Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-04-02**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser:
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(xe^{-x}\right) = (-1)^n (x-n)\, e^{-x}.$$

(4p)

Bevis: Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\right) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (-1)^1 (x-1)\, e^{-x} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(xe^{-x}\right) = (-1)^p (x-p)\, e^{-x} \text{ (induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p+1$, dvs att

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(xe^{-x}\right) = (-1)^{p+1} (x-(p+1))\, e^{-x}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(xe^{-x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p}{dx^p}\left(xe^{-x}\right)\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^p (x-p)\, e^{-x}\right) \\
&= (-1)^p \left(1 \cdot e^{-x} - (x-p)\, e^{x}\right) = (-1)^p (p+1-x)\, e^{-x} \\
&= (-1)^p \left(-(x-(p+1))\right) e^{-x} = (-1)^{p+1} (x-(p+1))\, e^{-x}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Visa, exempelvis med hjälp av binomialsatsen, att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(1p)

Lösning: Med $a = 1$ och $b = -2$ insatt i binomialsatsen får vi

$$(-1)^n = (1-2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k.$$

2. Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{3x}.$$

(1p)

Lösning: Eftersom

$$-1 \le \sin 2x \le 1$$

så kommer

$$\underbrace{-\frac{1}{3x}}_{\to 0} \leq \frac{\sin 2x}{3x} \leq \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\to 0}$$

när $x \to \infty$. Därmed är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{3x} = 0.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0+} x^{x^2}.$$

(2p)

Lösning: Låt

$$f(x) = x^{x^2}$$

för $x > 0$. Då är

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x$$

varför

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{x^2 \ln x}$$

och därmed

$$\lim_{x\to 0+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0+} e^{x^2 \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x} \underset{\text{STD.}}{=} e^0 = 1,$$

eftersom exponentialfunktionen är kontinuerlig.

(c)

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right).$$

(2p)

Lösning: Omskrivning ger

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)-4}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad -2 < x < 2.$$

(a) Visa att f är $1-1$ (injektiv). (2p)

Lösning: Funktionen f är definierad på $(-2, 2)$. Derivering ger

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{4-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2} = \frac{(4-x^2)+x^2}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3} = \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}} > 0.$$

Alltså är f strängt växande på $(-2, 2)$ och därmed $1-1$.

(b) Finn inversen $f^{-1}(x)$. (2p)

Lösning: Vi söker inversen

$$y = f^{-1}(x).$$

Det innebär att

$$x = f(y) = \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}.$$

Kvadrering medför då

$$x^2 = \frac{y^2}{4-y^2} \Leftrightarrow x^2\left(4-y^2\right) = y^2 \Leftrightarrow y^2\left(1+x^2\right) = 4x^2.$$

Därmed blir

$$y = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{1+x^2}} = \pm\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Kan det vara både $+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ och $-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$. Nej, f är $1-1$. Observera att för funktionen $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ så motsvarar ett positivt x ett positivt y. Samma måste därför även gälla f^{-1}. Därmed inser vi att

$$y = f^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(c) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd. (1p)

Lösning: Eftersom f är strängt växande på $(-2,2)$ så kommer värdemängden för f att vara $(-\infty,\infty)$, ty $\sqrt{\cdot} \geq 0$ så

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2+} f(x) &= \lim_{x\to -2+} \frac{\overbrace{x}^{\to -2}}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty, \\
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} \frac{\overbrace{x}^{\to 2}}{\sqrt{4-x^2}} = \infty.
\end{aligned}$$

Därmed är

$$\begin{aligned}
D\left(f^{-1}\right) &= R(f) = \mathbb{R}, \\
R\left(f^{-1}\right) &= D(f) = (-2,2).
\end{aligned}$$

4. Finn en enkel approximation av $\sqrt{2}$ på två olika sätt genom att:

(a) Linearisera funktionen $y = \sqrt{x}$ kring $a = \frac{9}{4}$. (2p)
Lösning: Om $y = f(x) = \sqrt{x}$ så är

$$y' = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

och därmed

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{4}\right) &= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \\ f'\left(\frac{9}{4}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Därmed är lineariseringen $L(x)$ av $y = \sqrt{x}$ kring $9/4$

$$L(x) = f\left(\frac{9}{4}\right) + f'\left(\frac{9}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{4}\right).$$

Approximativt gäller därför att

$$\sqrt{2} = f(2) \approx L(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{17}{12}.$$

(b) (**M0047M**): Skriva kod/kommandon i MATLAB som utför två iterationer med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

på funktionen $f(x) = x^2 - 2$ med startvärde $x_0 = 1$. (1p)
Lösning: Vi kan till exempel utföra detta med koden

```
f = @(x) x.^2-2;
df = @(x) 2*x;
x0 = 1;
x1 = x0-f(x0)/df(x0);
x2 = x1-f(x1)/df(x1);
disp(x2);
```

eller (med hjälp av `for`-slinga)

```
n = 2;% antal iterationer
f = @(x) x.^2-2;
df = @(x) 2*x;
x(1) = 1;% startvärde med index 1
for k=1:n
 x(k+1) = x(k)-f(x(k))/df(x(k));
end;
disp(x(n+1));
```

(b) (**M0029M**): Utföra två iterationer med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

på funktionen $f(x) = x^2 - 2$ med startvärde $x_0 = 1$. (1p)

Lösning: Vi får

$$f'(x) = 2x$$

så att

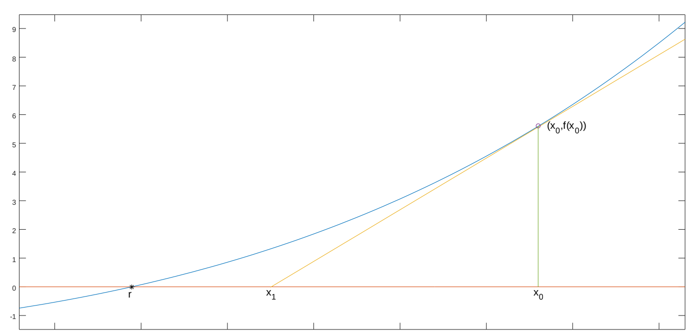
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Därmed får vi

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}, \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}. \end{aligned}$$

(c) Förklara formeln i Newton-Raphsons metod ovan med figur och härledning. (2p)

Lösning: Vi finner söker en approximation till ett nollställe r till funktionen $f(x)$, se nedanstående figur. Det gör vi genom att välja en initial gissning x_0 av roten och finna tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$.



I den punkten har funktionen lutning $f'(x_0)$. Därmed får vi tangentens ekvation ur enpunktsformeln

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Under vissa förutsättningar kommer då tangentens skärning x_1 med x-axeln att vara en bättre approximation till r. Tangenten skär x-axeln i punkten $(x_1, 0)$, det vill säga,

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Om vi sedan upprepar denna procedur i punkten $(x_1, f(x_1))$ kan vi finna en ny approximation

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

och så vidare.

5. Bestäm nollställen, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}.$$

Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (5p)

Lösning: Notera att

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

Vi börjar med att undersöka eventuell symmetri.

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{-x} - \frac{2}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \begin{cases} \neq f(x), \\ \neq -f(x). \end{cases}$$

Därmed är funktionen varken jämn eller udda. Sedan undersöker vi var funktionen skär koordinataxlarna. Vi har att

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$$

varför x-axeln skärs i $x = 1$ och $x = -2$. Däremot skär grafen aldrig y-axeln då funktionen ej är definierad i $x = 0$. Låt oss sedan undersöka asymptoter. Vi har en dubbelsidig horisontell asymptot $y = 1$ eftersom

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1.$$

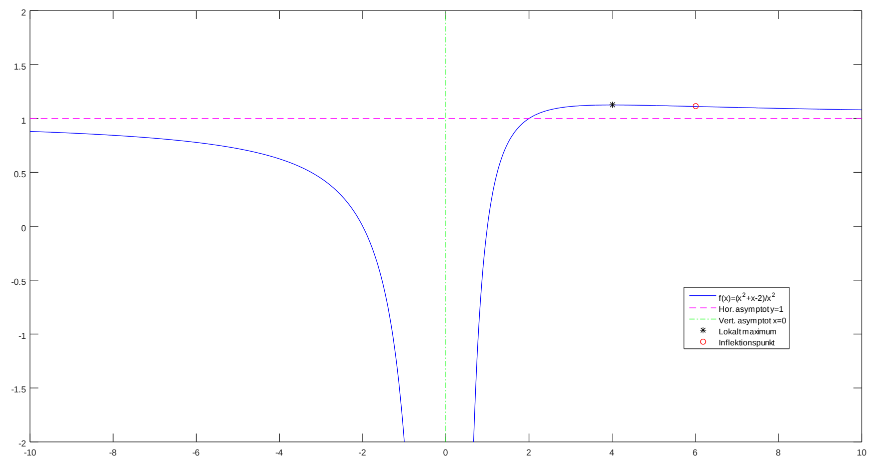
Eftersom asymptoten är dubbelsidig kan vi ej ha någon sned asymptot. Däremot har vi en vertikal asymptot $x = 0$ eftersom

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{x^2 + x - 2}^{\to -2}}{x^2} = -\infty, \\ \lim_{x \to 0-} f(x) &= \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{x^2 + x - 2}^{\to -2}}{x^2} = -\infty, \end{aligned}$$

ty nämnaren x^2 är positiv.

Derivering av

$$f(x) = 1 + x^{-1} - 2x^{-2}$$



ger

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -x^{-2} + 4x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4-x}{x^3}, \\
f''(x) &= 2x^{-3} - 12x^{-4} = \frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^4} = 2\frac{x-6}{x^4}.
\end{aligned}
$$

Teckenscheman:

		0		4	
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	odef.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	asy.	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

		0		6	
$x-6$	$-$		$-$	0	$+$
x^4	$+$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	asy.	$\frown$	infl.	$\smile$

Vi har därmed ett lokalt maximum

$$
f(4) = \frac{4^2+4-2}{4^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.
$$

Funktionen är växande på intervallet $(0,4]$ och avtagande på intervallen $(-\infty,0)$ och $[4,\infty)$. Funktionen är konvex på intervallet $(6,\infty)$ och konkav på intervallen $(-\infty,0)$ och $(0,6)$. Vi kan därmed rita grafen som

6. Teknologen Balder ska frakta en liten racerbil med lastbilstransport en sträcka på 200 kilometer. Bestäm den mest ekonomiska hastigheten och den minsta kostnaden för denna transport under följande förutsättningar: Balder kostar 320 kronor per timme och drivmedel kostar 10 kronor per liter (i landet

Utopia). Vid hastigheten v kilometer/timme förbrukar lastbilen $\frac{1}{5} + v/200$ liter drivmedel per kilometer. Antag att $40 \leq v \leq 100$. (5p)

Lösning: Antag att Balder kör med hastigheten v kilometer per timme. Det innebär att det tar tiden

$$T = \frac{200}{v}$$

timmar att genomföra resan. Timkostnaden för Balder på denna resa blir då

$$K_1 = 320 \text{ kr/timme} \cdot T \text{ timmar} = 320 \cdot \frac{200}{v} \text{ kr.}$$

I tillägg kommer drivmedelskostnad på

$$K_2 = 10 \text{ kr/l} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{v}{200}\right) \text{ l/km} \cdot 200 \text{ km} = 200 \cdot 10 \left(\frac{1}{5} + \frac{v}{200}\right) \text{ kr.}$$

Total kostnad för resan (som funktion av hastigheten v) är därför

$$K(v) = K_1 + K_2 = 320 \cdot \frac{200}{v} + 200 \cdot 10 \left(\frac{1}{5} + \frac{v}{200}\right) = 2000 \left(\frac{32}{v} + \frac{1}{5} + \frac{v}{200}\right) \text{ kr.}$$

Detta är en kontinuerlig funktion på det slutna och begränsade intervallet $40 \leq v \leq 100$. Alltså vet vi att det finns en maximal och en minimal kostnad, dessa finner vi genom att undersöka ändpunkter, singulära punkter och kritiska punkter.

Ändpunkter:

$$\begin{aligned} K(40) &= 2000 \left(\frac{32}{40} + \frac{1}{5} + \frac{40}{200}\right) = 2000 \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2000 \cdot 6}{5} = 2400 \text{ kr,} \\ K(100) &= 2000 \left(\frac{32}{100} + \frac{1}{5} + \frac{100}{200}\right) = 2000 \left(\frac{8}{25} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= 2000 \frac{16 + 10 + 25}{50} = 2000 \frac{51}{50} = 40 \cdot 51 = 2040 \text{ kr.} \end{aligned}$$

Derivering ger nu

$$K'(v) = 2000 \left(-\frac{32}{v^2} + \frac{1}{200}\right).$$

Singulära punkter: $v = 0$ (tillhör ej intervallet).

Kritiska punkter: $K'(v) = 0$ om

$$\frac{32}{v^2} = \frac{1}{200} \Leftrightarrow v^2 = 32 \cdot 200 = 6400 \Leftrightarrow v = \pm 80.$$

Av dessa tillhör endast $v = 80$ det tillåtna intervallet. Nu är

$$K''(v) = 2000 \cdot \frac{64}{v^3} > 0$$

för alla $v > 0$. Därmed måste denna kritiska punkt ge ett lokalt (och globalt) minimum

$$K(80) = 2000 \left(\frac{32}{80} + \frac{1}{5} + \frac{80}{200}\right) = 2000 \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = 2000 \text{ kr.}$$

Svar: Den mest ekonomiska hastigheten är $v = 80$ km/timme. Det ger en minimal kostnad på 2000 kronor för hela transporten.