Omtentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-05-27**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

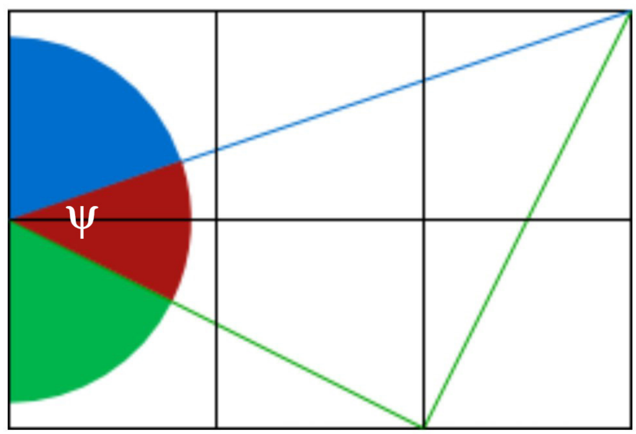
1. Antag att $-1 < x < 1$ och $-1 < y < 1$.

   (a) Bevisa, exempelvis genom att derivera en lämplig funktion eller använda additionsformler, att

   $$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

   (3p)

   (b) Beräkna vinkeln ψ (röd) i figuren härunder. Antag att var och en av de 6 kvadraterna (svarta) har sida 1. Kan formeln ovan användas på något sätt månntro? (2p)



2. Bestäm följande gränsvärden (med motivering), om de existerar:

   (a)

   $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}.$$

   (1p)

   (b)

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x}.$$

   (2p)

   (c)

   $$\lim_{x\to 2-} \arctan\left(\frac{x-5}{x^2-7x+10}\right).$$

   (2p)

3. Finn tangenten till *astroiden*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$$

genom punkten $\left(1, 3\sqrt{3}\right)$. (5p)

4. Pariserhjulet *London Eye* har en diameter på 120 meter och roterar ett varv på 30 minuter. Med vilken vertikal hastighet stiger man när man är 96 meter över lägsta punkten på hjulet och på väg uppåt? (5p)

5. I en enkel matematisk modell för antalet ackumulerade smittofall $y = y(t)$ i en typisk epidemi lyder y den *logistiska differentialekvationen*

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - y/L\right).$$

(a) Visa att *sigmoiden*

$$y(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-T_0)}}$$

uppfyller differentialekvationen ovan. (2p)

(b) Låt $k = 1$, $L = 2$, $T_0 = 0$. Finn inflexionspunkter och asymptoter till sigmoiden ovan. Skissera kurvan. (3p)

6. Teknologen Karen, kall och blöt efter ett kraftigt regnväder, befinner sig i en roddbåt R i en sjö 4 km från närmsta punkten A på den rätlinjiga stranden. Hon vill så snabbt som möjligt komma fram till den värmande brasan i vindskyddet P på stranden genom att först ro till stranden och sedan med blöta stövlar gå den eventuellt resterande sträckan till P. Avståndet mellan A och P är 3 km. Mot vilken punkt S på stranden ska hon ro om hon ror med 4 km/h och går med 5 km/h? (5p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n\left(a_1+a_n\right)}{2},\ a_k = a_{k-1}+d. \\
\sum_{k=0}^{n-1} r^k &= \begin{cases} n,\ r=1, \\ \frac{r^n-1}{r-1},\ r\neq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Binomialsatsen

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \\
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.
\end{aligned}$$

3. Trigonometri

$$\begin{aligned}
\cos\left(s+t\right) &= \cos s\cos t - \sin s\sin t, \\
\sin\left(s+t\right) &= \sin s\cos t + \cos s\sin t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \\
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A.
\end{aligned}$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f\left(x\right) &= L \Leftrightarrow \left(\forall\epsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right)\left[0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f\left(x\right)-L|<\varepsilon\right], \\
\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) &= L \Leftrightarrow \left(\forall\epsilon>0\right)\left(\exists R\right)\left[x>R \Rightarrow |f\left(x\right)-L|<\varepsilon\right].
\end{aligned}$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'\left(x\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned}(f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \; x_1, x_2 \in D(f), \\ y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1.\end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)}, \; f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

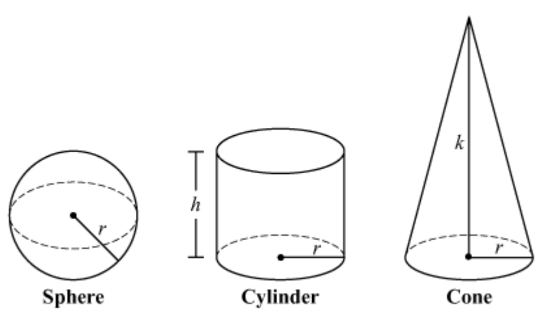
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\ E_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x), \; s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| &\leq M, \; \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.\end{aligned}$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi rh$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$