

Tässä kuvankaappauksia laskuista TI-nspire sovelluksesta:

Kuvataan rollia muuttujalla:

$$\theta_{\text{roll}}$$

ja pitchiä muuttujalla:

$$\theta_{\text{pitch}}$$

Rolli saa arvoja väliltä:

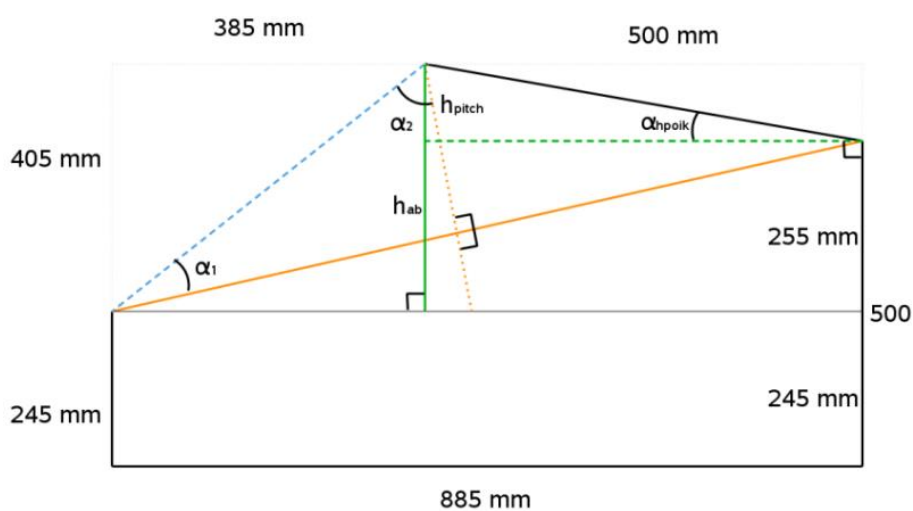
$$-16^{\circ} \leq \theta_{\text{roll}} \leq +16^{\circ}$$

Pitch saa arvoja väliltä:

$$-8^{\circ} \leq \theta_{\text{pitch}} \leq +8^{\circ}$$

Pitch:

Piirretään tilanteesta kuva:



Kuvassa:

merkillä α , merkitään kulmia

merkillä h , kuvataan pituuksia

musta ohut viiva kuvaa servomoottorien alapään tasoa (tarvitaan laskuissa)

sininen katkoviiva kuvaa servomoottorien ala- ja yläpään keskipisteiden välistä etäisyyttä (tarvitaan laskuissa)

keltainen viiva kuvaa servomoottorien alapään ja tukinivelen yläpään välistä etäisyyttä (vakio)

keltainen katkoviiva kuvaa servomoottorien yläpään ja keltaisen viivan kohtisuorasti leikkaavaa linjaa (tarvitaan laskuissa)

vihreä viiva kuvaa servomoottorien yläpään ja ohuen mustan vaakaviivan kohtisuorasti leikkaavaa linjaa (tarvitaan laskuissa)

vihreä katkoviiva kuvaa tukinivelen yläpään tasoa (tarvitaan laskuissa)

Kuvan perusteella:

$$\theta_{\text{pitch}} = \arcsin\left(\frac{h_{\text{pitch}}}{x_{\text{mt}}}\right) - \alpha_{\text{hpoik}}$$

jossa:

h_{pitch} = moottorin yläpäiden keskipisteen ja nivelen yläpään korkeusero

(ei vakio)

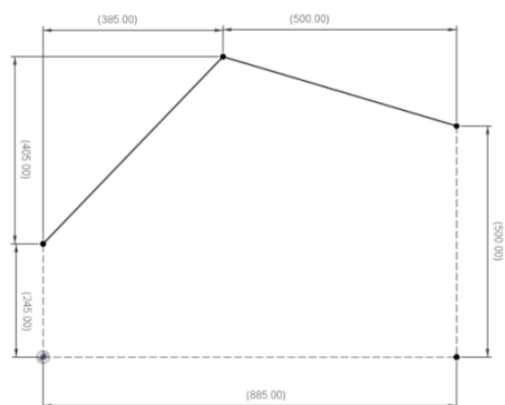
x_{mt} = moottorin yläpäiden keskipisteen ja tukinivelen yläpään välinen suora

(vakio)

α_{hpoik} = yläpedin nolla-asennon poikkeama horisontista asteina

(vakio)

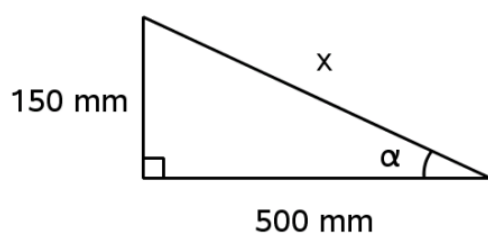
Kulma α_{poik} , määritetään seuraavan kuvan avulla:



Kuva 3 Lähtötaso mitat syötettiin tyhjimillään kuva sivulta.

Kuva 3 Liikealustan pistemitat sivustapäin kuvattuna, kuvan oikealaita on näyttyön päin.

Piirretään kuvasta tilanne, jossa selviää haluttu kulma:



Tangentilla:

$$\tan(\alpha) = \frac{150 \text{ mm}}{500 \text{ mm}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{150 \text{ mm}}{500 \text{ mm}}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{150}{500}\right) \rightarrow 16.69924423$$

$$\alpha = 16.69924423^\circ$$

Sinillä ja Pythagoran lauseella:

$$\sin(\alpha) = \frac{150 \text{ mm}}{x}$$

$$x^2 = (150 \text{ mm})^2 + (500 \text{ mm})^2$$
$$x = \sqrt{(150 \text{ mm})^2 + (500 \text{ mm})^2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{150 \text{ mm}}{\sqrt{(150 \text{ mm})^2 + (500 \text{ mm})^2}}$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{150 \text{ mm}}{\sqrt{(150 \text{ mm})^2 + (500 \text{ mm})^2}}\right)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{150}{\sqrt{150^2 + 500^2}}\right) \blacktriangleright 16.69924423$$

$$\alpha = 16,69924423^\circ$$

*lasketaan α_{hpoik} kyseisen kulman avulla, kun tiedetään moottorien olevan minimi-asennossa:

$$\alpha_{\text{hpoik}} = \alpha + 8,54591504^\circ$$

$$\alpha_{\text{hpoik}} = 16,69924423^\circ + 8,54591504^\circ \quad 16.69924423^\circ + 8.54591504^\circ \blacktriangleright 25.24515927$$

$$\alpha_{\text{hpoik}} = 25.24515927^\circ$$

arvo (8.54591504°) määritettiin valmiin kaavan avulla, tutkimalla kaavan tuottaman pitch-kulman ääriarvoja

ilman tätä arvoa, kaava antoi tuloksen välillä $0^\circ - 16^\circ$, vaikka tuloksen piti olla välillä $-8^\circ <-> +8^\circ$

*tallennetaan arvo muuttujaan

$$\alpha_{\text{hpoik}} := \sin^{-1}\left(\frac{150}{\sqrt{150^2 + 500^2}}\right) + 8.54591504 \blacktriangleright 25.24515927$$

Moottorin tukipisteiden yläpään ja tukinivelen välinen suora Pythagoran lauseella:

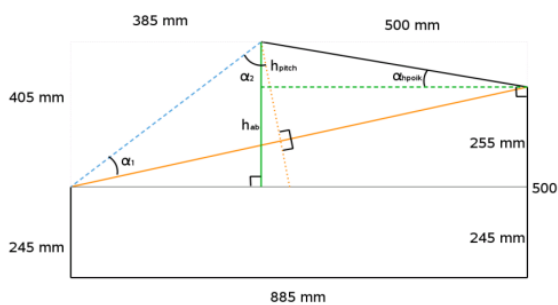
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(150 \text{ mm})^2 + (500 \text{ mm})^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{(150 \text{ mm})^2 + (500 \text{ mm})^2} = \sqrt{150^2 + 500^2} \rightarrow 522.0153254$$

$$x = 522,0153254 \text{ mm}$$

Enää siis jää laskettavaksi h_{pitch} , jonka arvo muuttuu riippuen moottorien pituudesta tarkastellaan uudelleen piirrosta:



Ensin täytyy selvittää suoran h_{ab} pituus:

Määritellään suora h_{k1} , joka alkaa moottorien yläpään keskipisteestä, kulkee keltaista katkoviivaa pitkin ja päättyy keltaisten viivojen leikkauspisteeseen:

kuvitellaan kuvan yläosa kolmioksi, jolloin sivut ovat sininen katkoviiva, keltainen ehjä viiva ja musta ehjä viiva

tällöin suora h_{k1} on kyseisen kolmion korkeus

Heronin kaava:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-\mathbf{b})(s-\mathbf{c})}$$

jossa:

A = pinta-ala

s = puolikkaan piirin pituus

a , \mathbf{b} ja \mathbf{c} = kolmion sivut

$a = x$ = moottorien yläpäiden keskipisteen ja alapäiden keskipisteen välinen etäisyys (ei vakio)

$$\mathbf{b} = \sqrt{(150)^2 + (500)^2} = 522,0153254 \text{ mm}$$

$$\mathbf{c} = \text{leveys} = \sqrt{(885)^2 + (245)^2} = 921,004886 \text{ mm}$$

$$s = \frac{a + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$$

Lasketaan korkeus kaavalla:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{leveys} \cdot \text{korkeus}$$

$$h_{\mathbf{k1}} = \frac{2A}{\text{leveys}}$$

jossa:

leveys on keltaisen ehjän viivan pituus

Koko kaava:

$$h_{\mathbf{k1}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{s(s-a)(s-\mathbf{b})(s-\mathbf{c})})}{\text{leveys}}$$

$$s = \frac{a + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$$

$$h_{k1} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right)} \right)}{\text{leveys}}$$

Tallennetaan arvot muuttujiksi:

$$b := \sqrt{150^2 + 500^2} \rightarrow 522.0153254$$

$$c := \sqrt{885^2 + 255^2} \rightarrow 921.004886$$

$$h_{k1} := \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{x+b+c}{2} \cdot \left(\frac{x+b+c}{2} - x \right) \cdot \left(\frac{x+b+c}{2} - b \right) \cdot \left(\frac{x+b+c}{2} - c \right)}}{c}$$

$$\rightarrow 0.0005428853 \cdot \sqrt{-(x-1443.020211) \cdot (x-398.9895605) \cdot (x+398.9895605) \cdot (x+1443.020211)}$$

Määritellään suora h_{k2} , joka alkaa keltaisen katkoviivan ja ohuen mustan poikkiviivan leikkauspisteestä, kulkee keltaista katkoviivaa pitkin ja päättyy keltaisten viivojen leikkauspisteeseen:

tätä varten määritellään ensin suora h_{k3}

Määritellään suora h_{k3} , joka alkaa moottorien alapään keskipisteestä, kulkee keltaista viivaa pitkin ja päättyy keltaisten viivojen leikkauspisteeseen:

koska tiedetään kahden muun sivun pituudet, jotka muodostavat kolmion tämän sivun kanssa (sininen katkoviiva ja suora h_{k1}), voidaan laskea suoran pituus Pythagoran lauseella:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(h_{k3})^2 + (h_{k1})^2 = x^2$$

$$h_{k3} = \sqrt{x^2 - (h_{k1})^2}$$

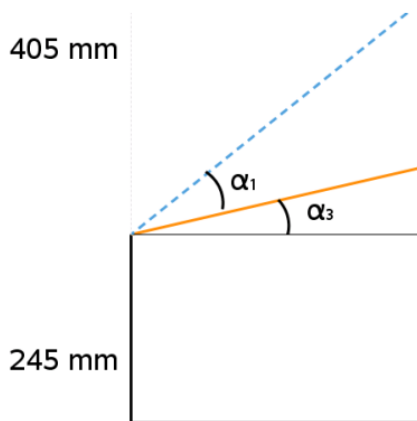
jossa:

x = moottorien yläpäiden keskipisteen ja alapäiden keskipisteen välinen etäisyys (ei vakio)

Tallennetaan arvo muuttujaan:

$$h_{k3} := \sqrt{x^2 - h_{k1}^2} \rightarrow 0.0005428853 \cdot \sqrt{x^4 + 1151500 \cdot x^2 - 0.0002 \cdot x + 3.314880625} \text{E11} \quad \text{⚠}$$

Määritetään uusi kulma α_3 , joka sijaitsee kuman α_1 ja mustan ohuen vaakaviivan välissä:



lasketaan kulma kun tiedetään kolmion kaksi sivua (musta ohut vaakaviiva (885 mm) ja oikealla sijaitseva musta pystyviiva (255 mm)):

$$\tan(\alpha_3) = \frac{255 \text{ mm}}{885 \text{ mm}}$$

$$\alpha_3 = \arctan\left(\frac{255 \text{ mm}}{885 \text{ mm}}\right)$$

Tallennetaan arvo muuttujaan

$$\alpha_3 := \tan^{-1}\left(\frac{255}{885}\right) \rightarrow 16.07357416$$

Lasketaan viimein suora \mathbf{h}_{k2} suoran \mathbf{h}_{k3} ja kulman α_3 avulla:

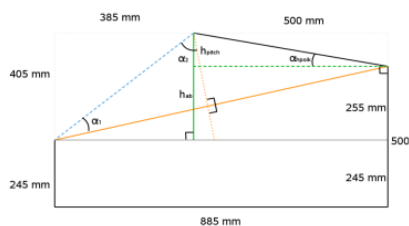
$$\tan(\alpha_3) = \frac{\mathbf{h}_{k2}}{\mathbf{h}_{k3}}$$

$$h_{k2} = h_{k3} \cdot \tan(\alpha_3)$$

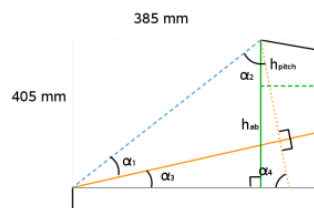
Tallennetaan arvo muuttujaan:

$$\mathbf{h}_{k2} := \mathbf{h}_{k3} \cdot \tan(\alpha_3) \rightarrow 0.0001564246 \cdot \sqrt{x^4 + 1151500 \cdot x^2 - 0.0002 \cdot x + 3.314880625} \mathbf{E11}$$

Tarkastellaan jälleen piirrosta:



nyt voidaan määrittää pituus suoralle \mathbf{h}_{ab} (vihreä pystyviiva), määritellään tätä varten uusi kulma α_4 :



Ratkaistaan α_4 , kun tiedetään suorakulmaisen kolmion kaksi kulmaa (α_3 ja yksi suora kulma (90°)):

$$\alpha_3 + \alpha_4 + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha_4 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha_3$$

$$\alpha_4 = 90^\circ - \alpha_3$$

Tallennetaan arvo muuttujaan:

$$\alpha_4 := 90 - \alpha_3 \rightarrow 73.92642584$$

Ratkaistaan h_{ab} , kun tiedetään keltaisen katkoviivan kokonaispituus ($h_{k1} + h_{k2}$):

$$\sin(\alpha_4) = \frac{h_{ab}}{h_{k1} + h_{k2}}$$

$$h_{ab} = \sin(\alpha_4) \cdot (h_{k1} + h_{k2})$$

Tallennetaan arvo muuttujaan:

$$h_{ab} := \sin(\alpha_4) \cdot (h_{k1} + h_{k2}) \rightarrow 0.0005216622 \cdot \left(\sqrt{-x^4 + 2241500 \cdot x^2 + 0.0002 \cdot x - 3.314880625 \text{E}11} \right. \\ \left. + 0.2881355932 \cdot \sqrt{x^4 + 1151500 \cdot x^2 - 0.0002 \cdot x + 3.314880625 \text{E}11} \right)$$

Viimein ratkaistaan arvo h_{pitch} aikaisemman piirroksen avulla:

$$h_{pitch} = h_{ab} - 255 \text{ mm}$$

Tallennetaan arvo muuttujaan:

$$h_{pitch} := h_{ab} - 255 \rightarrow 0.0005216622 \cdot \sqrt{-x^4 + 2241500 \cdot x^2 + 0.0002 \cdot x - 3.314880625 \text{E}11} \\ + 0.0001503095 \cdot \sqrt{x^4 + 1151500 \cdot x^2 - 0.0002 \cdot x + 3.314880625 \text{E}11} - 255$$

*Vielä koko kaava:

$$\theta_{\text{pitch}} = \arcsin\left(\frac{\mathbf{h}_{\text{pitch}}}{x_{\text{mt}}}\right) - \alpha_{\text{hpoik}}$$

$$\theta_{\text{pitch}} = \arcsin\left(\frac{\mathbf{h}_{\text{pitch}}}{522,0153254 \text{ mm}}\right) - 25.24515927^\circ$$

*Tallennetaan kaava muuttujaan:

$$\theta_{\text{pitch}} := \sin^{-1}\left(\frac{\mathbf{h}_{\text{pitch}}}{\sqrt{150^2 + 500^2}}\right) - \alpha_{\text{hpoik}}$$

$$\rightarrow \sin^{-1}\left(0.0000009993 \cdot \left(\sqrt{-x^4 + 2241500 \cdot x^2 + 0.0002 \cdot x - 3.314880625 \text{E}11}\right.\right. \\ \left.\left.+ 0.2881355932 \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1151500 \cdot x^2 - 0.0002 \cdot x + 3.314880625 \text{E}11} - 1696500\right)\right)\right) - 25.24515927$$

*Lopullinen kaava (kaksi riviä lauseketta):

$$\sin^{-1}\left(0.0000009993 \cdot \left(\sqrt{-x^4 + 2241500 \cdot x^2 + 0.0002 \cdot x - 3.314880625 \cdot 10^{11}}\right.\right. \\ \left.\left.+ 0.2881355932 \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1151500 \cdot x^2 - 0.0002 \cdot x + 3.314880625 \cdot 10^{11}} - 1696500\right)\right)\right) - 25.24515927$$

jossa:

x = moottorien yläpäiden keskipisteen ja alapäiden keskipisteen välinen etäisyys (ei vakio)

x ei ole suoraan moottorien pituus, vaan se siis pitää vielä laskea erikseen, tällöin roll ei vaikuta pitch -arvoon

Vastaus tulee asteina (+ tai -)

*Testataan kaavaa: (vain pienemmällä positiivisella arvolla on väliä)

$\text{solve}(\theta_{\text{pitch}}=8, x) \rightarrow x=-1428.091668 \text{ or } x=-702.8217296 \text{ or } x=702.8217296 \text{ or } x=1428.091668$

Pitch = 8°

$x = 702,8217296 \text{ mm}$

$\text{solve}(\theta_{\text{pitch}}=0, x) \rightarrow x=-1438.754405 \text{ or } x=-631.3271754 \text{ or } x=631.3271754 \text{ or } x=1438.754405$

Pitch = 0°

$x = 631,3271754 \text{ mm}$

$\text{solve}(\theta_{\text{pitch}}=-8, x) \rightarrow x=-1442.950558 \text{ or } x=-563.2459103 \text{ or } x=563.2459103 \text{ or } x=1442.950558$

Pitch = -8°

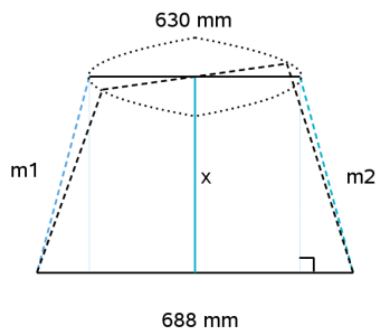
$x = 563,2459103 \text{ mm}$

tulokset näyttävät olevan ainakin oikeaa kokoluokkaa, kun moottorien oikea pituus on väliä 560mm–705mm

vielä pitää luoda kaava rollin laskemiselle ja toinen kaava joka muuntaa molempien moottorien yhteispituuden x :n arvoksi (moottorien yläpäiden keskipisteen ja alapäiden keskipisteiden etäisyys)

Pitch – viety eteenpäin

Piirretään moottorien yläpäiden ja alapäiden keskipisteiden välistä pituutta hahmottava kuva:



Kun pitch lasketaan, voidaan käyttää arvona moottorien keskipituutta. Jotta pitch arvo ei muuttuisi rollin muuttuessa, tulee moottorien pituuksien muuttua päinvastaisessa suhteessa (kun toinen pitenee, toinen lyhenee) rollin arvon muuttuessa. Toisin sanoen pitch:in kannalta ei ole merkitystä onko toinen moottori toista pidempi. Kun pelkkä roll:in arvo muuttuu, pysyy moottorien yhteispituus samana.

Luodaan muuttuja keskipituus, jonka arvo on "x"

keskip:=x ▶ x

kiinteä pituus: 557.99848 mm

servon minimipituus: 2.00152 mm

servon maksimipituus: 146.99996 mm

**** keskipituus saadaan helposti kaavasta:**

$$\mathbf{keskip} = \frac{(\text{kiinteä pituus} + \text{moottorin 1 servon pituus}) + (\text{kiinteä pituus} + \text{moottorin 2 servon pituus})}{2}$$

Luodaan muuttuja "väli", joka saa arvoksi Pythagoran lauseella johdetun etäisyyden moottorien ylä- ja alapäiden keskipisteiden välillä:

Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\mathbf{väli}^2 + \left(\frac{688 \text{ mm} - 630 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \mathbf{keskip}^2$$

$$\mathbf{väli}^2 + (29 \text{ mm})^2 = \mathbf{keskip}^2$$

$$\mathbf{väli}^2 = \mathbf{keskip}^2 - (29 \text{ mm})^2$$

$$\mathbf{väli} = \sqrt{\mathbf{keskip}^2 - (29 \text{ mm})^2}$$

$$\mathbf{väli} := \sqrt{\mathbf{keskip}^2 - 29^2} \quad \blacktriangleright \quad \sqrt{x^2 - 841}$$

Sijoitetaan uusi johdettu muuttuja "väli" aikaisempaan pitch-kulman lausekkeeseen:

θ_{pitch}

$$:= \sin^{-1} \left(9.993 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\sqrt{-\text{väli}^4 + 2241500 \cdot \text{väli}^2 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot \text{väli} - 3.314880625 \cdot 10^{11}} \right. \right. \\ \left. \left. + 0.2881355932 \cdot \left(\sqrt{\text{väli}^4 + 1151500 \cdot \text{väli}^2 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot \text{väli} + 3.314880625 \cdot 10^{11} - 1696500} \right) \right) \right) \\ - 25.24515927$$

$$\rightarrow \sin^{-1} \left(0.0000009993 \cdot \left(\sqrt{0.0002 \cdot \sqrt{x^2 - 841} - x^4 + 2243182 \cdot x^2 - 3.333738713 \cdot 10^{11}} \right. \right. \\ \left. \left. + 0.2881355932 \cdot \left(\sqrt{x^2 - 1121591} \right) \right) \right) - 25.24515927 \quad \text{!}$$

Kaava pitchin arvon määrittämiseen moottorien keskipituuden (x) avulla:

$\theta_{pitch} =$

$$\sin^{-1} \left(9.993 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\sqrt{0.0002 \cdot \sqrt{x^2 - 841} - x^4 + 2243182 \cdot x^2 - 3.333738713 \cdot 10^{11}} \right. \right. \\ \left. \left. + 0.2881355932 \cdot \left(\sqrt{x^2 - 1121591} \right) \right) \right) - 25.24515927$$

Huomioita:

kaavassa on noin $\pm 0,4^\circ$ heitto.

Keskipituudella 560 mm kaava kertoo kulmaksi: $-8,433464418^\circ$

Keskipituudella 631,99848 mm kaava kertoo kulmaksi: $+0,0000000049^\circ$

Keskipituudella 704,99844 mm kaava kertoo kulmaksi: $+8,173581111^\circ$

** Kaavaa ja sen antamia arvoja voi vielä tehdä tarkemmaksi alustan oikeiden arvojen avulla, jolloin α_{hpoik} arvoa tulee muuttaa