Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-08-18**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 2$ gäller att
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln n.$$
(4p)

Lösning: (Induktion) Vi börjar med basfallet $n = 2$. Vi har då att

$$VL = \sum_{k=2}^{2} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att
$$\sum_{k=2}^{p} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln p \ \text{ (induktionsantagande)}.$$
Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att
$$\sum_{k=2}^{p+1} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln(p+1).$$
Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{p+1} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \left(\sum_{k=2}^{p} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) + \ln\left(1-\frac{1}{p+1}\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} -\ln p + \ln\frac{p+1-1}{p+1} = \\ &= \ln\frac{p}{p+1} - \ln p = \ln p - \ln(p+1) - \ln p = -\ln(p+1),\end{aligned}$$

eftersom
$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$
Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Alternativ lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k-1}{k} = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \frac{n-2}{n-1} + \ln\frac{n-1}{n} = \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right) = \ln\frac{1}{n} = -\ln n.\end{aligned}$$

Alternativ lösning 2: Vi har att

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k-1}{k} = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln k) = \\ &= (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \ldots + \ln(n-1) - \ln n = \\ &= \ln 1 - \ln n = -\ln n.\end{aligned}$$

(b) Bestäm koefficienten för x^3-termen i binomialutvecklingen av

$$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^5.$$

Motivera! (1p)

Lösning: Binomialsatsen ger att

$$\begin{aligned}\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \left(\begin{array}{c}5\\k\end{array}\right) \left(2x^2\right)^{5-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{5} \left(\begin{array}{c}5\\k\end{array}\right) 2^{5-k} x^{10-2k-k}\end{aligned}$$

Därmed kommer det att finnas nollskilda potenser av x med exponent $10 - 3k$ i denna summa. Till exempel innebär det att $k = 0$ ger en x^{10}-term, $k = 1$ en x^7-term, osv. För att få en x^3-term måste därför

$$10 - 3k = 3.$$

Denna ekvation saknar heltalslösning varför det inte kan finnas någon nollskild x^3-term i binomialutvecklingen ovan. Den sökta koefficienten är därför 0.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x^2}$$

(1p)

Lösning: Gränsvärdet existerar ej då funktionen $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$ svänger mellan värdena $+1$ och -1 med en frekvens som går mot oändligheten när x går mot noll. Mer specifikt, om en funktion ska ha ett gränsvärde så måste det vara unikt. Funktionen $\sin \frac{1}{x^2}$ antar bägge värdena $+1$ och -1 (och dessutom alla värden däremellan!) i varje intervall $(-\delta, \delta)$ där $\delta > 0$, vilket motstrider att den kan ha ett gränsvärde när x går mot noll.

(b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

(2p)

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Alternativ lösning: Eftersom gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ så taylorutvecklar vi täljare och nämnare kring $x = \frac{\pi}{4}$. Om

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x, \\ g(x) &= \cos x - \sin x, \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin 2x, \\ g'(x) &= -\sin x - \cos x, \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -2\sin\frac{2\pi}{4} = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2, \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ g'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Därmed kan vi utveckla täljaren och nämnaren som

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_1(x) = \\ &= -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_1(x), \\ g(x) &= g\left(\frac{\pi}{4}\right) + g'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_2(x) = \\ &= -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_2(x), \end{aligned}$$

där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade funktioner i en omgivning av $\frac{\pi}{4}$ eftersom f och g är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara. Alltså blir gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_1(x)}{-\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_2(x)} = \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) B_1(x)}{-\sqrt{2} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) B_2(x)} = \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x \to \infty} \arcsin\frac{x+1}{x+2}$$

(2p)

Lösning: Vi har

$$\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{x+1}{x+2} \underset{\text{arcsin kont.}}{=} \arcsin \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+2} = \arcsin \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}} = \frac{\pi}{2},$$

eftersom

$$\frac{1}{2} < \frac{x+1}{x+2} < 1$$

för $x > 0$ och

$$\lim_{t\to 1-} \arcsin t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. Låt

$$f(x) = x^3 + 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

Lösning: Derivering ger

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3\left(1 + x^2\right).$$

Vi ser att $f'(x) \geq 3 > 0$. Därmed är $f(x)$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och således också $1-1$, det vill säga, inverterbar.

(b) Finn

$$f^{-1}(3).$$

(1p)

Lösning: Vi vet att

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = y^3 + 3y - 1.$$

I synnerhet, för punkten $x = 3$ gäller att

$$3 = y^3 + 3y - 1 \Leftrightarrow y^3 + 3y - 4 = 0.$$

Vi ser direkt att $y = 1$ är *en* (reell) lösning till denna ekvation. Men detta är en tredjegradsekvation. Kan det finnas fler lösningar? Nej, vi har ju ovan visat att funktionen f är injektiv, dvs att ett x-värde motsvaras av exakt ett y-värde. Alltså är $y = 1$ den enda lösningen. Därmed är

$$f^{-1}(3) = 1.$$

Alternativ lösning (överkurs!): Tredjegradsekvationen

$$y^3 + 3y - 4 = 0$$

kan lösas med *Cardanos metod*. Vi söker här en lösning y på formen

$$y = m + n.$$

Då är

$$y^3 = (m+n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = m^3 + n^3 + 3mn\,(m+n)\,,$$

dvs

$$y^3+3y-4 = m^3+n^3+3mn\,(m+n)+3\,(m+n)-4 = m^3+n^3+3\,(mn+1)\,(m+n)-4 = 0.$$

Vi lägger nu till villkoret $mn+1=0$. Det ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} mn+1=0, \\ \\ m^3+n^3-4=0. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger

$$n = -\frac{1}{m}$$

som insatt i den andra av dessa ger

$$m^3 + \left(-\frac{1}{m}\right)^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(m^3\right)^2 - 4m^3 - 1 = 0.$$

Detta är en andragradsekvation

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

i variabeln $t = m^3$ med lösning

$$m^3 = t = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 1} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Välj nu lösningen

$$m^3 = 2 + \sqrt{5}.$$

Då blir

$$n^3 = 4 - m^3 = 4 - \left(2+\sqrt{5}\right) = 2 - \sqrt{5}.$$

Därmed är

$$\begin{aligned} m &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}, \\ n &= \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Detta är två exempel på så kallade *nästlade rotuttryck* (eng: *nested radicals*). Kom ihåg att vi söker

$$y = m + n = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Man kan visa (svårt!) att dessa två nästlade rotuttryck går att förenkla till

$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ty då är

$$\begin{aligned}
m^3 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1^3+3\cdot 1^2\sqrt{5}+3\cdot 1\cdot 5+5\sqrt{5}}{2^3} = \frac{16+8\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5},\\
n^3 &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1^3-3\cdot 1^2\sqrt{5}+3\cdot 1\cdot 5-5\sqrt{5}}{2^3} = \frac{16-8\sqrt{5}}{8} = 2-\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Således är

$$y = m+n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Anmärkning: Talet

$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

brukar kallas för *gyllene snittet* och har många intressanta matematiska egenskaper. Det betecknas ofta med bokstaven φ.

(c) Beräkna

$$\left(f^{-1}\right)'(3).$$

(2p)

Lösning: Vi söker derivatan y' till $y = f^{-1}(x)$ i punkten $x = 3$. För att finna y' deriverar vi $x = f(y)$ implicit med avseende på x och får

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(f(y)) = \frac{d}{dx}\left(y^3+3y-1\right)\\
&\Downarrow\\
1 &= f'(y)\,y' = \left(3y^2+3\right)y'\\
&\Updownarrow\\
y' &= \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3\left(1+y^2\right)}.
\end{aligned}$$

Vi får därför

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \left.\left(f^{-1}\right)'(x)\right|_{x=3} = \left.y'\right|_{y=1} = \frac{1}{3\left(1+1^2\right)} = \frac{1}{6}.$$

Observera att vi här sätter in $y = 1$ för att evaluera $\left(f^{-1}\right)'(x)$ i $x = 3$.

(d) Beräkna

$$\left(f^{-1}\right)''(3).$$

Ledning: *gör ytterligare en implicit derivering.* (1p)

Lösning: Vi söker andraderivatan y'' till $y = f^{-1}(x)$ i punkten $x = 3$. För att finna y'' deriverar vi $x = f(y)$ två gånger implicit med avseende på x och får

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}(x) &= \frac{d^2}{dx^2}(f(y)) \\
&\Downarrow \\
\frac{d}{dx}(1) &= \frac{d}{dx}(f'(y)\cdot y') \\
&\Downarrow \\
0 &= f''(y)\cdot (y')^2 + f'(y)\cdot y'' \\
&\Updownarrow \\
y'' &= -\frac{f''(y)\cdot (y')^2}{f'(y)} \underset{y'=\frac{1}{f'(y)}}{=} -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3}
\end{aligned}$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
f'(y) &= 3\left(1+y^2\right), \\
f''(y) &= 6y,
\end{aligned}$$

får vi därför

$$\left(f^{-1}\right)''(3) = \left(f^{-1}\right)''(x)\Big|_{x=3} = y''|_{y=1} = -\frac{6\cdot 1}{(3(1+1^2))^3} = -\frac{6}{6^3} = -\frac{1}{36}.$$

Observera att vi här sätter in $y = 1$ för att evaluera $\left(f^{-1}\right)''(x)$ i $x = 3$.

Anmärkning: Om $y = f^{-1}(x)$ gäller alltså

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}, \\
y'' &= \frac{d^2}{dx^2}\left(f^{-1}(x)\right) = -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)^3}.
\end{aligned}$$

På motsvarande sätt kan den intresserade studenten visa att

$$y''' = \frac{d^3}{dx^3}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{3\left(f''\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2 - \left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)\left(f'''\left(f^{-1}(x)\right)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)^5}.$$

4. Ett objekt med massa m som faller under inverkan av jordaccelerationen g i en atmosfär där luftmotståndet är proportionellt mot objektets hastighet i kvadrat uppfyller rörelseekvationen

$$mv' = mg - kv^2,$$

där $v = v(t)$ är objektets hastighet, t tiden och k en proportionalitetskonstant.

(a) Visa att

$$v(t) = \frac{g}{\lambda}\frac{e^{2\lambda t}-1}{e^{2\lambda t}+1}, \text{ där } \lambda = \sqrt{\frac{kg}{m}},$$

är lösning till rörelseekvationen om objektet släpps från vila (dvs $v(0) = 0$). (3p)

Lösning: Om

$$v(t) = \frac{g}{\lambda}\frac{e^{2\lambda t}-1}{e^{2\lambda t}+1}$$

ser vi att

$$v(0) = \frac{g}{\lambda}\frac{e^{0}-1}{e^{0}+1} = 0.$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \frac{g}{\lambda}\frac{2\lambda e^{2\lambda t}\left(e^{2\lambda t}+1\right)-\left(e^{2\lambda t}-1\right)\cdot 2\lambda e^{2\lambda t}}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = \\
&= \frac{g}{\lambda}\frac{2\lambda e^{4\lambda t}+2\lambda e^{2\lambda t}-2\lambda e^{4\lambda t}+2\lambda e^{2\lambda t}}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = \\
&= \frac{g}{\lambda}\frac{4\lambda e^{2\lambda t}}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = g\frac{4e^{2\lambda t}}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Samtidigt är höger led i rörelseekvationen

$$\begin{aligned}
mg - kv^2 &= mg - k\frac{g^2}{\lambda^2}\frac{\left(e^{2\lambda t}-1\right)^2}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = mg - \frac{kg^2}{\frac{kg}{m}}\frac{\left(e^{2\lambda t}-1\right)^2}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = \\
&= mg\left(1-\frac{\left(e^{2\lambda t}-1\right)^2}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2}\right) = mg\frac{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2-\left(e^{2\lambda t}-1\right)^2}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = \\
&= mg\frac{\left(e^{4\lambda t}+2e^{2\lambda t}+1\right)-\left(e^{4\lambda t}-2e^{2\lambda t}+1\right)}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = mg\frac{4e^{2\lambda t}}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Insatt i rörelseekvationen får vi därför

$$VL = mv' = mg\frac{4e^{2\lambda t}}{\left(e^{2\lambda t}+1\right)^2} = mg - kv^2 = HL.$$

Anmärkning: Rörelseekvationen ovan kommer ur Newtons andra lag som säger att ett objekt som påverkas av yttre krafter kommer att accelereras med en acceleration som är produkten av nettokraften och objektets reciproka massa. I ekvationen ovan är proportionalitetskonstanten $k = \frac{1}{2}\rho A C_D$, där ρ är atmosfärens densitet, A objektets tvärsnittsarea och C_D objektets luftmotståndskoefficient. Funktionen

$$\tanh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

kallas *tangens hyperbolicus* och har derivata

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = 1-\tanh^2(x).$$

Lösningen till rörelseekvationen ovan kan därmed skrivas

$$v(t) = \frac{g}{\lambda}\tanh(\lambda t).$$

(b) När $t \to \infty$ kommer objektets hastighet $v(t)$ att gå mot en konstant hastighet, den så kallade gränshastigheten V_t. Bestäm V_t (uttryckt i storheterna m, g och k). Antag här att objektet faller i all oändlighet. (2p)

Lösning: Vi får gränshastigheten

$$\begin{aligned} V_t &= \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{g}{\lambda}\frac{e^{2\lambda t}-1}{e^{2\lambda t}+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{g}{\lambda}\frac{1-\overbrace{e^{-2\lambda t}}^{\to 0}}{1+\underbrace{e^{-2\lambda t}}_{\to 0}} = \\ &= \frac{g}{\lambda} = \frac{g}{\sqrt{\frac{kg}{m}}} = g\sqrt{\frac{m}{kg}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \end{aligned}$$

Anmärkning: Eftersom $v(t)$ går mot en konstant hastighet V_t kommer därför derivatan $v'(t)$ att gå mot noll när $t \to \infty$. Därmed gäller det att

$$mg - kV_t^2 = 0 \Longleftrightarrow V_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

I detta läge råder kraftjämvikt, det bromsande luftmotståndet kV_t^2 balanserar precis tyngdkraften mg.

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = xe^{1/x}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Ange i vilka intervall kurvan är konvex respektive konkav. Skissera kurvan. **Ledning:** *man kan ha hjälp av standard-gränsvärdet*

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

(5p)

(a) **Lösning:** Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom

$$f(-x) = (-x)e^{-1/x} = -\frac{x}{e^{1/x}} \begin{cases} \neq f(x) = xe^{1/x} \\ \neq -f(x) = -xe^{1/x} \end{cases}.$$

Vi observerar även funktionen är odefinierad i $x = 0$ samt att

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ om } x > 0, \\ f(x) < 0 \text{ om } x < 0, \end{cases}$$

ty $e^{1/x} > 0$. Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Vi har att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \overbrace{x}^{\to-\infty}\overbrace{e^{1/x}}^{\to e^0=1} = -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \overbrace{x}^{\to\infty}\overbrace{e^{1/x}}^{\to e^0=1} = +\infty. \end{aligned}$$

Därmed saknar funktionen horisontella asymptoter. Det kan därför möjligen finnas sneda asymptoter. Vi undersöker således gränsvärdet

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Vi har därför en dubbelsidig sned asymptot $y = ax + b$ med lutning $a = 1$ och y-intercept

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \underset{h=\frac{1}{x}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Därmed är den sneda asymptoten

$$y = ax + b = x + 1.$$

Eftersom funktionen är odefinierad i $x = 0$ kan den ha en vertikal asymptot där. Vi har att

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \\
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{\overbrace{e^t}^{\to 0}}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Derivering av funktionen ger

$$y' = e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x} - \frac{1}{x}e^{1/x} = \frac{(x-1)\,e^{1/x}}{x}.$$

Alltså har vi en kritisk punkt $x = 1$ där $y' = 0$. Teckenstudium av derivatan ger

		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$e^{1/x}$	$+$		$+$		$+$
y'	$+$	odef.	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	asy.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

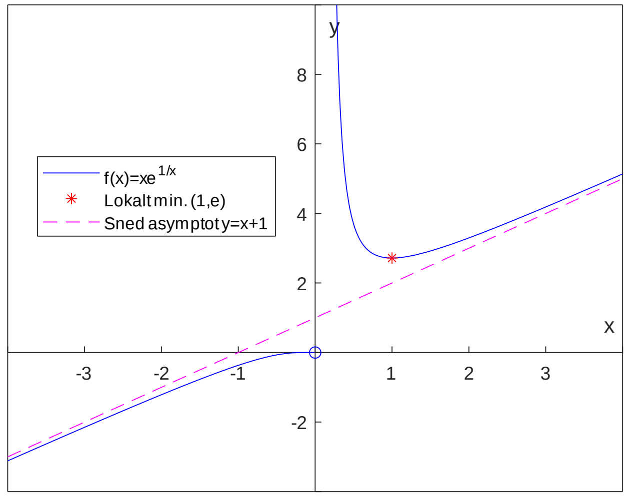
Funktionen har då ett lokalt minimum i $x = 1$ som är

$$f(1) = 1e^{1/1} = e.$$

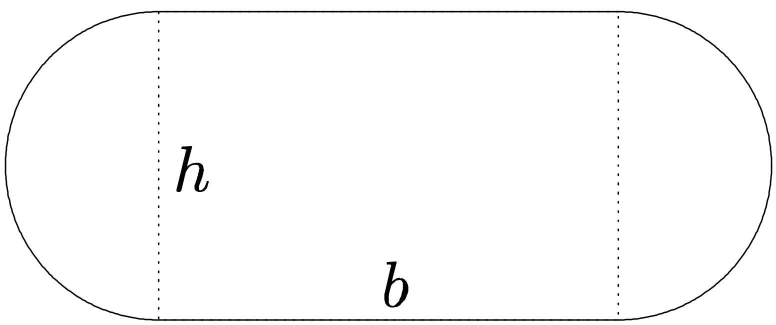
Ytterligare en derivering ger

$$y'' = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} - \frac{1}{x}e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

Funktionen saknar därför inflexionspunkter och är konvex för $x > 0$ respektive konkav för $x < 0$. Vi kan slutligen skissera grafen som



6. En *stadion* är en tvådimensionell geometrisk figur konstruerad av en rektangel och två halvcirklar på motsatta sidor av rektangeln, se nedanstående figur.



För en stadion med given omkrets P, finn rektangelns sidor b och h (uttryckta i P) som

(a) ger maximal area på *rektangeln*. Hur stor är då rektangelns maximala area uttryckt i P? (3p)

(b) ger maximal *total* innesluten area av stadion. Hur stor är då inneslutna området maximala area uttryckt i P? (2p)

Lösning: Stadions omkrets ges av två sidor b samt två halvcirklar med diameter h. Därmed är

$$P = 2b + 2 \cdot \frac{\pi h}{2}.$$

Således är

$$b = \frac{P - \pi h}{2}.$$

Eftersom både b och h är ickenegativa måste därför

$$0 \leq h \leq \frac{P}{\pi}.$$

(a) Rektangelns area ges av

$$A_r = bh = \frac{(P - \pi h)\, h}{2}.$$

Här är $A_r = A_r(h)$ en kontinuerlig funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall $\left[0, \frac{P}{\pi}\right]$, alltså är vi garanterade existens av globalt maximum (och minimum). I ändpunkterna är arean noll

$$A_r(0) = A_r\left(\frac{P}{\pi}\right) = 0 \text{ (minimum).}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} A_r'(h) &= \frac{(P - \pi h) - \pi h}{2} = \frac{P - 2\pi h}{2}, \\ A_r''(h) &= -\pi < 0. \end{aligned}$$

Singulära punkter saknas, men det finns en kritisk punkt $h = \frac{P}{2\pi} \in \left(0, \frac{P}{\pi}\right)$ där $A_r'(h) = 0$. Denna punkt måste därför ge maximum ($A_r(h)$ är konkav). För detta värde på h är

$$\begin{aligned} b &= \frac{P - \pi h}{2} = \frac{P}{4}, \\ A_r^{\max} &= bh = \frac{P}{4} \cdot \frac{P}{2\pi} = \frac{P^2}{8\pi}. \end{aligned}$$

Anmärkning 1: I detta fall är alltså de raka sidorna exakt lika långa som halvcirkelbågarna.

(b) Stadions totala inneslutna area ges av summan av rektangelns area samt arean av två halvcirklar med radie $h/2$, dvs

$$A_s = bh + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{(P - \pi h)\, h}{2} + \frac{\pi h^2}{4} = \frac{2Ph - \pi h^2}{4}.$$

Här är $A_s = A_s(h)$ en kontinuerlig funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall $\left[0, \frac{P}{\pi}\right]$, alltså är vi garanterade existens av globalt maximum (och minimum). I vänster ändpunkt är arean noll

$$A_s(0) = 0 \text{ (minimum)}$$

och i höger ändpunkt är

$$A_s\left(\frac{P}{\pi}\right) = \frac{2P\frac{P}{\pi} - \pi\left(\frac{P}{\pi}\right)^2}{4} = \frac{\frac{2P^2}{\pi} - \frac{P^2}{\pi}}{4} = \frac{P^2}{4\pi}.$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} A_s'(h) &= \frac{2P - 2\pi h}{4} = \frac{P - \pi h}{2}, \\ A_s''(h) &= -\frac{\pi}{2} < 0. \end{aligned}$$

Singulära punkter saknas, men det finns en kritisk punkt $h = \frac{P}{\pi}$ där $A_s'(h) = 0$. Denna punkt är dock redan undersökt (höger ändpunkt). För detta värde på h är

$$\begin{aligned} b &= \frac{P - \pi h}{2} = 0, \\ A_s^{\max} &= bh + \frac{\pi h^2}{4} = 0 + \frac{\pi \left(\frac{P}{\pi}\right)^2}{4} = \frac{P^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Anmärkning 2: I detta fall är stadion en cirkel med diameter $h = \frac{P}{\pi}$. Detta är en konsekvens av den *isoperimetriska olikheten i planet* som säger att om en sluten kurva med omkrets P omsluter ett område med area A så gäller olikheten

$$A \leq \frac{P^2}{4\pi},$$

med likhet om och endast om kurvan är en cirkel.

Alternativ lösning: Vi kan kvadratkomplettera uttrycken för areorna som

$$A_r(h) = \frac{Ph - \pi h^2}{2} = -\frac{\pi}{2}\left(h^2 - \frac{P}{\pi}h\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{P^2}{4\pi^2} - \left(h - \frac{P}{2\pi}\right)^2\right)$$

respektive

$$A_s(h) = \frac{2Ph - \pi h^2}{4} = -\frac{\pi}{4}\left(h^2 - \frac{2P}{\pi}h\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{P^2}{\pi^2} - \left(h - \frac{P}{\pi}\right)^2\right),$$

ur vilket det direkt följer att maximum i (a) erhålls för

$$h = \frac{P}{2\pi}$$

och är

$$A_r^{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{P^2}{8\pi}$$

samt att maximum i (b) erhålls för

$$h = \frac{P}{\pi}$$

och är

$$A_s^{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{P^2}{\pi^2} = \frac{P^2}{4\pi}.$$