LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2023-08-21**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.
Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28. Skrivtid: 5 timmar.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Bestäm samtliga rötter till $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.

b) Låt $z = a + bi$ vara ett givet komplext tal och x reellt. Hur definieras e^{zx}? Vad är $\frac{d}{dx}e^{zx}$? (4 p)

2. Låt

$$H = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(0) = p(3) = 0\}.$$

a) Visa att H är ett underrum till $\mathbb{P}_3$.

b) Bestäm en bas för H. Bestäm $\dim H$. (4 p)

3. Låt $\mathcal{B} = \{1 + t^2, t^2, 1 - t\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ vara baser för $\mathbb{P}_2$ och T den linjära operatorn från $\mathbb{P}_2$ till $\mathbb{P}_2$ med bas $\mathcal{B}$ respektive $\mathcal{C}$ definierad enligt

$$T(p) = -tp'(t) - p''(t) + t^2p(1).$$

Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. (4 p)

4. Betrakta följande data

x	-1	1	2
y	0	1	4

. Bestäm den funktion på formen $y = \alpha x + \beta x^2$ som bäst anpassar till datapunkterna i minsta-kvadratmetodens mening. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 2y' + 5y = 10x \sin x$. (4 p)

6. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = 6y \\ y' = x + y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $y(0) = 0$. (4 p)

7. Låt A vara en kvadratisk matris

a) Definiera begreppen egenvärde och egenvektor för A.

b) Bevisa att om $\lambda \neq \mu$ är egenvärden för A så är motsvarande egenvektorer linjärt oberoende. (4 p)

Lösningsförslag 230821

1. a) $z^2-(3+i)z+4+3i=0 \iff$

$$\left(z-\frac{3+i}{2}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{3+i}{2}\right)^2}_{=\frac{9+6i-1}{4}=2+\frac{3}{2}i}+4+3i=0 \iff$$

Låt $\boxed{w=z-\frac{3+i}{2}}$

$\iff w^2=-2-\frac{3}{2}i$. Ansätt $\boxed{w=a+bi}$

och vi får

$$a^2+2abi-b^2=-2-\frac{3}{2}i \iff$$

Re: $a^2-b^2=-2 \quad (1)$

Im: $2ab=-\frac{3}{2}$

Ur (2): $b=-\frac{3}{4a}$ in i (1):

$$a^2-\frac{9}{16a^2}=-2 \iff a^4+2a^2-\frac{9}{16}$$

$$\iff a^2=-1\underset{(+)}{\pm}\sqrt{1+\frac{9}{16}}=-1+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$$

$\because a=\pm\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}: b=\frac{-3}{4\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2} \because w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \because z=2-i$

$a=-\frac{1}{2}: b=\frac{-3}{4(-\frac{1}{2})}=\frac{3}{2} \because w=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \because z=1+2i$

Lösningarna är $2-i$ & $1+2i$

b) $e^{zx}=e^{(a+bi)x}=e^{ax}e^{bxi}=$

$$=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$$

$$\frac{d}{dx}e^{zx}=ze^{zx}$$

2. $H = \{ p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(0) = p(3) = 0 \}$

a) $0 \in H$: OK TY NOLLPOLYNOMET ÄR NOLL I ALLA PUNKTER, SPEC. I 0 & 3.

$p, q \in H \Rightarrow p+q \in H$: ANTAG $p, q \in H$. VISA $p+q \in H$;

$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0+0 = 0$

$(p+q)(3) = p(3) + q(3) = 0+0 = 0$ OK

$p \in H \Rightarrow cp \in H$: ANTAG $p \in H$. VISA $cp \in H$

$(cp)(0) = c\,p(0) = c \cdot 0 = 0$

$(cp)(3) = c\,p(3) = c \cdot 0 = 0$ OK

b) $p \in H \overset{F-S}{\Leftrightarrow} p(t) = t(t-3)q(t)$ (AV GRADTALEN FÖLJER ATT $q \in \mathbb{P}_1$)

$\Leftrightarrow p(t) = t(t-3)(at+b) = (t^2-3t)(at+b)$

$= at^3 + (b-3a)t^2 - 3bt =$

$= a(t^3 - 3t^2) + b(t^2 - 3t)$

$\therefore$ $\{t^3-3t^2, t^2-3t\}$ SPÄNNER UPP H, DE ÄR DESSUTOM L.O. TY t^3 ENDAST I DEN FÖRSTA.

$\therefore$ EN BAS ÄR $\{t^3-3t^2, t^2-3t\}$

DIMENSIONEN ÄR SÅLEDES

$\dim H = 2$

(# ELEMENT I EN BAS)

3. ENLIGT TEORIN ÄR DEN SÖKTA MATRISEN:

$$[T] = \Big[\, [T(1+t^2)]_C \;\; [T(t^2)]_C \;\; [T(1-t)]_C \,\Big]$$

BESTÄM KOLUMNERNA:

- $T(1+t^2) = -t(2t) - 2 + t^2\cdot 2 = -2 \quad \therefore \quad [T(1+t^2)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $T(t^2) = -t(2t) - 2 + t^2\cdot 1 = -2 - t^2 \quad \therefore \quad [T(t^2)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

- $T(1-t) = -t(-1) - 0 + t^2\cdot 0 = t \quad \therefore \quad [T(1-t)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

KONTROLLERAR MED $p(t) = 2 - t + 2t^2$. $[p(t)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(2-t+2t^2) = -t(-1+4t) - 4 + t^2\cdot 3 = -t^2 + t - 4$; $[T(2-t+2t^2)]_C = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

EN KONTROLL ÄR <u>INTE</u> NÖDVÄNDIG FÖR FULL POÄNG

4. SÄTT IN DATAPUNKTERNA I MODELLEN,

$$\begin{cases} 0 = -\alpha + \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ 4 = 2\alpha + 4\beta \end{cases}$$

INKONSISTENT (UR DE TVÅ FÖRSTA FÅS $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ VILKET INTE FUNGERAR I DEN SISTA)

PÅ MATRISFORM:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

MOTSVARANDE NORMALEKVATION:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 18 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 24 & 32 & 36 \\ 24 & 54 & 51 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 24 & 32 & 36 \\ 0 & 22 & 15 \end{array}\right]$$

$$\therefore \beta = \frac{15}{22} \; ; \; \alpha = \frac{1}{6}\left(9 - 8 \cdot \frac{15}{22}\right) = \frac{1}{6}\left(9 - \frac{60}{11}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{39}{11} = \frac{13}{22}$$

OPTIMAL FUNKTION PÅ DEN FÖRESKRIVNA FORMEN ÄR SÅLEDES:

$$y = \frac{13}{22}x + \frac{15}{22}x^2$$

5. $y'' + 2y' + 5y = 10x\sin x$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR. EKV.: $r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

$\therefore\ y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

PART.: HJÄLPEKVATION:

$u'' + 2u' + 5u = 10xe^{ix}$; $y_p = \operatorname{Im} u_p$

ANSATS: $u_p = ze^{ix}$, $u_p' = z'e^{ix} + ize^{ix}$

$u_p'' = z''e^{ix} + 2iz'e^{ix} - ze^{ix}$

IN I EKV.:

$z''e^{ix} + 2iz'e^{ix} - ze^{ix} + 2(z'e^{ix} + ize^{ix}) +$

$+ 5ze^{ix} = 10xe^{ix} \Leftrightarrow$

$z'' + (2+2i)z' + (4+2i)z = 10x$; ANSATS: $z = ax + b$

$0 + (2+2i)a + (4+2i)(ax+b) = 0$

x^0: $(2+2i)a + (4+2i)b = 0$ (1)

x^1: $(4+2i)a = 10$ (2)

UR (2): $a = \frac{10}{4+2i} = \frac{5}{2+i} = \frac{10-5i}{5} = 2-i$

IN I (1): $b = \frac{-1}{4+2i}(2+2i)(2-i) =$

$= -\frac{1}{4+2i}(4 - 2i + 4i + 2) = -\frac{1}{4+2i}(6+2i) =$

$= -\frac{3+i}{2+i} = -\frac{(3+i)(2-i)}{5} = -\frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$

SÅ $p(x) = (2-i)x - \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$

$\therefore\ u_p = \left((2-i)x - \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}\right)(\cos x + i\sin x)$

$\therefore\ y_p = \operatorname{Im} u_p = \left(\frac{1}{5} - x\right)\cos x + \left(2x - \frac{7}{5}\right)\sin x$

$\therefore\ y = y_h + y_p =$

$= e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) +$

$+ \left(\frac{1}{5} - x\right)\cos x + \left(-\frac{7}{5} + 2x\right)\sin x$

6. LÅT $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. PÅ MATRISFORM:

$$\bar{x}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EGENVÄRDEN/VEKTORER FÖR A.

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3; -2$$

[KOLL: $3+(-2)=1$, $\mathrm{tr}A = 0+1 = 1$

$3(-2) = -6$, $\det A = 0-6 = -6$

OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = 3$: $A\bar{v} = 3\bar{v} \Leftrightarrow (A - 3I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI, $x_2 = t$, $x_1 = 2t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2$: $A\bar{v} = -2\bar{v} \Leftrightarrow (A + 2I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI, $x_2 = t$, $x_1 = -3t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ LÖSNINGARNA GES AV:

$$\bar{x}(t) = Ae^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MEN, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{5}, \ B = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \bar{x}(t) = \frac{1}{5}e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}e^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PÅ KOMPONENTFORM:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{5}e^{3t} + \frac{3}{5}e^{-2t} \\ y(t) = \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \end{cases}$$

//

7. a) $\bar{v}$ ÄR EN EGENVEKTOR TILL A OM

$\boxed{\bar{v} \neq 0}$ OCH $\boxed{A\bar{v} = \lambda\bar{v}}$ FÖR NÅGON

SKALÄR λ. λ ÄR MOTSVARANDE EGENVÄRDE

b) ANTAG $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$; $A\bar{v} = \mu\bar{v}$; $\lambda \neq \mu$

VISA $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ L.O.

$$c\bar{u} + d\bar{v} = \bar{0} \quad (1)$$ MULT. MED A:

$$A(c\bar{u} + d\bar{v}) = A\bar{0} \iff$$

$$cA\bar{u} + dA\bar{v} = \bar{0} \iff$$

$$c\lambda\bar{u} + d\mu\bar{v} = \bar{0} \quad (2)$$

BILDA! $\lambda(1) - (2)$:

$$\lambda c\bar{u} + \lambda d\bar{v} - c\lambda\bar{u} - d\mu\bar{v} = \bar{0} \iff$$

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} d \underbrace{\bar{v}}_{\neq \bar{0}} = \bar{0}$$ $\therefore d = 0$ OCH DÄRFÖR $c = 0$

$\therefore \{\bar{u}, \bar{v}\}$ L.O.