Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-12-21**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att produkten

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

(4p)

(b) Beräkna den oändliga produkten

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

(1p)

2. Avgör och motivera huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}.$$

(2p)

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{3x+2}+e^{2x+1}-9^{x-2}}{3^{2x-3}-7^{x+3}}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)^4-x^4}{h}-\frac{x^4-(x-h)^4}{h}}{h}.$$

(2p)

3. Visa att kurvorna

$$y = \frac{8}{7+2x^2}$$

och

$$y = 2x^2$$

skär varandra under räta vinklar. (5p)

4. Antag att $y = y(x)$ är en implicit definierad icke-konstant funktion som uppfyller den ickelinjära differentialekvationen

$$(y')^2 = 1 - y^2.$$

(a) Finn y'', y''' och $y^{(4)}$ uttryckta i y och y'. (2p)

(b) Finn taylorpolynomet $P_4(x)$ av ordning 4 till y kring 0 om vi vet att $y(0) = 1$. *Ledning: vad måste då $y'(0)$, $y''(0)$, osv. vara?* (2p)

5. Definiera funktionen

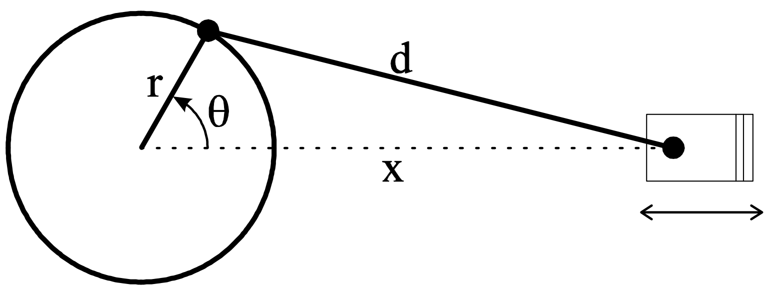
$$y = f(x) = x^3 e^{-x}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Skissera kurvan. (4p)

(b) (**M0047M**): Beskriv med kod/kommandon hur grafen till denna funktion skulle kunna plottas i MATLAB på ett sådant sätt att de intressanta delarna av grafen framträder. (1p)

(b) (**M0029M**): Ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (1p)

6. Chefsingenjör Ronald har konstruerat en ny kolvmotor, se nedanstående figur.



Antag att vevaxeln roterar moturs med en hastighet av 6500 rpm (6500 varv per minut). På vevaxeln sitter ett svänghjul med radie $r = 3$ cm i vilket en vevstake med längd $d = 7$ cm är fäst. I andra änden av vevstaken är en rörlig kolv fäst. När vinkeln θ ändras kommer då kolven att utföra horisontell rörelse x.

(a) Vad är avståndet x vid tillfället när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$? (2p)

(b) Hjälp Ronald att beräkna kolvens hastighet när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$. (3p)