Lösningsskisser övningstenta 1; M0049M

1.

a) Dividera med i och man får den ekvivalenta ekvationen

$$z^2 + (1+i)z - 6 - 2i = 0.$$

Kvadratkomplettera och man får $(z+(1+i)/2)^2-(1+i)^2/4-6-2i = 0$. Låt $w = z + (1+i)/2$ och ekvationen kan skrivas som $w^2 = 6 + 5i/2$. Ansätt $w = a + bi$ och det följer $w^2 = a^2 + 2abi - b^2$ så $a^2 - b^2 = 6$ och $2ab = 5/2$. Lös ut b ur den andra ekvationen, $b = 5/4a$, och sätt in i den första och man får $a^2 - 25/16a^2 = 6$ vilket är det samma som $a^4 - 6a^2 - 25/16 = 0$. Detta är en andragradare i a^2 och man får $a^2 = 25/4$ d.v.s. $a = \pm 5/2$. För $a = 5/2$ fås $b = 1/2$ så $z = 5/2 + i/2 - 1/2 - i/2 = 2$ och för $a = -5/2$ fås $b = -i/2$ så $z = -5/2 - i/2 - 1/2 - i/2 = -3 - i$.

b) Man behöver bestämma $|z|$ och $\arg z$. Räknelagar ger

$$\left|\frac{-(\sqrt{3}-3i)^3}{i(-1+i)^5}\right| = \frac{|-1|\left|\sqrt{3}-3i\right|^3}{|i|\,|-1+i|^5} = \frac{1\cdot(3+9)^{3/2}}{1\cdot(1+1)^{5/2}} = 3\sqrt{6}$$

och

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{-1(\sqrt{3}-3i)^3}{i(-1+i)^5}\right) &= \arg(-1) + 3\arg\left(\sqrt{3}-3i\right) - \arg(i) \\ &- 5\arg(-1+i) \\ &= \pi + 3\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{2} - 5\frac{3\pi}{4} = \frac{-17\pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Det gäller således att $z = 3\sqrt{6}e^{-i\pi/4}$. Här vore det en god idé att först förlänga med i.

2. Gausseliminering ger

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -8 & 4 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Baser för kolonnrummet resp. radrummet är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}, \text{ resp. } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

För nollrummet, lös $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och man finner

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ s/2 + 3t/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så en bas för nollrummet är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rangen för en matris är dimensionen av kolonnrummet, så rank$A = 2$.

b) Koordinaterna för $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}^T$ bestäms via ekvationen

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 17 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix},$$

och man finner, via gausseliminering, att $c_1 = 1$ och $c_2 = -2$ så koordinaterna är $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

3.

a) (A):

$$\begin{aligned} T(p+q) &= (1-t^2)(p+q)'(t) + 2(p+q)(-2) \\ &= (1-t^2)p'(t) + (1-t^2)q'(t) + 2p(-2) + 2q(-2) \\ &= T(t) + T(q). \end{aligned}$$

(H):

$$\begin{aligned} T(cp) &= (1-t^2)(cp)'(t) + 2(cp)(-2) \\ &= c(1-t^2)p'(t) + c2p(-2) = cT(p). \end{aligned}$$

Så T är linjär.

b) Enligt teorin gäller det att

$$[T] = \Big[[T(1+t)]_{\mathcal{B}_2}\,[T(1-t)]_{\mathcal{B}_2}\,\big[T(t^2)\big]_{\mathcal{B}_2}\Big].$$

Vidare fås $T(1+t) = (1-t^2)1 + 2(-1) = -1-t^2$ vilken har koordinaterna, relativt basen $\mathcal{B}_2$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(1-t) = (1-t^2)(-1)+2\cdot 3 = 5+t^2$ och $T(t^2) = (1-t^2)2t + 2\cdot 4 = 8+2t-2t^3$. Matrisen blir således

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.

a) Det gäller att

$$\big\langle 1+t, 1-t^2 \big\rangle = 0+1+0+3(-3) = -8,$$

$$\left\| t+t^2 \right\|^2 = \big\langle t+t^2, t+t^2 \big\rangle = 0+0+2\cdot 2^2 + 6^2 = 44,$$

så $\|t+t^2\| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ och

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(1-t, t^2-t)^2 &= \left\| 1-t-(t^2-t) \right\|^2 = \left\| 1-t^2 \right\|^2 \\ &= \big\langle 1-t^2, 1-t^2 \big\rangle = 0 + 1^2 + 0 + (-3)^2 = 10, \end{aligned}$$

så $\operatorname{dist}(1-t, t^2-t) = \sqrt{10}$.

b) En bas är $\{1, t\}$. Ortogonalisera denna med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Först, välj $q_1(t) = 1$ och $W_1 = \operatorname{span}_{W_1}\{q_1\}$. Välj nu

$$q_2(t) = t - \operatorname{proj}_{W_1}(t) = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 = t - \frac{3}{5}.$$

En ortogonal bas är $\{1, t-3/5\}$.

5. Homogenlösning: kar. ekv. $r^2 - 2r + 10 = 0$ vilken har lösningarna $1 \pm 3i$ så den allmänna homogena lösningen är

$$y_h = e^x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right).$$

Partikulärlösning: den lämpliga ansatsen är $y_p = a\cos 3x + b\sin 3x$. Derivering ger $y_p' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x$ och $y_p'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$ vilket insatt i differentialekvationen blir

$$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x - 2\left(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x\right) + 10\left(a\cos 3x + b\sin 3x\right)$$

$$= 3\cos 3x + \sin 3x.$$

Eftersom sin och cos är linjärt oberoende så måste antalet sin resp. cos vara lika på vardera sida. Man får ekvationssystemet

$$\begin{cases} \cos: & a - 6b = 3 \\ \sin: & 6a + b = 1 \end{cases}$$

som löses till $a = 9/37$ och $b = -17/37$. En partikulärlösning är därför

$$y_p = \frac{9}{37}\cos 3x - \frac{17}{37}\sin 3x$$

och det följer att den allmänna lösningen är

$$y = y_h + y_p = e^x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + \frac{9}{37}\cos 3x - \frac{17}{37}\sin 3x.$$

6. På matrisform skrivs systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ med

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -12 & -9 \end{bmatrix}, \, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enligt teorin ges samtliga lösningar av en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar. Dessutom, $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ är en lösning om $\mathbf{v}$ är en egenvektor för A med tillhörande egenvärde λ. Bestäm egenvärden och egenvektorer. Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 8 \\ -12 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (11-\lambda)(-9-\lambda) + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow -99 - 2\lambda + \lambda^2 + 96 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1;\ \lambda = 3.$$

Egenvektorer: Först $\lambda = -1$, $A\mathbf{v} = -1\mathbf{v} \Leftrightarrow (A + I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 8 & 0 \\ -12 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Om x_2 sätts till t fås $x_1 = -2t/3$. En egenvektor tillhörande egenvärdet $\lambda = -1$ är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För $\lambda = 3$ fås $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 0 \\ -12 & -12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Om x_2 sätts till t fås $x_1 = -t$. En egenvektor tillhörande egenvärdet $\lambda = 3$ är

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är således

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Men, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ur denna utläses $c_1 = 1$ och $c_2 = -3$. Lösningen är

$$\mathbf{x} = e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller på komponentform

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} + 3e^{3t} \\ y(t) = 3e^{-t} - 3e^{3t}. \end{cases}$$

7.

a) $\mathcal{B}$ skall vara linjärt oberoende och spänna upp V, det vill säga om

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

så är $c_1 = \ldots = c_n = 0$ och varje element $\mathbf{v} \in V$ kan skrivas som en linjärkombination elementen i $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\mathbf{v}_n.$$

b) Mängden $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ spänner inte upp V, ty om $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ så $-1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ vilket ger att $\{\mathbf{v}_i\}$ inte är linjärt oberoende. Men det är de ju, de utgör en bas. Den andra mängden är inte linjär oberoende ty

$$1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \ldots + 0\mathbf{v}_n + (-1)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}.$$