



Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-05-25**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5**.

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5). Kalkylator EJ Tillåten.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+2}, \quad x > -1.$$

Definiera talföljden $\{a_n\}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = f(a_n) = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}. \end{cases}$$

(a) Visa med induktion att

$$a_n = \frac{4 \cdot 4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(4p)

(b) **(M0047M)** Man kan visa (behövs ej) att talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde a när $n \rightarrow \infty$. Ge förslag på MATLAB-kod/kommandon som kan visa vad detta gränsvärde är. (1p)

(b) **(M0029M/M0057M)** Man kan visa (behövs ej) att talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde a när $n \rightarrow \infty$. Bestäm a . (1p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln \sin x - \ln x).$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8x + 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}.$$

(2p)

3. Bestäm tangenten till *Descartes folium*

$$2(x^3 + y^3) = 9xy$$

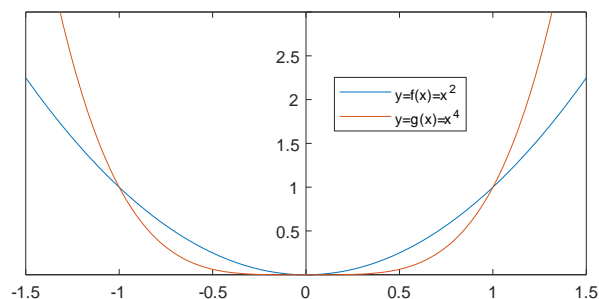
i punkten $(1, 2)$.

(5p)

4. Kurvorna

$$\begin{aligned}y &= f(x) = x^2, \\y &= g(x) = x^4,\end{aligned}$$

har en uppsättning tangentlinjer som är gemensamma för bägge kurvorna. Finn samtliga sådana tangentlinjer.



Ledning: antag att $y = f(x)$ tangeras i punkten $(a, f(a))$ och att $y = g(x)$ tangeras i $(b, g(b))$ av den gemensamma tangenten. Vilka samband måste då gälla mellan a och b ? (5p)

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

6. En meter framför ett hus står en $2\sqrt{2}$ meter hög mur. En brandman ska resa en steg mot huset över muren. Vilken är den kortaste möjliga steg l brandmannen kan använda för att den ska luta mot huset? (5p)

