LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M, M0031M och M0059M

Tentamensdatum: **2022-10-25**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 278, antal sidor: 3.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Bestäm samtliga rötter till $z^5 = -1 + i$.

b) Låt n vara ett positivt heltal. Bevisa att $5z^{4n+2} + 6z^{4n} - 1$ är delbart med $z^2 + 1$. (4 p)

2.

a) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 8 & -4 \\ -1 & -3 & 6 & 3 \\ 5 & 13 & -22 & -1 \end{bmatrix}.$$

i. Bestäm en bas för Col$A$.

ii. Bestäm en bas för Nul$A$.

iii. Vektorn

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ 22 \end{bmatrix}$$

ligger i kolonnrummet för A. Bestäm koordinaterna för vektorn relativt basen för kolonnrummet som du bestämt ovan.

b) Låt B och C vara matriser där C är inverterbar. Bevisa $\text{Col}(BC) = \text{Col}B$. (4 p)

3. Låt $\mathcal{B} = \{1, t + t^2, t^2, t^3 - 1\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ vara baser för $\mathbb{P}_3$ respektive $\mathbb{P}_2$ och T den linjära operatorn från $\mathbb{P}_3$ till $\mathbb{P}_2$ definierad enligt

$$T(p) = tp''(t) - 3p'(t) + tp(0).$$

Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. (4 p)

4. Låt $\mathbb{P}_2$ beteckna vektorrummet av samtliga polynom av gradtal mindre än eller lika med 2 och utrusta det med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt.$$

a) Bestäm en ortogonal bas för underrummet $H = \text{Span}\{t, 1 + t^2\}$

b) Bestäm $\text{proj}_H 1$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - 2y' - 3y = 1 + e^{3x}$ (4 p)

6. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = -11x - 6y \\ y' = 18x + 10y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 0$ och $y(0) = -1$. (4 p)

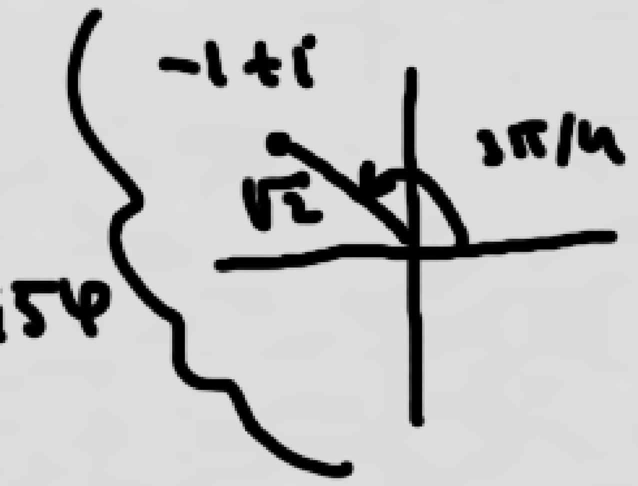
7. Lös följande differentialekvation

$$\begin{cases} xy' = y + e^{2x}y^3, \quad x > 0 \\ y(1/2) = 1/2. \end{cases}$$

genom att göra variabelbytet $z = y^{-2}$. (4 p)

Lösningsförslag M0049M, 221025

1. a) $z^5 = -1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$



ANSÄTT $z = re^{i\varphi}$, $\overset{\text{D-M}}{\Rightarrow} z^5 = r^5 e^{i5\varphi}$

IN I EKV.:

$$r^5 e^{i5\varphi} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \iff$$

$$\begin{cases} r^5 = \sqrt{2} \\ 5\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} r = 2^{1/10} \\ \varphi = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k \end{cases}$$

$$\therefore\ z_k = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k\right)}, \quad k = 0,1,2,3,4$$

b) EFTERSOM DELBART MED z^2+1 BETYDER DELBART MED $z+i$ OCH MED $z-i$ FÅS, VIA FAKTORSATSEN, ATT $P(z)$ (POLYNOM) DELBART MED $z^2+1 \iff P(\pm i) = 0$.

EFTERSOM, I DETTA FALL, $P(z)$ ÄR REELLT RÄCKER DET ATT KONTROLLERA $P(i) = 0$ ($P(-i)=0$ FÖLJER ENLIGT SATS).

LÅT $P(z) = 5z^{4n+2} + 6z^{4n} - 1$, OCH MAN FÅR:

$P(i) = 5i^{4n+2} + 6i^{4n} - 1 = 5\cdot(i^4)^n\cdot(i^2) + 6(i^4)^n - 1 = -5+6-1 = 0$ OK

2. a)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\-2&-5&8&-4\\-1&-3&6&3\\5&13&-22&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&-1&4&2\\0&-1&4&6\\0&3&-12&-16\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&-1&4&2\\0&0&0&4\\0&0&0&-10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&-1&4&2\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i) PIVOTKOLUMNER 1,2,4 $\therefore$ EN BAS FÖR $\operatorname{Col} A$ ÄR $\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\\13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-4\\3\\-1\end{bmatrix}\right\}=\mathcal{B}$

ii) x_1, x_2, x_4 BUNDNA x_3 FRI, $x_3=t$

$x_4=0,\ x_2=4t,\ x_1=-8t+2t=-6t$

$\therefore \bar{x}=t\begin{bmatrix}-6\\4\\1\\0\end{bmatrix}$. EN BAS FÖR $\operatorname{Nul} A$ ÄR $\left\{\begin{bmatrix}-6\\4\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

iii) LÖS $c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\\13\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\-4\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\\-8\\22\end{bmatrix}$

UTÖKAD KOEFF. MATRIS:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\-2&-5&-4&-4\\-1&-3&3&-8\\5&13&-1&22\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-1&2&-4\\0&-1&6&-8\\0&3&-16&22\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-1&2&-4\\0&0&4&-4\\0&0&-10&10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-1&2&-4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$\therefore c_3=-1,\ c_2=-2+4=2,\ c_1=-4+3=-1$

$$\left[\begin{bmatrix}0\\-4\\-8\\22\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

KONTROLL: $-1\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\\13\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}3\\-4\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\\-8\\22\end{bmatrix}$ ok

b) $\bar{y}\in\operatorname{Col}A$ OM DET FINNS $\bar{x}$ SÅ ATT $\bar{y}=\underbrace{A\bar{x}}_{\text{L.K. AV A:s KOLUMNER}}$

VISA:

$\operatorname{Col} BC=\operatorname{Col} B$.

• ANTAG $\bar{y}\in\operatorname{Col}BC$ $\therefore$ FINNS $\bar{x}$ SÅ $\bar{y}=BC\bar{x}$

MEN DÅ FINNS $\bar{x}'=C\bar{x}$ SÅ ATT $\bar{y}=B\bar{x}'\ (=BC\bar{x})$ ok

• ANTAG $\bar{y}\in\operatorname{Col}B$ $\therefore$ FINNS $\bar{x}$ SÅ $\bar{y}=B\bar{x}$

BILDA $\bar{x}'=C^{-1}\bar{x}$ OCH DET FÖLJER

$\bar{y}\in\operatorname{Col}BC$ TY $BCx'=BCC^{-1}\bar{x}=B\bar{x}\in\operatorname{Col}B$

$\therefore \operatorname{Col}BC=\operatorname{Col}B$

3. $\mathcal{B} = \{1, t+t^2, t^2, t^3-1\}$ $\quad \mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$

$T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$; $T(p) = t\,p''(t) - 3p'(t) + t\,p(0)$

ENLIGT TEORIN GES DEN SÖKTA MATRISEN AV

$$\Big[\, [T(1)]_C \; [T(t+t^2)]_C \; [T(t^2)]_C \; [T(t^3-1)]_C \,\Big]$$

VI HAR: $T(1) = t$; $[t]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$T(t+t^2) = t\cdot 2 - 3(1+2t) = -3 - 4t \; ; \; [-3-4t]_C = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(t^2) = t\cdot 2 - 3\cdot 2t = -4t \; ; \; [-4t]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(t^3-1) = t\cdot 6t - 3\cdot 3t^2 - t = -3t^2 - t \; ; \; [-3t^2-t]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ DEN SÖKTA MATRISEN ÄR $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

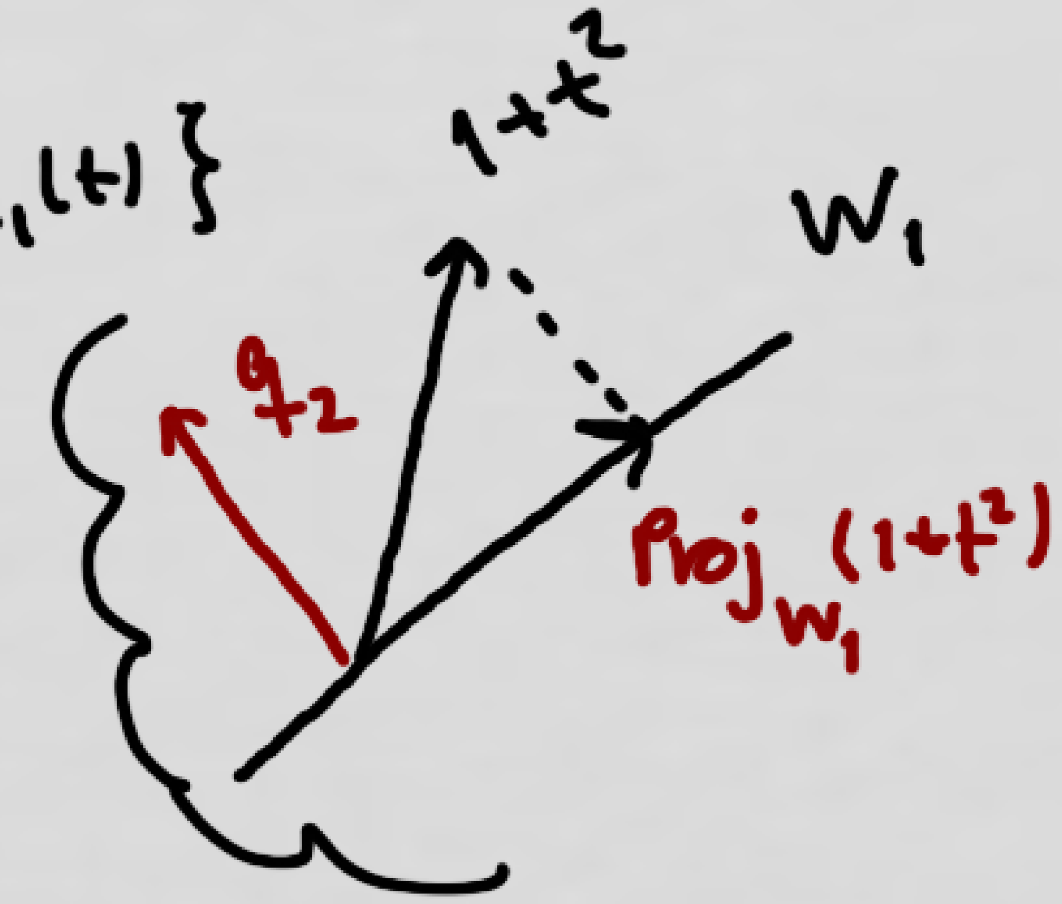
4. a) $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)\,q(t)\,dt$

$H = \text{Span}\{t,\ 1+t^2\}$

Gram-SCHMIDT :

1°: $q_1(t) = t$; $W_1 = \text{Span}\{q_1(t)\}$

2°: $q_2(t) = 1+t^2 - \text{Proj}_{W_1}(1+t^2)$



$$= 1+t^2 - \frac{\langle t, 1+t^2\rangle}{\langle t,t\rangle}\,t =$$

$$= 1+t^2 - \frac{3/4}{1/3}\,t = 1 - \frac{9}{4}t + t^2$$

Vale: $q_2'(t) = 4 - 9t + 4t^2$

$\therefore\ \{t,\ 4-9t+4t^2\}$ //

b) $$\text{proj}_H 1 = \frac{\langle 1,t\rangle}{\langle t,t\rangle}\,t + \frac{\langle 1, 4-9t+4t^2\rangle}{\langle 4-9t+4t^2, 4-9t+4t^2\rangle}(4-9t+4t^2)$$

$$= \frac{1/2}{1/3}\,t + \frac{5/6}{43/15}(4-9t+4t^2) = \frac{50}{43} - \frac{48}{43}t + \frac{50}{43}t^2 \ //$$

$$\cancel{4}^{\,2}\cdot\frac{5}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{15}^{\,5}}{43} = \frac{50}{43}$$

$$\frac{3}{2} - 9\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{\,2}}\cdot\frac{\cancel{15}^{\,5}}{43} = \frac{43\cdot 3 - 9\cdot 25}{2\cdot 43} = \frac{129-225}{2\cdot 43} = -\frac{96}{2\cdot 43} = -\frac{48}{43}$$

$$-11 + \frac{16}{5} + \frac{32}{3} = \frac{-11\cdot 15 + 48 + 160}{15} = \frac{-165+48+160}{15} = \frac{43}{15}$$

$\langle t, 1+t^2\rangle = \int_0^1 t + t^3\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\langle t,t\rangle = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$

$\langle 1,t\rangle = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

$\langle 1, 4-9t+4t^2\rangle = \int_0^1 4-9t+4t^2\,dt$

$= 4 - \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{24-27+8}{6} = \frac{5}{6}$

$\langle 4-9t+4t^2, 4-9t+4t^2\rangle =$

$= \int_0^1 16 + 81t^2 + 16t^4 - 72t + 32t^2 - 72t^3\,dt$

$= 16 + \frac{81}{3} + \frac{16}{5} - \frac{72}{2} + \frac{32}{3} - \frac{72}{4} =$

$= 16 + 27 - 36 - 18 + \frac{16}{5} + \frac{32}{3} = 43/15$

5. $y'' - 2y' - 3y = 1 + e^{3x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

<u>HOM.</u>: KAR.EKV.: $r^2 - 2r - 3 = 0$

$\Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = 3; -1$

$\therefore y_h = Ae^{3x} + Be^{-x}$

<u>PART.</u>: TVÅ DELAR. EN FÖR HL = 1 VILKEN UPPENBART KAN VÄLJAS TILL $y_{p_1} = -1/3$

y_{p_2} FÖR e^{3x} I HÖGERLED.

ANSATS $y_{p_2} = z(x)e^{3x}$ (ae^{3x} GÅR EJ TY HOM.)

$y_{p_2}' = z'e^{3x} + 3ze^{3x}$

$y_{p_2}'' = z''e^{3x} + 6z'e^{3x} + 9ze^{3x}$

IN I EKV. (MED e^{3x} I H.L.)

$z''\cancel{e^{3x}} + 6z'\cancel{e^{3x}} + 9z\cancel{e^{3x}} - 2(z'\cancel{e^{3x}} + 3z\cancel{e^{3x}}) - 3z\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}} \Leftrightarrow$

$z'' + 4z' = 1$

ANSATS (I ANSATSEN) $z = ax, z' = a, z'' = 0$ GER

$0 + 4a = 1 \therefore a = \frac{1}{4} \therefore y_{p_2} = \frac{1}{4}xe^{3x}$

$\therefore y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}xe^{3x}$ $\quad\therefore y = y_h + y_p = Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}xe^{3x}$

6. $\begin{cases} x' = -11x - 6y \\ y' = 18x + 10y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = -1$

PÅ MATRISFORM: $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, DÄR $A = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$

EGENVÄRDEN/VEKTORER FÖR A:

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} -11-\lambda & -6 \\ 18 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-11-\lambda)(10-\lambda) + 108 = 0 \Leftrightarrow$

$-110 + \lambda - \lambda^2 + 108 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 1; -2$

[KOLL: $1 - 2 = -1$, $\operatorname{tr} A = -11 + 10 = -1$

$1(-2) = -2$, $\det A = -110 + 108 = -2$ ok]

EGENVEKTORER:

$\underline{\lambda = 1}$: $A\bar{v} = 1\bar{v} \Leftrightarrow (A - I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -12 & -6 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN x_2 FRI

$x_2 = t$, $x_1 = -\frac{1}{2}t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = -2}$: $A\bar{v} = -2\bar{v} \Leftrightarrow (A + 2I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -9 & -6 & 0 \\ 18 & 12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN x_2 FRI

$x_2 = t$, $x_1 = -\frac{2}{3}t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, 1;\ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, -2$

LÖSNINGARNA:

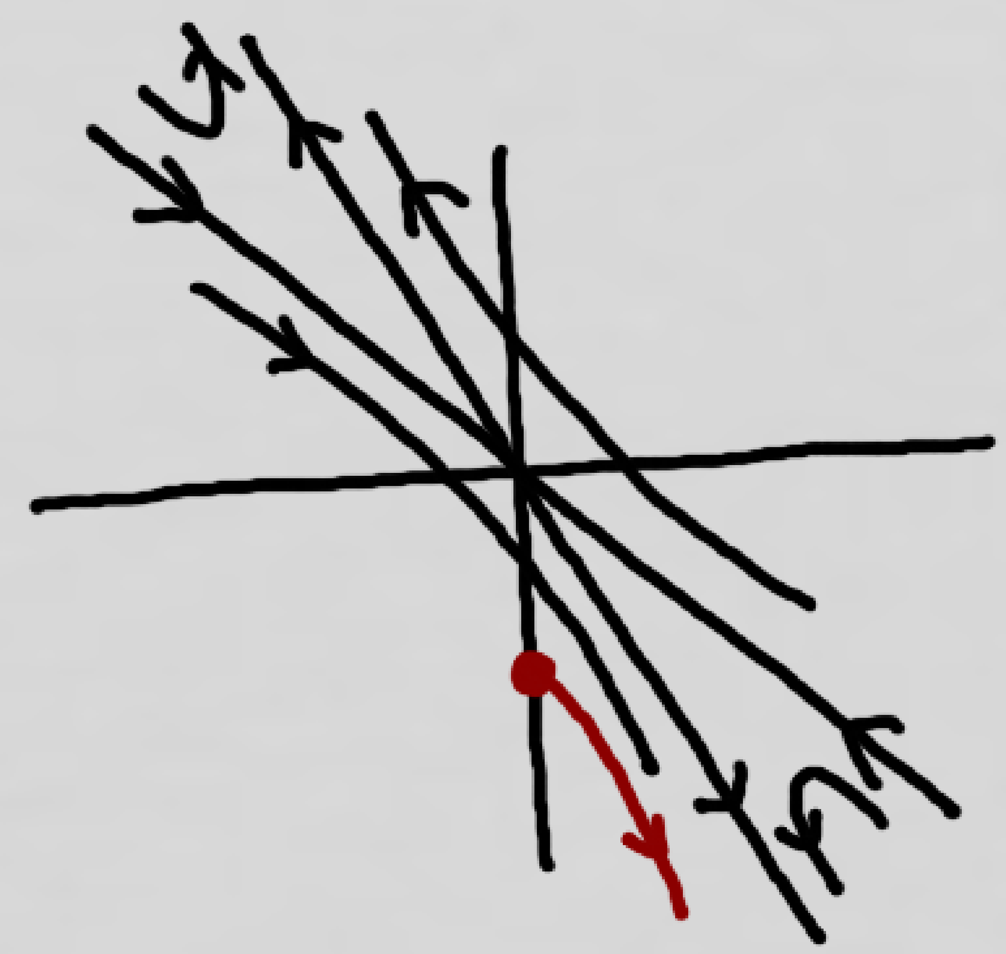
$\bar{x} = C\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{t} + D\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}e^{-2t}$

MEN, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ GER

$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow C = -2, D = 1$

$\therefore \bar{x}(t) = -2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}e^{-2t}$ ELLER

$\begin{cases} x(t) = 2e^{t} - 2e^{-2t} \\ y(t) = -4e^{t} + 3e^{-2t} \end{cases}$



7. $xy' = y + e^{2x}y^3 \, , \, x>0$

SÄTT $z = y^{-2}$; DETTA GER

$z' = -2y^{-3}y'$ DVS $y' = -\frac{1}{2}y^3 z'$

IN I EKV.:

$$-x\frac{1}{2}y^3 z' = y + e^{2x}y^3 \iff$$

$$-\frac{x}{2}z' = \frac{1}{y^2} + e^{2x} \iff$$

$$z' + \frac{2}{x}z = -\frac{2}{x}e^{2x}$$

IF: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + C$

$= 2\ln x + C \, , \, x>0$

IF $= e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

$$x^2 z' + 2xz = -2xe^{2x} \iff$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 z) = -2xe^{2x} \iff$$

$$x^2 z = -xe^{2x} + \int e^{2x}\,dx =$$

$$= -xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2} + C \iff$$

$$z = -\frac{1}{x}e^{2x} + \frac{1}{2x^2}e^{2x} + \frac{C}{x^2} \iff$$

$$y = \frac{1}{\pm\sqrt{-\frac{1}{x}e^{2x} + \frac{1}{2x^2}e^{2x} + \frac{C}{x^2}}}$$

MEN, $y(1/2) = 1/2$: + MÅSTE VÄLJAS OCH

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{-2e + 2e + 4C}} \iff C = 1$$

$\therefore$

$$y = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{x}e^{2x} + \frac{1}{2x^2}e^{2x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2x}{\sqrt{2e^{2x} - 4xe^{2x} + 4}} \quad //$$