Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M

Tentamensdatum: **2020-08-24**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^6 + 64 = 0$. Ge svaret på rektangulär form.

b) Visa att ekvationen $z = i(\bar{z} + 2)$ saknar lösning. (4 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en bas för Col$A$.

b) Följande sats är en del av vår kurs: ”Det ortogonala komplementet för kolonnrummet för en matris är lika med nollrummet för matrisens transponat.” Verifiera satsen för matrisen A. (4 p)

3. Låt $\mathcal{B} = \{1+t+t^2, t+t^2, 1-t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t\}$ vara baser för $\mathbb{P}_2$ respektive $\mathbb{P}_1$ och T den linjära operatorn från $\mathbb{P}_2$ till $\mathbb{P}_1$ definierad enligt $T(p) = tp''(t) - 2p'(t) + tp(0)$. Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Låt $u(t) = 1 + 2t - t^2$ och $v(t) = 2 - 2t$. Bestäm $\langle u, v \rangle$, $\|v\|$ och dist(u, v).

b) Bestäm en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - 4y' + 8y = 5\cos 2x$. (4 p)

6. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $y(0) = 1$. (4 p)

7. Låt A vara en kvadratisk matris.

a) Definiera begreppen egenvärden och egenvektorer.

b) Låt $\mathbf{v}$ vara en egenvektor för A med det tillhörande egenvärdet λ. Visa att $\mathbf{v}$ är en egenvektor för $B = 3I - 2A^2$ och bestäm det tillhörande egenvärdet. (4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG M0049M 200824

(M0031M)

1) a. $z^6+64=0 \iff z^6=-64=64e^{i\pi}$

ANSATS: $z=re^{i\varphi}$; D-M GER $z^6=r^6e^{i6\varphi}$

IN I EKV.:

$$r^6e^{i6\varphi}=64e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^6=64 \\ 6\varphi=\pi+2\pi k \end{cases} \iff$$

$$r=2;\ \varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$$

$$\therefore z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)}=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)$$

$k=0$: $z_0=2\cos\frac{\pi}{6}+i\,2\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}+i$

$z_1=2\cos\frac{\pi}{2}+i\,2\sin\frac{\pi}{2}=2i$

$\vdots$

$z_2=2\cos\frac{5\pi}{6}+i\,2\sin\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}+i$

$z_3=2\cos\frac{7\pi}{6}+i\,2\sin\frac{7\pi}{6}=-\sqrt{3}-i$

$z_4=2\cos\frac{3\pi}{2}+i\,2\sin\frac{3\pi}{2}=-2i$

$k=5$: $z_5=2\cos\frac{11\pi}{6}+i\,2\sin\frac{11\pi}{6}=\sqrt{3}-i$ //

b. $z=i(\bar{z}+2)$

LÅT $z=a+bi$; IN I EKV.:

$a+bi=i(a-ib+2) \iff$

$$\left.\begin{aligned} \text{Re}:&\ a=b \\ \text{Im}:&\ b=a+2 \end{aligned}\right\}\ \text{INKONSISTENT}$$

~~ok~~

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a. EN BAS FÖR KOLONNRUMMET ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ //

b. $A^T\bar{x} = \bar{0}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

x_3 FRI, $x_3 = t$ GER $x_2 = -t$, $x_1 = t$

$\therefore \text{Nul } A^T = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

KONTROLLERA NU ATT $(\text{Col} A)^\perp = \text{Nul } A^T$

DET FÖLJER $t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$; $t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

SÅ VARJE $\bar{x} \in \text{Nul } A^T$ LIGGER I $(\text{Col} A)^\perp$ ok

ANDRA HÅLLET : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \text{Nul } A^T$ ok

EN VEKTOR SOM LIGGER I $(\text{Col} A)^\perp$ OCH ALLA SÅDANA
ÄR MULTIPLER AV DENNA

3) $T(p) = t\,p''(t) - 2p'(t) + t\,p(0)$

ENLIGT TEORIN ÄR DEN SÖKTA MATRISEN

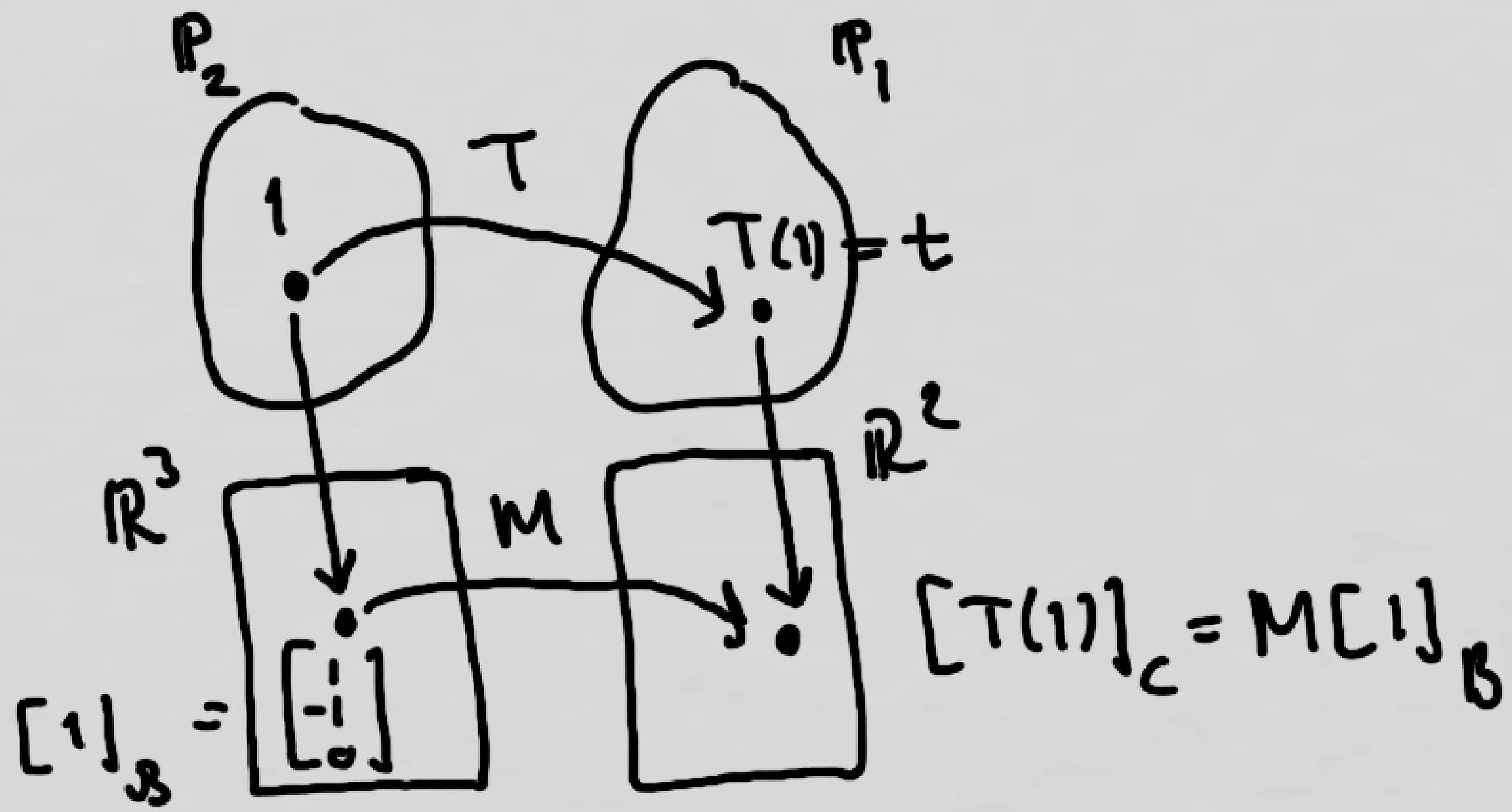
$$M = \Big[\, [T(1+t+t^2)]_C \;\; [T(t+t^2)]_C \;\; [T(1-t^2)]_C \,\Big]$$

- $T(1+t+t^2) = 2t - 2(1+2t) + t = -t - 2 \quad \therefore \quad [T(1+t+t^2)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $T(t+t^2) = 2t - 2(1+2t) = -2t - 2 \quad \therefore \quad [T(t+t^2)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$
- $T(1-t^2) = -2t - 2(-2t) + t = 3t \quad \therefore \quad [T(1-t^2)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

MATRISEN ÄR $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ //

TEST: $T(1) = t \qquad [1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [t]_C$$ Ok



4) $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2)$

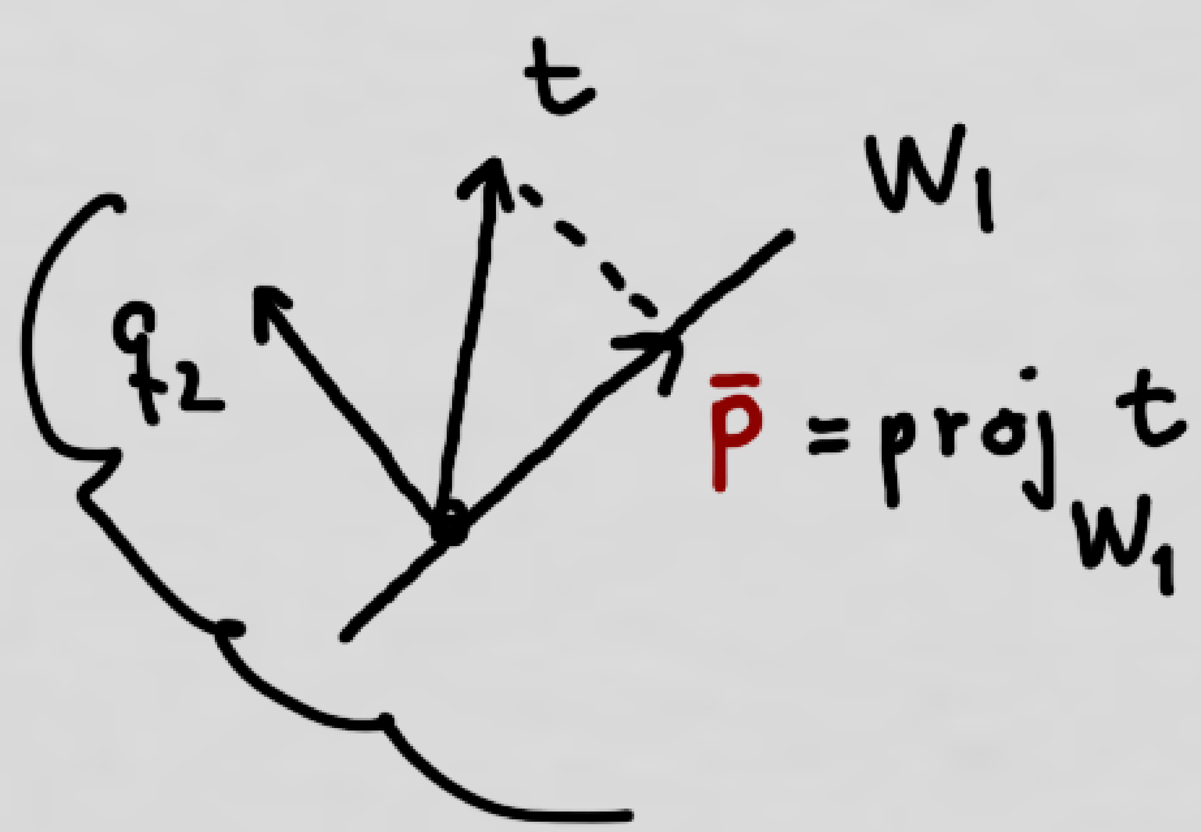
a. $\langle 1+2t-t^2, 2-2t\rangle = 1\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot(-2) = 0$ //

$\|v\|^2 = \langle v,v\rangle = 2\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 0 + (-2)(-2) = 8 \quad \therefore \|v\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ //

$\text{dist}(u,v)^2 = \|u-v\|^2 = \|-1+4t-t^2\|^2 = 1^2 + 2\cdot 2^2 + 3^2 = 18 \quad \therefore \text{dist}(u,v) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ //

b. EN BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1,t\}$. ORTOGONALISERA DENNA MHA GRAM-SCHMIDT

- $q_1(t) = 1$; $W_1 = \text{span}\{1\}$



- $q_2(t) = t - \bar{p} = t - \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 =$

$$\left[\begin{array}{l} \langle t,1\rangle = 0+2+2 = 4 \\ \langle 1,1\rangle = 1+2+1 = 4 \end{array}\right]$$

$= t-1$ /

$\therefore$ EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, t-1\}$ //

[KONTROLL: $\langle 1, t-1\rangle = 1 + 0 + (-1) = 0$ OK]

5) "HOMOGEN + PARTIKULÄR"

<u>HOM.</u>: KAR.EKV.: $r^2-4r+8=0 \iff$

$r = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$

$\therefore y_h = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

<u>PART.</u>: ANSATS: $y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$

VI FÅR: $y_p' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$

$y_p'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$ IN I EKV.:

$-4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 4(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) +$

$+ 8(a\cos 2x + b\sin 2x) = 5\cos 2x$

IDENT.:

$\left.\begin{array}{ll} \cos 2x: & -4a - 8b + 8a = 5 \\ \sin 2x: & -4b + 8a + 8b = 0 \end{array}\right\} \iff$

$\left.\begin{array}{ll} (1) & 4a - 8b = 5 \\ (2) & 8a + 4b = 0 \end{array}\right\}$ (2)-2(1):

$4b + 16b = -10 \iff b = -\frac{1}{2}$

IN I (1): $4a = 5 - 4 = 1$

$\therefore a = 1/4$

$\therefore y_p = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore$

$$y = y_h + y_p = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

6) (MOOHYM) PÅ MATRISFORM KAN EKVATIONEN SKRIVAS SÅ HÄR: $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

DÄR $\bar{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ OCH $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$

ENLIGT TEORIN ÄR DET EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER FÖR A SOM LEDER TILL SVARET.

EGENVÄRDE: KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 2i$$

[KOLL: $1+2i+1-2i = 2$; $\operatorname{tr}A = 1+1 = 2$ OK
$(1+2i)(1-2i) = 5$; $\det A = 1+4 = 5$ OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = 1+2i$: $A\bar{v} = (1+2i)\bar{v} \iff (A-(1+2i)I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-2i & 2 & 0\\ -2 & -2i & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \bar{v} = \begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}t$$

VÄLJ $\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

(EGENVEKTORN FÖR $1-2i$ ÄR DÅ $\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ TY DE KOMMER I KOMPLEXKONJUGERADE PAR. MEN VI NYTTJAR ENBART EN I ALLA FALL)

$$\therefore \bar{x} = A\,\mathrm{Re}\left(e^{(1+2i)t}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right) + B\,\mathrm{Im}\left(e^{(1+2i)t}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right)$$

$$= Ae^t\,\mathrm{Re}\,(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} + Be^t\,\mathrm{Im}\,(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} =$$

$$= Ae^t\begin{bmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\end{bmatrix} + Be^t\begin{bmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\end{bmatrix}$$

MEN, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ GER:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \therefore A = B = 1$$

$$\therefore \bar{x}(t) = e^t\begin{bmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\end{bmatrix}$$

ELLER PÅ KOMPONENTFORM:

$$x(t) = e^t(\cos 2t + \sin 2t)$$
$$y(t) = e^t(\cos 2t - \sin 2t)$$

TRAJEKTORIA

6) (M0031M)

a. Låt $y = x$: $VL = 2x \cdot 1 = 2x$

$HL = 2x + x^2 - x^2 = 2x$

$VL = HL$ ok

b. Låt $y = x + v^{-1}$ och man får

$y' = 1 - v^{-2}v'$. Ini ekv.:

$$2x(1 - v^{-2}v') = 2(x + v^{-1}) + (x + v^{-1})^2 - x^2 \iff$$

$$\cancel{2x} - 2xv^{-2}v' = \cancel{2x} + 2v^{-1} + \cancel{x^2} + 2xv^{-1} + v^{-2} - \cancel{x^2} \iff$$

$$-2xv^{-2}v' = 2v^{-1} + 2xv^{-1} + v^{-2} \iff$$

$$v' = -\frac{1}{x}v - v - \frac{1}{2x} \iff v' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)v = -\frac{1}{2x}$$

IF: $\int 1 + \frac{1}{x}\,dx = x + \ln|x| + c = x + \ln x + c$

Välj $IF = e^{x + \ln x} = e^x e^{\ln x} = xe^x$

$$xe^x v' + xe^x\left(1 + \frac{1}{x}\right)v = -xe^x \frac{1}{2x} \iff$$

$$\frac{d}{dx}(xe^x v) = -\frac{1}{2}e^x \iff$$

$$xe^x v = -\frac{1}{2}e^x + C \iff$$

$$v = -\frac{1}{2x} + \frac{Ce^{-x}}{x}$$

$$\therefore \quad y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + \frac{Ce^{-x}}{x}}$$

Men, $y(1) = 2$:

$$2 = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + Ce^{-1}} \qquad \therefore \quad C = e \cdot \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x}e^{1-x}} = x + \frac{2x}{3e^{1-x} - 1}$$

7) a. EN NOLLSKILD VEKTOR $\bar{v}$ ÄR EN EGENVEKTOR FÖR A OM DET FINNS EN SKALÄR λ SÅ ATT

$$\boxed{A\bar{v} = \lambda\bar{v}}.$$

λ ÄR DET TILLHÖRANDE EGENVÄRDET

b) ANTAG $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$.

VI FÅR $B\bar{v} = (3I - 2A^2)\bar{v} =$

$$= 3\bar{v} - 2A^2\bar{v} = 3\bar{v} - 2A\,A\bar{v} =$$

$$= 3\bar{v} - 2A\lambda\bar{v} = 3\bar{v} - 2\lambda A\bar{v} =$$

$$= 3\bar{v} - 2\lambda\lambda\bar{v} = (3 - 2\lambda^2)\bar{v}$$

$\therefore$ $\bar{v}$ ÄR EN EGENVEKTOR FÖR B MED EGENVÄRDE $3 - 2\lambda^2$