Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M/M0031M

Tentamensdatum: **2020-05-28**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^2 + (1+i)z - 6 - 2i = 0$.

b) Bestäm realdel, imaginärdel, absolutbelopp och ett argument för e^{2+3i}. (4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{1 + t^2, 2 - t, 2t + t^2\}$.

a) Visa att att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

b) Bestäm $[2 - t^2]_{\mathcal{B}}$. (4 p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisera A, det vill säga bestäm matriser P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. (4 p)

4. Betrakta följande data $\begin{array}{c||cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$. Bestäm den funktion på formen

$$y = \alpha + \beta x^2,$$

som bäst anpassar till datapunkterna i minsta-kvadratmetodens mening. (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' - 2y = x^4 e^{2x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$.

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $e^x y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till $y''' + 3y'' + 7y' + 5y = 2e^{2x}$.
Ledning: e^{-x} är en homogenlösning. (4 p)

7. Låt V och W vara vektorrum och $T : V \to W$ en linjär operator.

a) Vad menas med att T är en linjär operator från V till W? Ge en definition.

b) Vad menas med att H är ett underrum till W? Ge en definition.

c) Värdemängden för den linjära operatorn T är definierat som

$$\text{range}(T) = \{\mathbf{w} \in W : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \text{ för något } \mathbf{v} \in V\}.$$

Bevisa att range(T) är ett underrum till W. (4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG M0049M / M0031M 28/5 - 20

1 a) $z^2 + (1+i)z - 6 - 2i = 0 \iff$

$(z + \frac{1+i}{2})^2 - \underbrace{(\frac{1+i}{2})^2}_{= i/2} - 6 - 2i = 0$; LÅT $\boxed{w = z + \frac{1+i}{2}}$

$\iff w^2 = 6 + \frac{5}{2}i$; $\boxed{\text{LÅT } w = a + bi}$

$\iff a^2 + 2abi - b^2 = 6 + \frac{5}{2}i \iff$

Re: $a^2 - b^2 = 6$ (1)

Im: $2ab = +5/2$ (2) ; UR (2) FÅS $\boxed{b = +\frac{5}{4a}}$ IN I (1) GER

$a^2 - \frac{25}{16a^2} = 6 \iff a^4 - 6a^2 - \frac{25}{16} = 0 \iff$

$a^2 = 3 (\pm) \sqrt{9 + \frac{25}{16}} = 3 (\pm) \frac{13}{4} = \frac{25}{4} \iff a = \pm \frac{5}{2}$

$a = \frac{5}{2}$: $b = \frac{1}{2}$, $w = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ VILKET GER $z = \underline{\underline{2}}$

$a = -\frac{5}{2}$: $b = -\frac{1}{2}$, $w = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$ VILKET GER $z = \underline{\underline{-3-i}}$

b) $e^{2+3i} = e^2 e^{3i} = e^2(\cos 3 + i \sin 3)$

$\therefore$ REALDEL : $\underline{\underline{e^2 \cos 3}}$ IMAGINÄRDEL $\underline{\underline{e^2 \sin 3}}$

BELOPP : $\underline{\underline{e^2}}$ ETT ARGUMENT $\underline{\underline{3}}$

2 a) B INNEHÅLLER 3 ELEMENT OCH $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ (TY $\{1, t, t^2\}$ EN BAS)

DET RÄCKER SÅLEDES ATT VISA LINJÄRT OBEROENDE.

ANTAG $c_1(1+t^2) + c_2(2-t) + c_3(2t+t^2) = 0$ ← alla t

OCH VISA ATT DET FÖLJER ATT $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

IDENT.: $\left.\begin{aligned} t^0 &: c_1 + 2c_2 = 0 \\ t^1 &: -c_2 + 2c_3 = 0 \\ t^2 &: c_1 + c_3 = 0 \end{aligned}\right\}$

UTÖKAD KOEFF.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\therefore$ B ÄR LINJÄRT OBEROENDE OCH ENLIGT RESONEMANGET OVAN DÄRFÖR EN BAS FÖR $\mathbb{P}_2$.

b) BESTÄM c_1, c_2, c_3 SÅ ATT

$$c_1(1+t^2) + c_2(2-t) + c_3(2t+t^2) = 2 - t^2$$

IDENT.: $\left.\begin{aligned} t^0 &: c_1 + 2c_2 = 2 \\ t^1 &: -c_2 + 2c_3 = 0 \\ t^2 &: c_1 + c_3 = -1 \end{aligned}\right\}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$ $c_3 = 1,\ c_2 = 2,\ c_1 = 2 - 4 = -2$

$$\therefore [2 - t^2]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

KONTROLL: $-2(1+t^2) + 2(2-t) + 1(2t+t^2) = 2 - t^2$ ok

3) $A = \begin{bmatrix}1&3&3\\-3&-5&-3\\3&3&1\end{bmatrix}$ EGENVÄRDEN/VEKTORER

EGENVÄRDEN KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I)=0 \iff \begin{vmatrix}1-\lambda&3&3\\-3&-5-\lambda&-3\\3&3&1-\lambda\end{vmatrix}=0 \iff \begin{vmatrix}1-\lambda&3&3\\-2-\lambda&-2-\lambda&0\\3&3&1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\iff (-2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&3&3\\1&1&0\\3&3&1-\lambda\end{vmatrix}=0 \iff (-2-\lambda)\left(-1\underbrace{\begin{vmatrix}3&3\\3&1-\lambda\end{vmatrix}}_{\substack{=3-3\lambda-9\\=-3\lambda-6}}+1\underbrace{\begin{vmatrix}1-\lambda&3\\3&1-\lambda\end{vmatrix}}_{\substack{=1-2\lambda+\lambda^2-9\\=\lambda^2-2\lambda-8}}\right)=0$

$\iff (-2-\lambda)(3\lambda+6+\lambda^2-2\lambda-8)=0 \iff$

$(-2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=0$ KVAR ATT LÖSA $\lambda^2+\lambda-2=0$:

$\lambda = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} = -2;\ 1$

$\therefore$ EGENVÄRDENA ÄR -2 MULT. 2; 1 [KOLL: $-2-2+1=\underline{-3}$; $\operatorname{tr}A = 1-5+1 = \underline{-3}$ OK]

EGENVEKTORER

$\lambda=-2$: $A\bar{v} = -2\bar{v} \iff (A+2I)\bar{v}=\bar{0}$

$\left[\begin{array}{ccc|c}3&3&3&0\\-3&-3&-3&0\\3&3&3&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2, x_3 FRIA; $x_2=s$, $x_3=t$ GER $x_1=-s-t$

$\therefore \bar{v} = s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=1$: $A\bar{v} = 1\bar{v} \iff (A-I)\bar{v}=\bar{0}$

$\left[\begin{array}{ccc|c}0&3&3&0\\-3&-6&-3&0\\3&3&0&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$ x_1, x_2 BUNDNA, x_3 FRI

$x_3=t$, $x_2=-t$, $x_1=t$ $\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$; VÄLJ $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\therefore A = PDP^{-1}$ MED $P = \begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

4) SÄTT IN PUNKTERNA I MODELLEN:

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha \\ 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha + 4\beta \end{cases}$$

LÖSNING SAKNAS, $\alpha + \beta$ KAN INTE BÅDE VARA 2 OCH 1.

PÅ MATRISFORM

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MOTSVARANDE NORMALEKVATION:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \underline{\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 5 \\ 6 & 18 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 15 \\ 12 & 36 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 15 \\ 0 & 18 & -9 \end{array}\right] \quad \beta = \underline{-1/2}, \ \alpha = \frac{15+9}{12} = \underline{2}$$

$\therefore$ DEN OPTIMALA FUNKTIONEN ÄR $\underline{\underline{y = 2 - \frac{1}{2}x^2}}$

5 a) $xy' - 2y = x^4 e^{2x} \iff y' - \frac{2}{x}y = x^3 e^{2x} \iff$

$$\Big[\ \text{IF: } \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln|x| + C = -2\ln x + \underbrace{C}_{\text{sätt } = 0} \ ; \ \text{IF} = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{e^{\ln x^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2}}}\ \Big]$$

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = xe^{2x} \iff \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = xe^{2x} \iff$$

$$\frac{1}{x^2}y = \int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$\iff y = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{1}{4}x^2e^{2x} + Cx^2$$

MEN, $y(1) = 0$: $0 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + C \iff C = -\frac{1}{4}e^2$

$$\therefore \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{1}{4}x^2e^{2x} - \frac{1}{4}e^2x^2}}$$

b) $e^x y' = 1 + y^2 \iff \frac{1}{1+y^2}y' = e^{-x} \iff \int \frac{1}{1+y}\,dy = \int e^{-x}\,dx \iff$

$$\arctan y = -e^{-x} + C \iff y = \tan(-e^{-x} + C)$$

$$-\frac{\pi}{2} < -e^{-x} + C < \frac{\pi}{2}$$

MEN, $y(0) = 0$: $0 = \tan(-1 + C) \ \therefore \ C = 1$

$$\therefore \ \underline{y = \tan(1 - e^{-x})}$$

6 "HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM: KAR-EKV.: $r^3+3r^2+7r+5=0$. LÖSNINGEN GER ATT $r=-1$ MÅSTE VARA EN ROT. DELA POLYNOMET MED $r+1$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & r^2+2r+5 \\
\hline
r+1 & r^3+3r^2+7r+5 \\
 & r^3+r^2 \\
\hline
 & 2r^2+7r+5 \\
 & 2r^2+2r \\
\hline
 & 5r+5 \\
 & 5r+5 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

VISST!

$\therefore$ $r^3+3r^2+7r+5=0 \iff (r+1)(r^2+2r+5)=0$

KVAR ATT LÖSA: $r^2+2r+5=0 \iff$

$r=-1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

$$\therefore \quad y_h = Ae^{-x}+e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

PART: ANSATS: $y_p = ae^{2x}$, $y_p' = 2ae^{2x}$, $y_p'' = 4ae^{2x}$, $y_p''' = 8ae^{2x}$

IN I EKV.: $8a\cancel{e^{2x}}+3\cdot 4a\cancel{e^{2x}}+7\cdot 2a\cancel{e^{2x}}+5a\cancel{e^{2x}} = 2\cancel{e^{2x}} \iff$

$39a=2 \iff a=\frac{2}{39}$

$\therefore$ $y_p = \frac{2}{39}e^{2x}$

$\therefore$ DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN ÄR:

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x}+e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x)+\frac{2}{39}e^{2x}$$

7) a) T uppfyller:

(A) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

(H) $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$

alt.: $T(c\bar{u}+d\bar{v}) = cT(\bar{u}) + dT(\bar{v})$ (L)

b) H ska vara en delmängd till W så att

- $\bar{0} \in H$
- om $\bar{u}, \bar{v} \in H$ så $\bar{u}+\bar{v} \in H$
- om $\bar{u} \in H$ så $c\bar{u} \in H$ för alla skalärer c.

c)
- $\bar{0} \in \text{range}(T)$: $T(\bar{0}) = T(0\bar{0}) \overset{(H)}{=} 0T(\bar{0}) = \bar{0}$
- Antag $\bar{u}, \bar{v} \in \text{range}(T)$, det finns då $\bar{a}$ och $\bar{b}$ så att $T(\bar{a}) = \bar{u}$ och $T(\bar{b}) = \bar{v}$ och det följer: $T(\bar{a}+\bar{b}) \overset{(A)}{=}$ $= T(\bar{a}) + T(\bar{b}) = \bar{u}+\bar{v}$ $\therefore$ $\bar{u}+\bar{v} \in \text{range}(T)$
- Antag $\bar{u} \in \text{range}(T)$, det finns då $\bar{a}$ så att $T(\bar{a}) = \bar{u}$ och det följer $T(c\bar{a}) \overset{(H)}{=} cT(\bar{a}) = c\bar{u}$ $\therefore$ $c\bar{u} \in \text{rang}(T)$

$\therefore$ range(T) är ett underrum till W