Sem 5 - LFTC

1.1 Limbaje regulare - a fi sau a nu fi

1) Să se verifice dacă următoarele limbaje sunt regulare. Dacă nu sunt demonstrați. Dacă sunt, doar argumentați.

a) $L = \{a^n b^{2n} \mid n \in N^*\}$

<u>Lema de pompare pt limbaje regulare</u>

Dacă L e un limbaj regular, atunci $\exists\, p \in N^*$ (fix pt. un limbaj dat și oricât de mare) a.î.
$\forall\, w \in L$ de lungime cel puțin p $\exists$ o descompunere de forma $w = xyz$ unde $0 < |y| \leq p$ cu proprietatea că
$xy^iz \in L,\ \forall\, i \in N$

a) $L = \{a^n b^{2n} \mid n \in N^*\}$

Fie $\forall\, p \in N^*$ (oricât de mare)

$\exists$ un $w = a^p b^{2p}$, $|w| = 3p > p$, $w \in L$

Căutăm o descompunere a lui w a.î. să se respecte condiția din Lema de pompare. (și vom dem. că nu găsim niciuna, deci Lema de pompare nu are loc)

<u>I</u> y e format doar din a

$w = xyz$, $x = a^n$, $y = a^m$, $z = a^l b^{2p}$

$0 < m <= p$, $n, l \geq 0$ $\Rightarrow$ e o descompunere posibilă, $n+m+l = p$

fie $i = 2$, $\cancel{xy^iz = a^n y^{i \cdot m} a^l b^{2p}}$

$xy^iz = a^n a^{i \cdot m} a^l b^{2p} = a^{n+i \cdot m+l} b^{2p} \Rightarrow$

$a^{n+i \cdot m+l} b^{2p} = a^p b^{2p} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n+i \cdot m+l = p \\ i=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n+m+l=p$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} m+p = p \\ m > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Fals $\Rightarrow$ pt $i=2$ $xy^iz \notin L$

II $w = xyz$, $x = a^{p-n}$, $y = a^n b^m$, $z = b^{2p-m}$

$m, n > 0$ și $n + m <= p$ $\Rightarrow$ e o descompunere posibilă

Fie $i = 2$

$xy^iz = xy^2z = xyyz = a^{p-n} a^n b^m a^n b^m b^{2p-m}$

$= a^p b^m a^n b^{2p} \notin L$ deoarece $m, n > 0$

III $w = xyz$, $x = a^p b^l$, $y = b^m$, $z = b^{2p-l-m}$

$0 < m <= p$ și $0 <= l$ $\Rightarrow$ e o descompunere posibilă

Fie $i = 2$

$xy^iz = xy^2z = a^p b^l b^{2m} b^{2p-l-m} = a^p b^{2p+m} \notin L$

$m > 0$

Din I, II și III $\Rightarrow$ Lema de pompare nu are loc $\Rightarrow$ Limbajul nu e regular

b) $L = \{a^k \mid k$ - nr. prim$\}$

Fie $\forall p \in \mathbb{N}^*$ (oricât de mare)

$\exists w = a^k$, k - prim, $k \geq p$, $w \in L$

Căutăm o descompunere pt care nu are loc lema de pompare

$w = xyz$, $x = a^n$, $y = a^m$, $z = a^l$ a.î. $n + m + l = k$

$0 < m <= p$, $n, l \geq 0$

fie $i = k+1$ $\Rightarrow xy^iz = a^n a^{i \cdot m} a^l = a^{n + i \cdot m + l} = a^k$

$n + i \cdot m + l = k \Rightarrow n + m + l + (m \cdot (i-1)) = k \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k + m(i-1) = k \\ i = k+1 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow k + m \cdot k = k \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m \cdot k = 0 \\ k \text{ prim} \\ m > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ imposibil

$\Rightarrow$ nu are loc lema de pompare $\Rightarrow L$ nu e regular

c) $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ (oricât de mare)

Fie $w = a^{n^2}$, $w = xyz$ $\quad |w| = p^2 \geq p$

$x = a^k$

$y = a^l$, $0 < l \leq p$ $\quad$, $k + l + m = p^2$

$z = a^m$

Fie $i = 2 \Rightarrow xy^2z = a^k a^{2l} a^m = a^{k+2l+m} = a^{p^2+l}$

$0 < l$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 < p^2 + l$

$l \leq p \Rightarrow p^2 + l \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 < p^2 + l < (p+1)^2$

$\Rightarrow p^2 + l$ nu poate fi pătrat perfect $\Rightarrow$ lema de pompare nu are loc $\Rightarrow L$ nu e limbaj regulat

d) $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ (oricât de mare)

fie $w = a^{2^n}$, $w = xyz$ $\quad |w| = 2^p \geq p$

$x = a^n$, $y = a^m$, $z = a^l$ $\Leftrightarrow n + m + l = 2^p$

$0 < m <= p$, $n, l \geq 0$

fie $i = 2 \Rightarrow xy^iz = a^n a^m a^m a^l = a^{n+m+l+m} = \cancel{a^{p+m}}\, a^{2^p+m}$

$m > 0 \Rightarrow a^{2^p+m} > a^{2^p}$

$2^p + m \leq 2^p + p < 2^p + 2^p = 2 \cdot 2^p = 2^{p+1}$

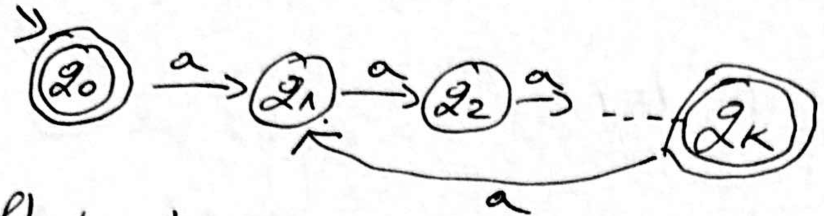
$\Rightarrow 2^p < 2^p + m < 2^{p+1} \Rightarrow 2^p + m$ nu este putere a lui 2

$\Rightarrow$ pt $i = 2 \Rightarrow xy^iz \notin L \Rightarrow$ nu are loc lema de pompare

$\Rightarrow$ limbajul nu este regulat

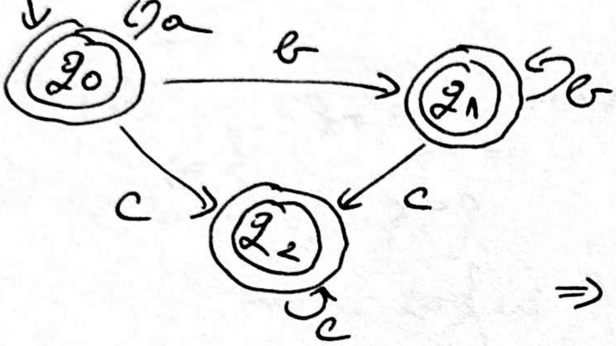
e) Fie K - un nr. natural fixat

$L = \{a^{km} \mid m \in \mathbb{N}\}$



$\Rightarrow$ limbajul este regular

f) $L = \{a^n b^m c^p \mid m, n, p \in \mathbb{N}\}$



$\Rightarrow$ limbajul este regular

2) $L = \{a^k \mid k - \text{neprim}\}$

Proprietăți de închidere ale limbajelor regulare

Teoremă:

Dacă L_1 și L_2 sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ atunci $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, L_1^*, complement(L_1) sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

De la 1. b știm că $L = \{a^k \mid K - \text{nr prim}\}$ nu e regular

$\Rightarrow C(L)$ nu e regular $\Rightarrow L = \{a^k \mid K \text{ nr neprim}\}$ nu e regular

b) $w \in \{a^k \mid K \text{ nr neprim}\}$

$w = xyz$

pt. $p = 3$ $\quad |w| > p$

luăm: $x = a$

$y = a^2 \quad \Rightarrow w = aa^2a = a^4$

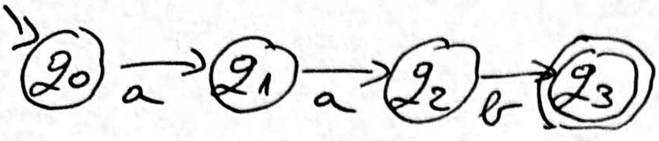
$z = a$

$xy^iz = aa^{2i}a = a^{2i+2} = a^{2(i+1)}$

$2(i+1)$ nu e prim $\rightarrow xy^iz \in \{a^k \mid K - \text{neprim}\}$

1.2)

a) $L = \{aab\}$



Gram regulară:

$S \to aA$

$A \to aB$

$B \to b$

Gram neregulară:

$S \to aAb$

$A \to a$

b) $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

-limbajul nu e regulat pt. că nu se poate face legătura între nr. de a și nr. de b

L e generat de gramatica

$S \to aSb$

$S \to ab$

1.3 Gramatici regulare echivalente cu o gramatica data

a) $S \to abS$
$S \to ab$

Gramatică regulară $\Rightarrow$ $S \to aE$

$E \to bS$

$E \to b$

b) $S \to Sa$
$S \to b$

Gramatică regulară $\Rightarrow$ $S \to b$

$S \to bA$

$A \to a$

$A \to aA$