la prueba

$$|p_n - p*| \leq k|p_{n-1} - p*| \leq k^2|p_{n-2} - p*| \leq ... \leq k^n|p_0 - p*|$$

3) Partiendo de la anterior

$$\begin{aligned} &|g(p_{n-1}) - g(p_{n-2})| = |p_n - p_{n-1}| \leq k|p_{n-1} - p_{n-2}| \\ &\implies |p_n - p*| \leq \frac{k}{1-k} k|p_{n-1} - p_{n-2}| \\ &\implies |p_n - p*| \leq \frac{k}{1-k} k^2|p_{n-1} - p_{n-2}| \\ &... \\ &\implies |p_n - p*| \leq \frac{k}{1-k} k^{n-1}|p_1 - p_0| = \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0| \end{aligned}$$

4) Partiendo de la anterior

$$|p_{n+1} - p*| \leq k|p_n - p*|$$

Sumo y resto p_{n+1}

$$|p_{n+1} - p*| \leq k|p_n - p_{n+1} + p_{n+1} - p*|$$

Desigualdad triuangular:

$$\begin{aligned}
|p_{n+1} - p*| &\leq k|p_n - p_{n+1} + p_{n+1} - p*| \\
|p_{n+1} - p*| &\leq k|p_n - p_{n+1}| + k|p_{n+1} - p*| \\
|p_{n+1} - p*| - k|p_{n+1} - p*| &\leq k|p_n - p_{n+1}| \\
(1-k)|p_{n+1} - p*| &\leq k|p_n - p_{n+1}| \\
|p_{n+1} - p*| &\leq \frac{k}{(1-k)}|p_n - p_{n+1}|
\end{aligned}$$

2 Interpolacion

Enunciamos y probamos a continuacion una propiedad que nos servira para probar la unicidad en el proximo teorema.

Lemma 4 *Un polinomio $p(x)$ con $gr(p) = k$ tiene a lo sumo k raices*

Proof: Veamos por induccion
$gr(p) = 0$:
Es trivial.
$gr(p) = 1$:
el polinomio es de la forma

$$p(x) = x - a$$

Que tiene raiz solamente en a
$gr(p) = k$: Hipotesis inductiva: Los polinomios de grado $k-1$ tienen a los sumo $k-1$ raices.
Sea $p(x)$ un polinomio tal que $gr(p) = k$ con al menos una raiz en a. Entonces se puede factorizar como:

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

Donde $q(x)$ es otro polinomio, necesariamente de grado $k-1$. Ahora la cantidad de raices de $p(x)$ es 1 (porque a es raiz) + las raices que tenga $q(x)$. Pero por hipotesis inductiva q tiene a lo sumo k-1 raices. $\implies p(x)$ tiene a lo sumo k raices.

2.1 Polinomio interpolante

Theorem 5 (Polinomio interpolante)

Dados $(x0, y0), (x1, y1), ..., (x_n, y_n)$ puntos en el plano cartesiano. Tales que $x_i \neq x_j,\ \text{para} i \neq j$

Existe un **unico** polinomio $p(x)$ de grado $\leq n$ tal que:

$$p(x_i) = y_i$$

Para cada punto de los dados.

Proof: Veamos por induccion en n

$\underline{n = 0\text{:}}$ definimos el polinomio $p(x)$ como

$$p(x) = x_0$$

$\underline{n = k\text{:}}$ Ahora nuestra hipotesis inductiva sera que existe un poliniomio $q(x)$ que interpola los puntos $(x_0, y_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$

Plantearemos $p(x)$ como:

$$p(x) = q(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Donde α es una constante a determinar pero notemos que en caso de evaluar $p(x)$ en uno de los puntos que ya interpolaba $q(x)$ resulta en que se anula todo el termino derecho, por lo que simplemente se evalua $q(x)$

Ahora queremos despejar α para que p cumpla que interpola el n-esimo punto

$$\begin{aligned}
p(x_n) = y_n &= q(x_n) + \alpha(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1}) \\
y_n &= q(x_n) + \alpha(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1}) \\
y_n - q(x_n) &= \alpha(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1}) \\
\frac{y_n - q(x_n)}{(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1})} &= \alpha
\end{aligned}$$

Recordemos que los x_i eran todos distintos por la hipotesis del teorema osea que el denominador nunca se hace cero, por lo que el polinomio queda bien definido.

Veamos ahora que $p(x)$ es unico.

Unicidad: Supongamos que $p(x)$ y $d(x)$ dos polinomios, ambos de grado $\leq n$ y tales que $p(x_i) = d(x_i) = y_i$ para cada punto de los mencionados al inicio.

Definamos $q(x) = p(x) - d(x)$, un polinomio de grado $\leq n$ Notemos que tiene raices en cada uno de los x_i pues:

$$q(x_i) = p(x_i) - d(x_i) = y_i - y_i = 0$$

Para ser distintos p y d deben tener al menos una raiz distinta. Como el grado de q es n, usando el lemma de antes, es claro que como q tiene a lo sumo n raices. Pero como p y d interpolan exactamente los n mismos puntos es claro que esas son todas las n raices posibles de q. En conclusion $p(x) = d(x)$.

2.2 Metodo de Lagrange para dar el interpolante

Notacion: En matematica en general cuando aparece un $\widehat{x}$ en una formula, quiere decir que ese termino 'se borra' o no va en la formula, pero facilita la notacion.

Dados $(x0, y0), (x1, y1), ..., (x_n, y_n)$ puntos en el plano cartesiano. Tales que $x_i \neq x_j,$ para $i \neq j$. Definimos $\ell_i(x)$ para cada $i = 0, 1, ..., n$ como:

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)...\widehat{(x - x_i)}...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...\widehat{(x_i - x_i)}...(x_i - x_n)}$$

los ℓ_i tienen la propiedad de que cumplen lo siguiente:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j \neq i \\ 0 \text{ si } j = i \end{cases}$$

y ademas hay que notar que ℓ_i es un polinomio, mas aun $gr(\ell_i) = n$

por lo que para dar un polinomio de grado $\leq n$ que interpole los puntos mencionados al principio podemos usar:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$$

2.3 Error de interpolacion

Lemma 6 *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en su dominio (por consecuencia continua). Sean $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ todos distintos, raices de g y tal que $x_i < x_{i+1}$. Entonces siempre hay un $c \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $g'(c) = 0$.*

Proof: Por teorema de Rolle tomando dos raices x_i, x_{i+1} tenemos que como g es derivable en el intervalo y $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$, entonces existe c entre (x_i, x_{i+1}) tal que $g'(c) = 0$

Lemma 7 *Del lema anterior se deduce que Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en su dominio (por consecuencia continua). Sean $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ todos distintos, raices de g y tal que $x_i < x_{i+1}$. Entonces g' tiene al menos n raices en (x_0, x_n)*

Theorem 8 (Error del polinomio interpolante) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion con $n+1$ derivadas continuas. y sea $p(x)$ un polinomio de grado $\leq n$ que interpola los $n+1$ puntos: $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ Donde $y_i = f(x_i)$.Con $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ todos distintos.*
Entonces:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

Donde $c \in (a,b)$

Proof: Vale obviamente si tomamos $x = x_i$, pues el error da 0. Fijaremos un $x \in [a, b]$ tal que $x \neq x_i$, $i = 0, 1, ..., n$.

Definimos:

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(t) = [f(x) - p(x)] \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} - (f(t) - p(t))$$

Notar que φ es continua y derivalbe $n + 1$ veces con todas derivadas continuas.

<u>¿Cuantas raices tiene φ ?</u> Claramente $t = x_0, t = x_1, ..., t = x_n$ son raices. Y tambien lo es $t = x$.

Como φ es $n + 1$ veces derivable:

$$\Longrightarrow \varphi' \text{ Tiene al menos } n \text{ raices en } (x_0, x_n)$$
$$\Longrightarrow \varphi'' \text{ Tiene al menos } n-1 \text{ raices en } (x_0, x_n)$$
$$\Longrightarrow ...$$
$$\Longrightarrow \varphi^{(n+1)} \text{ Tiene al menos una raiz en } (x_0, x_n)$$

Llamemos c a la raiz de $\varphi^{(n+1)}$. Luego calcular la derivada $n + 1$ esima es facil:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = [f(x) - p(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}(n + 1)! - f^{(n+1)}(t)$$

Ahora evaluada en c tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi^{(n+1)}(c) \\
0 &= [f(x) - p(x)]\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}(n+1)! - f^{(n+1)}(c) \\
f^{(n+1)}(c) &= [f(x) - p(x)]\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}(n+1)! \\
\frac{f^{(n+1)}(c)}{[f(x) - p(x)]} &= \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} \\
\frac{[f(x) - p(x)]}{f^{(n+1)}(c)} &= \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \\
\frac{[f(x) - p(x)]}{f^{(n+1)}(c)} &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \\
f(x) - p(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)
\end{aligned}
$$

2.4 Metodo de Newton para dar el polinomio interpolante

Recordemos como el polinomio interpolante que construimos en la primera prueba para ver la existencia y unicidad. Habia una serie de constantes λ (que en este caso llamaremos c_0, c_1, c_2, etc) tales que el polinomio interpolante para los puntos $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ estaba dado como:

$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + c_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$

Newton tiene una idea para hallar facilmente estas constantes.

Para hallar el primero es facil: $c_0 = y_0$

Luego el c_1 estaba dado por:

$$p(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \iff c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

En general para calcular el coeficiente c_k notaremos que vamos a necesitar los $x_0, ..., x_k, y_0, y_k$. Mas aun lo que va a pasar es que para calcular un polinomio que interpola los $n + 1$ puntos, vamos a ir viendo los coeficientes de polinomios que interpolan algunos subconjuntos de estos $n+1$ puntos. La prueba generalmente aclara las dudas y mejora el entendimiento de la idea.

A partir de ahora nos vamos a centrar mas en la idea de aproximar funciones usando polinomios interpolante por lo que en general nos referimos a los y_i como directamente $f(x_i)$. Pues esa seria la manera de asignar los puntos si queremos aproximar una funcion f con un polinomio interpolante.

Tabla de diferencias divididas

La siguiente tabla se llama "Tabla de diferencias divididas" y es una ayuda grafica para construir los coeficientes del polinomio interpolante. Primero se escriben las siguientes 2 columnas.

x_0	y_1		
...	...		
x_i	y_i		
...	...		
x_2	y_n		

Ahora para obtener la celda de la coordenada (i, j) la cual denotaremos $c_{i,j}$ correspondiente a la fila i columna j:

$$c_{i,j} = \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j-1} - x_i}$$

Notar que a veces no se puede definir una celda, esto provoca que la tabla quede como una triangular superior.

Al haber construido todas las celdas posibles. El polinomio interpolante queda como:

$$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + ... + c_{0,n}(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

Y esto es lo que vamos a demostrar:

Theorem 9 (Metodo de interpolacion de Newton) *Sean $x_0, x_1, ..., x_n$ puntos distintos y $p_n(x)$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ que cumple que $p_n(x_i) = y_i$ es:*

$$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + ... + c_{0,n}(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

Donde los $c_{i,j}$ son las coordenadas de la tabla de diferencias divididas.

Proof: Esta prueba se hace por induccion en n:

Caso base (n=1) Queremos la funcion lineal que cumple: $p_1(x_1) = y_1$
La formula dice:

$$p_1(x) = y_0 + (\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0})(x - x_0)$$

Esto es trivialmente cierto.

Paso inductivo

Hipotesis Inductiva: El teorema vale para n-1 puntos.
Ahora usando la hipotesis inductiva, sea q_0 el polinomio que interpola los puntos en $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ (Todos salvo x_n). Y usando la hipotesis inductiva, sea q_1 el polinomio que interpola los puntos en $x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ (Todos salvo x_0). Ambos son de grado $<= n-1$.

Mas en concreto notemos que si construims la tabla completa (para los n puntos) aparecen como 'sub-tablas' las tablas de $n-1$ puntos con las que construimos a q_0 y q_1. Entonces:

$$q_0(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + ... + c_{0,n-1}(x - x_0)...(x - x_{n-2})$$

Y

$$q_1(x) = c_{1,0} + c_{1,1}(x - x_1) + ... + c_{1,n-1}(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Podemos afirmar de forma general que p_n sera de la forma:

$$p_n(x) = q_0(x) + \lambda(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

(Revisar la construccion en el teorema que demuestra la existencia y unicidad del polinomio interpolante)

Por lo que si mostramos que:

$$\lambda = c_{0,n}$$

Habremos probado que el metodo funciona. Ahora sea:

$$p(x) = \frac{q_1(x)(x - x_0) - q_0(x - x_n)}{x_n - x_0}$$

Se puede ver facilmente al evaluar que:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 \\ p(x_n) &= y_1 \\ p(x_i) &= y_i \quad (i \neq 0, n) \end{aligned}$$

Por lo que $p(x) = p_n(x)$ que estamos buscando (unicidad).

Ahora que sabemos que son el mismo, vamos a aprovechar la expresion que dimos para ver cual sera el coeficiente de la variable elevada a la n (Que resulta que es el λ que estamos buscando).

$$p(x) = \frac{q_1(x)(x - x_0) - q_0(x - x_n)}{x_n - x_0}$$

Distribuyo el cada polinomio con $(x - x_0)$ y $(x - x_n)$ repectivamente

$$p(x) = \frac{(c_{1,n-1})x^n - (c_{0,n-1})x^n}{x_n - x_0} + \frac{...}{x_n - x_0}$$

No nos interesa el resto del polinomio, pues sabemos que:

$$\lambda x^n = \frac{(c_{1,n-1}) - (c_{0,n-1})}{x_n - x_0} x^n$$

$$\iff$$

$$\lambda = \frac{(c_{1,n-1}) - (c_{0,n-1})}{x_n - x_0}$$

$$\lambda = c_{0,n}$$

Notacion usual para el metodo de Newton: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y sean $x_0, ..., x_n$ distintos en $[a, b]$ y sea $p(x)$ el unico polinmio de grado $\leq n$ que interpola:

$$p(x_i) = f(x_i)$$

Si $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$ denotaremos a cada coeficiente como:

$$c_i = f[x_0, x_1, ..., x_i]$$

Por lo que en terminos de las diferencias divididas como las vimos antes se tiene que:

$$c_{i,j} = f[x_i, ..., x_{i+j}]$$

Aplicando el teorema anterior, y lo importante con lo que hay que quedarse es que:

$$c_{i,j} = \frac{c_{i+1,j+1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j-x_i}}$$
$$f[x_i, ..., x_j] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+j}] - f[x_i, ..., x_{j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

Theorem 10 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $x_0, ..., x_n$ distintos en $[a, b]$ y p_n es el polinomio interpolante de grado $\leq n$, entonces*

$$f(t) - p_n(t) = f[x_0, x_1, ..., x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Proof: Sin perdida de generalidad, fijamos el t durante la prueba, pero notar que como es un valor arbitrario, en realidad estamos probando para cada t. Sea

$$q(x) = p_n(x) + f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Queremos ver que

$$f(t) = q(t)$$

Notemos que $q(x)$ es el polinomio que interpola a $x_0, x_1, ..., x_n, t$. Para el caso de los x_i esto es obvio pues el termino de la derecha se cancela. Para el caso $x = t$ sucede que $q(x)$ es la forma general de dar el polinomio que interpola los puntos x_i y ademas el t segun la construccion de la primer prueba.

Por lo que

$$q(x) = f(x) \text{ , Si } x \in x_0, ..., x_n, t$$

En particular entonces:

$$q(t) = f(t)$$

Este lema parece bastante inutil pero se deduce el siguiente resultado

Corolario:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Para c entre el minimo y maximo de los x_i

Proof: Por el teorema anterior:

$$f(x_n) - p_n(x_n) = f[x_0, ..., x_{n-1}, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$$

El lado izquierdo se puede reemplazar usando la ecuacion de la formula del error:

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) = f[x_0, ..., x_{n-1}, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i), \text{ (} c \text{ entre el minimo y maximo } x_i\text{)}$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = f[x_0, ..., x_{n-1}, x_n]$$

2.5 Interpolacion de Hermite

Hasta ahora trabajamos con $x_0, ..., x_n$ todos distintos. Veamos lo siguiente:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0}$$

Tomando limite

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

El polinomio interpolante que resulta, interpola a x_0 y ademas su derivada coincide con f' en x_0

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$p'(x) = f'(x_0)x$$

El siguiente teorema generaliza esta nocion.

Theorem 11 (De la interpolacion de Hermite) *Sean $n+1$ nodos distintos $x_0 < x_1 < ... < x_n$ y $z \in (x_0, x_n)$. Sea f una funcion definida en $[x_0, x_n]$ que es n veces continuamente derivable en ese intervalo. Entonces*

$$\lim_{(x_0,x_1,...,x_n)\to(z,z,...,z)} f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

Proof: Por el teorema anterior se tiene que existe $\lambda \in (x_0, x_n)$ tal que

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\lambda)$$

Como en este caso $x_0 \to z, x_1 \to z, ..., x_n \to z$ y $\lambda \in (x_0, x_n)$

$$\lambda \to z$$

Luego como $f^{(n)}$ es continua

$$\lim_{(x_0,x_1,...,x_n)\to(z,z,...,z)} f[x_0, ..., x_n] = \lim_{\lambda\to z} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

Corolario: Si f es n veces continuamente derivable en un entorno del punto x_0 etnconces:

$$f[x_0, x_0, ..., x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

La demostracion es aplicar el teorema anterior para un caso particular.

2.6 Aproximacion con splines

Primero un resultado que va a servir para la cota del error de un metodo.

Lemma 12 *Sean $x_0, x_n \in \mathbb{R}$, y f una funcion definida en el $[x_0, x_n]$ 2 veces continuamente derivable. Y sea $p(x)$ el polinomio que interpola a f en esos puntos, tal que*

$$f(x) = p(x) + e(x)$$

Entonces el error esta acotado por:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8}|x_1 - x_0|$$

Proof: Por el teorema general del error de interpolacion se tiene que

$$e(x) = f[x_0, x_1, x](x-x_0)(x-x_1) = \frac{f''(\lambda)}{2!}(x-x_0)(x-x_1) \text{ , Para } x, \lambda \in (x_0, x_1)$$

Sea $M > 0$ una constante tal que:

$$|f''(x)| \leq M \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

Y sea

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

Sin mucho analisis se puede concluir que $\varphi(x)$ es una parabola con con ramas hacia arriba, minimo en el vertice x_m y con raices x_1, x_0.

Por lo tanto (Aclaracion: Aqui se usa que x_m es el punto que mas dista de x_0, x_1)

$$|\varphi(x)| \leq |x_m - x_0||x_m - x_1| = |\frac{x_0 - x_1}{2} - x_0||\frac{x_0 - x_1}{2} - x_1| = \frac{|x_1 - x_0|^2}{4}$$

Concluimos viendo que:

$$\begin{aligned} |e(x)| = |\frac{f''(\lambda)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)| &\leq |\frac{M}{2}\varphi(x)| \\ &\leq \frac{M}{8}|x_1 - x_0|^2 \end{aligned}$$

Definicion: (Spline)
Dados $n+1$ puntos $x_0, ..., x_n$ tales que $x_0 < ... < x_n$ que denominaremos nodos, y un entero $k \leq 0$. Un Spline de grado k es una funcion $S(x)$ definida en $[x_0, x_n]$ que satisface las siguiente condiciones:

1. S es un polinomio de grado k en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, 1, ..., n-1$
2. Las derivadas $S^{(i)}$ son continuas en $[x_0, x_n]$, para $i = 0, ..., k-1$ (Notar que aqui cuando $i = 0$ se pide continuidad en cada polinomio)

2.7 Spline lineal

Este es el caso $k = 1$, entonces esta spline satisface:

1. S es un polinomio de grado 1 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, 1, ..., n-1$
2. S es continua en $[x_0, x_1]$

Notar que $S(x)$ es algo de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0 \\ S_1(x) = a_1 x + b_1 \\ ... \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1} \end{cases}$$

Donde los coeficientes a_i, b_i son incognitas a determinar condicionadas por:

$$\begin{cases} (1) \quad a_i x_i + b_i = f(x_i) \\ (2) \quad a_i x_{i+1} + b_i = S_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$$

Restando la primera ecuacion a la primera obtenemos

$$a_i(x_{i+1} x_i) = f(x_{i+1} - f(x_i))$$

Por lo tanto los coeficientes estan dados por:

$$a_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \qquad\qquad b_i = f(x_i) - a_i x_i$$

Observacion: Si f es 2 veces derivable en $[a, b]$ y $x_i = a + ih$ con $h = (b-a)/n$ (i.e se toman nodos equidistantes). Si S es un Spline lineal. Entonces, usando el lema del principio de la seccion en cada polinomio S_i en su respectivo intervalo. El error de $S(x)$ esta acotado por:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8}h^2$$

Donde $M \geq |f''(x)| \forall x \in [a, b] = [x_0, x_n]$.

2.8 Spline cubico

Caso $k = 3$:

1. S es un polinomio de grado ≤ 3 en cada subintervalo
2. Las funciones S, S', S'' son continuas en $[x_0, x_n]$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0 \\ S_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \\ ... \end{cases}$$

Donde los coeficientes estan condicionados por

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i) & \text{(n+1 condiciones)} \\ S(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{con i = 0,1,2,...,n-1} & \text{(n+1 condiciones)} \\ S'(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{con i = 0,1,2,...,n-1} & \text{(n+1 condiciones)} \\ S''(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{con i = 0,1,2,...,n-1} & \text{(n+1 condiciones)} \end{cases}$$

Entonces: $(n + 1) + 3(n - 1) = 4n - 2$ condiciones. Para que el sistema quede bien determinado se necesitan dos condiciones adicionales, que pueden elegirse arbitrariamente, pero se dan dos que se toman usualmente:

Spline Natural: Se le llama al que toma ademas las condiciones

$$S''(x_0) = 0$$
$$S''(x_n) = 0$$

Spline con condiciones correctas: Se le llama al que toma ademas las condiciones

$$S'(x_0) = f'(x_0)$$
$$S'(x_n) = f'(x_n)$$

2.9 Error en Spline lineal

No se presenta una formula para el Spline cubico. Muy dificil para este curso. En cuanto al error de la Spline lineal, se deduce de la siguiente manera.

$$f(x) - S(x) = f(x) - S_i(x) = \frac{f''(x)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Cuando $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Ahora sea

$$M = \max_{l \in [x_i, x_{i+1}]} f''(l)$$

Entonces

$$|f(x) - S(x)| = \frac{M}{2}(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})^2$$

3 Cuadrados minimos

Sea $f(x)$ una funcion. Diremos que una funcion $\varphi(x)$ minimiza el error en el sentido de cuadrados minimos si, dados los puntos $x_1, ..., x_m$, sucede que la funcion E, es minima.

$$E(a_0, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{m}(f(x_i) - \varphi(x_i))^2$$

Donde los coeficientes $a_0, ..., a_n$ son los que determinan la funcion φ. Osea que φ podria ser de alguna de las siguientes formas por ejemplo:

$$\varphi(x) = ax + b \implies E(a, b) = \sum_{i=1}^{m}(f(x_i) - (ax_i + b))^2$$

$$\varphi(x) = ae^{bx} \implies E(a, b) = \sum_{i=1}^{m}(f(x_i) - ae^{bx_i})^2$$

3.1 Minimizacion de error con una recta

Notar que en este caso.

$$\varphi(x) = ax + b \implies E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m}(f(x_i) - ax_i + b)^2$$

Tomemos las derivadas parciales de la funcion E para poder hallar su minimo.

$$(1)\ \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{m} 2(f(x_i) - (ax_i + b))(-1)$$
$$(2)\ \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{m} 2(f(x_i) - (ax_i + b))(-x_i)$$

A partir de ahora diremos $y_i = f(x_i)$ para agilizar la notacion. Igualando a 0, y con la intencion de dar un sistema de ecuaciones que condicione a y b.

$$(1)\ \sum_{i=1}^{m} 2(y_i - (ax_i + b))(-1) = 0 \iff mb + (\sum_{i=1}^{m} x_i)a = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{m} 2(f(x_i) - (ax_i + b))(-x_i) = 0 \iff b\sum_{i=1}^{m} x_i + a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i$$

Es facil ver que las soluciones a este sistema son:

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i^2)(\sum_{i=1}^{m} y_i) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i)}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$$

$$a = \frac{m(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)(\sum_{i=1}^{m} y_i)}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$$

Casos no lineales Muchas veces se necesita que φ no sea una recta si no algo mas interesante pero se puede usar distintas versiones del siguiente truco. Supongamos que sabemos que f es parecida a una exponencial entonces queremos que $\varphi(x) = be^{ax}$. Notar que:

$$y_i = be^{ax_i} \iff \ln(y_i) = \ln(be^{ax_i}) = ax_i + \ln(b)$$

Se puede resolver como un caso lineal tomando los datos como
$\tilde{y_i} = \ln(y_i)$, $\tilde{x_i} = x_i$, $\tilde{a} = a$ y $\tilde{b} = \ln(b)$. Y buscamos que la recta

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{a}x + \tilde{b_i}$$

Minimice el error por cuadrados minimos para los puntos: $\tilde{x_1}, ..., \tilde{x_m}$ En este caso se uso logaritmo, pero cualquier funcion con inversa podria servir en otros casos.

3.2 Minimizacion de error con un polinomimo grado n

<u>**Notacion:**</u> Dados los m puntos $x_1, ..., x_m$ y una funcion f, denotamos lo siguiente

1. $X = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$
2. $X^i = (x_1^i, ..., x_m^i) \in \mathbb{R}^m$, con $i = 0, 1, ...$
3. $Y = (f(x_1), ..., f(x_m)) = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$
4. $Y^i = (y_1^i, ..., y_m^i) \in \mathbb{R}^m$, con $i = 0, 1...$

Deduccion del caso general de polinomios de grado n: Sean $x_1, ..., x_m$ m puntos en $[a, b]$ y sea, f una funcion definida en el $[a, b]$ En este caso la funcion $\varphi(x)$ sera llamada $p(x)$ pues es un polinomio de grado n:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$$

Por lo que en este caso la funcion de error es:

$$E(a_0, ..., a_n) = \sum_{j=0}^{m}(y_j - p(x_j))^2 = \sum_{j=1}^{m}(y_j - (\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i)) = ||Y - \sum_{j=0}^{m} a_j X||^2$$

Es decir, si $\mathbb{W}$ es el espacio vectorial generado por $\langle X^0, X^1, ..., X^n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ (Pues lo que se busca es una combinacion lineal de estos datos), buscamos $w \in \mathbb{W}$ tal que:

$$E(w) = ||Y - w||^2 \text{ sea minimo}$$

Por algebra lineal, sabemos que $E(w)$ es minimo cuando $(Y - w) \perp \mathbb{W}$ Es decir queremos que w cumpla que:

$$(Y - w)X^i = 0 \quad \forall i = 0, ..., n$$

(Nota: arriba se pide que el producto interno de dos vectores sea 0) Esto sucede si y solo si:

$$w = proy_{\mathbb{W}}^{\perp}(Y)$$

Esto condiciona los coeficientes con un sistema de ecuaciones, donde la ecuacion $i-$esima es:

$$\begin{aligned} w.X^i &= YX^i \\ (\sum_{j=0}^{n} a_j X^j)X^i &= \\ \sum_{j=0}^{n} X^j X^i a_j &= YX^i \end{aligned}$$

Resultando el siguente sistema

$$\begin{bmatrix} X^0X^0 & X^1X^0 & X^2X^0 & \cdots & X^nX^0 \\ X^0X^1 & X^1X^1 & X^2X^1 & \cdots & X^nX^1 \\ X^0X^2 & X^1X^2 & X^2X^2 & \cdots & X^nX^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^0X^n & X^1X^n & X^2X^n & \cdots & X^nX^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YX^0 \\ YX^1 \\ YX^2 \\ \vdots \\ YX^n \end{bmatrix}$$

Esta es llamada la matriz de Hilbert, sus soluciones son los coeficientes que mejor ajustan un polinomio de grado n a una funcion f.

3.3 Caso continuo

Durante el desarrollo, vamos a trabajar sobre el espacio vectorial de funciones continuas en $[a, b]$, definimos el producto escalar canonico como:

$$\langle f \cdot g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

Tiene sentido pensar que si uno quiere minimizar el error en un todo un intervalo $[a, b]$, con un polinomio de grado $\leq n$, $p(x)$, entonces el error se puede plantear como la suma del error en cada punto de $[a, b]$, para esto usamos la integral.

$$\begin{aligned} E(a_0, ..., a_n) &= \int_a^b (f(x) - p(x))^2\, dx \\ &= \langle (f(x) - p(x)) \cdot (f(x) - p(x)) \rangle \\ &= ||f(x) - p(x)||^2 \end{aligned}$$

Ahora sea $\mathbb{W}$ el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ que esta contenido en el de la funciones contiunas en $[a, b]$, entonces buscamos $p(x) \in \mathbb{W}$ tal que:

$$f(x) - p(x) \perp \mathbb{W} \iff p(x) = proj_{\mathbb{W}}(f(x))$$

Pedir que un vector sea ortogonal a una base B de $\mathbb{W}$, es equivalente pedir que sea ortogonal a $\mathbb{W}$. Sea

$$B = \{1, x, ..., x^n\}$$

Osea que queremos satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) &\perp 1 \\ f(x) - p(x) &\perp x \\ &\vdots \\ f(x) - p(x) &\perp x^n \end{aligned}$$

Entonces para cada $i = 0, 1, ..., n$ se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
f(x) - p(x) \perp x^i &\iff \langle (f(x) - p(x)), x^i \rangle = 0 \\
&\iff \int_a^b (f(x) - p(x)) x^i \, dx = 0 \\
&\iff \int_a^b f(x)) x^i - p(x) x^i \, dx = 0 \\
&\iff \int_a^b f(x) x^i \, dx = \int_a^b p(x) x^i \, dx \\
&\iff \int_a^b f(x) x^i \, dx = \int_a^b (\sum_{j=0}^{n} a_j x^j) x^i \, dx \\
&\iff \int_a^b f(x) x^i \, dx = \int_a^b (\sum_{j=0}^{n} a_j x^j x^i \, dx \\
&\iff \int_a^b f(x) x^i \, dx = \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b x^j x^i \, dx \\
&\iff \langle f(x), x^i \rangle = \sum_{j=0}^{n} a_j \langle x^j x^i \rangle
\end{aligned}$$

Resultando el sistema:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 x^0 & \int_a^b x^1 x^0 & \int_a^b x^2 x^0 & \cdots & \int_a^b x^n x^0 \\ \int_a^b x^0 x^1 & \int_a^b x^1 x^1 & \int_a^b x^2 x^1 & \cdots & \int_a^b x^n x^1 \\ \int_a^b x^0 x^2 & \int_a^b x^1 x^2 & \int_a^b x^2 x^2 & \cdots & \int_a^b x^n x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^0 x^n & \int_a^b x^1 x^n & \int_a^b x^2 x^n & \cdots & \int_a^b x^n x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b y(x) x^0 \\ \int_a^b y(x) x^1 \\ \vdots \\ \int_a^b y(x) x^n \end{bmatrix}$$

Pero este sistema puede ser grande, y este sistema es conocido por ser sensible, con el siguiente truco vamos a producir una alternativa con la misma idea, pero que resulta en una matriz diagonal.

Sea $B = \{\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_n\}$, una base **ortogonal** de los polinomios de grado $\leq n$. Se puede asumir sin perdida de generalidad que hay una base de esa forma que cumple que $gr(\Phi_i) = i$ para $i = 0, ..., n$

De la misma forma que antes, se puede dar $p(x)$ como combinacion lineal de estos:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j \Phi_j(x)$$

Ahora notar que $\langle \Phi_j, \Phi_k \rangle = 0$ cada vez que $j \neq k$, pues son ortogonales. Usando esto y el mismo desarrollo de antes, resulta:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \Phi_0^2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_a^b \Phi_1^2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_a^b \Phi_n^2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b y(x)\Phi_0(x) \\ \int_a^b y(x)\Phi_1(x) \\ \vdots \\ \int_a^b y(x)\Phi_n(x) \end{bmatrix}$$

3.3.1 Funcion de peso

Una funcion integrable $\omega(x)$ en $[a, b]$ se llama **Funcion de peso** en $[a, b]$ si:
(1) $\omega(x) \geq 0$ para todo x en el subintervalo.
(2) $\omega(x) \neq 0$ para todo x en cualquier subintervalo. (No es constantemente 0 en ningun subintervalo)

Usando una funcion de peso, se puede redefinir nuestro producto interno como:

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_a^b \omega(x) g_1(x) g_2(x)\, dx$$

De esta forma, se puede deducir formulas similares, pero la idea es que los intervalos donde la funcion de peso es mayor, reciben una penalizacion adicional en el calculo del error, con respecto a los demas intervalos. Esto provoca que el sistema 'intente' ajustar mejor donde penaliza la funcion de peso.

Entonces los sistemas anteriores quedan asi:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \omega(x)x^0x^0 & \int_a^b \omega(x)x^1x^0 & \int_a^b \omega(x)x^2x^0 & \cdots & \int_a^b \omega(x)x^nx^0 \\ \int_a^b \omega(x)x^0x^1 & \int_a^b \omega(x)x^1x^1 & \int_a^b \omega(x)x^2x^1 & \cdots & \int_a^b \omega(x)x^nx^1 \\ \int_a^b \omega(x)x^0x^2 & \int_a^b \omega(x)x^1x^2 & \int_a^b \omega(x)x^2x^2 & \cdots & \int_a^b \omega(x)x^nx^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b \omega(x)x^0x^n & \int_a^b \omega(x)x^1x^n & \int_a^b \omega(x)x^2x^n & \cdots & \int_a^b \omega(x)x^nx^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b \omega(x)y(x)x^0 \\ \int_a^b \omega(x)y(x)x^1 \\ \vdots \\ \int_a^b \omega(x)y(x)x^n \end{bmatrix}$$

Y usando una base ortogonal $\{\Phi_0, ..., \Phi_n\}$

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \omega(x)\Phi_0^2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_a^b \omega(x)\Phi_1^2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_a^b \omega(x)\Phi_n^2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b \omega(x)y(x)\Phi_0(x) \\ \int_a^b \omega(x)y(x)\Phi_1(x) \\ \vdots \\ \int_a^b \omega(x)y(x)\Phi_n(x) \end{bmatrix}$$

'No utilizar una funcion de peso' es lo mismo que tomar $\omega(x) = 1$

3.4 Mejora del proceso de Gram-Schmidt

Las siguientes formulas aplicadas recursivamente permiten obtener una base ortogonal de polinomios en $[a, b]$. Se basa en el procesos de Gram-Schmidt, pero reduce significativamente la cantidad de cuentas.

Theorem 13 (Mejora de Gram-Schmidt)

$\{\Phi_0, ..., \Phi_n\}$ definida a continuacion es una base ortogonal de polinomios $[a, b]$.

$$\Phi_0(x) = 1, \quad \Phi_1(x) = x - B_1$$

Donde

$$B_1 = \frac{\langle 1, x\rangle}{||\Phi_0||^2}$$

Y para $k \geq 2$

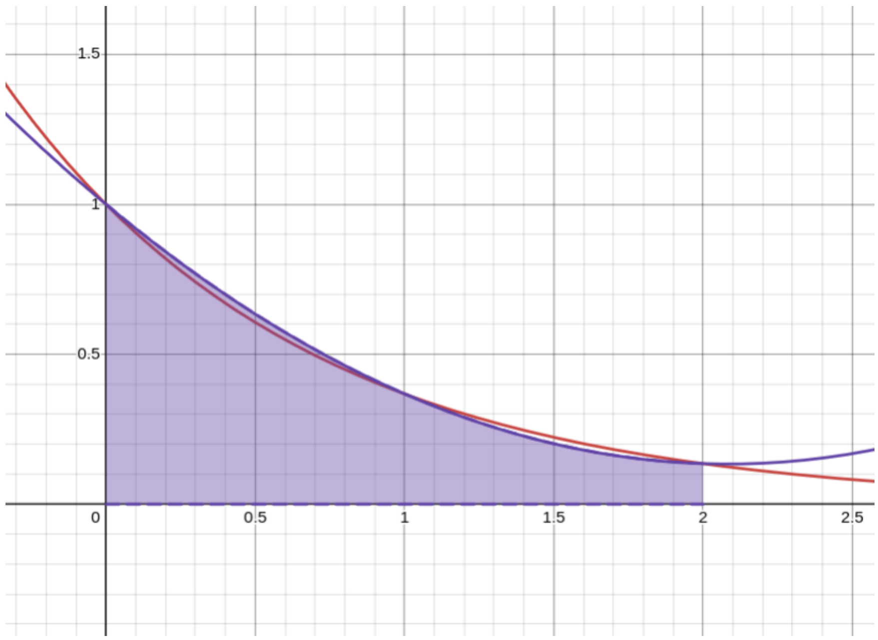
$$\Phi_k(x) = (x - B_k)\Phi_{k-1}(x) - C_k\Phi_{k-2}(x)$$

donde

$$B_k = \frac{\langle x\Phi_{k-1}(x), \Phi_{k-1}(x)\rangle}{||\Phi_{k-1}(x)||^2} \quad C_k = \frac{\langle x\Phi_{k-1}(x), \Phi_{k-2}(x)\rangle}{||\Phi_{k-2}(x)||^2}$$

4 Integracion numerica

Usando la aproximacion por interpolacion de una funcion f, podemos ver una aproximacion de su integral.



En la imagen aparece en rojo, la funcion $f(x) = e^{-x}$, en violeta el polinomio interpolante de $f(x)$ en $x = 0, 1, 2$. Notar como el area dada por la integral del polinomio es una muy buena aproximacion de la integral de $f(x)$.

<u>Definition:</u>(Regla de cuadratura) Dada f una funcion definida en un intervalo $I = [a, b]$, y los nodos $x_0, ..., x_n \in I$. Llamamos regla de cuadratura a una aproximacion de la integral de la forma

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) a_i$$

4.1 Teorema del valor medio para integrales

Primero un teorema que sirve para simplificar las cotas del error en las demostraciones.

Theorem 14 (Del valor medio para integrales de un producto) *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua y* $g : [a,b]$ *integrable y que no cambia de signo en* $[a,b]$. *Entonces*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{con } c \in [a,b]$$

Proof: Como f es continua en $[a,b]$ alcanza su maximo M y su minimo m en dicho intervalo. Es decir $m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in [a,b]$. Ahora dado que g no cambia de signo en $[a,b]$ hay dos posibilidades.

Si g es positiva

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Al integrar las partes de esta desigualdad queda:

$$\int_a^b mg(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b Mg(x)\,dx$$

Ahora si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, por "sandwich"

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

Por lo que cualquier numero real c satisface el enunciado del teorema
(*) Por otro lado si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$ pasamos dividiendo

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

Llamemos $\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in \mathbb{R}$. Por teorema de **valor intermedio**, $\exists \lambda \in [a,b]$ tal que:

$$f(\lambda) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

<u>Si g es negativa</u> La prueba es analoga al caso positiva con

$$mg(x) \geq f(x)g(x) \geq Mg(x)$$

luego

$$m \geq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \geq M$$

pero en el paso **(*)**, las desigualdades se voltean al pasar dividiendo, por que el signo de $g(x)$ es negativo.

4.2 Regla del Trapecio simple

<u>Idea:</u> Aproximar f con una recta que interpole en sus extremos

Theorem 15 (Regla del Trapecio) *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, y* f'' *continua en* $[a,b]$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$$

con $\xi \in [a,b]$.

Proof:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Notar que esta recta es el polinomio que interpola a f en sus extremos. Entonces

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)$$

Integrando

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx \\
&= \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)dx + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx
\end{aligned}$$

La primera integral es facil de resolver

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a))\,dx + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx \\
&= f(a)x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^b + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx \\
&= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx
\end{aligned}$$

Notar que el error esta en terminos de x, nos gustaria que sea un valor constante. Dado que $f''(\xi_x)$ es continua en $[a,b]$, y la funcion $(x-a)(x-b)$ es una parabola (por lo que es integrable) que no cambia de signo en $[a,b]$, se puede aplicar el **Teorema del valor medio para integrales**

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx &= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (x-a)(a-b)\,dx \quad \text{con } \xi \in [a,b] \\
&= \frac{1}{2}f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{6} \\
&= \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3
\end{aligned}$$

Theorem 16 (Regla de Simpson) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, y $f^{(4)}$ continua en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}(\frac{b-a}{2})^5$$

con $\xi \in [a,b]$.

Proof: Por lo que vimos en interpolacion

$$f(x) = f[a] + f[a, \frac{a+b}{2}](x-a) + f[a, \frac{a+b}{2}, b](x-a)(x - \frac{a+b}{2}) + E$$

Integrando sin el termino E del error

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Def: Grado de precicision Se dice que una regla de cuadratura tiene grado de precision n si es exacta $\forall$ polinomio de gr $\leq n$ y no lo cumple para un polinomio de gr $> n$

4.3 Reglas de cuadratura varias

Cuadratura del rectangulo (izquierdo)

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + E$$

Donde

$$E = \frac{(b-a)^2}{2} f'(c) \text{ con } c \in [a,b]$$

Esta regla tiene grado de precision 0.

Cuadratura del rectangulo (derecho)

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(b) + E$$

Donde

$$E = \frac{(b-a)^2}{2} f'(c) \text{ con } c \in [a,b]$$

Esta regla tiene grado de precision 0.

Punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + E$$

Donde

$$E = \frac{(b-a)^3}{24} f''(c) \text{ con } c \in [a,b]$$

Esta regla tiene grado de precision 1.

Theorem 17 (Regla del trapecio (Compuesta)) *Si* $f \in C^2[a,b]$*, y sea el paso* $h = \frac{b-a}{n}$*, y sean* $x_i = a + hi$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) - E$$

Donde

$$E = \frac{h^3}{12} n f''(c) = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(c)$$

Con $c \in [a,b]$

Theorem 18 (Regla de Simpson (Compuesta)) *Si* $f \in C^4[a,b]$*, y sea el paso* $h = \frac{b-a}{2n}$*, y sean* $x_i = a + hi$ *para* $i = 0, 1..., 2n$*. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 2(\sum_{i=1}^{n-1} x_{2i}) + 4(\sum_{i=1}^{n} x_{2i-1})] - E$$

Donde

$$E = \frac{h^5}{90} n f^{(4)}(c) = \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(c)$$

4.4 Cuadratura de Gauss

En general dados $x_0, ..., x_n \in [a,b]$. Entonces una regla de cuadratura exacta para polinomios de gr $\leq n$, esta dada por

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i p(x_i)$$

Los coeficiente siempre estan dados por las soluciones de el siguiente sistema.

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ & & \vdots & & \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^n-a^n}{n+1} \end{bmatrix}$$

Se omiten los detalles de como se deduce este sistema, pero es facil de plantear pensando en expresar los polinomios a partir de la base canonica de polinomios de gr $\leq n$, osea la base $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

Proposition. Las soluciones del sistema anterior son:

$$a_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx$$

Donde ℓ es la funcion que usamos para dar el polinomio interpolante con el metodo de Lagrange. Osea:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

Proof: Directamente reemplzamos y vemos que se cumple

Sea $p(x)$ un polinomio de gr $\leq n$. Entoces obviamente

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i)\ell_i(x)$$

Pues es el polinomio que se interpola a si mismo. Ahora integrando

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) \int_a^b \ell_i(x)\,dx$$

Claramente entonces tomando los a_i propuestos se obtiene una regla de cuadratura exacta. Por ende los a_i deben satisfacer el sistema.

Se acepta sin demostracion el siguiente teorema

Theorem 19 (Raices de polinomios de una base ortogonal) *Sea* $\{\Phi_0, ..., \Phi_n\}$, *una base ortogonal de polinomios de grado* $\leq n$, *en el intervalo* $[a, b]$. *Entonces las raices de cada* Φ_i *estan en* $[a, b]$.

Theorem 20 (Cuadratura de Gauss) *Sean* $\{\Phi_0, ..., \Phi_n, \Phi_{n+1}\}$ *una base ortogonal de polinomios de grado* $\leq n+1$, *en el intervalo* $[a, b]$ *y sean* $x_0, ..., x_n$ *las raices de* Φ_{n+1}. *Tomando* $a_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$. *Entonces la regla de cuadratura*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Es exacta para polinomios de grado $\leq 2n+1$. *Osea el grado de precision es de uno mas del doble.*

Proof: Ya sabemos que es exacta para polinomios de grado $\leq n$. Sea $p(x)$ un polinomio tal que $n < gr(p) \leq 2n+1$. Se puede expresar a $p(x)$ como:

$$p(x) = \Phi_{n+1}(x)q(x) + r(x)$$

(La division de $p(x)$ por $\Phi_{n+1}(x) = q(x)$ con resto $r(x)$)

Inmediatamente se sabe que

1. $gr(\Phi_{n+1} = n+1)$
2. $gr(r) < gr(\Phi_{n+1}) = n+1 \implies gr(r) \leq n$
3. $gr(q) + gr(\Phi_{n+1}) = gr(p) \implies gr(q) + (n+1) \leq 2n+1 \implies gr(q) \leq n$

Con esto en mente veamos

$$\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \Phi_{n+1}(x)q(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx$$

Por (2) se tiene que vale la regla de cuadratura sobre $r(x)$, entonces

$$\int_a^b r(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i r(x_i)$$

Por (3) podemos expresa $q(x)$ como combinacion de la base ortogonal que tenemos

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Phi_i(x)$$

Por lo que

$$\int_a^b \Phi_{n+1}(x) q(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} c_i \langle \Phi_{n+1}, \Phi_i \rangle = 0$$

Pues los Φ_i son ortogonales. Juntando estas conclusiones

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\, dx &= \int_a^b \Phi_{n+1}(x) q(x)\, dx && + \int_a^b r(x)\, dx \\
&= \qquad 0 && + \sum_{i=0}^{n} a_i r(x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i (p(x_i) - \Phi_{n+1}(x_i) q(x_i))
\end{aligned}$$

Luego recordemos que los x_i son raices del $\Phi_{n+1}(x)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\, dx &= \sum_{i=0}^{n} a_i (p(x_i) - 0) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i p(x_i)
\end{aligned}$$