LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M, M0031M och M0059M

Tentamensdatum: **2023-10-24**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.
Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28. Skrivtid: 5 timmar.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^3 = \sqrt{3} - 3i$. Ge svaret på polär form.

b) De z som uppfyller $|(2-i)z + i| \leq 3$ beskriver en cirkelskiva i det komplexa talplanet. Vilken? Ange speciellt medelpunkt och radie. (4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & -5 & 2 \\ -5 & 10 & -8 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för Col$A$ och en bas för Nul$A$.

b) Bestäm koordinaterna för vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

relativt basen för kolonnrummet som du bestämde i a) uppgiften.

c) Bestäm dimensionen av radrummet för A utan att bestämma en bas för det. Förklara hur du tänkte. (4 p)

3. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$, det vill säga finn matriser P och D , D diagonal, så att $A = PDP^{-1}$. Bestäm A^5. (4 p)

4. Låt $\mathbb{P}_2$ beteckna vektorrummet av samtliga polynom av gradtal mindre än eller lika med 2 och utrusta det med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 tp(t)q(t)\,dt.$$

a) Bestäm normen av $p(t) = 1 + t$.

b) Bestäm en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$.

c) Bestäm den ortogonala projektionen av t^2 på $\mathbb{P}_1$, det vill säga bestäm $\text{proj}_{\mathbb{P}_1} t^2$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 4y' + 4y = 4xe^{2x}$. (4 p)

6.

a) Visa att $\cos(3x)$ är en lösning till $y''' + 4y'' + 9y' + 36y = 0$.

b) Bestäm samtliga lösningar till $y''' + 4y'' + 9y' + 36y = 8\sin x$. (4 p)

7.

a) Låt $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, vara element i ett vektorrum V. Vad betyder det att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är en bas för V? Ge en definition.

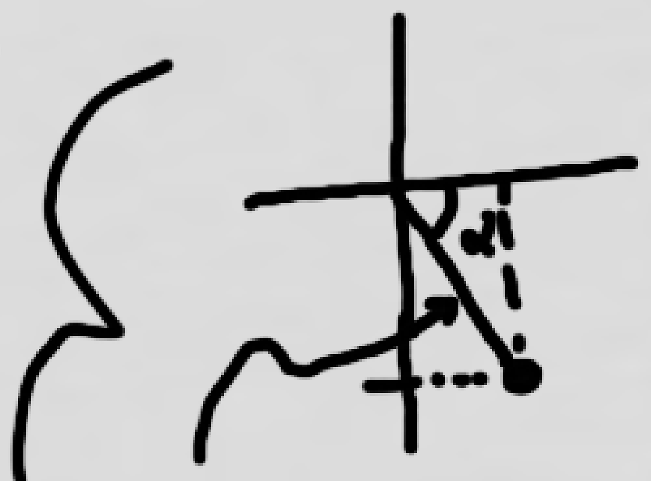
b) Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är en bas för ett vektorrum V och bilda $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$.

   i. Visa att $\mathcal{C}$ är en bas för V. Motivera noggrant.

   ii. Bestäm $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ om $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (4 p)

Lösningsförslag m0049m, 231024

1. a) $z^3 = \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$



$\sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

$\tan\alpha = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\therefore\ \alpha = \pi/3$

ANSÄTT PÅ POLÄRFORM:

$z = re^{i\varphi} \overset{\text{D-M}}{\Longrightarrow} z^3 = r^3 e^{i3\varphi}$

OCH MAN FÅR

$$r^3 e^{i3\varphi} = 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{3}} \iff$$

$$\begin{cases} r^3 = \sqrt{12} \\ 3\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff$$

$$r = 12^{1/6};\ \varphi = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$$

$$\therefore\ \underline{\underline{z_k = 12^{1/6}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k\right)}}},\ k = 0, 1, 2$$

b) $|(2-i)z + i| \le 3 \iff$

$= \left|(2-i)\left(z + \frac{i}{2-i}\right)\right| \le 3 \iff$

$= \sqrt{5}\,\left|z - \frac{1-2i}{5}\right| \le 3 \iff \underline{\underline{\left|z - \frac{1-2i}{5}\right| \le \frac{3}{\sqrt{5}}}}$

$|2-i|$

$\frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{5} = \frac{-1+2i}{5}$

$\therefore$ RADIE: $\frac{3}{\sqrt{5}}$

MEDELPUNKT: $\frac{1-2i}{5}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & -5 & 2 \\ -5 & 10 & -8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) EN BAS FÖR Col A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ //

EN BAS FÖR Nul A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ //

x_1, x_3, x_4 BUNDNA

x_2 FRI

$x_2 = t,\ x_3 = x_4 = 0$

$x_1 = 2t$

$\therefore\ t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) VIA INSPEKTION FRAMGÅR DET ATT KOORDINATERNA ÄR $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ //

TY $1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$ (SER MAN INTE DET DIREKT SÅ GAUSSELIMINERAR MAN)

c) DIMENSIONEN FÖR RADRUMMET ÄR ALLTID SAMMA SOM DIMENSIONEN FÖR KOLONNRUMMET, HÄR 3 EFTERSOM DET VAR 3 BASELEMENT. //

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -15 \\ 2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(-7-\lambda) + 30 = 0$

$\Leftrightarrow -28 + 3\lambda + \lambda^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = -2; -1$

[KOLL: $-2-1=-3$; $\operatorname{tr} A = 4-7=-3$ OK
$(-2)(-1)=2$; $\det A = -28+30=2$ OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = -2$: $A\bar{v} = -2\bar{v} \Leftrightarrow (A+2I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -15 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2 FRI, $x_2 = t$
$x_1 = \frac{5}{2}t \therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$
VÄLJ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1$: $A\bar{v} = -\bar{v} \Leftrightarrow (A+I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -15 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN x_2 FRI, $x_2 = t$
$x_1 = 3t \therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$-2, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$; $-1, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ SÅ

$A = PDP^{-1}$ MED $P = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

BESTÄM A^5. $A^5 = PD^5P^{-1}$

[$D^5 = \begin{bmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$]

SÅ $A^5 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 & -96 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & -465 \\ 62 & -187 \end{bmatrix}$

4. $\mathbb{P}_2$; $\langle p,q\rangle = \int_0^1 t\,p(t)q(t)\,dt$

a) $\|1+t\|^2 = \langle 1+t, 1+t\rangle = \int_0^1 t(1+t)^2\,dt$

$= \int_0^1 t+2t^2+t^3\,dt = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{6+8+3}{12} = \frac{17}{12}$

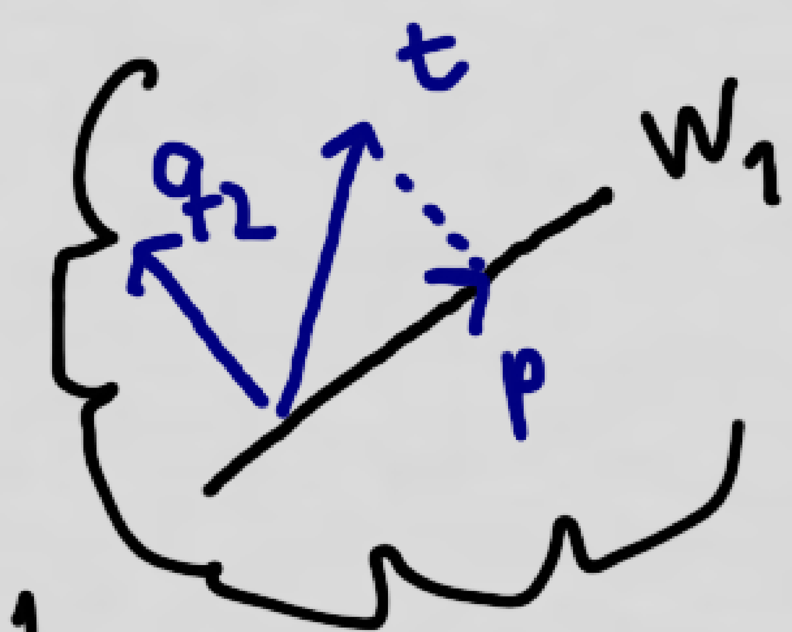
$\therefore \|1+t\| = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{3}}$

b) EN BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, t\}$. ORTOGONALISERA DENNA.

G-S:

$q_1(t) = 1$, $W_1 = \mathrm{Span}\{1\}$

$q_2(t) = t - \mathrm{Proj}_{W_1} t =$



$= t - \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 = t - \frac{1/3}{1/2}1$

$= t - \frac{2}{3}$

$\tilde{q}_2(t) = 3t-2$

$\therefore$ EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, 3t-2\}$

c) $\mathrm{Proj}_{\mathbb{P}_1} t^2 = \frac{\langle t^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 + \frac{\langle t^2, 3t-2\rangle}{\langle 3t-2, 3t-2\rangle}(3t-2)$

$= \frac{1/4}{1/2}\cdot 1 + \frac{1/10}{1/4}(3t-2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}(3t-2) = -\frac{3}{10} + \frac{6}{5}t$

$\langle t,1\rangle = \int_0^1 t\cdot t\cdot 1\,dt = \frac{1}{3}$

$\langle 1,1\rangle = \int_0^1 t\cdot 1\cdot 1\,dt = \frac{1}{2}$

$\langle t^2,1\rangle = \int_0^1 t\cdot t^2\cdot 1\,dt = \frac{1}{4}$

$\langle t^2, 3t-2\rangle = \int_0^1 t\cdot t^2(3t-2)\,dt$

$= \int_0^1 3t^4 - 2t^3\,dt = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$\langle 3t-2, 3t-2\rangle = \int_0^1 t(3t-2)^2\,dt =$

$= \int_0^1 9t^3 - 12t^2 + 4t\,dt =$

$= \frac{9}{4} - \frac{12}{3} + \frac{4}{2} = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$

5. $y''+4y'+4y=4xe^{2x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR.EKV.: $r^2+4r+4=0 \Leftrightarrow$

$r=-2\pm\sqrt{4-4}=-2$ MULT. 2

$\therefore\ y_h=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}$

PART.: ANSATS: $y_p=z(x)e^{2x}$

$y_p'=z'e^{2x}+2ze^{2x}$

$y_p''=z''e^{2x}+4z'e^{2x}+4ze^{2x}$

IN I EKV.:

$z''\cancel{e^{2x}}+4z'\cancel{e^{2x}}+4z\cancel{e^{2x}}+4(z'\cancel{e^{2x}}+2z\cancel{e^{2x}})+4z\cancel{e^{2x}}=4x\cancel{e^{2x}}$

$\Leftrightarrow z''+8z'+16z=4x$

ANSATS: $z=ax+b,\ z'=a,\ z''=0$ IN I EKV.:

$0+8a+16(ax+b)=4x$

IDENT.: x^1: $16a=4$; x^0: $8a+16b=0$ $\Big\}$ $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{8}$

$\therefore\ z=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$

$\therefore\ y_p=(\frac{1}{4}x-\frac{1}{8})e^{2x}$

$\therefore\ y=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+(\frac{1}{4}x-\frac{1}{8})e^{2x}$

6. a) $y = \cos 3x$, $y' = -3\sin 3x$, $y'' = -9\cos 3x$

$y''' = 27 \sin 3x$.

IN I EKV.:

$27\sin 3x + 4(-9\cos 3x) + 9(-3\sin 3x) + 36\cos 3x$

$= (27-27)\sin 3x + (-36+36)\cos 3x = 0$ OK

$\therefore$ $\cos 3x$ ÄR EN LÖSNING

b) ATT $\cos 3x$ ÄR EN LÖSNING BETYDER

$\pm 3i$ ÄR EN ROT TILL DEN KARAKTERISTISKA

EKVATIONEN: $r^3 + 4r^2 + 9r + 36 = 0$

DELA MED r^2+9 (FAKTORSATSEN VIA RÖTTERNA $\pm 3i$)

$$\begin{array}{r|l} & r+4 \\ \hline r^2+9 & r^3+4r^2+9r+36 \\ & r^3+9r \\ \hline & 4r^2+36 \\ & 4r^2+36 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore$ $r^3+4r^2+9r+36 = (r^2+9)(r+4) = 0$

$\Leftrightarrow r = \pm 3i; -4$

$\therefore$ $y_h = A\cos 3x + B\sin 3x + Ce^{-4x}$

PART.: ANSATS $y = a\cos x + b\sin x$

$y' = -a\sin x + b\cos x$, $y'' = -a\cos x - b\sin x$

$y''' = a\sin x - b\cos x$

IN I EKV.:

$a\sin x - b\cos x + 4(-a\cos x - b\sin x)$

$+ 9(-a\sin x + b\cos x) + 36(a\cos x + b\sin x)$

$= 8\sin x$

IDENT.:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x: -b - 4a + 9b + 36a = 0 \\ \sin x: a - 4b - 9a + 36b = 8 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 32a + 8b = 0 \\ -8a + 32b = 8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 0 \\ -a + 4b = 1 \end{array}\right\} \therefore \begin{array}{l} b = 4/17 \\ a = -1/17 \end{array}$$

$\therefore$ $y_p = -\frac{1}{17}\cos x + \frac{4}{17}\sin x$

ALLA LÖSNINGAR:

$y = A\cos 3x + B\sin 3x + Ce^{-4x}$

$-\frac{1}{17}\cos x + \frac{4}{17}\sin x$

7. a) DET BETYDER ATT

- $\mathcal{B}$ ÄR LINJÄRT OBEROENDE OCH
- $\mathcal{B}$ SPÄNNER UPP V, DVS $\operatorname{Span}\mathcal{B} = V$.

b) i. $\dim V = 3$ OCH $\mathcal{C}$ INNEHÅLLER 3 ELEMENT. ENLIGT BASSATSEN RÄCKER DET ATT VISA ATT $\mathcal{C}$ ÄR LINJÄRT OBEROENDE (SPÄNNER UPP FÅS PÅ KÖPET TY RÄTT ANTAL ELEMENT)

$$c_1(\bar v_1 - \bar v_2) + c_2(\bar v_1 + \bar v_2) + c_3(\bar v_1 - \bar v_3) = \bar 0 \iff$$

(VISA $c_1 = c_2 = c_3 = 0$)

$$(c_1 + c_2 + c_3)\bar v_1 + (-c_1 + c_2)\bar v_2 + (-c_3)\bar v_3 = \bar 0$$

MEN, $\{\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3\}$ ÄR LINJÄRT OBEROENDE SÅ

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_2 \quad &= 0 \\ -c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_3 = 0,\ c_2 = 0,\ c_1 = 0 \quad \therefore \text{L.O.}$$

$\therefore$ EN BAS

ii. $[\bar x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ BETYDER

DIREKT

$$\bar x = -\bar v_1 + 2\bar v_2 + \bar v_3 =$$

$$= c_1(\bar v_1 - \bar v_2) + c_2(\bar v_1 + \bar v_2) + c_3(\bar v_1 - \bar v_3)$$

$\iff$ (IDENT.)

$$\left.\begin{aligned} -1 &= c_1 + c_2 + c_3 \\ 2 &= -c_1 + c_2 \\ 1 &= -c_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & c_3 = -1 \\ & \left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \iff c_2 = 1,\ c_1 = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore [\bar x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ALT.:

BASBYTESMATRIS

BESTÄM $\underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P} = \left[[\bar v_1 - \bar v_2]_{\mathcal{B}}\ [\bar v_1 + \bar v_2]_{\mathcal{B}}\ [\bar v_1 - \bar v_3]_{\mathcal{B}} \right]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\bar x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\bar x]_{\mathcal{C}}$$

LÖS $[\bar x]_{\mathcal{C}}$ OM $[\bar x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad c_3 = -1,\ c_2 = 1,\ c_1 = -1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$