LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

# Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

# M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2023-03-22**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.
Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28. Skrivtid: 5 timmar.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

*Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Lycka till!

**Allmänna anvisningar:** Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

**Efter tentamen:** Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Polynomet $z^4+17z^2+26z+68$ har nollställe i $1-4i$. Bestäm samtliga nollställen.

b) Finns det något reellt tal $a$ så att ett argument för $z=(2+3i)/(2+ai)$ är $\pi/4$? $5\pi/4$? $\pi$? (4 p)

2. Låt $\mathcal{B}=\{1-t+t^2, 1+2t-t^2, 2-t+2t^2\}$.

a) Visa att att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

b) Bestäm $[1+t^2]_{\mathcal{B}}$. (4 p)

3. Låt

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisera $A$, det vill säga finn matriser $P$ och $D$, där $D$ är en diagonalmatris, så att $A=PDP^{-1}$. (4 p)

4. Betrakta följande data

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ |

. Bestäm den funktion på formen $y=Ax+Bx^3$ som bäst anpassar till datapunkterna i minstakvadratmetodens mening. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y''-2y'-3y=(3x+1)e^{2x}$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till $x^2y''-5xy'+13y=2/x^3$, $x>0$. (4 p)

7. Låt $\mathbb{P}$ vara vektorrummet av samtliga polynom och utrusta det med skalärprodukten

$$\langle p,q\rangle=\int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\,dt.$$

a) Bestäm den ortogonala projektionen av $t^2$ på underrummet $\mathbb{P}_1$.

b) Bestäm $a$ och $b$ så att

$$\int_0^\infty (t^2+at+b)^2e^{-t}\,dt$$

blir så litet som möjligt.

c) Bestäm det $g$ som uppfyller

$$\int_0^\infty g(t)e^{-t}\,dt=\int_0^\infty tg(t)e^{-t}\,dt=0,\text{och}\quad\int_0^\infty g(t)^2e^{-t}\,dt=1$$

och som ger maximalt värde för $\int_0^\infty t^2g(t)e^{-t}\,dt$. Vad är det maximala värdet?

Ledning: För naturliga tal $n$ gäller det att $\int_0^\infty t^ne^{-t}\,dt=n!$. (4 p)

# Lösningsförslag m0049m, 22/03-23

1. a) $P(z) = z^4 + 17z^2 + 26z + 68$ är ett reellt polynom och därför kommer nollställena i komplexkonjugerade par, $\because P(1-4i) = 0$ ger $P(1+4i) = 0$.

Enligt faktorsatsen är därför $P(z)$ delbart med

$$(z-1+4i)(z-1-4i) = z^2 - 2z + 17$$

Utför divisionen:

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2 + 2z + 4 \\
\hline
z^2 - 2z + 17 & z^4 + 17z^2 + 26z + 68 \\
 & z^4 - 2z^3 + 17z^2 \\
\hline
 & 2z^3 + 26z + 68 \\
 & 2z^3 - 4z^2 + 34z \\
\hline
 & 4z^2 - 8z + 68 \\
 & 4z - 8z + 68 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

VISSTE ATT DE SKULLE BLI NOLL

$\because P(z) = (z^2 - 2z + 17)(z^2 + 2z + 4)$

Kvar att lösa: $z^2 + 2z + 4 = 0 \iff$

$z = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$

$\because$ Nollställena är: $1 \pm 4i \,;\, -1 \pm \sqrt{3}\, i$ //

b) $z = \dfrac{2+3i}{2+ai} = \dfrac{(2+3i)(2-ai)}{4+a^2} = \dfrac{4+3a}{4+a^2} + i\,\dfrac{6-2a}{4+a^2}$

$\frac{\pi}{4}$: $\text{Re}\, z = \text{Im}\, z > 0$ : $4 + 3a = 6 - 2a \iff a = 2/5$ och då är $\text{Re}(z) > 0$

$\frac{5\pi}{4}$: $\text{Re}\, z = \text{Im}\, z < 0$ : <u>NEJ</u>, ty om $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ ger $\text{Re}(z) > 0$.

$\pi$: $\text{Im}\, z = 0 \iff a = 3$ och då är $\text{Re}\, z > 0$ och då är noll ett argument. Så <u>NEJ</u>

Svar: JA, då $a = \frac{2}{5}$ ; NEJ ; NEJ

2. $\mathcal{B} = \{1-t+t^2, 1+2t-t^2, 2-t+2t^2\}$

a) FÖR ATT EN MÄNGD SKA VARA EN BAS KRÄVS DET ATT DEN SPÄNNER UPP OCH ÄR LINJÄRT OBEROENDE.

MEN, DÅ $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ (TY $\{1, t, t^2\}$ EN BAS)

OCH $\mathcal{B}$ INNEHÅLLER 3 ELEMENT RÄCKER DET ATT VISA EN AV DE TVÅ DEFINIERANDE EGENSKAPERNA TY DEN ANDRA FÅS PÅ KÖPET ENLIGT EN SATS.

VISA ATT $\mathcal{B}$ ÄR LINJÄRT OBEROENDE.

NOLLPOLYNOMET DVS $=0$ FÖR ALLA $t$

ANTAG $c_1(1-t+t^2) + c_2(1+2t-t^2) + c_3(2-t+2t^2) = \bar{0}$

IDENT:

$$\left.\begin{aligned} t^0 &: c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ t^1 &: -c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ t^2 &: c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\therefore$ L.O.

$\therefore$ EN BAS

b) $[1+t^2]_{\mathcal{B}}$ ÄR PER DEFINITION $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ DÄR

$c_1(1-t+t^2) + c_2(1+2t-t^2) + c_3(2-t+2t^2) = 1+t^2$ ALLA $t$.

SER MAN INTE SÅ IDENTIFIERAR MAN OCH RÄKNAR PÅ

HÄR SER MAN DIREKT ATT $c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1$ FUNGERAR

$\therefore [1+t^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. BEHÖVER EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

<u>EGENVÄRDEN</u>: KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda)\left((2-\lambda)^2-4\right) = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(4-\lambda)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ ; $\lambda = 4$ MULT. 2 //

⌈ KONTROLL: $0+4+4=8$ ; $\operatorname{tr} A = 2+4+2 = 8$ ok ⌋

<u>EGENVEKTORER</u>:

$\lambda=0$: $A\bar{v} = 0\bar{v} \Leftrightarrow A\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1, x_2$ BUNDNA $x_3$ FRI. $x_3 = t$, GER $x_2 = -t$, $x_1 = -t$

$\therefore$ $\bar{v} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ //

$\lambda=4$: $A\bar{v} = 4\bar{v} \Leftrightarrow (A-4I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1$ BUNDEN, $x_2, x_3$ FRIA. $x_2 = s$, $x_3 = t$

$\Rightarrow x_1 = t$

$\therefore$ $\bar{v} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

VÄLJ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ //

$\therefore$ $A = PDP^{-1}$ MED

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ //

4. SÄTT IN DATAPUNKTERNA I MODELLFUNKTIONEN OCH MAN FÅR:

$$\begin{cases} 0 = -A - B \\ 1 = 0 \\ -1 = A + B \\ 2 = 2A + 8B \end{cases}$$

SYSTEMET ÄR UPPENBART INKONSISTENT.

Det är inkonsistent även om man bortser från den andra, uppenbart meningslösa, ekvationen. Den första och tredje motsäger varandra.

PÅ MATRISFORM:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

MOTSVARANDE NORMALEKVATION ÄR

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 18 & 3 \\ 18 & 66 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 18 & 3 \\ 0 & 12 & 6 \end{array}\right]$$

$\because$ $12B = 6 \Leftrightarrow B = 1/2$

$6A + 18B = 3 \Leftrightarrow A = -1$

$\therefore$ DEN OPTIMALA FUNKTIONEN ÄR

$$y = -x + \frac{1}{2}x^3$$

5. $y''-2y'-3y=(3x+1)e^{2x}$

LINJÄR SÅ: "HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR. EKV.: $r^2-2r-3=0 \iff$

$r=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2=3;-1$

$\therefore y_h=Ae^{3x}+Be^{-x}$

PART.: ANSATS $y_p=z(x)e^{2x}$

$y_p'=z'e^{2x}+2ze^{2x}$

$y_p''=z''e^{2x}+4z'e^{2x}+4ze^{2x}$

IN I EKV.:

$z''\cancel{e^{2x}}+4z'\cancel{e^{2x}}+4z\cancel{e^{2x}}-2(z'\cancel{e^{2x}}+2z\cancel{e^{2x}})$

$-3z\cancel{e^{2x}}=(3x+1)\cancel{e^{2x}} \iff$

$z''+2z'-3z=3x+1$

ANSATS (I ANSATSEN) $z=ax+b$

$z'=a,\ z''=0$ IN I EKV.:

$0+2a-3(ax+b)=3x+1$

IDENT.: $\left.\begin{array}{l} x^1: -3a=3 \\ x^0: 2a-3b=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-1 \end{array}$

$\therefore z(x)=-x-1 \quad \therefore y_p=(-x-1)e^{2x}$

$\therefore y=y_h+y_p=$

$=Ae^{3x}+Be^{-x}-(x+1)e^{2x}$

6. $x^2y'' - 5xy' + 13y = 2/x^3, \quad x>0.$

DETTA ÄR EN EULEREKVATION. GÖR VARIABELBYTET: $x = e^t$, $z(t) = y(e^t) = y(x)$

DETTA LEDER TILL

$xy' = z'$ OCH $x^2y'' = z'' - z'$. EKVATIONEN TRANSFORMERAS TILL:

$$z'' - z' - 5z' + 13z = 2e^{-3t} \iff$$

$$z'' - 6z' + 13z = 2e^{-3t}.$$

LINJÄR: "HOMOGEN + PARTIKULÄR"

Hom.: KAR. EKV.: $r^2 - 6r + 13 = 0 \iff$

$$r = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$$

$$\therefore\ z_h = e^{3t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

PART. : ANSATS: $z_p = ae^{-3t}$

$z_p' = -3ae^{-3t}$, $z_p'' = 9ae^{-3t}$ IN I EKV.:

$$9a\cancel{e^{-3t}} + 18a\cancel{e^{-3t}} + 13a\cancel{e^{-3t}} = 2\cancel{e^{-3t}} \iff$$

$$40a = 2 \iff a = \frac{1}{20}$$

$$\therefore\ z_p = \frac{1}{20}e^{-3t}$$

$$\therefore\ z = z_h + z_p = e^{3t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + \frac{1}{20}e^{-3t}$$

DET VILL SÄGA:

$$y = x^3(A\cos(2\ln x) + B\sin(2\ln x)) + \frac{1}{20x^3}$$

7. a) För att bestämma projektionen behövs först en ortogonal bas för $\mathbb{P}_1$. En bas är $\{1, t\}$. Ortogonalisera denna med hjälp av Gram–Schmidt.

$1^\circ$: $q_1(t) = 1$, $W_1 = \text{Span}\{q_1\}$

$2^\circ$: $q_2(t) = t - \text{proj}_{W_1} t =$

$$= t - \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = x - 1$$


Polynomen som utgör en ortogonal bas med denna skalärprodukt kallas Laguerre polynomen (efter en omskalning).

$\therefore$ En ortogonalbas för $\mathbb{P}_1$ är $\{1, t-1\}$

Det följer: $\text{proj}_{\mathbb{P}_1} t^2 = \frac{\langle t^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 + \frac{\langle t^2, t-1\rangle}{\langle t-1,t-1\rangle}(t-1)$

$$= 2 + \frac{4}{1}(t-1) = 4t-2 \quad //$$

b) $\int_0^\infty (t^2+at+b)^2 e^{-t}\,dt = \|t^2+at+b\|^2$

$$= \|t^2 - (-at-b)\|^2$$

Normen minimeras av projektionen så

$$\min_{a,b} \|t^2+at+b\| = \|t^2-(4t-2)\|$$

$\therefore$ $a = -4$
$b = 2$ //

c) $\langle t^2, g\rangle =$

$\langle t^2 - (4t-2) + 4t-2, g\rangle =$ $\quad g \perp \mathbb{P}_1$

$\langle \underbrace{t^2-(4t-2)}_{\in \mathbb{P}_1^\perp}, g\rangle + \underbrace{\langle 4t-2, g\rangle}_{=0} =$

$\langle t^2-(4t-2), g\rangle \underset{\text{C-S}}{\le} \|t^2-(4t-2)\| \underbrace{\|g\|}_{=1}$

Så det maximala värdet är $\|t^2-(4t-2)\|$ ty man får likhet i Cauchy-Schwarz då de är parallella ($\langle f,g\rangle = \|f\|\,\|g\|$, $f = \lambda g$, $\lambda > 0$)

$g(t) = \frac{1}{\|t^2-4t+2\|}(t^2-4t+2)$ $\in \mathbb{P}_1^\perp$ och $\|g\| = 1$

Och värdet blir således

$\|t^2-4t+2\| =$

$\sqrt{\langle t^2-4t+2, t^2-4t+2\rangle}$

$= (4! + 16\cdot 2! + 4\cdot 0! - 8\cdot 3! + 4\cdot 2! - 16\cdot 1!)^{1/2}$

$= (24+32+4-48+8-16)^{1/2}$

$= \sqrt{4} = 2$ //

$\langle t,1\rangle = \int_0^\infty t e^{-t}\,dt = 1! = 1$

$\langle 1,1\rangle = \int_0^\infty 1 e^{-t}\,dt = 0! = 1$

$\langle t^2,1\rangle = 2! = 2$

$\langle t^2, t-1\rangle = 3! - 2! = 4$

$\langle t-1, t-1\rangle = 2! - 2\cdot 1! + 0! = 1$