Badanie przebiegu zmienności funkcji

Projekt w wxMaxima

24 czerwca 2023

Emil Szewczak

Kierunek: Inżynieria i Analiza Danych

Spis treści

1 Wstęp **3**

2 Funkcja **3**

3 Dziedzina **3**

4 Miejsca zerowe **4**

5 Asymptoty **4**
5.1 Asymptoty pionowe 4
5.2 Asymptoty poziome 5
5.3 Asymptoty ukośne 5

6 Pierwsza pochodna **6**
6.1 Wyznaczenie przedziału monotoniczności 6

7 Ekstrema lokalne funkcji **7**

8 Druga pochodna **8**
8.1 Przedziąły wypukłości i wklęsłości 8
8.2 Punkty przegięcia 9

9 Tabela zmienności funkcji **10**

10 Wykres funkcji **10**

1 Wstęp

Tematem projektu jest badanie przebiegu zmienności funkcji.
Należy napisać program w MAXIMIE, dzięki któremu zostanie zbadany przebieg wybranej funkcji.
Kryteria oceny:

- Warunek konieczny: funkcja musi posiadać co najmniej jedno ekstremum i co najmniej jednąasymptotę, a program ma działać.
- Własności funkcji ponad warunek konieczny.
- Wystąpienie wszystkich etapów badania przebiegu (bez własności specjalnych - parzystość, nie-parzystość, okresowość)
- Właściwe skomentowanie każdego etapu.
- Wykorzystanie możliwości Maximy w celu automatyzacji obliczeń.
- Rysunek i jego elementy.

Poprzez analizę przebiegu zmienności funkcji rozumiem:

1. Wyznaczeniu dziedziny funkcji.
2. Wyznaczeniu miejsc zerowych funkcji (jeśli istnieją).
3. Wyznaczeniu asymptot funkcji (asymptoty pionowe, poziome lub ukośne).
4. Obliczeniu pochodnej funkcji i wyznaczeniu przedziałów monotoniczności funkcji (gdzie funkcja jest rosnąca lub malejąca itp.).
5. Wyznaczeniu ekstremów lokalnych funkcji korzystając z pochodnej funkcji.
6. Obliczeniu drugiej pochodnej funkcji i wyznaczeniu przedziałów wypukłości i wklęsłości funkcji oraz punkty przegięcia.
7. Narysowania szkic wykresu funkcji. Wykres nie musi być dokładny, ale powinien uwzględniać charakterystyczne cechy funkcji opisane w poprzednich punktach (np. monotoniczność, asymptoty itd.).
8. Utworzenie tabelki zmienności dla funkcji.

2 Funkcja

Wzór badanej funkcji:

```
(%i1)  f(x):= x^3/(1-x^2);
```

$$(\%o1)\quad f(x) := \frac{x^3}{1 - x^2}$$

3 Dziedzina

Aby policzyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$: Musimy przyrównać miaownik do zera. Najpierw do zmiennej przypisuje wszystko pod kreską ułamkową:

```
/* Dziedzina funkcji */
mianownik(x):= 1-x^2;
```

$$(\%o2)\quad \mathrm{mianownik}(x) := 1 - x^2$$

Następnie przyrównuje mianownik do zera, aby policzyć jakich argumentów funkcja nie może przyjąć:

```
→       solve(mianownik(x)=0,x);
(%o3)   [x = - 1 , x = 1 ]
```

Zatem funkcja nie ma wartości w punktach 1 i -1.

Ostatecznie dziedziną funkcji f jest zbiór: $D : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

4 Miejsca zerowe

Aby policzyć miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ należy przyrównać funkcję do 0:

```
(%i6)   solve(f(x)=0,x);
(%o6)   [x = 0]
```

Punkt $x = 0$ jest punktem przecięcia się wykresu funkcji z osią Ox.

Miejsce zerowe funkcji f to: $x = 0$

5 Asymptoty

5.1 Asymptoty pionowe

Asymptoty pionowe - proste pionowe, przechodzące przez punkty nieciągłości funkcji (granice funkcji w tych punktach są rozbieżne).
Z dzidziny wynika, że funkcja jest nieciągła w punktach $x = -1 \wedge x = 1$. Zbadajmy granice lewostronne i prawostronne w tych punktach.

Dla $x = 1$:

- Granica lewostronna:

```
(%i7)   lim1_lewa = limit(f(x),x,1,minus);
(%o7)   lim1_lewa = ∞
```

- Granica prawostronna:

```
→       lim1_prawa = limit(f(x),x,1,plus);
(%o7)   lim1_prawa = - ∞
```

Granice są rozbieżne więc w punkcje $x = 1$ jest asymptota pionowa.

Dla $x = -1$:

- Granica lewostronna:

```
(%i9)   limmin1_lewa = limit(f(x),x,-1,minus);
(%o9)   limmin1_lewa = ∞
```

- Granica prawostronna:

```
(%i10)  limmin1_prawa = limit(f(x),x,-1,plus);
(%o10)  limmin1_prawa = - ∞
```

Granice są rozbieżne więc w punkcje $x = -1$ jest asymptota pionowa.

Ostatecznie funkcja f ma dwie asymptoty pionowe: $x = -1 \wedge x = 1$.

5.2 Asymptoty poziome

Asymptoty poziome istnieją, jeżeli granice w $-\infty$ oraz ∞ są skończone.

Zbadajmy granicę funkcji w ∞:

```
(%i13) lim_inf = limit(f(x),x,inf);
(%o13) lim_inf = - ∞
```

oraz w $-\infty$:

```
(%i14) limmin_inf = limit(f(x),x,-inf);
(%o14) limmin_inf = ∞
```

Obie te granice nie są skończone dlatego funkcja f nie ma asymptot poziomych.

5.3 Asymptoty ukośne

Asymptota ukośna to prosta postaci $ax + b$.Istieją asymptoty lewostronne i prawostronne. Aby one istniały granice z $f - (ax + b)$ przy $-\infty$ lub ∞ muszą być równe zero.

Zbadajmy asymptotę ukośną prawostronną.

Znajdzmy najpierw współczynnik a prostej, badając taką granice:

```
(%i18) limukos1_prawa = limit(f(x)/x,x,inf);
(%o18) limukos1_prawa = - 1
```

Zbadajmy teraz granicę z funkcji minus $ax + 0$:

```
(%i16) limukos2_prawa = limit(f(x)+x,x,inf);
(%o16) limukos2_prawa = 0
```

Ta granica jest równa 0, dlatego $-x$ jest asymptotą ukośną prawostronną.

Zbadajmy asymptotę ukośną lewostronną.

Znajdzmy najpierw współczynnik a prostej, badając taką granice:

```
(%i25) limukos1_lewa = limit(f(x)/x,x,-inf);
(%o25) limukos1_lewa = - 1
```

Zbadajmy teraz granicę z funkcji minus $ax + 0$:

```
(%i26) limukos2_lewa = limit(f(x)+x,x,-inf);
(%o26) limukos2_lewa = 0
```

Ta granica jest równa 0, dlatego $-x$ jest asymptotą ukośną lewostronną.

Z tego wynika, że prosta $-x$ jest asymptotą ukośną obustronną funkcji f.

6 Pierwsza pochodna

Pochodna funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2}$:

(%i27) pochodna1: diff(f(x),x);

pochodna1 $\dfrac{3x^2}{1-x^2} + \dfrac{2x^4}{(1-x^2)^2}$

Po uproszczeniu:

(%i28) pochodna1 = ratsimp(pochodna1);

(%o28) $\dfrac{3x^2}{1-x^2} + \dfrac{2x^4}{(1-x^2)^2} = -\left(\dfrac{x^4-3x^2}{x^4-2x^2+1}\right)$

Zatem ostatecznie $f'(x) = -\frac{x^4-3x^2}{x^4-2x^2+1}$.

6.1 Wyznaczenie przedziału monotoniczności

Aby wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji sprawdzam kiedy pierwsza pochodna jest mniejsza lub większa od zera. Funkcja jest rosnąca gdy jej pochodnia jest dodatnia, a malejąca gdy ujemna.

Funkcja f jest rosnąca dla:

(%i36) o_poly_solve(pochodna1>0,x);

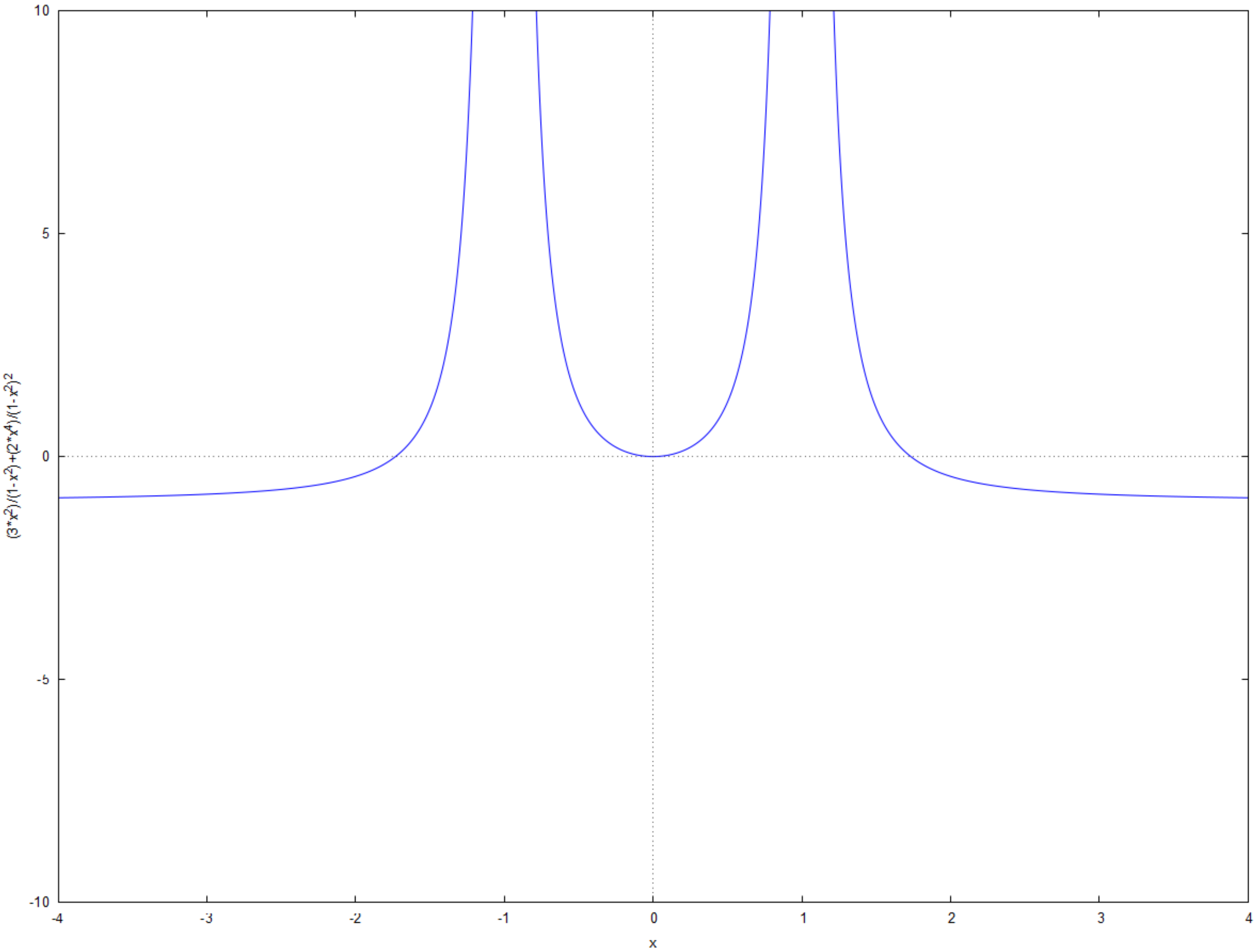
(%o36) o_poly_solve$\left(\dfrac{3x^2}{1-x^2} + \dfrac{2x^4}{(1-x^2)^2} > 0, x\right)$

a malejąca dla:

(%i37) to_poly_solve(pochodna1<0,x);

(%o37) %union$\left(\left[0 < x, x^2 - 3 > 0\right], \left[x < 0, x^2 - 3 > 0\right]\right)$

Co łatwiej jest odczytać z wykresu pochodnej:



Oznacza to, że funkcja f dla $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ rośnie, a dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ maleje.

7 Ekstrema lokalne funkcji

Funkcja może mieć ekstremum tylko w tych miejscach gdzie jej pochodna się zeruje. Dodatkowo aby ekstremum istniało, to funkcja musi w danym punkcie zmienić monotoniczność.

W przypadku funkcji f:

```
→ solve(pochodna1=0,x);
(%o28) [x = -√3, x = √3, x = 0]
```

Zatem punkty $x = -\sqrt{3} \wedge x = \sqrt{3} \wedge x = 0$ są podejrzane o ekstremum. Funkcja f zmienia swoją monotoniczność tylko w punktach $x = -\sqrt{3} \wedge x = \sqrt{3}$.

Funkcja f:

- $f < 0$, dla $x < -\sqrt{3}$,
- $f > 0$, dla $x > -\sqrt{3}$,

Zatem w punkcje $x = -\sqrt{3}$ jest minimum lokalne.

Wartość ekstremum to:

```
(%i39) f(-3^(1/2));
```

$$(\%o39)\quad \frac{3^{3/2}}{2}$$

Funkcja f:

- $f > 0$, dla $x < \sqrt{3}$,
- $f < 0$, dla $x > \sqrt{3}$,

Zatem w punkcje $x = -\sqrt{3}$ jest maksimum lokalne.

Wartość ekstremum to:

```
(%i40) f(3^(1/2));
```

$$(\%o40)\quad -\left(\frac{3^{3/2}}{2}\right)$$

8 Druga pochodna

Druga pochodna funkcji f:

```
(%i44) pochodna2: diff(pochodna1(x),x);
```

$$\text{pochodna2}\quad \frac{6x}{1-x^2}+\frac{14x^3}{(1-x^2)^2}+\frac{8x^5}{(1-x^2)^3}$$

Po uproszczeniu:

```
(%i45) pochodna2 = ratsimp(pochodna2);
```

$$(\%o45)\quad \frac{6x}{1-x^2}+\frac{14x^3}{(1-x^2)^2}+\frac{8x^5}{(1-x^2)^3}=-\left(\frac{2x^3+6x}{x^6-3x^4+3x^2-1}\right)$$

8.1 Przedziąły wypukłości i wklęsłości

Funkcja $f(x)$ jest wypukła, jeśli $f''(x) > 0$:

```
(%i51) to_poly_solve(pochodna2>0,x);
```

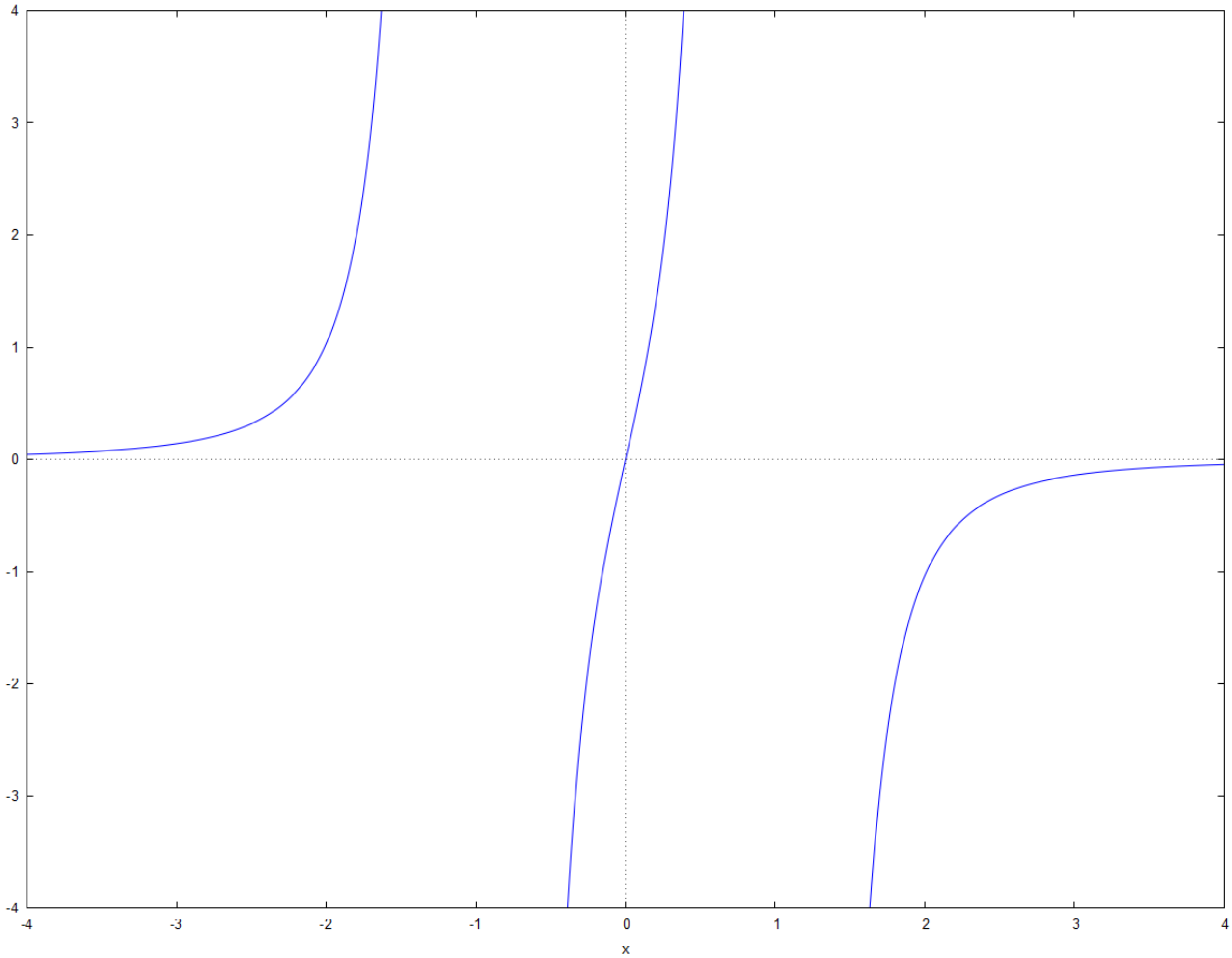
$$(\%o51)\quad \%union\left(\left[0<x,-(x-1)^3>0\right],\left[1<x,-(x+1)^3>0\right],\left[x<0,-(x-1)^3>0,-(x+1)^3>0\right]\right)$$

Funkcja $f(x)$ jest wklęsła, jeśli $f''(x) < 0$:

```
(%i49) to_poly_solve(pochodna2<0,x);
```

(%o49) %union$\left(\left[-1<x, x<0, -(x-1)^3>0\right], \left[0<x, -(x-1)^3>0, -(x+1)^3>0\right], [1<x]\right)$

Co łatwiej odczytać z wykresu drugiej pochodnej:



Funkcja f jest wypukła dla $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, a wklęsła dla $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

8.2 Punkty przegięcia

Punkty przegięcia występują w tych miejscach, w których funkcja zmienia wypukłość, czyli $f''(x) = 0$:

```
(%i52) solve(pochodna2=0,x);
```

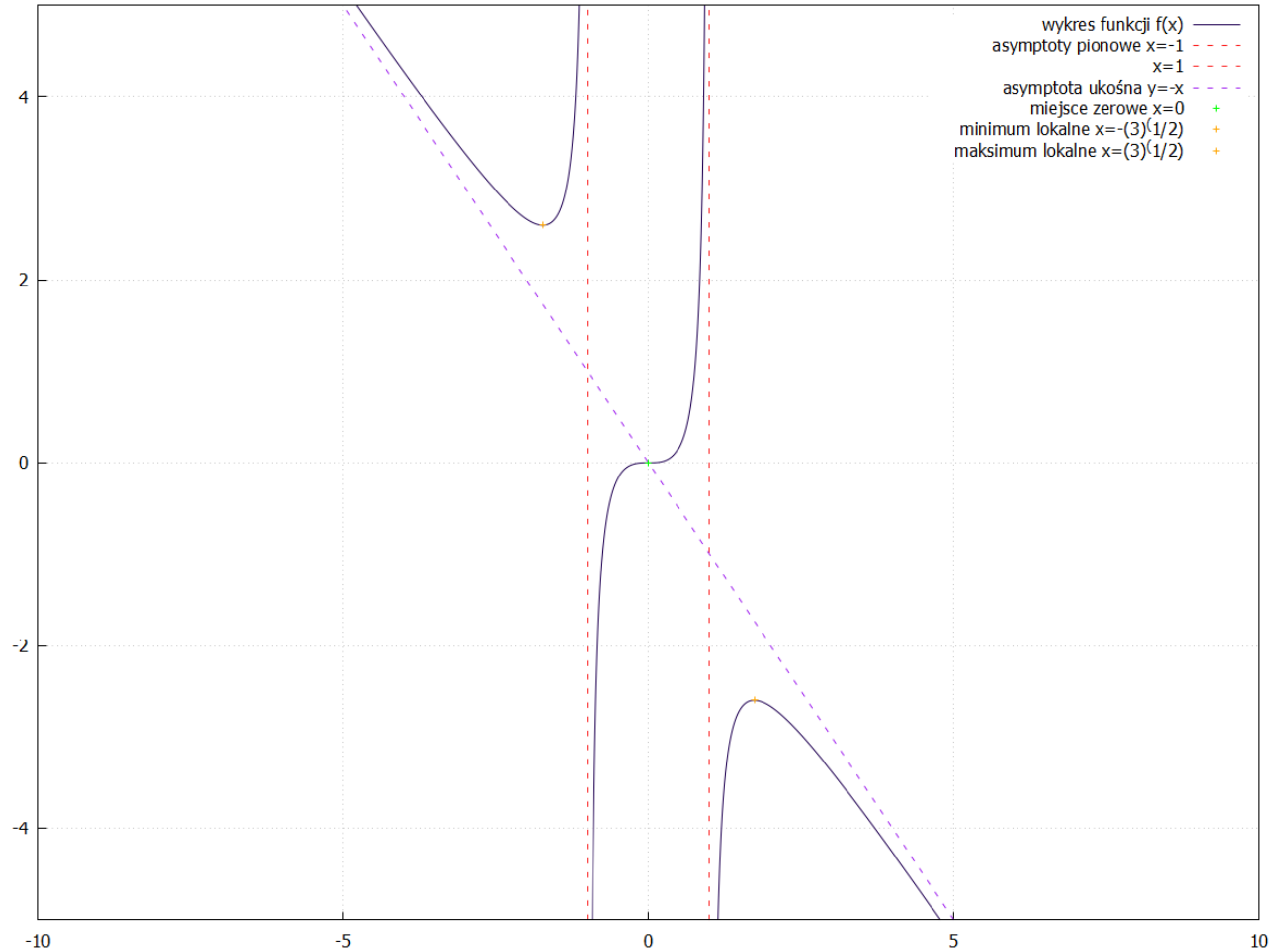
(%o52) $\left[x = -(\sqrt{3}\,\%i), x = \sqrt{3}\,\%i, x = 0\right]$

Zatem funkcja f ma jeden rzeczywisty punkt przegięcia $x = 0$

9 Tabela zmienności funkcji

x	$(-\infty;\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	brak	+	0	+	brak	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	brak	-	0	+	brak	-	-	-
$f(x)$	↘	Min Lok= $\frac{\sqrt{3}^3}{2}$	↗	brak	↗	0	↗	brak	↗	Max Lok= $-\frac{\sqrt{3}^3}{2}$	↘

10 Wykres funkcji



Narysowana w MAXIMIE za pomocą tego kodu:

```
wxdraw2d(grid=true, yrange=[−5,5],
color= "#1f0052", key="wykres funkcji f(x)",
explicit(f(x),x,−10,10),
color="#fc2121", line_type= dashes, key="asymptoty pionowe x=-1",
parametric(−1,t,t,−5,5),
color="#fc2121", key="x=1",
parametric(1,t,t,−5,5),
color=purple, key="asymptota ukośna y=-x",
explicit(−x,x,−6,6),
color=green, key="miejsce zerowe x=0",
points([[0,0]]),
color=orange, key="minimum lokalne x=-(3)^(1/2)",
points([[−(3^(1/2)),3^(3/2)/2]]),
color=orange, key="maksimum lokalne x=(3)^(1/2)",
points([[3^(1/2),−3^(3/2)/2]]));
```

(%t39)