Omtentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-08-19**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt

$$f(x) = \ln(1+x).$$

(a) Finn Taylorutvecklingen (inklusive felterm) av ordning 4 kring punkten $x = 0$ av $f(x)$. (2p)

Lösning: Vi utvecklar $\ln(1+x)$ av ordning 4 kring $x = 0$. Om

$$f(x) = \ln(1+x)$$

får vi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\
f''(x) &= -(1+x)^{-2} = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \\
f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} = \frac{2!\,(-1)^2}{(1+x)^3}, \\
f^{(4)}(x) &= -6(1+x)^{-4} = \frac{3!\,(-1)^3}{(1+x)^4}, \\
f^{(5)}(x) &= 24(1+x)^{-5} = \frac{4!\,(-1)^4}{(1+x)^5} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}, \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned}
f(0) &= \ln 1 = 0, \\
f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1, \\
f''(0) &= \frac{(-1)}{(1+0)^2} = -1, \\
f^{(3)}(0) &= \frac{2!\,(-1)^2}{(1+0)^3} = 2, \\
f^{(4)}(x) &= \frac{3!\,(-1)^3}{(1+0)^4} = -6.
\end{aligned}$$

Därmed kan vi skriva funktionen $f(x)$ som

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + E_4(x) = P_4(x) + E_4(x),$$

där

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}, \\
E_4(x) &= \frac{f^{(5)}(s)}{5!}x^5 = \frac{1}{5}\frac{x^5}{(1+s)^5}
\end{aligned}$$

för något s mellan 0 och x.

(b) Använd taylorpolynomet P_4 för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$. Ge en uppskattning av felet som görs med denna approximation. (2p)

Lösning: Taylorpolynomet ovan ger

$$\ln 2 = f(1) \approx P_4(1) = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Här är felet som görs

$$E_4(1) = \frac{1}{5}\frac{1^5}{(1+s)^5}$$

för något s mellan 0 och 1. Därmed är det maximala absoluta felet

$$|E_4(1)| = \frac{1}{5}\frac{1}{(1+s)^5} < \frac{1}{5}$$

eftersom funktionen $g(s) = 1/(1+s)^5$, $0 < s < 1$, är avtagande. Eftersom $0 < \frac{1}{160} < E_4(1) < \frac{1}{5}$ kan vi därför skriva

$$\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}.$$

(c) Vilken är den lägsta ordning n av Taylorpolynom kring $x = 0$ av $f(x)$ som krävs för att man ska kunna garantera att absoluta felet vid approximation av $\ln 2$ är mindre än $1/100$? Motivera! (1p)

Lösning: Felet som görs med ett Taylorpolynom av ordning n är

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \cdot 1^n = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!\,(-1)^n}{(1+s)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{(-1)^n}{(1+s)^{n+1}}$$

för något s mellan 0 och 1. Därmed kan vi vara säkra på att det absoluta felet är

$$|E_n(1)| < \frac{1}{n+1}.$$

Om man vill garantera att det absoluta felet ska vara mindre än $1/100$ måste därför $n \geq 99$.

2. Avgör huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x+5}.$$

(1p)

Lösning: Logaritmregler ger att

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x+5} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}\left(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}}\right)\right)}{3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^{2x} + \ln\left(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}}\right)}{3x+5} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \ln\left(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}}\right)}{3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}}\right)}{3 + \frac{5}{x}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arctan(1+h) - \frac{\pi}{4}}{h}.$$

Ledning: Derivata av arctan. (2p)

Lösning: Notera att $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ och derivatan av $\arctan x$ är

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arctan(x+h) - \arctan x}{h} = \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Därmed blir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arctan(1+h) - \frac{\pi}{4}}{h} = \frac{d}{dx}(\arctan x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}.$$

(2p)

Lösning: Faktorisering av täljare och nämnare ger

$$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}$$

förutsatt att $x \neq 2$. Därmed får vi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2+} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} &= \lim_{x\to 2+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty, \\ \lim_{x\to 2-} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} &= \lim_{x\to 2-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty. \end{aligned}$$

Gränsvärdet existerar därför ej.

3. Man kan med viss möda visa att funktionen

$$f(t) = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

är strängt växande och därmed $1-1$ på intervallet $(0, 2\pi)$. Därmed har den invers f^{-1}.

(a) Bestäm inversens definitionsmängd. Motivera! (2p)

Lösning: Det är givet att $f(t)$ är strängt växande på $(0, 2\pi)$. Därmed är (den kontinuerliga) funktionens värdemängd

$$R = \left(\lim_{t\to 0+} f(t), \lim_{t\to 2\pi-} f(t)\right) = (0, \infty)$$

ty

$$\lim_{t\to 2\pi-} \frac{t-\sin t}{1-\cos t} = +\infty$$

då $1-\cos t>0$, $t>\sin t$ för $0<t<2\pi$ och det nedre gränsvärdet inses till exempel med hjälp av taylorutveckling

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{t-\sin t}{1-\cos t} &= \lim_{t\to 0+}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+t^4\cdot B_1(t)\right)}{1-\left(1-\frac{t^2}{2!}+t^3\cdot B_2(t)\right)} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{t^3}{3!}-t^4\cdot B_1(t)}{\frac{t^2}{2!}-t^3\cdot B_2(t)}\\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{t}{3!}-t^2\cdot B_1(t)}{\frac{1}{2!}-t\cdot B_2(t)} = \frac{0+0}{\frac{1}{2}+0} = 0.\end{aligned}$$

(b) Beräkna $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (3p)

Vi söker derivatan y' till $y=f^{-1}(t)$ i punkten $t=\frac{\pi}{2}$. För att finna $f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ måste vi lösa

$$y=f^{-1}(t)\Leftrightarrow f(y)=t=\frac{\pi}{2}.$$

Vi observerar att

$$f(\pi)=\frac{\pi-\sin\pi}{1-\cos\pi}=\frac{\pi-0}{1-(-1)}=\frac{\pi}{2}.$$

Kan det finnas fler lösningar? Nej, vi vet ju att funktionen f är injektiv, dvs att ett t-värde motsvaras av exakt ett y-värde. Alltså är $y=\pi$ den enda lösningen, det vill säga

$$f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

För att finna y' deriverar vi $t=f(y)$ implicit med avseende på t och får

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(f(y)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y-\sin y}{1-\cos y}\right)\\ &\Updownarrow\\ 1 &= f'(y)\,y' = \frac{(1-\cos y)^2-(y-\sin y)\sin y}{(1-\cos y)^2}y'\\ &\Updownarrow\\ y' &= \frac{1}{f'(y)} = \frac{(1-\cos y)^2}{(1-\cos y)^2-(y-\sin y)\sin y}.\end{aligned}$$

Vi får därför

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(f^{-1}\right)'(t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=y'|_{y=\pi}=\frac{(1-\cos\pi)^2}{(1-\cos\pi)^2-(\pi-\sin\pi)\sin\pi}=\frac{4}{4}=1.$$

Observera att vi här sätter in $y=\pi$ för att evaluera $\left(f^{-1}\right)'(t)$ i $t=\frac{\pi}{2}$.

4. Visa att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin(x))=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

för varje heltal $n=1,2,3,\ldots$. (5p)

Bevis: Kom ihåg att

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{2} &= 1,\\ \cos\frac{\pi}{2} &= 0.\end{aligned}$$

Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x = \sin x\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\frac{d^p}{dx^p}(\sin(x)) = \sin\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) \quad (\text{induktionsantagande}).$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\sin(x)) = \sin\left(x + \frac{(p+1)\pi}{2}\right).$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\sin(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p}{dx^p}(\sin(x))\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \frac{d}{dx}\left(\sin\left(x + \frac{p\pi}{2}\right)\right)\\ &= \cos\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{p\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(x + \frac{p\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(p+1)\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

5. Bestäm nollställen, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (5p)

Lösning: Vi kan skriva

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x - 2}.$$

Därmed ser vi att grafen skär x-axeln i $x = 1$ och $x = -2$ samt y-axeln i $y = 1$ eftersom

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 - 2}{0 - 2} = 1.$$

Vi observerar sedan att den rationella funktionen har ett steg högre gradtal i täljaren än i nämnaren. Därmed kan vi finna en kvot och en rest med divisionsalgoritmen. Vi ser att

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \frac{(x^2 - 2x) + (3x - 6) + 4}{x - 2} =\\ &= \frac{x(x-2) + 3(x-2) + 4}{x - 2} = \overbrace{x + 3}^{\text{kvot}} + \frac{\overbrace{4}^{\text{rest}}}{x - 2}.\end{aligned}$$

Funktionen kan alltså beskrivas som en sned linje $y = x + 3$ plus en funktion

$$g(x) = \frac{4}{x-2}$$

som går mot noll när x går mot $\pm\infty$ eftersom

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

Alltså har funktionen en dubbelsidig sned asymptot $y = x + 3$, så $f(x) \to \infty$ när $x \to \infty$ och $f(x) \to -\infty$ när $x \to -\infty$. Därmed saknas globala extremvärden, ej heller kan någon horisontell asymptot finnas.

Vi har även en vertikal asymptot i $x = 2$ eftersom

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\to 1}\overbrace{(x+2)}^{\to 4}}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} = -\infty \\
\lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\to 1}\overbrace{(x+2)}^{\to 4}}{\underbrace{x-2}_{\to 0+}} = +\infty
\end{aligned}$$

Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x-2}{x-2}\right) = \frac{(2x+1)(x-2) - 1\left(x^2+x-2\right)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}, \\
y'' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - \left(x^2-4x\right)\cdot 2(x-2)}{\left((x-2)^2\right)^2} = \\
&= \frac{(2x-4)(x-2) - 2\left(x^2-4x\right)}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.
\end{aligned}$$

Alltså har vi två kritiska punkter $x = 0$ och $x = 4$ när $y' = 0$ och inga möjliga inflexionspunkter. Teckenstudium ger

		0		2		4	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
y'	$+$	0	$-$	odef.	$-$		$+$
y	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	asy.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

		2	
$(x-2)^3$	$-$		$+$
y''	$-$	odef.	$+$
y	$\frown$	asy.	$\smile$

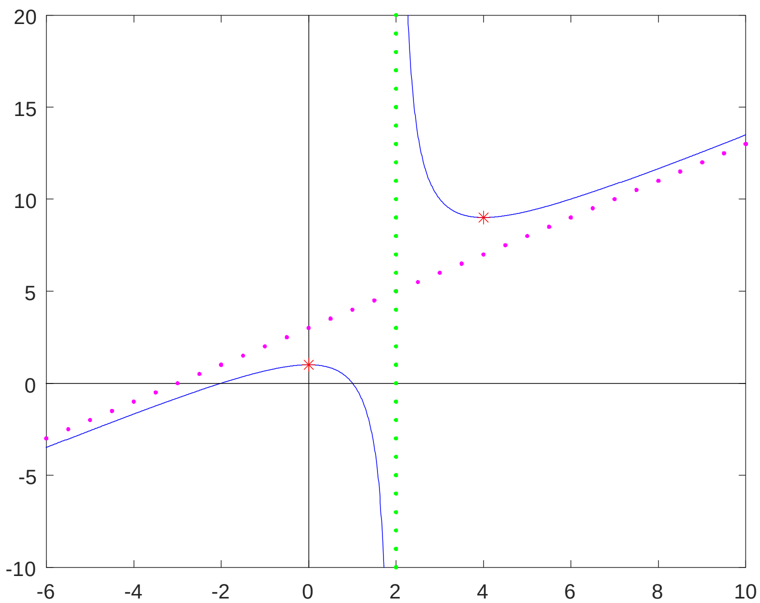
Funktionen har då ett lokalt maximum i $x = 0$ som är

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 - 2}{0 - 2} = 1$$

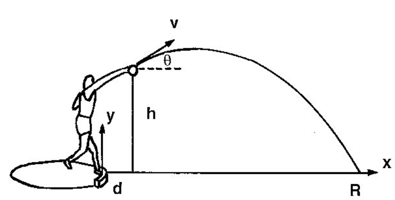
samt ett lokalt minimum i $x = 4$ som är

$$f(4) = \frac{4^2 + 4 - 2}{4 - 2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Funktionen är växande på intervallen $(-\infty, 0]$ och $[4, \infty)$ samt avtagande på intervallen $[0, 2)$ och $(2, 4]$. Funktionen är konvex på intervallet $(2, \infty)$ och konkav på intervallet$(-\infty, 2)$. Vi kan nu skissera grafen som



6. Det resultat som en kulstötare uppnår beror bland annat på elevationsvinkeln θ och höjden h kulan lämnar handen.



Kastparabelns ekvation är

$$y = h + x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

där v är utgångsfarten och g tyngdaccelerationen. *Ledning:* Kulan träffar marken i punkten $(x, y) = (R, 0)$.

(a) Bilda kastvidden R som implicit funktion av $z = \tan\theta$. Bestäm $\frac{dR}{dz}$ genom implicit derivering. (2p)

(b) Hur långt kan han maximalt stöta? (2p)

(c) Hur ska θ väljas för att han ska stöta så långt som möjligt? (1p)

Lösning: Med $z = \tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, kan vi skriva

$$y = h + xz - \frac{gx^2}{2v^2}\left(1 + z^2\right)$$

som i punkten $(x, y) = (R, 0)$ då beskriver kastvidden $R = R(z)$ implicit genom ekvationen

$$-h = Rz - \frac{gR^2}{2v^2}\left(1 + z^2\right).$$

(a) Implicit derivering med avseende på z (kom ihåg $R = R(z)$) ger då

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(-h) &= \frac{d}{dz}\left(Rz - \frac{gR^2}{2v^2}\left(1+z^2\right)\right) \\
&\Updownarrow \\
0 &= R'z + R \cdot 1 - \frac{g}{2v^2}\left(2RR'\left(1+z^2\right) + R^2 \cdot 2z\right) \\
&\Updownarrow \\
R - \frac{gR^2 z}{v^2} &= R'(z)\left(\frac{gR}{v^2}\left(1+z^2\right) - z\right).
\end{aligned}$$

Därmed är

$$\frac{dR}{dz} = R'(z) = \frac{R - \frac{gR^2 z}{v^2}}{\frac{gR}{v^2}\left(1+z^2\right) - z}.$$

(b) Eftersom vi är ute efter den vinkel som ger maximal kastvidd vill vi att $R'(z) = 0$, ty maximum måste ligga i en kritisk punkt i intervallets inre då kastvidden går mot noll när θ går mot ändpunkterna i intervallet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Insatt får vi då

$$0 = R - \frac{gR^2 z}{v^2} \Longleftrightarrow z = \frac{v^2}{gR}.$$

Sätter vi tillbaka detta värde på z i uttrycket för kastvidden får vi då

$$\begin{aligned}
-h &= R\frac{v^2}{gR} - \frac{gR^2}{2v^2}\left(1 + \left(\frac{v^2}{gR}\right)^2\right) = \frac{v^2}{g} - \frac{gR^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2g} \\
&\Updownarrow \\
\frac{gR^2}{2v^2} &= h + \frac{v^2}{2g} = \frac{2gh + v^2}{2g} \\
&\Updownarrow \\
R^2 &= \frac{v^2}{g^2}\left(2gh + v^2\right).
\end{aligned}$$

Därmed blir maximal kastvidd

$$R_{\max} = \frac{v\sqrt{v^2 + 2gh}}{g}.$$

(c) Maximal kastvidd uppnås för vinkeln

$$\theta = \arctan z = \arctan \frac{v^2}{gR_{\mathrm{max}}} = \arctan \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}.$$

Anmärkning 1: Eftersom

$$\frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}} < 1$$

är den optimala vinkeln (något) mindre än 45°.

Anmärkning 2: Sambandet för kastparabeln fås ur rörelseekvationerna

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos\theta \cdot t \\ y(t) &= h + v\sin\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Med

$$t = \frac{x}{v\cos\theta}$$

blir då

$$y = h + x\frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} - \frac{gx^2}{2v^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = h + x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}\left(1 + \tan^2\theta\right).$$