Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-03-25**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Trollpackan Natasja är väldigt förtjust i att skicka sina förbannelser med brev. Hon har fått en idé att under n st dagar massposta en hög med brev. Första dagen skickar hon ett brev ($b_1 = 1$). Dag två skickar hon tre brev ($b_2 = 3$), dag tre skickar hon sju brev ($b_3 = 7$) och så vidare. Varje dag skickar hon dubbelt så många brev som dagen innan plus ytterligare ett brev.

   (a) Finn ett explicit uttryck för antal brev $b_k = f(k)$ som Natasja skickar dag k. Bevisa ditt påstående med induktion. (3p)

   Lösning: Låt b_k vara antalet brev dag k. Då ser vi att

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 = 2^1 - 1, \\ b_2 &= 2b_1 + 1 = 3 = 2^2 - 1, \\ b_3 &= 2b_2 + 1 = 7 = 2^3 - 1, \\ b_4 &= 2b_3 + 1 = 15 = 2^4 - 1, \\ &\vdots \\ b_{k+1} &= 2b_k + 1. \end{aligned}$$

   Det är därför rimligt att tro att

$$b_k = 2^k - 1.$$

   Vi bevisar detta med ett induktionsbevis. Vi börjar med basfallet $k = 1$. Vi har då att

$$b_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ (OK!)}$$

   Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $k = p$, dvs att

$$b_p = 2^p - 1 \ \ \text{(induktionsantagande)}.$$

   Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $k = p + 1$, dvs att

$$b_{p+1} = 2^{p+1} - 1.$$

   Detta är sant, ty vi har att

$$b_{p+1} = 2b_p + 1 \underset{\text{IND.ANT.}}{=} 2\left(2^p - 1\right) + 1 = 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1.$$

   Enligt induktionsaxiomet är därför antalet brev dag k

$$b_k = 2^k - 1$$

   för $k = 1, 2, 3, \ldots$.

   (b) Hur många brev har Natasja totalt skickat efter n st dagar? (2p)

   Lösning: Totala antalet brev som Natasja skickat efter n st dagar blir därför

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(2^k - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) - 2^0 - \sum_{k=1}^{n} 1 \underset{\text{GEOM.}}{=} \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 - n \\ &= 2^{n+1} - 2 - n = 2\left(2^n - 1\right) - n. \end{aligned}$$

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}.$$
(1p)

Lösning: Vi har att

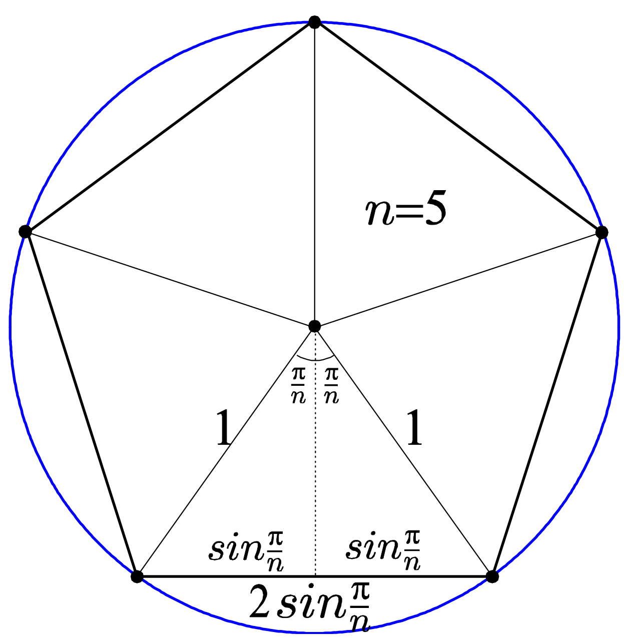
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to\infty}}{1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}} = +\infty.$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} 2n \sin\frac{\pi}{n}$$
(2p)

Lösning: Omskrivning ger

$$\lim_{n\to\infty} 2n \sin\frac{\pi}{n} \underset{h=\frac{\pi}{n}}{=} \lim_{h\to 0+} 2\frac{\pi}{h} \sin h = 2\pi \lim_{h\to 0+} \frac{\sin h}{h} \underset{\text{STD.}}{=} 2\pi.$$

Anmärkning: Uttrycket
$$p_n = n \cdot 2 \sin\frac{\pi}{n}$$
ger omkretsen av en regelbunden n-hörning inskriven i en cirkel med radie $r = 1$.



När $n \to \infty$ kommer p_n att gå mot cirkelns omkrets som är 2π.

(c) Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x\to 3}\frac{ax+b}{x^2-2x-3}=1.$$

(2p)

Lösning: Vi ser att nämnaren

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

går mot noll när $x\to 3$. Om gränsvärdet ska vara 1 (ändligt) måste därför även täljaren innehålla en faktor $x-3$. Det innebär att

$$ax+b=k(x-3)$$

för alla x. Alltså måste $k=a$, $b=-3k=-3a$. Det medför att

$$1=\lim_{x\to 3}\frac{ax+b}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{a}{x+1}=\frac{a}{4}.$$

Konstanterna a och b är därför $a=4$, $b=-3\cdot 4=-12$.

3. En funktion f som är sin egen invers (dvs $f^{-1}=f$) kallas för en *involution*.

(a) Visa att funktionen

$$f(x)=\frac{3x-2}{4x-3},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\},$$

är en involution. (2p)

Lösning: Vi söker inversen $y=f^{-1}(x)$. Det innebär att

$$\begin{aligned} x &= f(y)=\frac{3y-2}{4y-3}\Longleftrightarrow x(4y-3)=3y-2\Longleftrightarrow 4xy-3y=3x-2\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (4x-3)y=3x-2\Longleftrightarrow y=\frac{3x-2}{4x-3}. \end{aligned}$$

Därmed är

$$y=f^{-1}(x)=\frac{3x-2}{4x-3}=f(x).$$

Alternativ lösning: Vi bildar

$$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x))=f\left(\frac{3x-2}{4x-3}\right)=\frac{3\frac{3x-2}{4x-3}-2}{4\frac{3x-2}{4x-3}-3}=\frac{3(3x-2)-2(4x-3)}{4(3x-2)-3(4x-3)}= \\ &= \frac{9x-6-8x+6}{12x-8-12x+9}=\frac{x}{1}=x. \end{aligned}$$

Därmed är $f^{-1}=f$.

Anmärkning: Varje rationell funktion på formen

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$$

där

$$a^2+bc\neq 0$$

är en involution.

(b) Vad är $\left(f^{-1}\right)'(2)$? (2p)

Lösning: Eftersom $f^{-1}(x) = f(x)$ så är

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = f'(x) = \frac{3(4x-3) - 4(3x-2)}{(4x-3)^2} = \frac{12x - 9 - 12x + 8}{(4x-3)^2} = -\frac{1}{(4x-3)^2}.$$

Därmed blir

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = -\frac{1}{(4\cdot 2 - 3)^2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}.$$

Alternativ lösning: Vi söker derivatan y' till $y = f^{-1}(x)$ i punkten $x = 2$. Vi vet att

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{3y-2}{4y-3}.$$

I synnerhet, för punkten $x = 2$ gäller att

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3y-2}{4y-3} \Longleftrightarrow 2(4y-3) = 3y - 2 \Longleftrightarrow 8y - 6 = 3y - 2 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow &\quad 5y = 4 \Longleftrightarrow y = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Därmed är

$$f^{-1}(2) = \frac{4}{5}.$$

För att finna y' deriverar vi $x = f(y)$ implicit med avseende på x och får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(f(y)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y-2}{4y-3}\right) \\ &\Updownarrow \\ 1 &= f'(y)\, y' = -\frac{y'}{(4y-3)^2} \\ &\Updownarrow \\ y' &= \frac{1}{f'(y)} = -(4y-3)^2. \end{aligned}$$

Vi får därför

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \left(f^{-1}\right)'(x)\Big|_{x=2} = y'\big|_{y=\frac{4}{5}} = -\left(4\cdot\frac{4}{5} - 3\right)^2 = -\left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{25}.$$

(c) Vad är värdemängden för f? (1p)

Lösning: Då $f^{-1} = f$ så ges värdemängden för f av $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$, ty

$$R(f) = D\left(f^{-1}\right) = D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}.$$

4. Visa att ellipsen

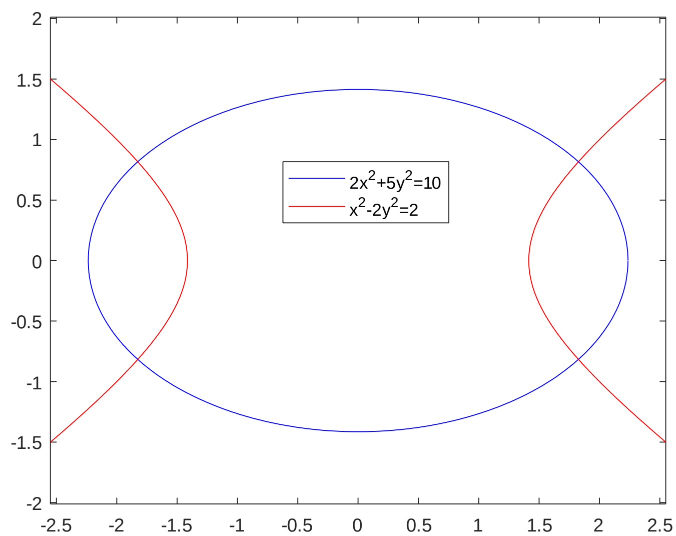
$$2x^2 + 5y^2 = 10$$

och hyperbeln

$$x^2 - 2y^2 = 2$$

skär varandra under räta vinklar. *Ledning: visa först att kurvorna skär varandra och visa sedan att tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra.* (5p)

Lösning: Först visar vi att kurvorna skär varandra. Kalla skärningspunkten (a, b).



För skärning måste vi ha lika y-värde för lika x-värde, dvs vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2a^2 + 5b^2 = 10, \\ a^2 - 2b^2 = 2. \end{cases}$$

Ur den andra ekvationen löser vi ut

$$a^2 = 2 + 2b^2$$

som vi sätter in i den första ekvationen:

$$2\left(2 + 2b^2\right) + 5b^2 = 10 \iff 4 + 9b^2 = 10 \iff b^2 = \frac{10 - 4}{9} = \frac{2}{3}.$$

Därmed blir

$$a^2 = 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Det innebär att kurvorna skär varandra i fyra punkter

$$(a, b) = \left(\pm\sqrt{\frac{10}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Låt oss sedan visa att i dessa punkter så skär kurvorna varandra under räta vinklar. Det innebär att tangenterna till kurvorna i skärningspunkten är vinkelräta (ortogonala) mot varandra. Implicit derivering av ekvationerna med avseende på x (under förutsättning att $y = y(x)$) ger då

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2 + 5y^2\right) = \frac{d}{dx}(10) \Longrightarrow 4x + 10yy' = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{2x}{5y}$$

respektive

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 2y^2\right) = \frac{d}{dx}(2) \Longrightarrow 2x - 4yy' = 0 \Longleftrightarrow y' = \frac{x}{2y}$$

när $y \neq 0$. Därmed har tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna lutningar

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{2a}{5b}, \\ k_2 &= \frac{a}{2b}. \end{aligned}$$

Det medför att

$$k_1 k_2 = -\frac{2a}{5b} \cdot \frac{a}{2b} = -\frac{a^2}{5b^2} = -\frac{\frac{10}{3}}{5 \cdot \frac{2}{3}} = -1,$$

dvs kurvorna skär varandra under räta vinklar.

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Konvexitet behöver ej beaktas (frivilligt). Skissera kurvan. *Ledning:* $e^{kx} = (e^x)^k$. (4p)

Lösning: Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom

$$f(-x) = e^{-3x} - 6e^{-2x} + 9e^{-x} = \frac{1}{e^{3x}} - \frac{6}{e^{2x}} + \frac{9}{e^x} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}.$$

Funktionen kan vi faktorisera som

$$f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x = e^x\left((e^x)^2 - 6e^x + 9\right) = e^x (e^x - 3)^2$$

varför

$$f(x) \geq 0$$

med likhet enbart för

$$x = \ln 3.$$

Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Vi har att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x &= \lim_{x\to-\infty} \overbrace{e^x}^{\to 0} \overbrace{(e^x - 3)^2}^{\to(-3)^2} = 0, \\ \lim_{x\to\infty} e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x &= \lim_{x\to\infty} \overbrace{e^x}^{\to\infty} \overbrace{(e^x - 3)^2}^{\to\infty} = \infty. \end{aligned}$$

Därmed har funktionen en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ åt vänster. Det kan därför möjligen finnas en sned asymptot åt höger. Vi undersöker således gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^{x}}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{x} \overbrace{(e^x - 3)^2}^{\to\infty} \underset{\text{STD.}}{=} \infty$$

och konstaterar att så inte är fallet. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $\mathbb{R}$, så inga vertikala asymptoter kan finnas. Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned} y' &= 3e^{3x} - 12e^{2x} + 9e^{x} = 3e^{x}\left((e^x)^2 - 4e^x + 3\right) = 3e^x (e^x - 1)(e^x - 3), \\ y'' &= 9e^{3x} - 24e^{2x} + 9e^{x} = 9e^{x}\left((e^x)^2 - \frac{8}{3}e^x + 1\right) = 9e^x (e^x - a)(e^x - b) \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} a &= \frac{4+\sqrt{7}}{3} > 1, \\ b &= \frac{4-\sqrt{7}}{3} = \frac{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}{3\left(4+\sqrt{7}\right)} = \frac{4^2 - 7}{3\left(4+\sqrt{7}\right)} = \frac{3}{4+\sqrt{7}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Alltså har vi två kritiska punkter $x = 0$ och $x = \ln 3$, ty $y' = 0$ om

$$e^x = 1 \lor e^x = 3 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = \ln 3.$$

Vi har även två möjliga inflexionspunkter $x = \ln a$ och $x = \ln b = \ln \frac{1}{a} = -\ln a$ där $y'' = 0$. Teckenstudium ger

		0		$\ln 3$	
e^x	$+$		$+$		$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

		$\ln b = -\ln a = \ln \frac{4-\sqrt{7}}{3}$		$\ln a = \ln \frac{4+\sqrt{7}}{3}$	
e^x	$+$		$+$		$+$
$e^x - a$	$-$		$-$	0	$+$
$e^x - b$	$-$	0	$+$		$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

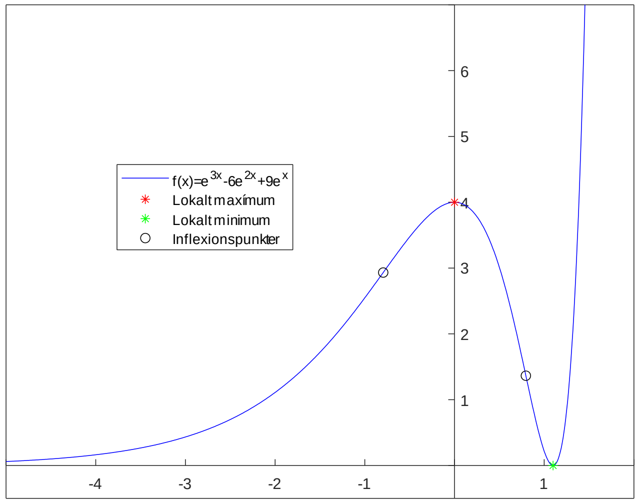
Vi ser därför att punkterna $x = \ln \frac{4-\sqrt{7}}{3} < 0$ och $x = \ln \frac{4+\sqrt{7}}{3} > 0$ bägge är inflexionspunkter. Funktionen har då ett (lokalt och globalt) minimum i $x = \ln 3$ (lite till höger om 1 ty $3 > e$) som är

$$f(\ln 3) = e^{\ln 3}\left(e^{\ln 3} - 3\right)^2 = 3 \cdot 0^2 = 0$$

och ett lokalt maximum i $x = 0$ som är

$$f(0) = e^0\left(e^0 - 3\right)^2 = 1 \cdot (-2)^2 = 4.$$

Däremot saknas globalt maximum. Vi kan slutligen skissera grafen som



(b) Bestäm hur många olika lösningar ekvationen

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^{x} = C.$$

har för alla värden på talet $C \in \mathbb{R}$. Motivera! (1p)

Lösning: Att finna lösningar till denna ekvation är ekvivalent med att finna skärningspunkter mellan kurvan $y = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^{x}$ och den horisontella linjen $y = C$. Vi ser därför från grafen ovan att ekvationen har

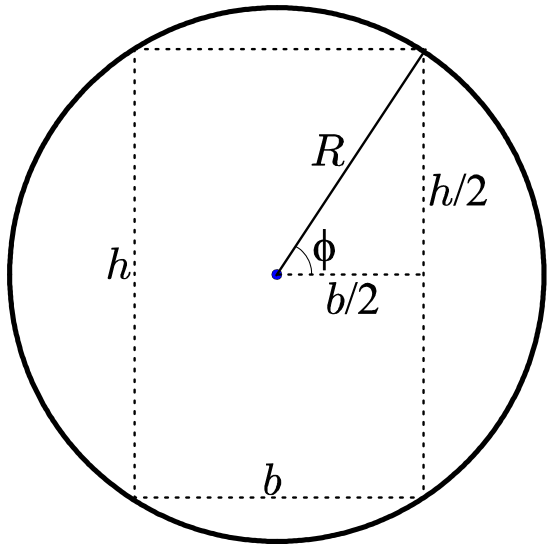
i. Inga lösningar om $C < 0$.
ii. En lösning $x = \ln 3$ om $C = 0$.
iii. Tre olika lösningar om $0 < C < 4$.
iv. Två olika lösningar om $C = 4$ (en av dessa är $x = 0$).
v. En lösning om $C > 4$.

6. Ur en lång timmerstock med cirkulärt tvärsnitt med radie R skall en balk med rektangulärt tvärsnitt sågas. Böjmotståndet W hos en sådan balk ges av

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

där b är balkens bredd och h balkens höjd. Hur skall b och h väljas för att böjmotståndet W skall bli maximalt och vad blir det maximala böjmotståndet W_{max}? (5p)

Lösning: För att böjmotståndet skall bli så stort som möjligt inser vi att hörnen på balken måste ligga på stockens periferi.



Ur figuren ser vi att

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \Longleftrightarrow b^2 + h^2 = 4R^2 \Longleftrightarrow h^2 = 4R^2 - b^2.$$

Då kan vi skriva böjmotståndet som

$$W = W(b) = \frac{b\left(4R^2 - b^2\right)}{6}$$

där bredden $0 \leq b \leq 2R$. Eftersom W är en kontinuerlig funktion på det slutna och begränsade intervallet $[0, 2R]$ vet vi att maximum existerar. Låt oss först undersöka ändpunkterna. Vi har

$$W(0) = W(2R) = 0.$$

Alltså måste maximum antas i någon inre punkt av intervallet. Derivering ger

$$W'(b) = \frac{4R^2 - 3b^2}{6}.$$

Vi ser att singulära punkter saknas varför maximum måste antas i någon kritisk punkt där $W'(b) = 0$. Det innebär att

$$4R^2 - 3b^2 = 0 \Longleftrightarrow b^2 = \frac{4R^2}{3} \Longleftrightarrow b = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Här ligger enbart den positiva lösningen

$$\widetilde{b} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

i det tillåtna intervallet. Då är motsvarande höjd

$$\widetilde{h} = \sqrt{4R^2 - \widetilde{b}^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \sqrt{2 \cdot \frac{4R^2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$$

och det maximala böjmotståndet blir därför

$$W_{\max} = \frac{\widetilde{b}\widetilde{h}^2}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8R^2}{3} = \frac{8R^3}{9\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}.$$

Anmärkning: Ytterligare en derivata ger

$$W''(b) = -b,$$

dvs

$$W''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2R}{\sqrt{3}} < 0 \text{ (maximum)}.$$

Alternativ lösning: Eftersom övre högra hörnet på rektangeln ligger i första kvadranten på cirkeln med radie R kan vi skriva

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} &= R\cos\phi \Longleftrightarrow b = 2R\cos\phi, \\ \frac{h}{2} &= R\sin\phi \Longleftrightarrow h = 2R\sin\phi, \end{aligned}$$

där $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Därmed är

$$W = W(\phi) = \frac{2R\cos\phi \cdot (2R\sin\phi)^2}{6} = \frac{4R^3}{3}\cos\phi\sin^2\phi.$$

Eftersom W är en kontinuerlig funktion på det slutna och begränsade intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vet vi att maximum existerar. Låt oss först undersöka ändpunkterna. Vi har

$$W(0) = W\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Alltså måste maximum antas i någon inre punkt av intervallet. Derivering ger

$$\begin{aligned} W'(\phi) &= \frac{4R^3}{3}\left(-\sin\phi \cdot \sin^2\phi + \cos\phi \cdot 2\sin\phi\cos\phi\right) = \\ &= \frac{4R^3}{3}\left(-\sin^2\phi + 2\cos^2\phi\right)\sin\phi = \frac{4R^3}{3}\left(-\sin^2 + 2\left(1 - \sin^2\phi\right)\right)\sin\phi \\ &= \frac{4R^3}{3}\left(2 - 3\sin^2\phi\right)\sin\phi. \end{aligned}$$

Vi ser att singulära punkter saknas varför maximum måste antas i någon kritisk punkt där $W'(\phi) = 0$. Det innebär att

$$\sin\phi = 0 \vee \sin^2\phi = \frac{2}{3}.$$

Det första alternativet är redan undersökt ($\phi = 0$). Låt $\widetilde{\phi}$ vara den vinkel i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ som uppfyller det andra alternativet, dvs

$$\sin^2\widetilde{\phi} = \frac{2}{3}.$$

Då är

$$\cos^2 \widetilde{\phi} = 1 - \sin^2 \widetilde{\phi} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

så att

$$\begin{aligned} \cos \widetilde{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \Longrightarrow \widetilde{b} = 2R \cos \widetilde{\phi} = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \\ \sin \widetilde{\phi} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 0 \Longrightarrow \widetilde{h} = 2R \sin \widetilde{\phi} = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ytterligare en derivering ger

$$W''(\phi) = \frac{4R^3}{3}\left(2\cos\phi - 9\sin^2\phi\cos\phi\right) = \frac{4R^3}{3}\left(2 - 9\sin^2\phi\right)\cos\phi.$$

Därmed ser vi att vinkeln $\widetilde{\phi}$ ger maximum, ty

$$W''\left(\widetilde{\phi}\right) = \frac{4R^3}{3}\left(2 - 9\sin^2\widetilde{\phi}\right)\cos\widetilde{\phi} = \frac{4R^3}{3}\left(2 - 9\cdot\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-16R^3}{3\sqrt{3}} < 0.$$

Det maximala böjmotståndet blir därför

$$W_{\max} = \frac{\widetilde{b}\widetilde{h}^2}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8R^2}{3} = \frac{8R^3}{9\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}.$$