Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M

Tentamensdatum: **2020-10-27**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på Mitt LTU - Rättade tentor.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 165, antal sidor: 2.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Polynomet $P(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 4z + 20$ har nollstället $1 - 3i$. Bestäm samtliga nollställen för $P(z)$.

b) Bestäm det reella talet a så att $(2 + 3i)/(1 + ai)$ har $\pi/4$ som ett argument. (4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{t + t^2, 1 + t^2, 1 + t\}$.

a) Visa att att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

b) Bestäm $[t^2 + t - 1]_{\mathcal{B}}$. (4 p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 16 & -10 \end{bmatrix}$. Diagonalisera A, det vill säga bestäm matriser P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. Använd diagonaliseringen för att bestämma A^9. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Finn en ortogonal bas för $H = \mathrm{span}\{1, t^2\}$.

b) Bestäm $\mathrm{proj}_H t$. (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + 2y = 3e^{2x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$.

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = e^y \sin x$, $y(0) = -2$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till följande Euler-ekvation,

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 3x,\ x > 0$$

(4 p)

7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + xy' + (1 + x^2)y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Denna ekvation har precis en lösning och den är definierad på hela den reella axeln. Kalla lösningen $z(x)$.

a) Bestäm $z''(0)$.

b) Visa att $z(x)$ kan deriveras hur många gånger som helst.

c) Bestäm Taylorpolynomet av ordning tre för $z(x)$ kring punkten $x = 0$. Ledning: Taylorpolynomet av ordning n för $f(x)$ kring $x = a$ ges av

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

(4 p)

M0049M, 201027-1

1.

a) Polynomet $P(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 4z + 20$ har nollstället $1 - 3i$. Bestäm samtliga nollställen för $P(z)$.

b) Bestäm det reella talet a så att $(2 + 3i)/(1 + ai)$ har $\pi/4$ som ett argument. (4 p)

a) POLYNOMET ÄR REELLT (REELLA KOEFF.) SÅ NOLLSTÄLLEN KOMMER I KOMPLEX-KONJUGERADE PAR. $\therefore$ $1+3i$ OCKSÅ ETT NOLLSTÄLLE. ENLIGT FAKTORSATSEN ÄR $P(z)$ DELBART BÅDE MED $z-1+3i$ & $z-1-3i$ OCH DÄRFÖR OCKSÅ MED PRODUKTEN

$(z-1+3i)(z-1-3i) = z^2-2z+10$. UTFÖR DIVISIONEN:

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2+2 \\
\hline
z^2-2z+10 & z^4-2z^3+12z^2-4z+20 \\
 & -\;(z^4-2z^3+10z^2) \\
\hline
 & 2z^2-4z+20 \\
 & 2z^2-4z+20 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

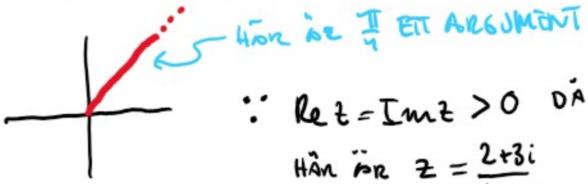
VISSTE ATT DIVISIONEN SKULLE GÅ JÄMNT UT

$\therefore$ $P(z)=(z^2-2z+10)(z^2+2)$

KVAR ATT LÖSA: $z^2+2=0 \iff z=\pm\sqrt{2}\,i$

$\therefore$ $1\pm3i,\ \pm\sqrt{2}\,i$

b)



$\therefore$ $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z > 0$ DÅ ÄR $\frac{\pi}{4}$ ETT ARGUMENT.

HÄR ÄR $z = \frac{2+3i}{1+ai}$

MAN FÅR: $z = \frac{2+3i}{1+ai} = \frac{(2+3i)(1-ai)}{1+a^2} = \frac{2+3a+i(-2a+3)}{1+a^2}$

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \iff 2+3a=-2a+3 \iff 5a=1 \iff a=1/5$

OM $a=1/5$ SÅ ÄR REALDEL = IMAGINÄRDEL OCH POSITIVA SÅ ETT ARGUMENT ÄR $\frac{\pi}{4}$ PRECIS DÅ $a = 1/5$

M0049M, 201027-2

2. Låt $\mathcal{B} = \{t + t^2, 1 + t^2, 1 + t\}$.

   a) Visa att att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

   b) Bestäm $[t^2 + t - 1]_{\mathcal{B}}$. (4 p)

a) VI VET ATT DIMENSIONEN FÖR $\mathbb{P}_2$ ÄR 3 TY $\{1, t, t^2\}$ ÄR EN BAS.
FÖR ATT VARA EN BAS KRÄVS DET TVÅ SAKER: LINJÄRT OBEROENDE OCH SPÄNNA UPP. MEN, DÅ MAN HAR ETT KORREKT ANTAL ELEMENT RÄCKER DET ATT KONTROLLERA EN AV EGENSKAPERNA TY DEN ANDRA FÅS PÅ KÖPET.
VISA LINJÄRT OBEROENDE.

$$c_1(t+t^2) + c_2(1+t^2) + c_3(1+t) = \bar{0} = 0 \quad \text{ALLA } t$$

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} t^2 &: c_1 + c_2 = 0 \\ t^1 &: c_1 + c_3 = 0 \\ t^0 &: c_2 + c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0 \therefore \text{L.O.}$$

$\therefore$ $\mathcal{B}$ ÄR EN BAS FÖR $\mathbb{P}_2$.

b) $c_1(t+t^2) + c_2(1+t^2) + c_3(1+t) = t^2 + t - 1$ ALLA t

$$\left.\begin{aligned} t^2 &: c_1 + c_2 = 1 \\ t^1 &: c_1 + c_3 = 1 \\ t^0 &: c_2 + c_3 = -1 \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$c_3 = -1/2$; $c_2 = -1/2$; $c_1 = 3/2$

$$\therefore [t^2+t-1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

(KONTROLL: $\frac{3}{2}(t+t^2) - \frac{1}{2}(1+t^2) - \frac{1}{2}(1+t) = t^2 + t - 1$ OK)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 16 & -10 \end{bmatrix}$. Diagonalisera A, det vill säga bestäm matriser P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. Använd diagonaliseringen för att bestämma A^9. (4 p)

BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 16 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (10-\lambda)(-10-\lambda)+96=0$

$\iff -100+\lambda^2+96=0 \iff \lambda^2 = 4 \iff \lambda = \pm 2$

KONTROLL: $2+(-2)=0$; $\operatorname{tr} A = 10-10=0$
$2(-2) = -4$; $\det A = -100+96=-4$ OK

EGENVEKTORER:

$\lambda = 2$: $A\bar{v} = 2\bar{v} \iff (A-2I)\bar{v} = \bar{0}$; $\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & 0 \\ 16 & -12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2 FRI. $x_2 = t$

$x_1 = \frac{3}{4}t$ $\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2$: $A\bar{v} = -2\bar{v} \iff (A+2I)\bar{v} = \bar{0}$; $\begin{array}{c} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2 FRI. $x_2 = t$

$x_1 = \frac{1}{2}t$ $\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A = PDP^{-1}$, DÄR $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\left(P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\right)$

VIDARE: $A^9 = (PDP^{-1})^9 = PD^9P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^9 & 0 \\ 0 & \underbrace{(-2)^9}_{-2^9} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} 2^9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = 2^8\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = 2^8\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 16 & -10 \end{bmatrix} = 2^9\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

M0049M, 201027-4

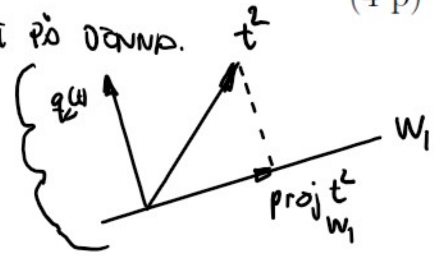
4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Finn en ortogonal bas för $H = \text{span}\{1, t^2\}$.

b) Bestäm $\text{proj}_H t$. (4 p)

a) EN BAS FÖR H ÄR $\{1, t^2\}$. ANVÄND GRAM-SCHMIDT PÅ DENNA.



1) $q_1(t) = 1$; $W_1 = \text{span}\{q_1\}$.

2) $q_2(t) = t^2 - \text{proj}_{W_1} t^2 = t^2 - \dfrac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 =$

$= t^2 - \dfrac{6}{4} \cdot 1 = t^2 - \dfrac{3}{2}$

2') VÄLJ $\hat{q}_2(t) = 2q_2(t) = 2t^2 - 3$

$\therefore$ EN ORTOGONAL BAS FÖR H ÄR $\{1, 2t^2-3\}$

$\langle t^2, 1\rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6$

$\langle 1, 1\rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$

$\langle t, 1\rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$

$\langle t, 2t^2-3\rangle = 0(-3) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 8$

$\langle 2t^2-3, 2t^2-3\rangle = (-3)^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 5^2 = 36$

b) ENLIGT PROJEKTIONSFORMELN GÄLLER DET:

$\text{proj}_H t = \dfrac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 + \dfrac{\langle t, 2t^2-3\rangle}{\langle 2t^2-3, 2t^2-3\rangle}(2t^2-3) =$

$= \dfrac{4}{4} \cdot 1 + \dfrac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{9}{\cancel{36}}}(2t^2-3) = 1 + \dfrac{4}{9}t^2 - \dfrac{2}{3} =$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{9}t^2$

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + 2y = 3e^{2x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$.

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = e^y \sin x$, $y(0) = -2$. (4 p)

a) EKVATIONEN ÄR LINJÄR. DET GÄLLER

$xy' + 2y = 3e^{2x} \iff y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x}e^{2x}$ (GRUNDFORM)

IF: $\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| + C \overset{x>0}{=} 2\ln x + C$

$\therefore$ IF $= e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

VÄLJ $C=0$

$\iff x^2y' + 2xy = 3xe^{2x} \iff \frac{d}{dx}(x^2y) = 3xe^{2x} \iff$

$x^2y = \int 3xe^{2x}dx = 3x\frac{1}{2}e^{2x} - \int 3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C$

$\therefore y = \frac{3}{2x}e^{2x} - \frac{3}{4x^2}e^{2x} + \frac{C}{x^2}$ / MEN, $y(1) = 0$: $0 = \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{4}e^2 + C \iff C = -\frac{3}{4}e^2$

$\therefore$ $\boxed{y = \frac{3}{2x}e^{2x} - \frac{3}{4x^2}e^{2x} - \frac{3e^2}{4x^2}}$ //

b) EKVATIONEN ÄR SEPARABEL. DET GÄLLER

$y' = e^y \sin x \iff \frac{dy}{dx} = e^y \sin x \iff e^{-y}\frac{dy}{dx} = \sin x \iff \int e^{-y}dy = \int \sin x\, dx$

$\iff -e^{-y} = -\cos x + C \iff e^{-y} = \cos x - C \iff -y = \ln(\cos x - C) \iff$

$y = -\ln(\cos x - C)$ / MEN $y(0) = -2$: $-2 = -\ln(1 - C) \iff C = 1 - e^2$

$\therefore$ $\boxed{y = -\ln(\cos x + e^2 - 1)}$ //

M0049M, 201027-6

6. Bestäm samtliga lösningar till följande Euler-ekvation,

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 3x,\ x > 0$$

(4 p)

GÖR VARIABELBYTET $x = e^t$, $z(t) = y(e^t) = y(x)$.

DETTA GER: $xy' = z'$ OCH $x^2y'' = z'' - z'$.

EKVATIONEN BLIR NU:

$$z'' - z' + 2z' - 6z = 3e^t \iff z'' + z' - 6z = 3e^t$$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOMOGEN: KAR. EKV.: $r^2 + r - 6 = 0 \iff r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = -3, 2$

$\therefore z_h = Ae^{-3t} + Be^{2t}$

PARTIKULÄR: ANSATS: $z_p = ae^t$, $z_p' = ae^t$, $z_p'' = ae^t$. IN I EKV.:

$a\cancel{e^t} + a\cancel{e^t} - 6a\cancel{e^t} = 3\cancel{e^t} \iff -4a = 3 \iff a = -3/4 \quad \therefore z_h = -\frac{3}{4}e^t$

$\therefore z = Ae^{-3t} + Be^{2t} - \frac{3}{4}e^t$; TRANSFORMERA TILLBAKA:

$$\therefore \boxed{y = \frac{A}{x^3} + Bx^2 - \frac{3}{4}x}$$

M0049M, 201027-7

7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + xy' + (1+x^2)y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Denna ekvation har precis en lösning och den är definierad på hela den reella axeln. Kalla lösningen $z(x)$.

a) Bestäm $z''(0)$.

b) Visa att $z(x)$ kan deriveras hur många gånger som helst.

c) Bestäm Taylorpolynomet av ordning tre för $z(x)$ kring punkten $x = 0$.
Ledning: Taylorpolynomet av ordning n för $f(x)$ kring $x = a$ ges av

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

(4 p)

a) FÖR LÖSNINGEN GÄLLER DET ATT $z''(x) = -xz'(x) - (1+x^2)z(x)$ (*)

SÅ $z''(0) = 0 - 1 \cdot z(0) = \boxed{-1}$

b) FÖR LÖSNINGEN GÄLLER (*) OCH ATT z KAN DERIVERAS TVÅ GÅNGER. MEN DÅ ÄR HL AV (*) DERIVERBART OCH DÄRMED ÄVEN VÄNSTERLEDET. ∴ z'' ÄR DERIVERBAR, AHA z KAN DERIVERAS TRE GÅNGER. MEN DÅ KAN HÖGERLEDET AV (*) DERIVERAS TVÅ GÅNGER OCH DÄRFÖR ÄVEN VÄNSTERLEDET ∴ z KAN DERIVERAS FYRA GÅNGER. MEN, ... ∴ z KAN DERIVERAS HUR MÅNGA GÅNGER SOM HELST (INDUKTION OM MAN VILL VARA NOGGRANN.

c) TAYLORPOLYNOMET ÄR $P_3(x) = z(0) + z'(0)x + \frac{1}{2}z''(0)x^2 + \frac{1}{6}z'''(0)x^3$.

VI HAR REDAN $z(0) = 1$, $z'(0) = -1$, $z''(0) = -1$. KVAR ATT BESTÄMMA ÄR $z'''(0)$. DERIVERA (*) OCH MAN FÅR:

$z'''(x) = -z'(x) - xz''(x) - 2xz(x) - (1+x^2)z'(x)$ OCH DÅ

$z'''(0) = 1 + 1 = 2$.

∴ $\boxed{P_3(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}$