Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2021-10-26**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Polynomet $P(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 65$ har nollstället $z = -1 - 2i$. Bestäm samtliga nollställen för $P(z)$.

b) Skriv

$$\frac{i(1 - i\sqrt{3})^4}{(-1 + i)^3}$$

på polär form. (4 p)

2. Låt $M_{2\times 2}$ beteckna vektorrummet av samtliga 2×2 matriser och bilda

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} : a + d = b + c \right\}.$$

a) Visa att H är ett underrum till $M_{2\times 2}$.

b) Bestäm en bas för H (var noggrann med motiveringarna till varför det är en bas). (4 p)

3. Låt $\mathcal{B} = \{1+t+t^2, t^2, 1-t\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3\}$ vara baser för $\mathbb{P}_2$ respektive $\mathbb{P}_3$ och T den linjära operatorn från $\mathbb{P}_2$ till $\mathbb{P}_3$ definierad enligt

$$T(p) = t^2 p'(t) - p''(t) + tp(0).$$

Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Finn en ortogonal bas för $H = \text{span}\{1 + t, t^2\}$.

b) Bestäm $\text{proj}_H t$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 2y' - 8y = 4(x + 2)e^{-2x}$. (4 p)

6. Beroende på vilken kurs du tenterar ska du göra EN av a)- och b)-uppgiften nedan.

a) [Endast för dig som tenterar M0049M] Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = 7x - 8y \\ y' = 4x - 5y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $y(0) = 0$. (4 p)

b) [Endast för dig som tenterar M0031M] Betrakta differentialekvationen

$$\begin{cases} yy' = y^2x - x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Lös ekvationen ovan genom att först transformera den, med variabelbytet $z = y^2$, till en linjär differentialekvationen i z och därefter lösa denna. (4 p)

7. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0.$$

Ledning: Gör ett variabelbyte på formen $y(x) = u(x)p(x)$ där $u(x)$ är den nya beroende variabeln (det ska då ses som en differentialekvation i u). Välj $p(x)$ så att $u'(x)$ försvinner ur ekvationen. Lös sedan ekvationen för u och transformera därefter tillbaka. (4 p)

1 a) $P(z)$ REELLT SÅ KONJUGATET TILL NOLLSTÄLLEN ÄR OCKSÅ NOLLSTÄLLE ENLIGT SATS.

$\therefore$ $-1-2i$ & $-1+2i$ NOLLSTÄLLEN. VIA FAKTORSATSEN ÄR DÄRFÖR $P(z)$ DELBART MED:

$$(z-(-1-2i))(z-(-1+2i)) = z^2+2z+5$$

$\left[\; z^2+2z+5=0 \iff z=-1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i \text{ ok} \;\right]$

DIVIDERA:

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2-6z+13 \\
\hline
z^2+2z+5 & z^4-4z^3+6z^2-4z+65 \\
 & z^4+2z^3+5z^2 \\
\hline
 & -6z^3+z^2-4z+65 \\
 & -6z^3-12z^2-30z \\
\hline
 & 13z^2+26z+65 \\
 & 13z^2+26z+65 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

SÅ VISSTE VI ATT DET SKULLE BLI.

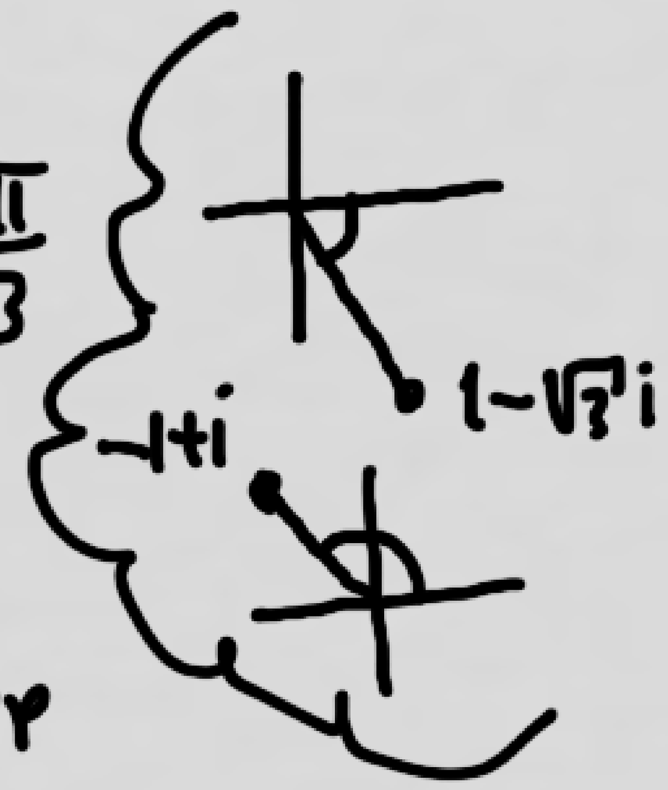
$\therefore$ $P(z) = (z^2+2z+5)(z^2-6z+13)$. ÖVRIGA NOLLSTÄLLEN ÄR NOLLSTÄLLEN FÖR $z^2-6z+13$.

$$z^2-6z+13=0 \iff z=3\pm\sqrt{9-13} = 3\pm 2i.$$

NOLLSTÄLLENA ÄR: $-1\pm 2i$; $3\pm 2i$.

b) VI BEHÖVER BELOPP OCH ARGUMENT.

- $|i|=1$, $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$
- $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg(1-\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3}$
- $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$



ENLIGT RÄKNELAGAR FÖR BELOPP OCH ARGUMENT FÅS:

$$|z| = \frac{1\cdot 2^4}{2^{3/2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
\arg(z) &= \arg(i)+4\arg(1-\sqrt{3}i)-3\arg(-1+i) \\
&= \frac{\pi}{2}+4\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)-3\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{12}(6-16-27) \\
&= \frac{-37\pi}{12} = -4\pi+\frac{11\pi}{12}
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$z = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

2. $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+d = b+c \right\}$

a) BEHÖVER VERIFIERA TRE SAKER:

- $\bar{0} \in H$: $\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ OK
- $A, B \in H \Rightarrow A+B \in H$: ANTAG $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a+d=b+c$ OCH $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, $a'+d'=b'+c'$. VI FÅR

$$A+B = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$$ OCH DET GÄLLER

$$a+a'+d+d' = \underbrace{a+d}_{\substack{=b+c \\ \text{TY } A\in H}} + \underbrace{a'+d'}_{\substack{=b'+c' \\ \text{TY } B\in H}} = b+c+b'+c' \quad \text{OK}$$

- $A \in H \Rightarrow \alpha A \in H$: ANTAG $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a+d=b+c$

VI FÅR $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$ OCH DET GÄLLER

$$\alpha a + \alpha d = \alpha(\underbrace{a+d}_{\substack{=b+c \\ \text{TY } A\in H}}) = \alpha(b+c) = \alpha b + \alpha c \quad \text{OK}$$

∴ H ÄR ETT UNDERRUM TILL $M_{2\times 2}$

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H \Leftrightarrow a+d = b+c \Leftrightarrow a-b-c+d=0$

LÖS SYSTEMET (4 OBEKANTA 1 EKVATION)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

a BUNDEN, b, c, d FRIA

$b=s$, $c=t$, $d=u$ GER

$a = s+t-u$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+t-u & s \\ t & u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ SPÄNNER UPP H.

MÄNGDEN ÄR OCKSÅ LINJÄRT OBEROENDE TY:

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \therefore \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

∴ EN BAS FÖR H GES AV

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. ENLIGT TEORIN SÖS MATRISEN AV

$$M = \Big[\, [T(1+t+t^2)]_C \; [T(t^2)]_C \; [T(1-t)]_C \,\Big].$$

APPLICERA T, $T(p) = t^2 p'(t) - p''(t) + t\,p(0)$

PÅ B:S BASELEMENT OCH BESTÄM KOORDINATERNA I C.

$$T(1+t+t^2) = t^2(1+2t) - 2 + t\cdot 1 = -2 + t + t^2 + 2t^3 \quad \therefore [T(1+t+t^2)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(t^2) = t^2\cdot 2t - 2 + t\cdot 0 = -2 + 2t^3 \quad \therefore [T(t^2)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(1-t) = t^2(-1) - 0 + t\cdot 1 = t - t^2 \quad \therefore [T(1-t)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

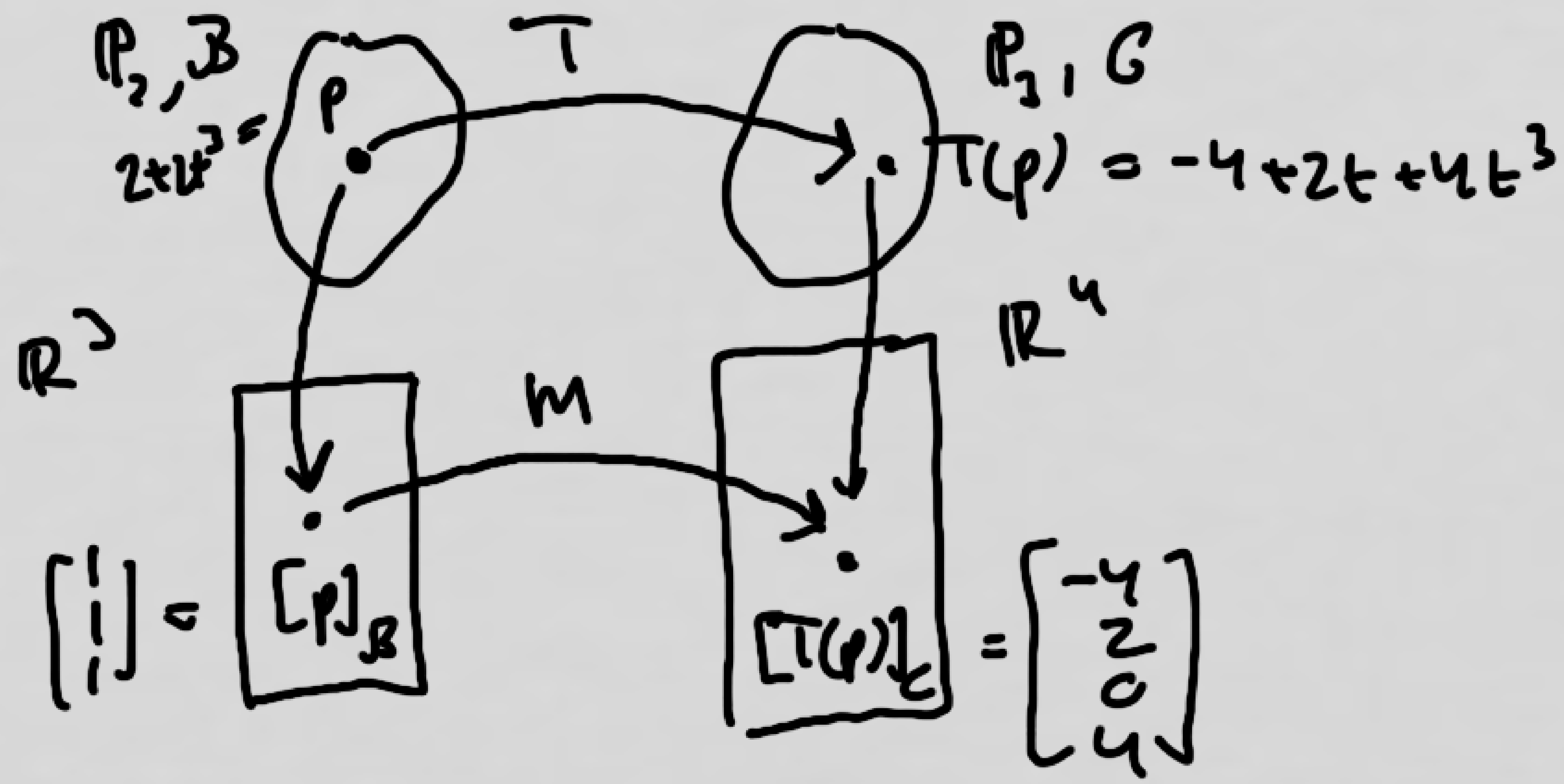
$$\therefore M = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

TEST: (BEHÖVS EJ)

VÄLJ $p(t) = 2 + 2t^2$; $[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (SOM DIREKT)

$$T(p) = t^2\cdot 4t - 4 + 2t = -4 + 2t + 4t^3;$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = [T(p)]_C$$

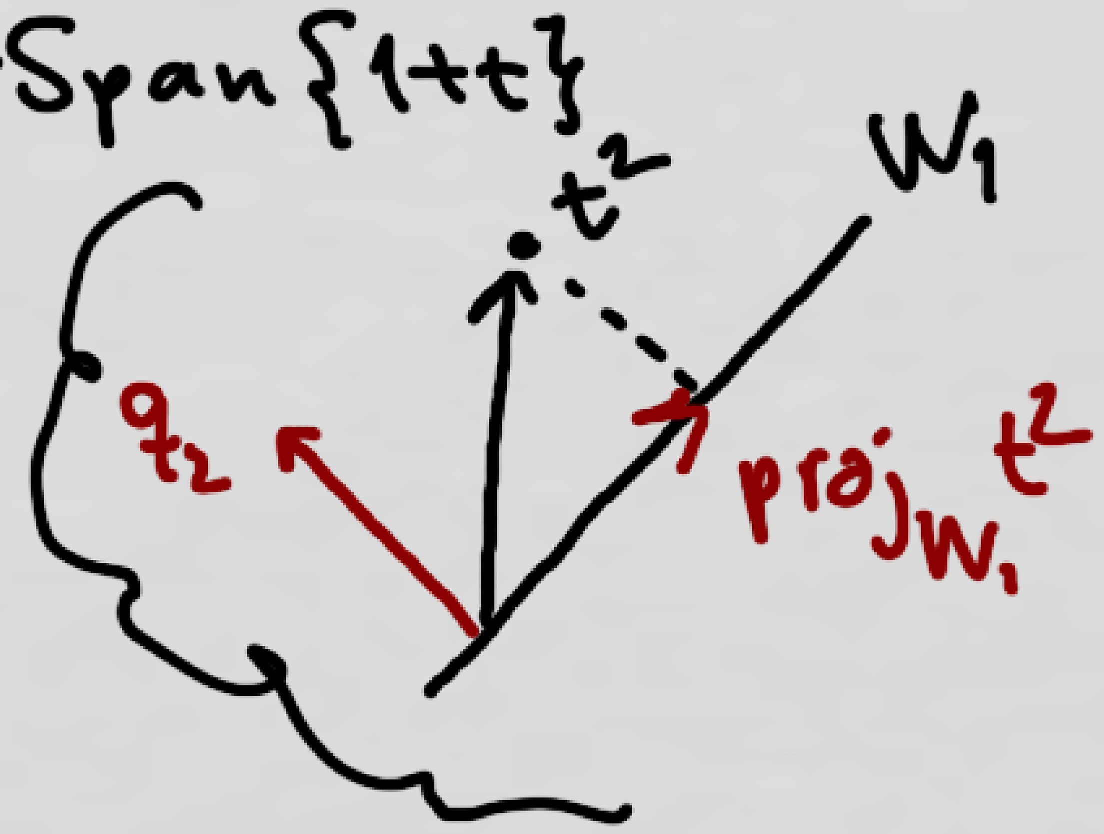


4. $\mathbb{P}_2$, $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2)$

a) G-S:

1°: VÄLJ $q_1(t) = 1+t$, $W_1 = \text{Span}\{1+t\}$

2°: $q_2(t) = t^2 - \text{proj}_{W_1} t^2 =$



$$= t^2 - \frac{\langle t^2, 1+t\rangle}{\langle 1+t, 1+t\rangle}(1+t)$$

$$= t^2 - \frac{16}{18}(1+t) = t^2 - \frac{8}{9}(1+t)$$

2': VÄLJ $q_2'(t) = 9t^2 - 8t - 8$ (NORMERING)

$\therefore$ EN ORTOGONALBAS FÖR H ÄR $\{1+t, 9t^2-8t-8\}$

b) $$\text{proj}_H t = \frac{\langle t, 1+t\rangle}{\langle 1+t, 1+t\rangle}(1+t) + \frac{\langle t, 9t^2-8t-8\rangle}{\langle 9t^2-8t-8, 9t^2-8t-8\rangle}(9t^2-8t-8)$$

$$= \frac{10}{18}(1+t) + \frac{10}{306}(9t^2-8t-8) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9}t + \frac{5\cdot\cancel{9}}{\underset{17}{\cancel{153}}}t^2 - \frac{5\cdot 8}{153} - \frac{5\cdot 8}{153} =$$

$$= \frac{5}{17}t^2 + \left(\frac{5}{9} - \frac{40}{153}\right)t + \frac{5}{9} - \frac{40}{153} = \frac{5}{17}(t^2+t+1) \quad //$$

$$\frac{5}{9} - \frac{40}{153} = \frac{17\cdot 5 - 40}{153} = \frac{45}{153} = \frac{5}{17}$$

SKALÄRPRODUKTER

$\langle t^2, 1+t\rangle = 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot 3 = 16$

$\langle 1+t, 1+t\rangle = 1^2 + 2\cdot 2^2 + 3^2 = 18$

$\langle t, 1+t\rangle = 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 10$

$\langle t, 9t^2-8t-8\rangle = 0\cdot(-8) + 2\cdot 1\cdot(-7) + 2\cdot 12$
$= 10$

$\langle 9t^2-8t-8, 9t^2-8t-8\rangle =$
$= (-8)^2 + 2(-7)^2 + 12^2 =$
$= 64 + 98 + 144 = 306$

5. $y'' + 2y' - 8y = 4(x+2)e^{-2x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR.EKV.: $r^2 + 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$r = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 = -4; 2$

$\therefore y_h = Ae^{-4x} + Be^{2x}$

PART.: ANSATS $y_p = z(x)e^{-2x}$

$y_p' = z'e^{-2x} - 2ze^{-2x}$

$y_p'' = z''e^{-2x} - 4z'e^{-2x} + 4ze^{-2x}$

IN I EKV.:

$z''e^{-2x} - 4z'e^{-2x} + 4ze^{-2x} + 2(z'e^{-2x} - 2ze^{-2x}) -$

$- 8ze^{-2x} = 4(x+2)e^{-2x} \Leftrightarrow$

$z'' - 2z' - 8z = 4x + 8$

ANSATS: $z = ax + b$; $z' = a$, $z'' = 0$ IN I EKV.:

$0 - 2a - 8(ax+b) = 4x + 8$

$$\left.\begin{aligned} x^1&: -8a = 4 \\ x^0&: -2a - 8b = 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= -\tfrac{1}{2} \\ b &= -\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

$\therefore y_p = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{7}{8}\right)e^{-2x}$

$\therefore$ DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN ÄR

$$y = Ae^{-4x} + Be^{2x} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{8}\right)e^{-2x}$$

6. (M0049M)

SKRIV OM PÅ VEKTORFORM.

$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ OCH MAN FÅR

$$\bar{x}' = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LÅT $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ OCH BESTÄM

EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

EGENVÄRDEN: KAR.EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & -8 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (7-\lambda)(-5-\lambda) + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow -35 - 2\lambda + \lambda^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = \underline{-1; 3}$$

[KOLL: $-1+3=\underline{2}$, $\operatorname{tr}A = 7-5 = \underline{2}$
$(-1)3 = \underline{-3}$, $\det A = -35+32 = \underline{-3}$
OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = -1$: $A\bar{v} = -1\bar{v} \Leftrightarrow (A+I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI

$\lambda = 3$: $A\bar{v} = 3\bar{v} \Leftrightarrow (A - 3I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI

$\therefore$ SAMTLIGA LÖSNINGAR GES AV

$$\bar{x}(t) = Ae^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

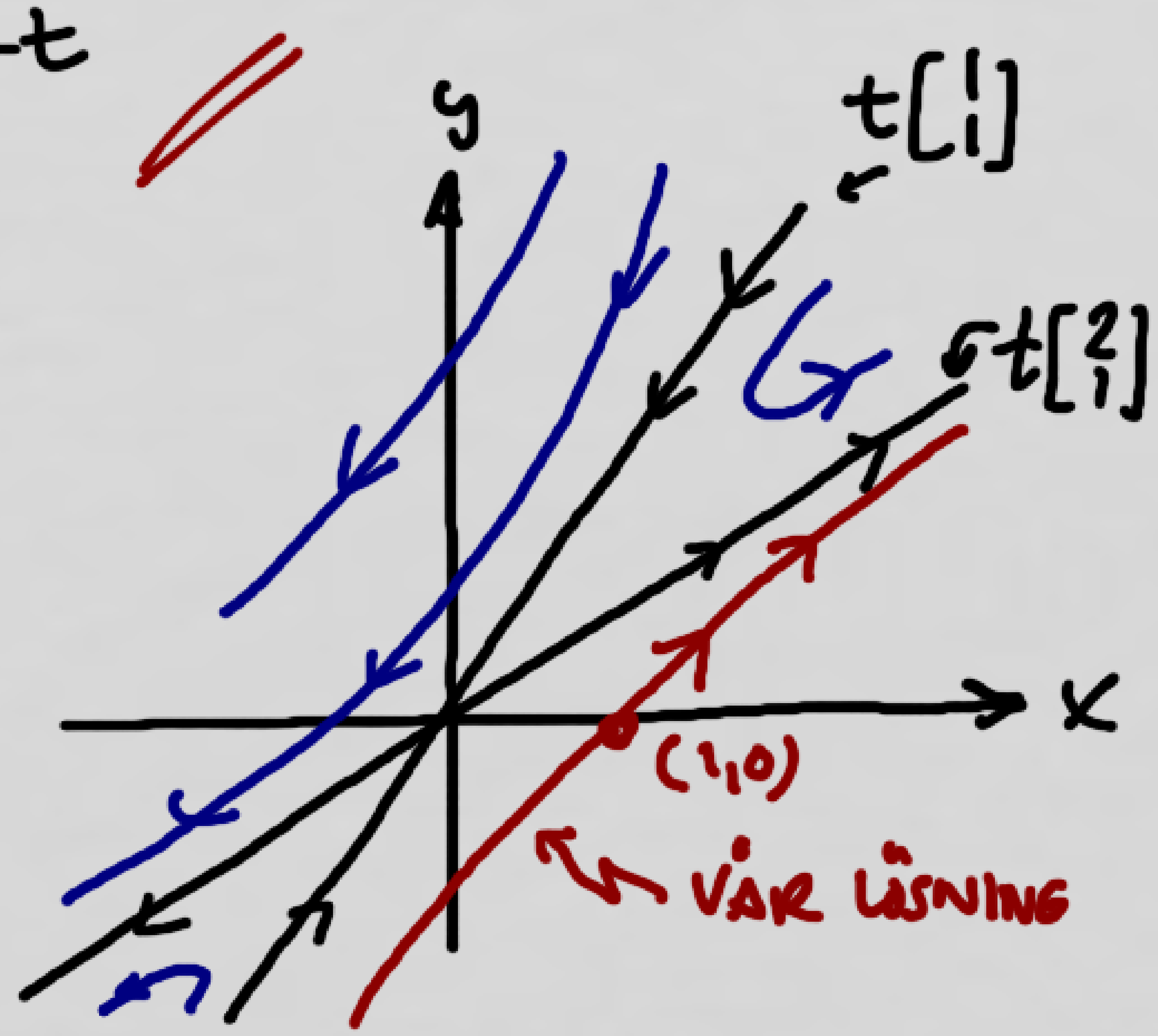
MEN, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ GER:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ GER } A = -1, B = 1$$

$$\therefore \bar{x}(t) = -e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ OCH}$$

PÅ KOMPONENTFORM!

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{3t} - e^{-t} \\ y(t) = e^{3t} - e^{-t} \end{cases}$$



6 (M0031M)

$$\begin{cases} yy' = y^2x - x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$z = y^2$ GER $z' = 2yy'$

IN I EKV:

$\frac{1}{2}z' = xz - x \iff$

$z' - 2xz = -2x$

$\lceil$ IF: $\int -2x\,dx = -x^2 + C$; IF $= e^{-x^2}$ $\rfloor$

$\iff \frac{d}{dx}(e^{-x^2}z) = -2xe^{-x^2} \iff$

$e^{-x^2}z = e^{-x^2} + C \iff$

$z = 1 + Ce^{x^2} \iff y = \pm\sqrt{1 + Ce^{x^2}}$

MEN, $y(0) = 2$ GER + ORH

$2 = \sqrt{1+C} \iff C = 3 \quad \therefore \quad y = \sqrt{1+3e^{x^2}}$ //

7. $y'' + 2xy' + x^2 y = 0$

SÄTT $y = up$; $y' = u'p + up'$

$y'' = u''p + 2u'p' + up''$.

IN I EKV.:

$$u''p + \underline{2u'p'} + \underline{up''} + 2x(\underline{u'p} + \underline{up'}) + x^2\underline{up} = 0 \Leftrightarrow$$

$$u''p + u'(2p' + 2xp) + u(p'' + 2xp' + x^2p) = 0$$

u' FÖRSVINNA $\Leftrightarrow$ $2p' + 2xp = 0 \Leftrightarrow p' + xp = 0$

$\ulcorner$ IF: $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ IF $= e^{\frac{1}{2}x^2}$ $\lrcorner$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x^2}p\right) = 0 \Leftrightarrow p = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

VÄLJ $C = 1$ (ALLT UTOM $C=0$ FUNGERAR)

$\therefore p = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ✓ $\left(p' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2},\ p'' = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$

KOEFF. FÖR u: $-(1-\underline{x^2})e^{-\frac{1}{2}x^2} - 2x^2\underline{e^{-\frac{1}{2}x^2}} + x^2\underline{e^{-\frac{1}{2}x^2}} = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$

EKVATIONEN BLIR NU:

$e^{-\frac{1}{2}x^2}u'' - e^{-\frac{1}{2}x^2}u = 0 \Leftrightarrow$

$u'' - u = 0 \Leftrightarrow$ [KAR. EKV. $r^2 - 1 = 0$]

$u = Ae^{x} + Be^{-x} \Leftrightarrow$

$y = up = Ae^{x - \frac{1}{2}x^2} + Be^{-x - \frac{1}{2}x^2}$ ✓✓