Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2021-08-23**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^5 + 32i = 0$. Ge svaret på polär form.

b) Bestäm de reella tal a så att $(2 + ai)^3$ blir rent imaginärt. (4 p)

2. Låt $M_{2\times 2}$ beteckna vektorrummet av samtliga 2×2 matriser.

a) Visa att

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

är en bas för $M_{2\times 2}$.

b) Bestäm koordinaterna för

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

relativt basen $\mathcal{B}$. (4 p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -1 \\ 8 & -8 & -1 \\ 8 & -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisera A, det vill säga finn matriser P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. (4 p)

4. Betrakta följande data

x	-1	0	1	2
y	2	1	-1	-2

. Bestäm den funktion på formen $y = Ax + Bx^2$ som bäst anpassar till datapunkterna i minstakvadratmetodens mening. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 2y = x \cos 2x$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till $y^{(4)} + 2y''' - 6y'' - 32y' - 160y = 3x$.
Ledning: $e^{-x} \sin(3x)$ är en homogenlösning. (4 p)

7. Låt x och y vara positiva tal sådana att $xy > 1$. Visa att

$$\arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y} = \arctan \frac{x + y}{xy - 1}.$$

Ledning: Tänk komplexa tal och argument. (4 p)

1.a) $z^5 + 32i = 0 \Leftrightarrow z^5 = -32i = 32e^{i3\pi/2}$

ANSÄTT: $z = re^{i\theta}$; D-M: $z^5 = r^5 e^{i5\theta}$

IN I EKV.: $r^5 e^{i5\theta} = 32e^{i3\pi/2}$

$$\begin{cases} r^5 = 32 \\ 5\theta = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases}$$

$r = 2$ & $\theta = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k$

$\therefore\ z_k = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k\right)}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) $(2+ai)^3 = 8 + 12ai - 6a^2 - ia^3$, och

DETTA ÄR RENT IMAGINÄRT DÅ REALDELEN

ÄR NOLL: $8 - 6a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow a = \pm 2/\sqrt{3}$

2\. a) VI VET ATT $\dim M_{2\times 2} = 4$

(TY $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ ÄR EN BAS)

SÅ ENLIGT SATS RÄCKER DET ATT VISA ATT B ÄR LINJÄRT OBEROENDE TY SPÄNNA UPP FÅS PÅ KÖPET.

VISA B LINJÄRT OBEROENDE:

$$c_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_2+c_3+c_4 & c_1+c_3+c_4 \\ c_1+c_2+c_4 & c_1+c_2+c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_2+c_3+c_4 = 0 \\ c_1+c_3+c_4 = 0 \\ c_1+c_2+c_4 = 0 \\ c_1+c_2+c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

ENDAST TRIVIAL LÖSNING.

$\therefore$ L.O. DVS EN BAS. //

b) BESTÄM c_1, c_2, c_3, c_4 SÅ ATT

$$c_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ (SOM NYSS)

$$\begin{cases} c_2+c_3+c_4 = 1 \\ c_1+c_3+c_4 = 2 \\ c_1+c_2+c_4 = 3 \\ c_1+c_2+c_3 = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right] \therefore \begin{array}{l} c_4 = -2/3 \\ c_3 = -(-1+\frac{2}{3}) = 1/3 \\ c_2 = -(-2+\frac{2}{3}) = 4/3 \\ c_1 = 4 - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 7/3 \end{array}$$

$$\therefore \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} //$$

KONTROLL: $\frac{7}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -10 & -1 \\ 8 & -8-\lambda & -1 \\ 8 & -10 & 1-\lambda \end{vmatrix} \; (-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -10 & -1 \\ -2+\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 8 & -10 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & -10 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & -10 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)\Big(-(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} -10 & -1 \\ -10 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{\substack{=-10+10\lambda-10 \\ =10\lambda-20}} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 10-\lambda & -1 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{\substack{=(10-\lambda)(1-\lambda)+8 \\ =\lambda^2-11\lambda+18}}\Big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0.$$

KVAR ATT LÖSA: $\lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2; -1$$

$\therefore$ EGENVÄRDENA ÄR: -1; 2 MULT. 2

⌜KOLL: $-1+2+2=3$

$\operatorname{tr} A = 10-8+1=3$ OK ⌟

EGENVEKTORER

$\lambda=2$: $A\bar{v}=2\bar{v} \Leftrightarrow (A-2I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -10 & -1 & 0 \\ 8 & -10 & -1 & 0 \\ 8 & -10 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN, x_2, x_3 FR

$x_2=s$, $x_3=t$

$x_1 = \frac{10}{8}s + \frac{1}{8}t$

$$\therefore \bar{v} = s\begin{bmatrix} 10/8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{VÄLJ } \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\lambda=-1$: $A\bar{v}=-1\bar{v} \Leftrightarrow (A+I)\bar{v}=\bar{0}$

$$8\left[\begin{array}{ccc|c} 11 & -10 & -1 & 0 \\ 8 & -7 & -1 & 0 \\ 8 & -10 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & -1 & 0 \\ 8 & -10 & 2 & 0 \\ 88 & -80 & -8 & 0 \end{array}\right] (-1)\,(-11) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1, x_2 BUNDNA $x_3=t$

$x_2=t$, $x_1=t$

$$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{VÄLJ } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = PDP^{-1} \quad \text{DÄR } P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

KONTROLL: $AP = \ldots$ ← LIKA

$PD = \ldots$ ←

4. SÄTT IN DATAPUNKTERNA I MODELLFUNKTIONEN OCH MAN FÅR:

$$\begin{cases} 2 = -A + B \\ 1 = 0 \\ -1 = A + B \\ -2 = 2A + 4B \end{cases} \leftarrow \text{INKONSISTENT}$$

PÅ MATRISFORM

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

MOTSVARANDE NORMALEKVATION:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & -7 \\ 8 & 18 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 24 & 32 & -28 \\ 24 & 54 & -21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & -7 \\ 0 & 22 & 7 \end{array}\right]$$

$$B = \frac{7}{22}, \quad A = \frac{1}{6}\left(-7 - 8 \cdot \frac{7}{22}\right) = \frac{1}{6}\left(-7 - \frac{28}{11}\right)$$

$$= \frac{-1}{6} \cdot \frac{77+28}{11} = -\frac{105}{66} = -\frac{35}{22}$$

$$\therefore \; y = -\frac{35}{22}x + \frac{7}{22}x^2 \; //$$

5. $y'' + 2y = x\cos 2x$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM. KAR. EKV.: $r^2+2=0 \iff r=\pm i\sqrt{2}$

$\therefore y_h = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$

PART. KOMPLEX HJÄLPEKVATION:

$$u'' + 2u = xe^{i2x}$$

ANSATS $u_p = z(x)e^{i2x}$; $y_p = \operatorname{Re} u_p$

$u_p' = z'e^{i2x} + z2ie^{i2x}$

$u_p'' = z''e^{i2x} + 4iz'e^{i2x} - 4ze^{i2x}$

IN I EKV.:

$z''\cancel{e^{i2x}} + 4iz'\cancel{e^{i2x}} - 4z\cancel{e^{i2x}} + 2z\cancel{e^{i2x}} = x\cancel{e^{i2x}} \iff$

$z'' + 4iz' - 2z = x$

ANSATS: $z = ax+b,\ z'=a,\ z''=0$ IN I EKV.:

$0 + 4ia - 2(ax+b) = x$

IDENT.: $\left.\begin{array}{l} x^1:\ -2a = 1 \\ x^0:\ 4ia - 2b = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = 2ia = -i \end{array}$

$\therefore z(x) = -\frac{1}{2}x - i$

$\therefore u_p = (-\frac{1}{2}x - i)e^{i2x} = (-\frac{1}{2}x - i)(\cos 2x + i\sin 2x)$

$\therefore y_p = \operatorname{Re} u_p = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \sin 2x$

$\therefore y = y_h + y_p =$

$= A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}x\cos 2x + \sin 2x$

6. $y^{(4)} + 2y''' - 6y'' - 32y' - 160y = 3x$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM. KAR. EKV.: $r^4 + 2r^3 - 6r^2 - 32r - 160 = 0$

ATT $e^{-x}\sin 3x$ HOMOGENLÖSNING GER $-1+3i$ EN ROT. MEN REELLA KOEFF. SÅ $-1-3i$ OCKSÅ EN ROT. DELA MED $(r+1-3i)(r+1+3i) = r^2+2r+10$.

$$\begin{array}{r|l} & r^2 - 16 \\ \hline r^2+2r+10 & r^4 + 2r^3 - 6r^2 - 32r - 160 \\ & r^4 + 2r^3 + 10r^2 \\ \hline & -16r^2 - 32r - 160 \\ & -16r^2 - 32r - 160 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore$ KAR. EKV.: $r^4 + 2r^3 - 6r^2 - 32r - 160 = (r^2+2r+10)(r^2-16) = 0$

OCH RÖTTERNA ÄR: $-1 \pm 3i$ & ± 4.

DE HOMOGENA LÖSNINGARNA ÄR SÅLEDES:

$$y_h = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + Ce^{4x} + De^{-4x}$$

PART. ANSATS: $y_p = ax + b$, $y_p' = a$, $y_p'' = 0$

IN I EKV.:

$$0 + 0 + 0 - 32a - 160(ax+b) = 3x$$

IDENT.:

$$\left.\begin{array}{l} x^1: -160a = 3 \\ x^0: -32a - 160b = 0 \end{array}\right\}$$

$$a = -\frac{3}{160} \;;\; b = -\frac{96}{160^2} = -\frac{24}{80^2} = \frac{-6}{40^2} = \frac{-3}{800}$$

$$\therefore\; y_p = -\frac{3}{160}x - \frac{3}{800}$$

$\therefore$ $y = y_h + y_p =$

$$= e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + Ce^{4x} + De^{-4x} - \frac{3}{160}x - \frac{3}{800}$$

7. x, y POSITIVA GER ATT ETT ARGUMENT FÖR $x+i$ OCH $y+i$ ÄR $\arctan \frac{1}{x}$ RESP. $\arctan \frac{1}{y}$.

DESSUTOM VET VI ATT ARGUMENTET AV EN PRODUKT ÄR SUMMAN AV ARGUMENTEN.

$(x+i)(y+i) = xy - 1 + i(x+y)$ OCH

DÄRFÖR. $(xy>1)$

ARG. BESTÄMT SÅ NÄR SOM EN MULTIPEL AV 2π.

$$\arctan \frac{x+y}{xy-1} = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y} + 2\pi k$$

EFTERSOM VÄNSTERLEDET ÄR ETT TAL MELLAN 0 OCH $\pi/2$ OCH $\arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y}$ ÄR MELLAN 0 OCH π MÅSTE $k=0$ OCH DÄRFÖR:

$$\arctan \frac{x+y}{xy-1} = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y} \quad //$$