LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Omtentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2019-12-19**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **4**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(xe^{2x}\right) = \left(2^n x + n \cdot 2^{n-1}\right) e^{2x}.$$

Bevis: Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}\right) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (1 + 2x)\, e^{2x} = \left(2^1 x + 1 \cdot 2^{1-1}\right) e^{2x} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(xe^{2x}\right) = \left(2^p x + p \cdot 2^{p-1}\right) e^{2x} \text{ (induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(xe^{2x}\right) = \left(2^{p+1} x + (p+1) \cdot 2^p\right) e^{2x}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(xe^{2x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p}{dx^p}\left(xe^{2x}\right)\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \frac{d}{dx}\left(\left(2^p x + p \cdot 2^{p-1}\right) e^{2x}\right) \\
&= 2^p e^{2x} + \left(2^p x + p \cdot 2^{p-1}\right) 2e^{2x} = \left(2^p + 2^{p+1} x + p \cdot 2^p\right) e^{2x} \\
&= \left(2^{p+1} x + (p+1) \cdot 2^p\right) e^{2x}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

(a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 15x^5 e^{-x}}{4x^2 \sin x - 7x^3}.$$

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Utbrytning av x^3 i nämnaren ger då

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 15x^5 e^{-x}}{4x^2 \sin x - 7x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 15 \overbrace{\dfrac{x^2}{e^x}}^{\to 0}}{4 \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\to 0} - 7} = -\frac{3}{7}.$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{|2x - 2| - |2x + 2|}{x}.$$

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Här gäller det att

$$\begin{aligned}
|2x - 2| &= \begin{cases} 2x - 2 \text{ om } 2x - 2 \geq 0, \\ -(2x - 2) \text{ om } 2x - 2 < 0, \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2 \text{ om } x \geq 1, \\ 2 - 2x \text{ om } x < 1, \end{cases} \\
|2x + 2| &= \begin{cases} 2x + 2 \text{ om } 2x + 2 \geq 0, \\ -(2x + 2) \text{ om } 2x + 2 < 0, \end{cases} = \begin{cases} 2x + 2 \text{ om } x \geq -1, \\ -2x - 2 \text{ om } x < -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Eftersom $x \to 0$ får vi därför

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2x-2|-|2x+2|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-2x)-(2x+2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = -4.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - 3x}{2\tan 3x - 4x\cos x}.$$

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi får

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - 3x}{2\tan 3x - 4x\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} - 3}{2\frac{\sin 3x}{x\cdot\cos 3x} - 4\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\overbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}^{\to 1} - 3}{2\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{3}{\cos 3x}}_{\to 3} - 4\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \\
&= \frac{5-3}{2\cdot 1\cdot 3 - 4} = 1.
\end{aligned}$$

3. Låt

$$f(x) = e^x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm ett andra ordningens taylorpolynom till f kring punkten $a = 0$, inklusive Lagranges restterm.

Lösning: Vi utvecklar e^x av ordning 2 kring $a = 0$. Om

$$f(x) = e^x$$

får vi

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x,$$

så att

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$$

Därmed kan vi skriva funktionen $f(x)$ som

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + E_2(x) = P_2(x) + E_2(x),$$

där

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\
E_2(x) &= \frac{f'''(s)}{3!}x^3 = \frac{e^s}{6}x^3
\end{aligned}$$

för något s mellan 0 och x.

(b) Använd detta polynom för att visa att

$$\sqrt{e} > \frac{13}{8}.$$

Lösning: Vi har att

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = P_2\left(\frac{1}{2}\right) + E_2\left(\frac{1}{2}\right) > P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{13}{8}$$

eftersom

$$E_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^s}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{e^s}{48} > 0.$$

(c) Använd feltermen för att bestämma en övre gräns som det maximala värdet differensen

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8}$$

kan få.

Lösning: Vi såg ovan att

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8} = f\left(\frac{1}{2}\right) - P_2\left(\frac{1}{2}\right) = E_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^s}{48}$$

där s ligger mellan 0 och $\frac{1}{2}$. Eftersom e^s är en växande funktion måste därför

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8} = \frac{e^s}{48} < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{48} = \frac{\sqrt{e}}{48}.$$

Därmed måste vi ha att

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8} < \frac{\sqrt{e}}{48} \Leftrightarrow \sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{48}\right) < \frac{13}{8} \Leftrightarrow \sqrt{e} < \frac{13 \cdot 48}{8 \cdot 47}.$$

Därmed ser vi att en övre gräns för det maximala värdet på differensen är 13/376 eftersom

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8} < \frac{\sqrt{e}}{48} < \frac{1}{48} \cdot \frac{13 \cdot 48}{8 \cdot 47} = \frac{13}{376}$$

4. Bilda funktionen

$$f(x) = x^{x \ln x}, \ x > 0.$$

Bestäm eventuella lokala extremvärden. Skissera kurvan i dess huvuddrag och ange funktionens värdemängd.

Lösning: Logaritmering följt av exponentiering ger

$$y = f(x) = x^{x \ln x} \Leftrightarrow \ln y = x \ln x \cdot \ln x = x(\ln x)^2 \Leftrightarrow y = e^{\ln y} = e^{x(\ln x)^2}.$$

Vi inser därmed att $f(x) > 0$. Dessutom ser vi att

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} e^{x(\ln x)^2} = 1, \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} e^{x(\ln x)^2} = \infty, \end{aligned}$$

eftersom $e^{\cdot}$ är kontinuerlig och

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} x(\ln x)^2 &= \lim_{x \to 0+} \left(x^{1/2} \ln x\right)^2 = 0^2 = 0, \\ \lim_{x \to \infty} x(\ln x)^2 &= \infty. \end{aligned}$$

Derivering ger

$$y' = e^{x(\ln x)^2}\left(1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot \frac{2}{x}\ln x\right) = e^{x(\ln x)^2}(\ln x + 2)\ln x.$$

Funktionen har därmed två kritiska punkter (när $y' = 0$), nämligen e^{-2} och 1. Teckenstudium ger

	0		e^{-2}		1	
$\ln x + 2$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$
$e^{x(\ln x)^2}$		$+$		$+$		$+$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

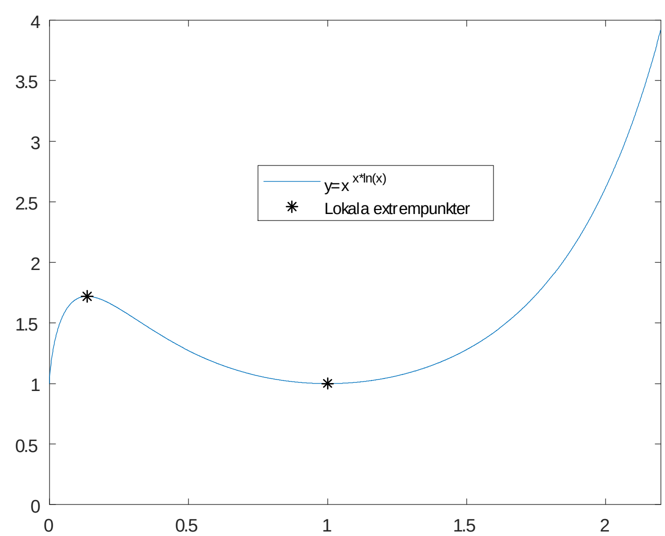
Funktionen har då ett lokalt maximum i $x = e^{-2}$ som är

$$f\left(e^{-2}\right) = e^{e^{-2}\left(\ln e^{-2}\right)^2} = e^{(-2)^2 e^{-2}} = e^{4e^{-2}}$$

samt ett lokalt minimum i $x = 1$ som är

$$f(1) = e^{1(\ln 1)^2} = e^0 = 1.$$

Funktionen är växande på intervallen $(0, e^{-2}]$ och $[1, \infty)$ respektive avtagande på intervallet $[e^{-2}, 1]$. Funktionens värdemängd blir därför $[1, \infty)$. Vi kan nu skissera grafen som



5. Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar.

Lösning: Derivering ger

$$f'(x) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2 + x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser att $f'(x) > 0$ om $x \neq 0$. När $x = 0$ är $f'(x) = 0$, men samtidigt ser vi också att $f(x) < f(0) = 0$ när $x < 0$ och $f(x) > f(0) = 0$ när $x > 0$. Därmed är $f(x)$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därför också $1-1$, det vill säga, inverterbar.

(b) Finn

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Lösning: Vi vet att

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{y^3}{1+y^2}.$$

I synnerhet, för punkten $x = \frac{1}{2}$ gäller att

$$\frac{1}{2} = \frac{y^3}{1+y^2} \Leftrightarrow 1 + y^2 = 2y^3 \Leftrightarrow 2y^3 - y^2 - 1 = 0.$$

Vi ser direkt att $y = 1$ är *en* (reell) lösning till denna ekvation. Men detta är en tredjegradsekvation. Kan det finnas fler lösningar? Nej, vi har ju ovan visat att funktionen f är injektiv, dvs att ett x-värde motsvaras av exakt ett y-värde. Alltså är $y = 1$ den enda lösningen. Därmed är

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

(c) Beräkna

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Lösning: Vi söker derivatan y' till $y = f^{-1}(x)$ i punkten $x = \frac{1}{2}$. För att finna y' deriverar vi $x = f(y)$ implicit med avseende på x och får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(f(y)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y^3}{1+y^2}\right) \\ &\Downarrow \\ 1 &= f'(y)\,y' = \frac{3y^2+y^4}{(1+y^2)^2}y' \\ &\Updownarrow \\ y' &= \frac{1}{f'(y)} = \frac{(1+y^2)^2}{3y^2+y^4}. \end{aligned}$$

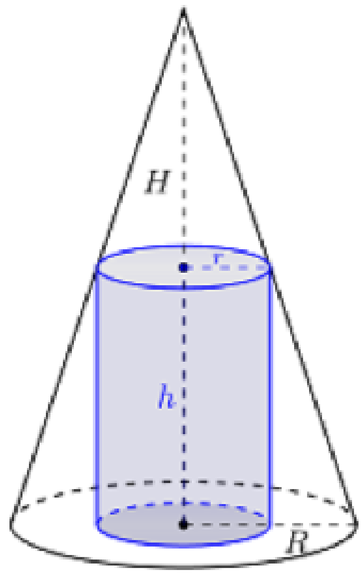
Vi får därför

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(f^{-1}\right)'(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = y'\big|_{y=1} = \frac{(1+1^2)^2}{3 \cdot 1^2 + 1^4} = 1.$$

Observera att vi här sätter in $y = 1$ för att evaluera $\left(f^{-1}\right)'(x)$ i $x = \frac{1}{2}$.

6. Bestäm den maximala volymen av en rak cirkulär cylinder inskriven i en cirkulär kon med höjden 12 cm och basradien 4 cm. Vi förutsätter att symmetriaxlarna till cylindern och konen sammanfaller.

   Lösning: Låt oss kalla cylinderns radie för r och dess höjd för h. På motsvarande sätt, kalla konens basradie för $R = 4$ och dess höjd för $H = 12$.



   Cylinderns volym ges då av
   $$V = \pi r^2 h.$$
   Eftersom cylindern är inskriven i en kon så är r och h relaterade. Likformiga trianglar ger att
   $$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H}.$$
   Därmed är
   $$Hr = 12r = 4\,(12-h) = R\,(H-h)\,,$$
   det vill säga,
   $$h = 3\,(4-r)\,.$$
   Vi kan därför skriva
   $$V = V\,(r) = 3\pi r^2\,(4-r) = 3\pi\left(4r^2 - r^3\right),\ 0 \le r \le 4.$$
   Vi inser direkt att volymen är noll i ändpunkterna av intervallet,
   $$V\,(0) = V\,(4) = 0.$$
   Derivering ger
   $$\begin{aligned} V'\,(r) &= 3\pi\left(8r - 3r^2\right) = 3\pi r\,(8-3r)\,, \\ V''\,(r) &= 3\pi\,(8-6r)\,. \end{aligned}$$

Vi får två kritiska punkter, $r = 0$ (redan undersökt) respektive $r = \frac{8}{3} \in [0, 4]$. I den senare punkten har vi

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{8}{3}\right) &= 3\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2\left(4 - \frac{8}{3}\right) = 3\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2\frac{4}{3} = \frac{256\pi}{9}\ \mathrm{cm}^3, \\
V''\left(\frac{8}{3}\right) &= 3\pi\left(8 - 6 \cdot \frac{8}{3}\right) = -24\pi < 0 \text{ (lokalt maximum)}.
\end{aligned}
$$

Den maximala volymen är därför $\frac{256\pi}{9}$ cm^3.