Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2022-08-22**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 133, antal sidor: 2.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 10z^2 - 24z + 80 = 0$ har en rot $-1 + 3i$. Bestäm samtliga rötter.

b) Låt $P(z)$ vara ett polynom med reella koefficienter och sådant att $P(w) = 0$. Bevisa att $P(\overline{w}) = 0$. Var noggrann med att förklara samtliga steg. (4 p)

2. Låt $M_{2\times 2}$ vara vektorrummet av samtliga 2×2 matriser och bilda

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} : a + b = c + d \right\}.$$

Visa att H är ett underrum till $M_{2\times 2}$ och bestäm en bas för H. Vad är dimensionen för H? (4 p)

3. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -24 & 15 \end{bmatrix}$, det vill säga finn matriser P och D , D diagonal, så att $A = PDP^{-1}$. Bestäm A^{11}. (4 p)

4. Låt $\mathbb{P}_2$ beteckna vektorrummet av samtliga polynom av gradtal mindre än eller lika med 2 och utrusta det med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt.$$

a) Bestäm en ortogonal bas för underrummet $H = \text{span}\{1, t + t^2\}$

b) Bestäm $\text{proj}_H t$. (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + 2y = 6x$, $y(1) = -2$, $x > 0$.

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - x\sqrt{y} = \sqrt{xy}$, $y(1) = 1$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till $y^{(4)} + 64y = 2e^{3x}$.
Ledning: Den karakteristiska ekvationen är en binomisk ekvation. (4 p)

7.

a) Låt $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, vara element i ett vektorrum V. Vad betyder det att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är en bas för V? Ge en definition.

b) Låt V vara ett vektorrum. Vad menas med att H är ett underrum till V? Ge en definition.

c) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vara en bas för V. Vad betyder $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$? Ge en definition.

d) Låt V och W vara vektorrum. Vad menas med att T är en linjär avbildning från V till W? Ge en definition. (4 p)

Lösningsförslag M0049M, 220822

1. a) $P(z)=z^4-2z^3+10z^2-24z+80=0$

EN ROT ÄR $-1+3i$ OCH EFTERSOM KOEFFICIENTERNA ÄR REELLA ÄR DÄRFÖR OCKSÅ $-1-3i$ EN ROT. VIA FAKTORSATSEN KAN MAN UR $P(z)$ BRYTA UT

$$(z+1-3i)(z+1+3i)=z^2+2z+10.$$

FINN DEN ANDRA FAKTORN GENOM DIVISION:

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2-4z+8 \\
\hline
z^2+2z+10 & z^4-2z^3+10z^2-24z+80 \\
 & z^4+2z^3+10z^2 \\
\hline
 & -4z^3-24z+80 \\
 & -4z^3-8z^2-40z \\
\hline
 & 8z^2+16z+80 \\
 & 8z^2+16z+80 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore P(z)=(z^2+2z+10)(z^2-4z+8)$

KVAR ATT LÖSA: $z^2-4z+8=0 \iff$

$z=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm 2i$

$\therefore$ RÖTTERNA ÄR: $-1\pm 3i,\ 2\pm 2i$

b) LÅT $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ MED $a_i\in\mathbb{R}$.

KÄNDA RÄKNEREGLER FÖR KONJUGAT ÄR: $\overline{z+w}=\bar z+\bar w$; $\overline{zw}=\bar z\,\bar w$. DESSA GÄLLER ÄVEN FÖR ETT GODTYCKLIGT ANTAL TERMER OCH FAKTORER.

ANTAG $P(w)=0$. VISA $P(\bar w)=0$

$$0=\bar 0=\overline{P(w)}=\overline{a_nw^n+a_{n-1}w^{n-1}+\dots+a_1w+a_0}$$

$$=\overline{a_nw^n}+\overline{a_{n-1}w^{n-1}}+\dots+\overline{a_1w}+\bar a_0=$$

$$=\bar a_n\bar w^n+\bar a_{n-1}\bar w^{n-1}+\dots+\bar a_1\bar w+\bar a_0=$$

$\nwarrow\ \bar a_i=a_i$ TY $a_i\in\mathbb{R}$

$$=a_n\bar w^n+a_{n-1}\bar w^{n-1}+\dots+a_1\bar w+a_0$$

$$=P(\bar w)$$ ok

2. H UNDERRUM.

i) • $\bar{0} \in H$: $\bar{0} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \in H$ TY $0+0=0+0$

• $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{bmatrix} \in H$ VISA $A+B \in H$.

$A+B=\begin{bmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2\\a_3+b_3&a_4+b_4\end{bmatrix} \in H$ TY $\underline{a_1}+\underline{b_1}+\underline{a_2}+\underline{b_2} = \underline{a_3}+\underline{b_3}+\underline{a_4}+\underline{b_4}$

• $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix} \in H$. VISA $cA \in H$.

$cA=\begin{bmatrix}ca_1&ca_2\\ca_3&ca_4\end{bmatrix} \in H$ TY $\cancel{c}a_1+\cancel{c}a_2=\cancel{c}a_3+\cancel{c}a_4$

$c \neq 0$, OM $c=0$ OK

∴ H ÄR ETT UNDERRUM TILL $M_{2\times 2}$.

EN BAS:

$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in H \iff a+b=c+d$

LÖS EKVATIONEN: $a+b-c-d=0$

a BUNDEN, b,c,d FRIA. SÄTT

$b=s$, $c=t$, $d=u$ OCH

$a=-s+t+u$

∴ $\begin{bmatrix}-s+t+u&s\\t&u\end{bmatrix} \in H$ FÖR ALLA s,t,u

$\iff$

$$s\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \in H$$

∴ $\left\{\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ SPÄNNER UPP H. DESSA ÄR OCKSÅ LINJÄRT OBEROENDE TY

Här kan man också avläsa att det är ett underrum, det är ju höljet av ett antal element.

$$c_1\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

GEK:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{POS }(1,1): & -c_1+c_2+c_3=0\\ (1,2): & c_1=0\\ (2,1): & c_2=0\\ (2,2): & c_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

∴ EN BAS FÖR H ÄR

$$\left\{\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$ //

DIMENSIONEN ÄR ANTALET ELEMENT I EN BAS, SÅ $\dim H = 3$ //

3. $A = \begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -24 & 15 \end{bmatrix}$

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -13-\lambda & 8 \\ -24 & 15-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-13-\lambda)(15-\lambda) + 24\cdot 8 = 0$

$\Leftrightarrow -195 - 2\lambda + \lambda^2 + 192 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = 3; -1$

KOLL: $3 - 1 = 2$
$\operatorname{tr} A = -13 + 15 = 2$
$3(-1) = -3$
$\det A = -13\cdot 15 + 8 \cdot 24 = -3$

EGENVEKTORER

$\lambda = 3$: $A\bar{v} = 3\bar{v} \Leftrightarrow (A - 3I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -16 & 8 & 0 \\ -24 & 12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2 FRI
$x_2 = t, x_1 = t/2$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, VÄLJ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1$: $A\bar{v} = -\bar{v} \Leftrightarrow (A + I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -12 & 8 & 0 \\ -24 & 16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2 FRI
$x_2 = t, x_1 = 2/3 \cdot t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ GER

$A = PDP^{-1}$

BESTÄM $A^{11} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1}$

$= PD^{11}P^{-1}$.

$D^{11} = \begin{bmatrix} 3^{11} & 0 \\ 0 & (-1)^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{11} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

VI FÅR NU:

$A^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{11} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3^{12} & 2\cdot 3^{11} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -3^{12} - 4 & 2\cdot 3^{11} + 2 \\ -2\cdot 3^{12} - 6 & 4\cdot 3^{11} + 3 \end{bmatrix}$

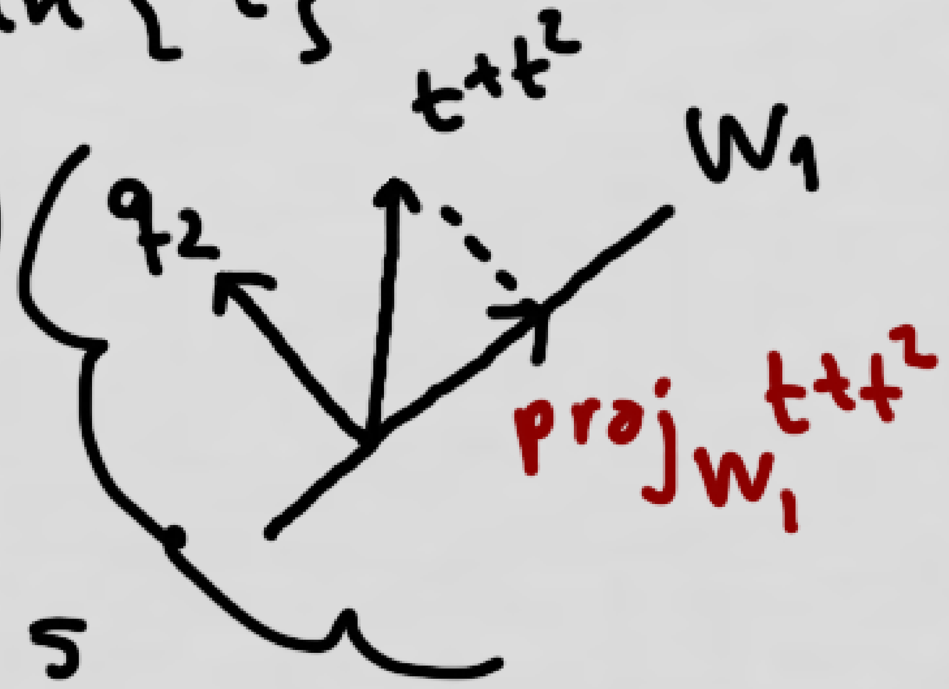
4. $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$

a) EN BAS FÖR H ÄR $\{1, t+t^2\}$

ORTOGONALISERA DENNA MHA G-S:

1: $q_1(t) = 1$, $W_1 = \text{Span}\{1\}$

2: $q_2(t) = t+t^2 - \text{proj}_{W_1}(t+t^2)$



$= t+t^2 - \frac{\langle 1, t+t^2\rangle}{\langle 1,1\rangle}1$

$\overset{(*)}{=} t+t^2 - \frac{5}{6}\cdot 1 = t^2+t-\frac{5}{6}$

VÄLJ $\tilde{q}_2(t) = 6t^2+6t-5$

$\therefore$ $\{1, 6t^2+6t-5\}$ ÄR EN ORTOGONAL BAS FÖR H. //

b) $\text{proj}_H t = \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 + \frac{\langle t, 6t^2+6t-5\rangle}{\langle 6t^2+6t-5, 6t^2+6t-5\rangle}(6t^2+6t-5)$

$\overset{(*)}{=} \frac{1/2}{1}\cdot 1 + \frac{1}{61/5}(6t^2+6t-5) = \frac{1}{2} + \frac{30}{61}t^2 + \frac{30}{61}t - \frac{25}{61}$

$= \frac{30}{61}t^2 + \frac{30}{61}t + \frac{11}{122}$ //

(*)

$\langle 1, t+t^2\rangle = \int_0^1 1\cdot(t+t^2)\,dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\,dt = 1$

$\langle t,1\rangle = \int_0^1 t\cdot 1\,dt = \frac{1}{2}$

$\langle t, 6t^2+6t-5\rangle = \int_0^1 6t^3+6t^2-5t\,dt$

$= \frac{6}{4}+\frac{6}{3}-\frac{5}{2} = 1$

$\langle 6t^2+6t-5, 6t^2+6t-5\rangle = \int_0^1 (6t^2+6t-5)^2\,dt$

$= \int_0^1 36t^4+36t^2+25+72t^3-60t^2-60t\,dt$

$= \frac{36}{5}+\frac{36}{3}+25+\frac{72}{4}-\frac{60}{3}-\frac{60}{2} = \frac{61}{5}$

5. a) $xy' + 2y = 6x, \; y(1) = -2, \; x > 0$

$xy' + 2y = 6x \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x} y = 6 \Leftrightarrow$

$\ulcorner$ IF.: $\int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + C = 2\ln x + C$

VÅR IF $= e^{2\ln x} = x^2$ $\lrcorner$

$x^2 y' + 2xy = 6x^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2 y) = 6x^2 \Leftrightarrow$

$x^2 y = 2x^3 + C \Leftrightarrow y = 2x + \frac{C}{x^2}$

MEN, $y(1) = -2$: $-2 = 2 + C \therefore C = -4$

$\therefore y = 2x - \frac{4}{x^2}$ //

b) $y' - x\sqrt{y} = \sqrt{xy}, \; y(1) = 1$

$y' - x\sqrt{y} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow y' = \sqrt{xy} + x\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow y' = \sqrt{y}(\sqrt{x} + x) \Leftrightarrow y^{-\frac{1}{2}} y' = x^{\frac{1}{2}} + x$

$\Leftrightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x^{\frac{1}{2}} + x \, dx \Leftrightarrow$

$2\sqrt{y} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{2} x^2 + C \Leftrightarrow$

$\sqrt{y} = \frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{4} x^2 + D$

$\therefore y = \left(\frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{4} x^2 + D\right)^2$

MEN, $y(1) = 1$: $1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + D\right)^2$

$\therefore D = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 3 - 4}{12} = \frac{5}{12}$

(DET SOM GER -1 INNANFÖR KVADRATEN FUNGERAR EJ TY DÅ BLIR $\sqrt{y}$ NEGATIV)

$\therefore y = \left(\frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{12}\right)^2$ //

6. $y^{(4)} + 64y = 2e^{3x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM. KAR.EKV.: $r^4 + 64 = 0 \iff$

$r^4 = -64 = 64e^{i\pi}$

ANSÄTT $r = \rho e^{i\varphi}$, D-M: $r^4 = \rho^4 e^{i4\varphi}$

IN I EKV.:

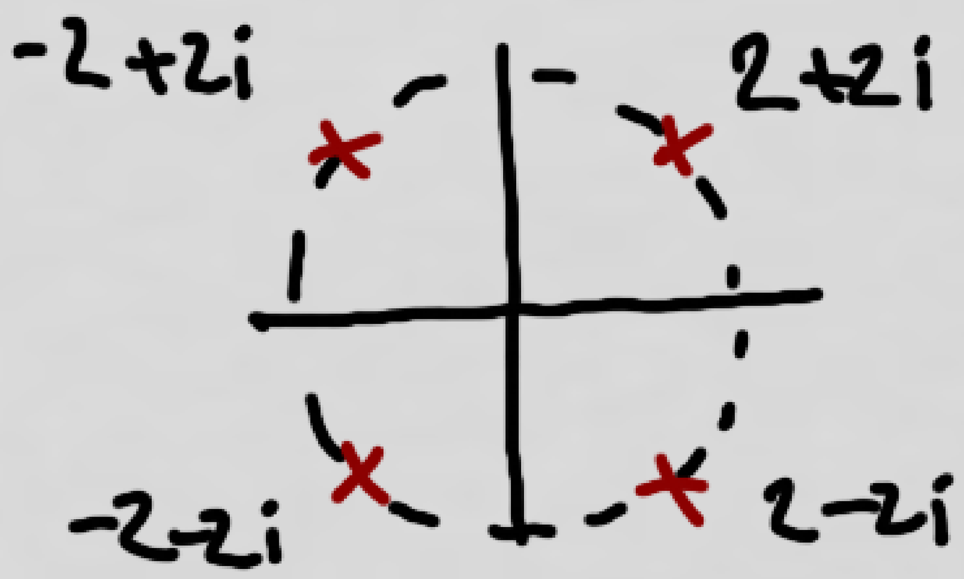
$\rho^4 e^{i4\varphi} = 64e^{i\pi} \iff$

$$\begin{cases} \rho^4 = 64 & (1) \\ 4\varphi = \pi + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$(1) \iff \rho = 2\sqrt{2}$

$(2) \iff \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

$\therefore r = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right)} \quad k = 0,1,2,3$



$\therefore 2 \pm 2i; -2 \pm 2i$

DETTA GER:

$y_h = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-2x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$

PART. ANSATS: $y_p = ae^{3x}$, $y_p^{(4)} = 81ae^{3x}$

IN I EKV.: $81a\cancel{e^{3x}} + 64a\cancel{e^{3x}} = 2\cancel{e^{3x}} \iff$

$a = \frac{2}{145} \quad \therefore y_p = \frac{2}{145}e^{3x}$

$\therefore y = y_h + y_p =$

$= e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-2x}(C\cos 2x + D\sin 2x) + \frac{2}{145}e^{3x}$

7. a) $\mathcal{B}$ SKA VARA LINJÄRT OBEROENDE OCH SKA SPÄNNA UPP V.

b) $H \subseteq V$ SÅDAN ATT $\bar{0} \in H$; $\bar{u}, \bar{v} \in H \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in H$; $\bar{u} \in H \Rightarrow c\bar{u} \in H$ ALLA c.

c) $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$ ÄR KOORDINATERNA FÖR $\bar{x}$ RELATIVT BASEN $\mathcal{B}$, DVS OM

$[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ SÅ $\bar{x} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n$.

d) $T : V \to W$ EN FUNKTION FRÅN V TILL W SÅDAN ATT

$T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ OCH $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$