LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-03-24**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa med induktion att det för $x > 0$ och alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(5p)

Bevis: Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1-1}\frac{(1-1)!}{x^1} = HL,$$

där vi utnyttjat att $0! = 1$. Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\frac{d^p}{dx^p}(\ln x) = (-1)^{p-1}\frac{(p-1)!}{x^p} = (-1)^{p-1}(p-1)!\cdot x^{-p}\,(\text{induktionsantagande}).$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\ln x) = (-1)^{p+1-1}\frac{(p+1-1)!}{x^{p+1}} = (-1)^p\,p!\cdot x^{-(p+1)}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\ln x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p}{dx^p}(\ln x)\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^{p-1}(p-1)!\cdot x^{-p}\right)\\ &= (-1)^{p-1}(p-1)!\cdot(-p)\,x^{-p-1} = (-1)^p\,p!\cdot x^{-(p+1)},\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att

$$(-1)^{p-1}(p-1)!\cdot(-p) = (-1)^{p-1}(p-1)!\cdot(-1)\,p = (-1)^{p-1+1}\cdot((p-1)!\cdot p) = (-1)^p\,p!.$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to\infty} e^x \sin e^{-x}$$

(1p)

Lösning: Gränsvärdet är av typ $[\infty \cdot 0]$. Omskrivning ger

$$\lim_{x\to\infty} e^x \sin e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}} = \left\{\begin{array}{c} t = e^{-x} \\ x\to\infty \Longrightarrow t\to 0+ \end{array}\right\} = \lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Ledning: Taylor. (2p)

Lösning: Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi gör en Taylorutveckling av $f(x) = e^x - e^{-x}$ av ordning 1 kring 0. Vi har

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x - e^{-x} & f(0) = e^0 - e^0 = 0, \\ f'(x) = e^x + e^{-x} & f'(0) = e^0 + e^0 = 2, \\ f''(x) = e^x - e^{-x} & f''(c) = e^c - e^{-c},\ c \text{ mellan } 0 \text{ och } x. \end{array}$$

Därmed kan vi skriva

$$f(x) = P_1(x) + E_1(x) = \underbrace{0 + 2(x-0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}(x-0)^2}_{E_1(x)} = 2x + x^2 \cdot B(x),$$

där $B(x)$ är en begränsad funktion ty $\left|\frac{f''(c)}{2!}\right| = \frac{|e^c - e^{-c}|}{2} < \frac{e^{|x|}}{2}$. Således blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2 \cdot B(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 + x \cdot B(x) = 2.$$

Alternativ lösning 1: Sätt $g(t) = e^{2t}$. Derivering av g ger

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{2(t+h)} - e^{2t}}{h} = g'(t) = 2e^{2t}.$$

I synnerhet ger då $t = 0$ att

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h} - 1}{h} = g'(0) = 2e^0 = 2.$$

Med utnyttjande av detta gränsvärde får vi således

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{x}}_{\to 2} = 2.$$

Alternativ lösning 2: Med hjälp av standardgränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{(-x)} = 1 + 1 = 2.$$

(c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

(2p)

Lösning: För en geometrisk summa gäller

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, & \text{om } x \neq 1, \\ n + 1, & \text{om } x = 1. \end{cases}$$

Således är

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{8\left(\frac{x^3}{8}-1\right)}{2\left(\frac{x}{2}-1\right)}=\frac{8}{2}\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3-1}{\frac{x}{2}-1}=4\lim_{x\to 2}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{x}{2}\right)^k=4\sum_{k=0}^{2}1^k=4\,(2+1)=12.$$

Alternativ lösning 1: Med $x=2+h$ får vi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{(2+h)-2}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}=\left[\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\right]\Bigg|_{x=2}=3x^2\big|_{x=2}=12.$$

Alternativ lösning 2: Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eftersom $x=2$ är ett nollställe till täljaren så kan den faktoriseras som

$$x^3-8=(x-2)\,p\,(x)\,.$$

För att finna $p\,(x)$ utför vi polynomdivision:

$$\begin{array}{r|ll}
 & x^2+2x+4 & =p\,(x)\text{ kvot} \\
\hline
x-2 & x^3-8 & \\
- & (x^3-2x^2) & \\
\hline
 & 2x^2-8 & \\
- & (2x^2-4x) & \\
\hline
 & 4x-8 & \\
- & (4x-8) & \\
\hline
 & 0 & \text{rest}
\end{array}$$

Därmed blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=2^2+2\cdot 2+4=12.$$

3. Låt

$$y=f(x)=1/x,\ x>0.$$

(a) Illustrera medelvärdessatsen genom att finna en punkt i det öppna intervallet $(2,3)$ i vilken tangenten till kurvan $y=f\,(x)$ är parallell med kordan som sammanbinder punkterna $(2,f\,(2))$ och $(3,f\,(3))$. (2p)

Lösning: Lagranges medelvärdessats säger att om f är en funktion som är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a,b) så finns det (åtminstone) en punkt $c\in(a,b)$ där medellutningen

$$\frac{f\,(b)-f\,(a)}{b-a}=f'\,(c)\,.$$

Med $0<a<b$ och

$$f\,(x)=\frac{1}{x}$$

får vi då

$$\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=-\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow\frac{a-b}{ab\,(b-a)}=-\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow c^2=ab\Leftrightarrow c=\pm\sqrt{ab}.$$

Vi förkastar den negativa lösningen då den ej ligger i det önskade intervallet. Däremot ligger $c = \sqrt{ab}$ i intervallet (a, b), ty

$$a = \sqrt{a^2} < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2} = b.$$

I synnerhet, för

$$a = 2, \;\; b = 3,$$

får vi

$$c = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}.$$

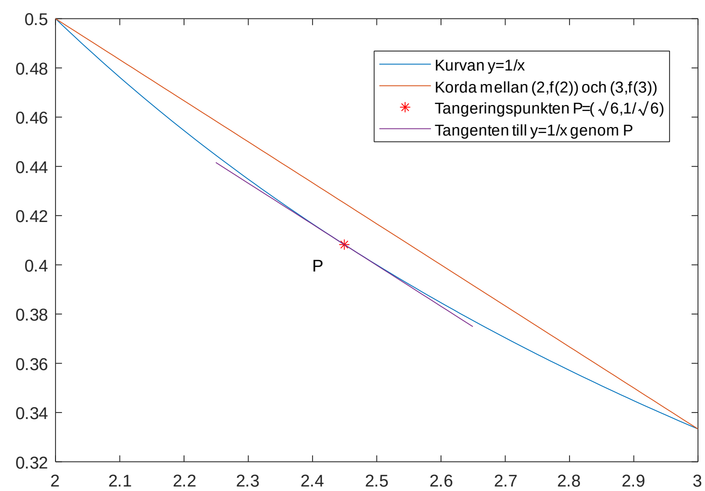
Anmärkning: Talet

$$c = \sqrt{ab}$$

kallas för *det geometriska medelvärdet* av a och b. Skulle vi istället göra motsvarande beräkning för funktionen $f(x) = x^2$ så ger det punkten

$$c = \frac{a+b}{2},$$

det aritmetiska medelvärdet.



(b) Visa att arean av triangeln som begränsas av tangenten till f och koordinataxlarna är konstant, oberoende av tangeringspunkt. Vad blir arean? **Ledning:** finn först tangenten till f i någon godtycklig punkt $x = a$ på kurvan och finn därefter ett uttryck för arean av triangeln. (3p)

Lösning: Antag att tangeringspunkten är

$$(a, f(a)) = \left(a, \frac{1}{a}\right).$$

För att finna tangentens lutning deriverar vi funktionen med avseende på x. Vi får

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Därmed ges tangentens lutning i punkten $x = a$ av

$$k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Tangentens ekvation fås således ur enpunktsformeln

$$\begin{aligned} y-\frac{1}{a} &= -\frac{1}{a^2}(x-a) \\ &\Updownarrow \\ y &= -\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Tangenten skär y-axeln när $x=0$, dvs i

$$y_0=\frac{2}{a}.$$

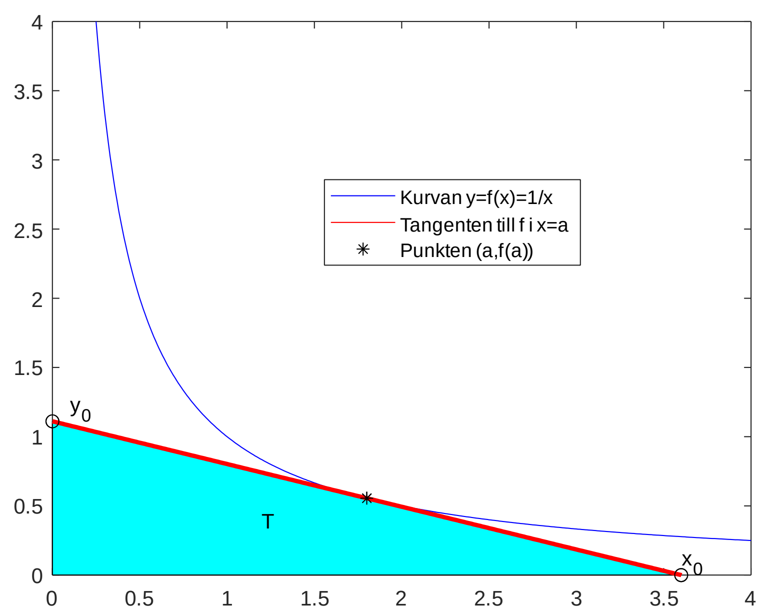
Tangenten skär x-axeln när $y=0$, dvs när

$$x_0=2a.$$

Således har den inneslutna triangeln area

$$T=\frac{x_0y_0}{2}=\frac{2a\cdot\frac{2}{a}}{2}=2 \text{ a.e.}$$

Denna area är konstant 2, oberoende av vilken punkt a som valts.



4. Vi definierar funktionen *tangens hyperbolicus* som

$$f(x)=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ x\in\mathbb{R}.$$

(a) Visa att f är injektiv $(1-1)$. (2p)

Lösning: Derivering ger

$$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^{2x}+e^{-2x}+2)-(e^{2x}+e^{-2x}-2)}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$$

Vi ser att $f'(x) > 0$ för alla x varför funktionen f är strängt växande på hela $\mathbb{R}$. Således är funktionen $1-1$ och därmed inverterbar.

Alternativ lösning: Vi sätter $f(x_1) = f(x_2)$ och visar att det medför $x_1 = x_2$. Mer specifikt,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} &= \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} \\
&\Updownarrow \\
\left(e^{x_1} - e^{-x_1}\right)\left(e^{x_2} + e^{-x_2}\right) &= \left(e^{x_2} - e^{-x_2}\right)\left(e^{x_1} + e^{-x_1}\right) \\
&\Updownarrow \\
e^{x_1}e^{x_2} - e^{-x_1}e^{x_2} + e^{x_1}e^{-x_2} - e^{-x_1}e^{-x_2} &= e^{x_2}e^{x_1} - e^{-x_2}e^{x_1} + e^{x_2}e^{-x_1} - e^{-x_2}e^{-x_1} \\
&\Updownarrow \\
2e^{x_1}e^{-x_2} &= 2e^{x_2}e^{-x_1} \\
&\Updownarrow \\
e^{2x_1} &= e^{2x_2} \\
&\Updownarrow \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

(b) Bestäm inversen till denna funktion. (2p)

Lösning: Vi söker inversen

$$y = f^{-1}(x).$$

Det innebär att

$$x = f(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

uttryckt i hjälpvariabeln $t = e^y$. Då är

$$x\left(t^2 + 1\right) = t^2 - 1 \Longleftrightarrow x + 1 = t^2(1 - x) \Longleftrightarrow t^2 = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Då $t = e^y > 0$ är därför

$$t = e^y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

så att

$$f^{-1}(x) = y = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}.$$

Anmärkning: Denna invers brukar kallas *area tangens hyperbolicus* och skrivs

$$f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}.$$

(c) Bestäm inversens definitionsmängd. Motivera! (1p)

Lösning: Eftersom f är strängt växande på $\mathbb{R}$ så kommer värdemängden för f att vara $(-1,1)$, ty

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}-1}{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+1} = -1,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{x}\left(1+e^{-2x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\overbrace{e^{-2x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}} = 1.$$

Därmed är

$$D\left(f^{-1}\right) = R(f) = (-1,1).$$

5. Betrakta funktionen

$$y = \arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. (4p)

Lösning: Funktionen

$$y = f(x) = \arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2}$$

varken jämn eller udda, ty

$$f(-x) = \arctan(-x) + \frac{1-(-x)}{1+(-x)^2} = -\arctan x + \frac{1+x}{1+x^2} \neq \begin{cases} f(x), \\ -f(x). \end{cases}$$

Låt oss undersöka eventuella asymptoter. Vi har två enkelsidiga horisontella asymptoter ty

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\arctan(x)}_{\to\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\arctan(x)}_{\to-\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = -\frac{\pi}{2}$$

Således saknas sned asymptot och eftersom $f(x)$ är definerad för alla $x\in\mathbb{R}$ så saknas även vertikala asymptoter, ty nämnaren $x^2+1\geq 1>0$.

Derivering av

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2}$$

ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\left(1+x^2\right)-(1-x)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\left(1+x^2\right)-\left(1+x^2\right)-(1-x)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2x(x-1)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Därmed har vi två kritiska punkter, $x = 0$ och $x = 1$. Teckenschema:

		0		1	
$2x$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(1+x^2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Vi har därmed ett lokalt maximum

$$f(0) = \arctan 0 + \frac{1-0}{1+0^2} = 1$$

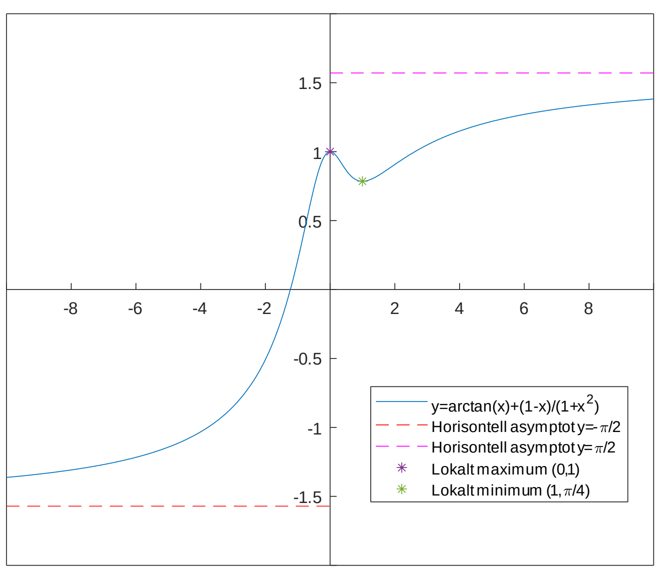
och ett lokalt minimum

$$f(1) = \arctan 1 + \frac{1-1}{1+1^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Funktionen är växande på intervallen $(-\infty, 0]$ och $[1, \infty)$ samt avtagande på intervallet $[0, 1]$. Vi ser ovan att kurvan skär y-axeln i $y = f(0) = 1$ och att x-axeln enbart kan skäras i en punkt, som måste ligga till vänster om y-axeln, då $f(x)$ är positiv för $x \geq 0$ (det inser vi från att $f(x) \geq f(1) = \frac{\pi}{4} > 0$ är minimipunkt för $x > 0$) och funktionen f växer strängt från $-\pi/2$ när x ökar från $-\infty$ mot 0. Skärningen med x-axeln måste dessutom även ligga något till vänster om $x = -1$, ty

$$f(-1) = \arctan(-1) + \frac{1-(-1)}{1+(-1)^2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{2} = \frac{4-\pi}{4} > 0.$$

Vi kan slutligen rita grafen som



(b) Avgör om f har något globalt maximum eller globalt minimum och om så är fallet, bestäm dessa. (1p)

Lösning: Funktionen f saknar globala extremvärden då

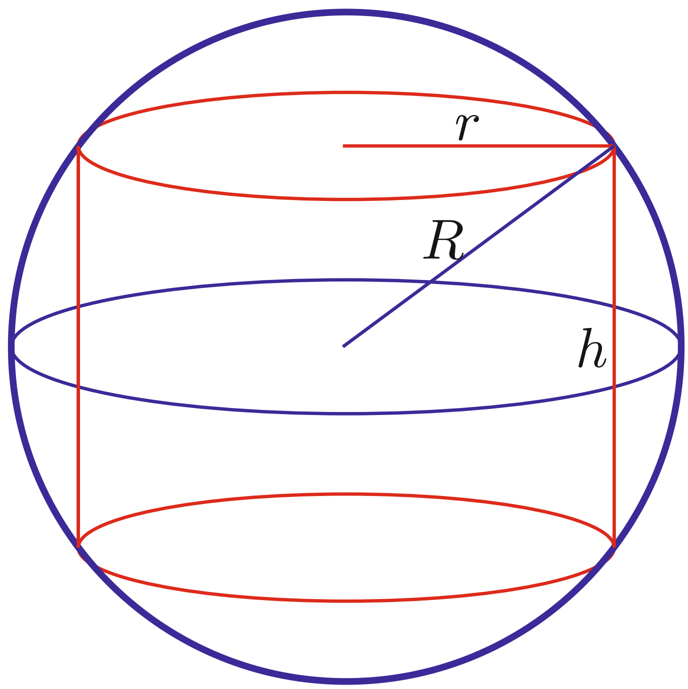
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \frac{\pi}{2} > 1 = f(0),\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} = f(1),\end{aligned}$$

så värdemängden för f är

$$R(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

dvs inget största eller minsta värde antas i någon punkt $x \in \mathbb{R}$.

6. En rak cirkulär cylinder är inskriven i ett klot, se figuren nedan.



Bestäm det största värde som förhållandet V_c/V_b mellan cylinderns volym V_c och klotets volym V_b kan anta. Ange cylinderns radie r och höjd h (uttryckta i klotets radie R) som ger maximum för detta förhållande. (5p)

Lösning: En rak cirkulär cylinder med radie r och höjd h har volym

$$V_c = \pi r^2 h$$

och ett klot med radie R har volym

$$V_b = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Ur figuren ser vi att storheterna r, h, R är relaterade genom sambandet

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \iff r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4},$$

där $0 \leq h \leq 2R$. Vi söker maximum av förhållandet

$$f(h) = \frac{V_c}{V_b} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3}{4} \frac{h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{R^3} = \frac{3}{16R^3}\left(4R^2 h - h^3\right).$$

Detta är en kontinuerlig funktion definierad på det slutna och begränsade intervallet $[0, 2R]$. Därmed existerar både maximum och minimum av förhållandet mellan volymerna. I ändpunkterna har vi

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{3}{16R^3}\left(4R^2 \cdot 0 - 0^3\right) = 0, \\ f(2R) &= \frac{3}{16R^3}\left(4R^2 \cdot 2R - (2R)^3\right) = \frac{3}{16R^3}\left(8R^3 - 8R^3\right) = 0. \end{aligned}$$

Derivering av $f(h)$ med avseende på h ger

$$f'(h) = \frac{3}{16R^3}\left(4R^2 - 3h^2\right).$$

Singulära punkter saknas, däremot har vi två kritiska punkter när $3h^2 = 4R^2$, dvs

$$h = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}},$$

där enbart den positiva kritiska punkten tillhör det tillåtna intervallet. I den punkten är förhållandet

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{3}{16R^3}\left(4R^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{3}{16R^3}\left(\frac{8R^3}{\sqrt{3}} - \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}\right) = \\ &= \frac{3 \cdot 8R^3}{16R^3}\left(\frac{3-1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{3 \cdot 8R^3 \cdot 2}{16R^3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ytterligare punkter där extremvärden kan antas saknas, därför måste maximum av förhållandet mellan volymerna att vara $1/\sqrt{3}$. För detta värde på h är

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{3 \cdot 4}} = \sqrt{R^2\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Anmärkning: En ytterligare derivering visar att f är en konkav funktion ty

$$f''(h) = \frac{3}{16R^3} \cdot (-6h) = -\frac{9h}{8R^3}.$$

Därmed är

$$f''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{9}{4\sqrt{3}R^2} < 0,$$

dvs $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ger maximum.