Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-12-21**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-19 **3**, 20-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

> *Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Antag att $t > 0$. Visa olikheten

$$2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2} < 2 - \frac{1}{t+1}.$$

(2p)

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}
2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2} &< 2 - \frac{1}{t+1} \\
&\Updownarrow \\
\frac{1}{(t+1)^2} &< \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t(t+1)} \\
&\Updownarrow \text{ mult. med } t(t+1)^2 > 0. \\
t &< t+1 \\
&\Updownarrow \\
0 &< 1 \text{ SANT.}
\end{aligned}$$

Alternativ lösning: Om vi flyttar alla termer på höger sida får vi

$$0 < 2 - \frac{1}{t+1} - 2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2},$$

som med gemensam nämnare är

$$0 < \frac{(t+1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{t(t+1)}{t(t+1)^2} - \frac{t}{t(t+1)^2} = \frac{(t^2+2t+1)-(t^2+t)-t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t(t+1)^2},$$

vilket är sant när $t > 0$.

(b) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

(3p)

Lösning: (Induktion) Vi börjar med basfallet $n = 2$. Vi har då att

$$VL = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} < \frac{6}{4} = 2 - \frac{1}{2} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att olikheten är sann för $n = p$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p} \text{ (induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att olikheten då också är sann för $n = p+1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p+1}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} \underset{\text{ind.ant.}}{<} \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} \underset{(1)}{<} 2 - \frac{1}{p+1},$$

där olikheten i uppgift 1. (a) använts (med $t = p$). Enligt induktionsaxiomet är olikheten ovan därför sann för alla heltal $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Anmärkning: Notera att induktionssteget kan visas direkt utan olikheten i uppgift 1.(a) som

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} &= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} \underset{\text{ind.ant.}}{<} \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} < \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p(p+1)} = \\ &= 2 - \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 2 - \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Vi har att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \ldots < \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Anmärkning: Talföljden av delsummor

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

är uppenbart växande då den kan beskrivas rekursivt som

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^2}, \\ s_1 = 1. \end{cases}$$

Den är dessutom uppåt begränsad av 2 på grund av olikheten ovan. Därmed är talföljden s_n konvergent. Man kan på ett liknande sätt visa att det för alla positiva heltal $n \geq 3$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > 1 + \frac{n-1}{2n}.$$

Utifrån dessa två olikheter kan vi konstatera att talföljden $\{s_n\}$ kommer att konvergera mot ett värde som ligger mellan $\frac{3}{2}$ och 2 ty

$$1 + \frac{n-1}{2n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

och

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 1+\frac{n-1}{2n} &= \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\
\lim_{n\to\infty} 2-\frac{1}{n} &= 2.
\end{aligned}$$

Om vi definierar *Riemanns zetafunktion* $\zeta(s)$ som den analytiska fortsättningen av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

så ser vi att talföljden $\{s_n\}$ konvergerar mot värdet

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2).$$

Leonhard Euler visade 1734 (känt som *Baselproblemet*) att

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Den så kallade *Riemannhypotesen*, formulerad 1859 av Bernhard Riemann, är ett av världens mest kända hittills olösta matematiska problem. Det är ett av David Hilberts lista över 23 viktiga problem som år 1900 fortfarande var olösta och ett av Clay-institutets sju millennieproblem från år 2000. Kort formulerat handlar Riemannhypotesen om att bevisa att realdelen av alla icketriviala nollställen till Riemanns zetafunktion är $\frac{1}{2}$. Ett korrekt bevis till ett millennieproblem ger en prissumma på 1 miljon USD. Hittills har bara ett enda millennieproblem, *Poincarés förmodan*, lösts. Det löstes år 2003 av den ryske matematikern Grigori Perelman, för det belönades han även med *Fieldsmedaljen* 2006, matematikens motsvarighet till Nobelpriset. Han vägrade dock ta emot prispengarna i bägge dessa fall.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$$
   (1p)

   Lösning: Låt n vara ett positivt heltal. Notera att

   $$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{\overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}^{n \text{ faktorer}}}{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n}\cdot \overbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}}^{n-1 \text{ faktorer}} = \frac{1}{n} \to 0$$

   när $n\to\infty$. Därmed följer det av instängningssatsen att

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

(b)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t^2)-(1-t^2)}}{(1+t)-(1-t)}.$$

(2p)

Lösning: Förenkling ger

$$\frac{\sqrt{(1+t^2)-(1-t^2)}}{(1+t)-(1-t)}=\frac{\sqrt{2t^2}}{2t}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{t^2}}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|t|}{t}.$$

Därmed får vi vänster- och högergränsvärdena

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0-}\frac{\sqrt{(1+t^2)-(1-t^2)}}{(1+t)-(1-t)} &= \lim_{t\to 0-}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|t|}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-t)}{t}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{(1+t^2)-(1-t^2)}}{(1+t)-(1-t)} &= \lim_{t\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|t|}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

ty

$$\sqrt{t^2}=|t|=\begin{cases} t, & \text{om } t\geq 0,\\ -t, & \text{om } t<0.\end{cases}$$

Således existerar ej gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t^2)-(1-t^2)}}{(1+t)-(1-t)}.$$

Anmärkning: funktionen

$$\operatorname{sgn}(t)=\frac{|t|}{t}=\begin{cases} 1, & \text{om } t>0,\\ -1, & \text{om } t<0,\\ \text{odef.} & \text{om } t=0,\end{cases}$$

kallas för *signumfunktionen*. I vissa tillfällen (till exempel inom programmering) är det praktiskt att definiera $\operatorname{sgn}(0)=0$.

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-8}{x-2}$$

(2p)

Lösning: Funktionen

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

är definierad (och kontinuerlig) i alla punkter $x\neq 2$. Således blir

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-8}{x-2}=f(1)=\frac{1^3-8}{1-2}=\frac{-7}{-1}=7.$$

3. Finn de värden på r för vilka kurvorna

$$y = f(x) = \arcsin rx$$

och

$$y = g(x) = \arccos rx$$

skär varandra under rät vinkel. I vilka punkter skär kurvorna varandra? **Ledning:** *finns det något enkelt samband mellan dessa funktioner?* (5p)

Lösning: Vi vet att

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$$

för $t \in [-1, 1]$ ty

$$\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

Låt oss först visa att kurvorna skär varandra. Kalla skärningspunkten (a, b). För skärning måste vi ha lika y-värde för lika x-värde, dvs

$$b = \arcsin ra = \arccos ra = \frac{\pi}{2} - \arcsin ra.$$

Således måste

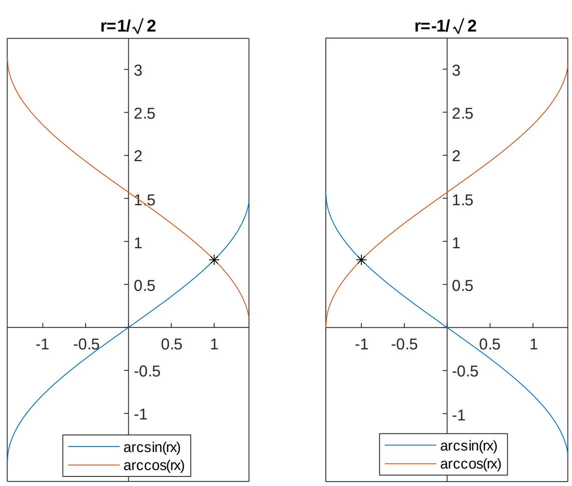
$$2\arcsin ra = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow b = \arcsin ra = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow ra = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

eftersom

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kurvorna skär därför varandra i punkten

$$(a, b) = \left(\frac{1}{r\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right).$$



Låt oss sedan bestämma r så att kurvorna skär varandra under rät vinkel i denna punkt. Det innebär att tangenterna till kurvorna i skärningspunkten skär varandra under rät vinkel. Funktionerna f och g har derivata

$$f'(x) = \frac{r}{\sqrt{1-(rx)^2}}$$

respektive

$$g'(x) = -\frac{r}{\sqrt{1-(rx)^2}}.$$

Därmed har tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna (a,b) lutningar

$$\begin{aligned} k_1 &= f'(a) = \frac{r}{\sqrt{1-(ra)^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = r\sqrt{2}, \\ k_2 &= g'(a) = -\frac{r}{\sqrt{1-(ra)^2}} = -\frac{r}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -\frac{r}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -r\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Eftersom kurvorna skall skära varandra under rät vinkel måste

$$k_1 k_2 = -1.$$

Det medför att

$$-1 = k_1 k_2 = r\sqrt{2}\cdot\left(-r\sqrt{2}\right) = -2r^2 \Longleftrightarrow r^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi konstaterar således att kurvorna skär varandra under rät vinkel om

$$r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

i punkterna

$$(a,b) = \begin{cases} \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \text{ om } r = 1/\sqrt{2}, \\ \left(-1, \frac{\pi}{4}\right), \text{ om } r = -1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Ekvationen

$$4x^2y^2 = 9x^2 + 9y^2$$

beskriver en så kallad *kruciform-kurva*.

(a) Finn tangenten till kurvan genom punkten $\left(\sqrt{3}, 3\right)$. (4p)

Lösning: Vi kontrollerar först att punkten $\left(\sqrt{3}, 3\right)$ ligger på kurvan. Det stämmer, ty

$$VL = 4\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3^2 = 108 = 9\left(\sqrt{3}\right)^2 + 9\cdot 3^2 = HL.$$

För att finna tangentens lutning sätter vi $y = y(x)$ och deriverar uttrycket implicit med avseende på x. Vi får

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(4x^2y^2\right) &= \frac{d}{dx}\left(9x^2+9y^2\right) \\
&\Downarrow \\
8x\cdot y^2 + 4x^2\cdot 2yy' &= 18x + 18yy' \\
&\Updownarrow \\
4x^2yy' - 9yy' &= 9x - 4xy^2 \\
&\Updownarrow \\
\left(4x^2-9\right)yy' &= \left(9-4y^2\right)x \\
&\Updownarrow \\
y' &= \frac{\left(9-4y^2\right)x}{\left(4x^2-9\right)y}
\end{aligned}
$$

Med $x = \sqrt{3}$ och $y = 3$ insatta ger detta

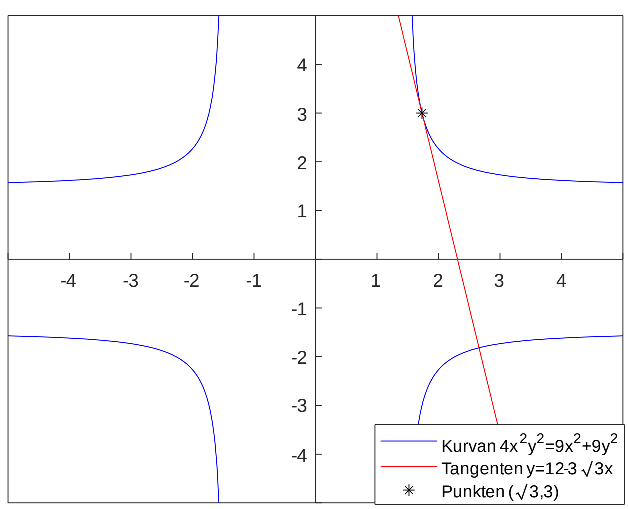
$$
y' = \frac{\left(9-4\cdot 3^2\right)\sqrt{3}}{\left(4\left(\sqrt{3}\right)^2-9\right)3} = \frac{-27\sqrt{3}}{9} = -3\sqrt{3}.
$$

Därmed är tangentens lutning i punkten $\left(\sqrt{3},3\right)$

$$
k = -3\sqrt{3}.
$$

Tangentens ekvation fås slutligen ur enpunktsformeln

$$
\begin{aligned}
y-3 &= -3\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right) \\
&\Updownarrow \\
y &= 12-3\sqrt{3}x.
\end{aligned}
$$



(b) Beräkna arean av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten i uppgift 4.(a). (1p)

Lösning: Tangenten

$$y = 12 - 3\sqrt{3}x$$

skär y-axeln när $x = 0$, dvs i $y_0 = 12$. Tangenten skär x-axeln när $y = 0$, dvs när

$$x_0 = \frac{12}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Således har den inneslutna triangeln area

$$T = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{4 \cdot 12}{2\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ a.e.}$$

5. Betrakta funktionen

$$y = x^{1/x}, \ x > 0.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. **Ledning:** *skriv först om funktionen på lämpligt sätt.* (3p)

Lösning: Då $x > 0$ är $y = f(x) > 0$. Logaritmering följt av exponentiering ger då

$$y = f(x) = x^{1/x} \Longleftrightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x \Longleftrightarrow y = e^{\ln y} = e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Vi undersöker först vad som händer när x går mot 0 från höger. Vi har att

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = -\infty.$$

Således får vi gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{\ln x}{x}} \underset{e^{\cdot}\text{ kont.}}{=} e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}} = 0.$$

Låt oss sedan se vad som händer när x går mot $+\infty$. Vi har att

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \underset{e^{\cdot}\text{ kont.}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} \underset{\text{STD}}{=} e^0 = 1,$$

varför grafen har en enkelsidig horisontell asymptot $y = 1$ åt höger. För övrigt är funktionen definierad och begränsad på hela $(0, \infty)$, så inga andra asymptoter kan finnas. Derivering av funktionen ger

$$y' = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

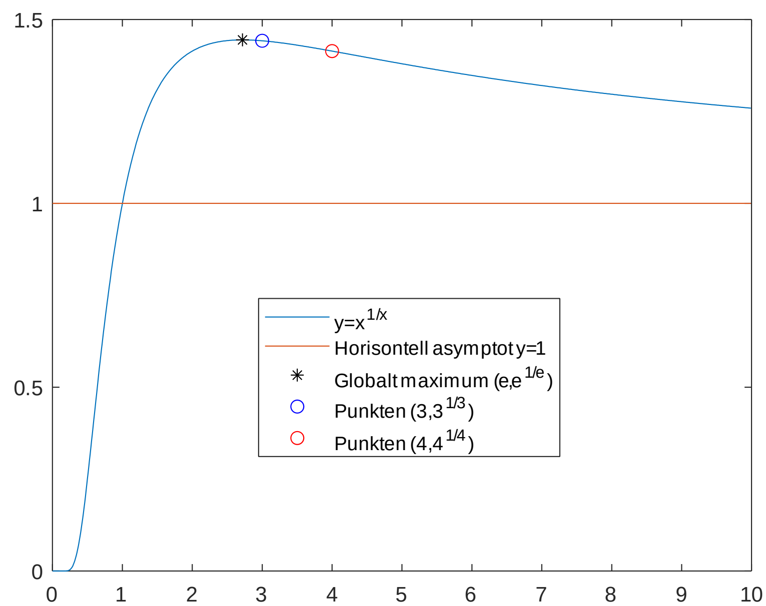
Funktionen har därmed en kritisk punkt (där $y' = 0$), nämligen $x = e$. Teckenstudium ger

	0		e	
$1 - \ln x$		$+$	0	$-$
x^2		$+$		$+$
$e^{\frac{\ln x}{x}}$		$+$		$+$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Funktionen har alltså ett lokalt (och globalt) maximum i $x = e$ som är

$$f(e) = e^{1/e}.$$

Funktionen är växande på intervallet $(0, e]$ och avtagande på intervallet $[e, \infty)$. Vi kan slutligen skissera grafen som



(b) Ange funktionens värdemängd. Motivera! (1p)
Lösning: Funktionen

$$f(x) = x^{1/x}, \ x > 0,$$

är en kontinuerlig funktion. När x går från $0+$ mot e växer $y = f(x)$ från $0+$ till $e^{1/e}$. För $x > e$ avtar sedan y ner mot 1. Således är funktionens värdemängd

$$R(f) = \left(0, e^{1/e}\right].$$

(c) Avgör vilket av talen $\sqrt[3]{3}$ och $\sqrt[4]{4}$ som är störst. Motivera! (1p)
Lösning: Funktionen

$$y = f(x) = x^{1/x}$$

är strängt avtagande för $x \geq e$. Då

$$e < 3 < 4$$

gäller således

$$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3} > 4^{1/4} = \sqrt[4]{4}.$$

Alternativ lösning: Notera att

$$81 = 3^4 > 4^3 = 64.$$

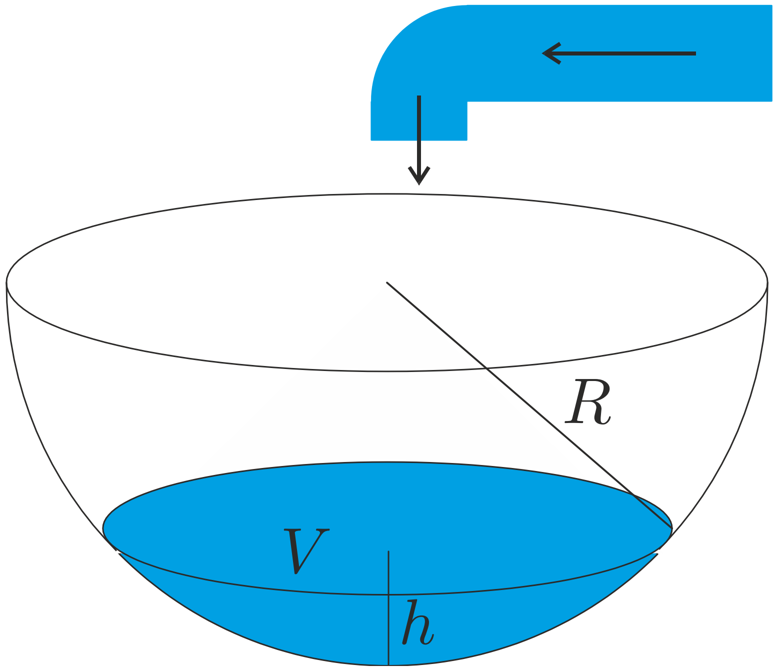
Om vi upphöjer bägge led i olikheten till $1/12$ får vi

$$3^{4/12} = \left(3^4\right)^{1/12} > \left(4^3\right)^{1/12} = 4^{3/12},$$

således

$$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3} > 4^{1/4} = \sqrt[4]{4}.$$

6. En tank har halvsfärisk form med radie $R = 2$ m. Tanken fylls på uppifrån med ett inflöde av vatten, se nedanstående figur.



När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen V av

$$V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3} \text{ m}^3.$$

Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är $\frac{1}{2}$ m och vatten tillförs med en hastighet av 11 liter per sekund? (5p)

Lösning: Här är volymen $V = V(t)$ en funktion av tiden. Därmed kommer också höjden att bli en funktion av tiden, $h = h(t)$. Derivering av uttrycket med avseende på tiden t ger då

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6hR - 3h^2\right) \cdot h'(t) = \pi\left(2hR - h^2\right) h'(t).$$

Således ändras djupet med hastigheten

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi (2hR - h^2)}.$$

I synnerhet, vid den tidpunkt $t = t_0$ då

$$\begin{aligned} V'(t_0) &= 11 \text{ l/s} = \frac{11}{1000}\text{m}^3/\text{s}, \\ h(t_0) &= \frac{1}{2}\text{m}, \end{aligned}$$

så ändras djupet med hastigheten

$$h'(t_0) = \frac{\frac{11}{1000}}{\pi\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{11}{1000\pi\left(2 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{11}{1000\pi \cdot \frac{7}{4}} = \frac{44}{7\pi \cdot 1000}\text{m/s}.$$

Svar: Djupet ökar med $\frac{44}{7\pi}$ mm/s vid denna tidpunkt.

Anmärkning: Då

$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

(felet är cirka 0.04%) så ser vi att djupet approximativt ökar med

$$\frac{44}{7 \cdot \frac{22}{7}} = 2 \text{ mm/s}$$

vid denna tidpunkt.