LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2021-12-20**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Lös $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$.

b) Ge en geometrisk beskrivning av de komplexa tal z som uppfyller

$$|(1-i)z + 1| = 3.$$

(4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{t^3 + 2t^2, t^2 - 4, t + 2\}$ vara en mängd i vektorrummet $\mathbb{P}_3$.

a) Visa att $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende.

b) Bestäm ett polynom $p(t)$ så att $\mathcal{C} = \{t^3 + 2t^2, t^2 - 4, t + 2, p(t)\}$ är en bas för $\mathbb{P}_3$.

c) Bestäm $[t^3]_{\mathcal{C}}$. (4 p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisera A, det vill säga finn matriser P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. (4 p)

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm minsta-kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Vilket är det minsta värde $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ kan få om man får välja $\mathbf{x}$ fritt? (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^{3x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$.

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - 2y^2 = xy^2$, $y(-2) = -2$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till

$$x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x),\ x > 0.$$

(4 p)

7.

a) Låt V och W vara vektorrum. Vad menas med att $T : V \to W$ är en linjär operator? Ge en definition.

b) Låt $M_{2\times 2}$ vara vektorrummet av två gånger två matriser. Betrakta funktionerna determinanten $\det(A)$ och spåret (summan av diagonalelementen) $\mathrm{tr}(A)$, från $M_{2\times 2}$ till $\mathbb{R}$. Avgör för var och en av dem om de är linjära eller ej. (4 p)

Lösningsförslag M0049M/M0031M, 211220

1. a) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0 \iff$

$\left(z - \frac{3i}{2}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{3i}{2}\right)^2}_{= -\frac{9}{4}} - 3 + i = 0 \iff$

$\left(z - \frac{3i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - i$. LÅT $\boxed{w = z - \frac{3i}{2}}$

$\therefore$

$w^2 = \frac{3}{4} - i$. ANSÄTT $\boxed{w = a + bi}$

DETTA GER $(a+bi)^2 = \frac{3}{4} - i \iff$

$a^2 + 2abi - b^2 = \frac{3}{4} - i \iff$

Re: $a^2 - b^2 = \frac{3}{4}$ (1)

Im: $2ab = -1$ (2)

UR (2) FÅS $\boxed{b = -\frac{1}{2a}}$ IN I (1) GER

$a^2 - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4} \iff a^4 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4} = 0 \iff$

$a^2 = \frac{3}{8} (+) \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{16}{64}} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \quad \therefore \boxed{a = \pm 1}$

ANNARS $a^2 < 0$.

$a = 1$: $b = -\frac{1}{2}$, $w = 1 - \frac{1}{2}i$, $z = \underline{1+i}$

$a = -1$: $b = \frac{1}{2}$, $w = -1 + \frac{1}{2}i$, $z = \underline{-1+2i}$

RÖTTERNA ÄR: $1+i$ & $-1+2i$ //

b) $|(1-i)z + 1| = 3 \iff \left|(1-i)\left(z + \underbrace{\frac{1}{1-i}}_{=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}\right)\right| = 3$

$\iff \overbrace{|1-i|}^{=\sqrt{2}}\,\left|z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = 3 \iff$

$\left|z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ EN CIRKEL (I DET KOMPLEXA TALPLANET) MED MITTPUNKT $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ OCH RADIE $\frac{3}{\sqrt{2}}$. //

2. $\mathcal{B} = \{ t^3+2t^2, t^2-4, t+2 \}$

a) $c_1(t^3+2t^2)+c_2(t^2-4)+c_3(t+2) = \bar{0} = 0$ ALLA t.

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} t^3&: c_1 = 0 \\ t^2&: 2c_1+c_2 = 0 \\ t&: c_3 = 0 \\ t^0&: -4c_2+2c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

$\therefore$ LINJÄRT OBEROENDE. //

b) DET GÄLLER ATT HITTA ETT POLYNOM SOM INTE LIGGER I HÖLJET AV $\mathcal{B}$ TY DÅ BLIR C LINJÄRT OBEROENDE OCH DÄRFÖR EN BAS ($\dim \mathbb{P}_3 = 4$) ENLIGT KÄND SATS.

BESTÄM HÖLJET.

$$c_1(t^3+2t^2)+c_2(t^2-4)+c_3(t+2) = \alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta$$

IDENT.:

$$\begin{aligned} t^3&: c_1 = \alpha \\ t^2&: 2c_1+c_2 = \beta \\ t&: c_3 = \gamma \\ t^0&: -4c_2+2c_3 = \delta \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & -4 & 2 & \delta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & -4 & 2 & \delta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & 4\beta-8\alpha+\delta \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta-8\alpha+\delta-2\gamma \end{array}\right]$$

LÖSNING FINNS $\Leftrightarrow 8\alpha-4\beta+2\gamma-\delta = 0$

MED BLICKEN MOT c) VÄLJER VI $\beta=\gamma=\delta=0,\ \alpha=1$ $\therefore$ $p(t)=t^3$ LIGGER INTE I HÖLJET, SÅ DEN LÄGGER VI TILL, $p(t)=t^3$ //

(MAN KAN FINNA ETT $p(t)$ ENKELT GENOM ATT SE ATT ALLA POLYNOM I $\mathcal{B}$ HAR NOLLSTÄLLE I -2 OCH DÅ ÄVEN ALLA I HÖLJET. SÅ SAMTLIGA POLYNOM $q(t)$ MED $q(-2)\neq 0$ FUNGERAR).

c) $C = \{ t^3+2t^2, t^2-4, t+2, t^3 \}$

$$[t^3]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ (UPPENBART) //

3. BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

EGENVÄRDE: KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ -4+\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda-4)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)\Bigg(-1\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\substack{=\lambda-2-2 \\ =\lambda-4}} + (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\substack{=(3-\lambda)(2-\lambda)-2 \\ =\lambda^2-5\lambda+4}}\Bigg) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-4)(4-\lambda-\lambda^2+5\lambda-4)=0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(-\lambda^2+4\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda-4)(\lambda-4)=0$$

$\therefore$ $\lambda=0$; $\lambda=-4$ MULT. 2.

EGENVEKTORER: $\lambda=0$: $A\bar{v}=0\bar{v} \Leftrightarrow A\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1, x_2 BUNDNA
x_3 FRI; $x_3=t$ GER
$x_2=t$, $x_1=t$

$\therefore$ $\bar{v}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ VÄLJ $\bar{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=4$: $A\bar{v}=4\bar{v} \Leftrightarrow (A-4I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN, x_2, x_3 FRIA. $x_2=s$, $x_3=t$

GER $x_1=-s-2t$

$$\therefore\ \bar{v}=\begin{bmatrix}-s-2t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

VÄLJ $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

LÅT $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

OCH DETTA GER: $A=PDP^{-1}$

4. a) MINSTA-KVADRATLÖSNINGAR TILL

$A\bar{x}=\bar{b}$ ÄR LÖSNINGAR TILL

$A^TA\bar{x}=A^T\bar{b}$ (NORMAL EKV.)

VI FÅR

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\bar{x}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\bar{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_2 = 1/3 \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$\therefore\ \bar{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ ÄR MINSTA-KVADRATLÖSNINGEN //

b) ENLIGT TEORIN GES DET MINSTA VÄRDET AV MINSTA-KVADRATLÖSNINGEN.

SÅ DET MINSTA VÄRDET ÄR NORMEN AV $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}-\bar{b}=$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

OCH VÄRDET ÄR:

$$\left\|\begin{bmatrix} -1/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+9+4+16}$$

$$=\frac{\sqrt{30}}{3}$$ //

5. a) $y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^{3x}, \quad x > 0$

$\Big[$ IF: $\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C = -\ln x + C$

Välj $C=0$: $\quad$ IF $= e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ $\Big]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = xe^{3x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = xe^{3x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}y = \int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}x - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$

$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{1}{9}xe^{3x} + Cx$

MEN, $y(1) = 0$: $\quad 0 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + C$

$\Leftrightarrow C = -\frac{2}{9}e^3$

$\therefore \; y = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{1}{9}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^3 x$

b) $y' - 2y^2 = xy^2 \Leftrightarrow y' = xy^2 + 2y^2$

$\Leftrightarrow y' = y^2(x+2) \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}y' = x+2 \Leftrightarrow$

$\int y^{-2}\,dy = \int (x+2)\,dx \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + 2x + C \Leftrightarrow y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + 2x + C}$

MEN, $y(-2) = -2$: $\quad -2 = \frac{-1}{\underbrace{\frac{4}{2} - 4}_{=-2} + C} \Leftrightarrow$

$C = 5/2$

$\therefore \; y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{2}} = \frac{-2}{x^2 + 4x + 5}$

6. $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$, $x > 0$

[VARIABELBYTE: $x = e^t$, $z(t) = y(x)$ GER $x^2y'' = z'' - z'$; $xy' = z'$]

SÅ VI FÅR:

$$z'' - z' - 2z = \sin t$$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

Hom.: KAR.EKV.: $r^2 - r - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2; -1$$

$$\therefore z_h = Ae^{2t} + Be^{-t}$$

PART.: ANSATS: $z_p = a\cos t + b\sin t$

$z_p' = -a\sin t + b\cos t$, $z_p'' = -a\cos t - b\sin t$. IN I EKV.:

$$-a\cos t - b\sin t - (-a\sin t + b\cos t) - 2(a\cos t + b\sin t) = \sin t$$

IDENT.:

$$\begin{array}{ll} \cos: & -a - b - 2a = 0 \\ \sin: & -b + a - 2b = 1 \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -3a - b = 0 \\ a - 3b = 1 \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3a - b = 0 \\ 3a - 9b = 3 \end{cases} \therefore 10b = -3 \;\therefore\; b = -\frac{3}{10}$$

OCH $a = \frac{1}{10}$

$$\therefore z_p = \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t$$

$$\therefore z = z_h + z_p = Ae^{2t} + Be^{-t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t$$

TRANSFORMERAS TILLBAKA:

$$y = Ax^2 + Bx^{-1} + \frac{1}{10}\cos(\ln x) - \frac{3}{10}\sin(\ln x)$$

7. a) ATT T ÄR LINJÄR BETYDER

$$(H): \; T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$$

$$(A): \; T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$

ALT.: $(L): \; T(c\bar{u}+d\bar{v}) = cT(\bar{u}) + dT(\bar{v})$.

b) DETERMINANTEN ÄR INTE LINJÄR.

EXEMPELVIS: $4 = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq 2\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$

ADDITIVITETEN GÄLLER INTE HELLER.

EXEMPELVIS $0 = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$

SPÅRET ÄR LINJÄR. LÅT $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$$(H): \; \mathrm{tr}(cA) = \mathrm{tr}\begin{bmatrix} ca_1 & ca_2 \\ ca_3 & ca_4 \end{bmatrix} = ca_1 + ca_4 = c(a_1+a_4) = c\,\mathrm{tr}\,A$$

$$(A): \; \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} = a_1+b_1+a_4+b_4 = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$$