Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-05-25**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5). Kalkylator EJ Tillåten.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt
$$f(x)=\frac{3x+2}{x+2},\ x>-1.$$
Definiera talföljden $\{a_n\}$ rekursivt genom
$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}. \end{cases}$$

(a) Visa med induktion att
$$a_n=\frac{4\cdot 4^n-1}{2\cdot 4^n+1},\ n=0,1,2,\ldots.$$
(4p)

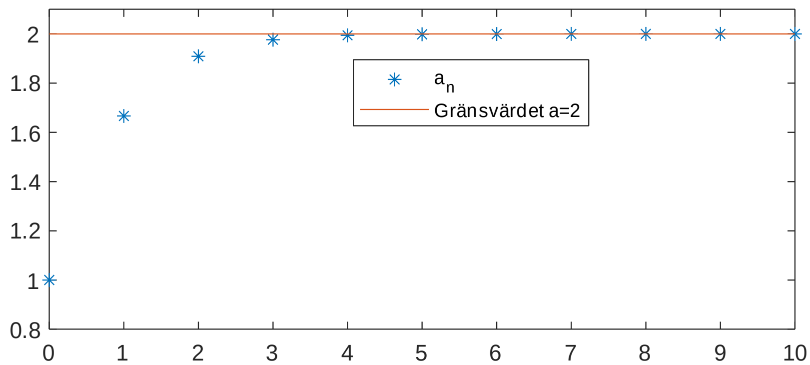
Bevis: Vi börjar med basfallet $n=0$. Vi har då att
$$a_0=\frac{4\cdot 4^0-1}{2\cdot 4^0+1}=\frac{4-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1 \text{ (OK!)}$$
Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att uttrycket för a_n stämmer för $n=p$, dvs att
$$a_p=\frac{4\cdot 4^p-1}{2\cdot 4^p+1} \text{ (induktionsantagande)}.$$
Vi vill visa att detta medför att uttrycket då också stämmer för $n=p+1$, dvs att
$$a_{p+1}=\frac{4\cdot 4^{p+1}-1}{2\cdot 4^{p+1}+1}.$$
Det håller, ty vi har att
$$\begin{aligned} a_{p+1} &= f(a_p)=\frac{3a_p+2}{a_p+2} \underset{\text{IND.ANT.}}{=} \frac{3\cdot\dfrac{4\cdot 4^p-1}{2\cdot 4^p+1}+2}{\dfrac{4\cdot 4^p-1}{2\cdot 4^p+1}+2}=\frac{3(4\cdot 4^p-1)+2(2\cdot 4^p+1)}{(4\cdot 4^p-1)+2(2\cdot 4^p+1)} \\ &= \frac{12\cdot 4^p-3+4\cdot 4^p+2}{4\cdot 4^p-1+4\cdot 4^p+2}=\frac{16\cdot 4^p-1}{8\cdot 4^p+1}=\frac{4\cdot(4\cdot 4^p)-1}{2\cdot(4\cdot 4^p)+1}=\frac{4\cdot 4^{p+1}-1}{2\cdot 4^{p+1}+1}. \end{aligned}$$
Enligt induktionsaxiomet är formeln
$$a_n=\frac{4\cdot 4^n-1}{2\cdot 4^n+1}$$
därför korrekt för $n=0,1,2,\ldots$.

(b) **(M0047M)** Man kan visa (behövs ej) att talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde a när $n\to\infty$. Beskriv med MATLAB-kod/kommandon hur vi kan se/finna detta gränsvärde. (1p)

Lösning: Till exempel ger koden

```
nmax=10;
n=0:1:nmax;
f=@(n) (4*4.^n-1)./(2*4.^n+1); %OBS! Punktnotation!
an=f(n);
a=an(nmax);
plot(n,an,'*',n,a*ones(1,nmax+1));
axis([0,10,0,a+.1])
legend('a_{n}',strcat('Gränsvärdet a=',num2str(a,4)));
```

grafen



(b) **(M0029M/M0057M)** Man kan visa (behövs ej) att talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde a när $n \to \infty$. Bestäm a. (1p)

Lösning: Vi söker

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Med hjälp av formeln som visats i uppgift (a) får vi

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot 4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Alternativ lösning 1: Vi vet att

$$a_{n+1} = f(a_n) = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}.$$

Således måste vi ha

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} = \frac{3 \lim_{n\to\infty} a_n + 2}{\lim_{n\to\infty} a_n + 2} = \frac{3a + 2}{a + 2}$$

eftersom f är en kontinuerlig funktion. Det innebär att

$$a = \frac{3a + 2}{a + 2} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 3a + 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = (a + 1)(a - 2) = 0,$$

dvs $a = -1$ eller $a = 2$. Men a måste vara större än noll eftersom alla element $a_n > 0$, ty $a_0 = 1 > 0$ och om $a_p > 0$ så är

$$a_{p+1} = f(a_p) = \frac{3a_p + 2}{a_p + 2} > 0, \ \ p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Därmed är

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Alternativ lösning 2: Talföljden konvergerar mot 2 ty

$$|a_{n+1} - 2| = \left| \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} - 2 \right| = \left| \frac{3a_n + 2 - 2(a_n + 2)}{a_n + 2} \right| = \left| \frac{a_n - 2}{a_n + 2} \right| < |a_n - 2|,$$

eftersom

$$a_n > -1 \Rightarrow a_n + 2 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n + 2} < 1.$$

Därmed minskar avståndet mellan a_n och 2 för varje iteration och kommer i slutändan att gå mot noll. Mer specifikt, om

$$M = \left| \frac{1}{a_0 + 2} \right| < 1$$

så medför det att

$$|a_n - 2| < M^n |a_0 - 2| \to 0$$

när $n \to \infty$.

Anmärkning 1: Att talföljden konvergerar inser vi då den är uppåt begränsad och växande. Mer specifikt är den uppåt begränsad av 3 ty

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} = 3 - \frac{4}{a_n + 2} < 3.$$

Att talföljden är växande inser vi eftersom

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} - a_n = \frac{3a_n + 2 - a_n (a_n + 2)}{a_n + 2} = \frac{-a_n^2 + a_n + 2}{a_n + 2} = \frac{\overbrace{(a_n + 1)}^{>0}\overbrace{(2 - a_n)}^{>0}}{a_n + 2} > 0$$

för $-1 < a_n < 2$. Skulle $a_n > 2$ så skulle på motsvarande sätt talföljden istället avta ner mot 2.

Anmärkning 2: Talföljden $\{a_n\}$ ovan erhåller vi genom funktionsiteration av någon startpunkt $x_0 > -1$ (i ovanstående fall $x_0 = 1$)

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_0, \\
a_1 &= f(a_0) = f(x_0), \\
a_2 &= f(a_1) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0) = f^2(x_0), \\
a_3 &= f(a_2) = f(f(f(x_0))) = (f \circ f \circ f)(x_0) = f^3(x_0), \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= f(a_n) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ st.}}(x_0) = f^n(x_0).
\end{aligned}$$

Man brukar kalla följden $\{a_n\}$ för *banan* (eller *trajektorian*) av punkten x_0 under avbildningen f. Notera att det finns två punkter som avbildas på sig själv, nämligen -1 och 2 då

$$f(-1) = \frac{3 \cdot (-1) + 2}{(-1) + 2} = \frac{-1}{1} = -1, \; f(2) = \frac{3 \cdot 2 + 2}{2 + 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

En sådan punkt kallas för en *fixpunkt* till avbildningen och ger en konstant bana. Man kan visa att för denna funktion f så gäller att

$$a_n = f^n(x_0) = \frac{2(x_0 + 1) 4^n - (2 - x_0)}{(x_0 + 1) 4^n + (2 - x_0)}$$

för startvärdet x_0. Med resonemang som ovan inser vi att alla startvärden $x_0 > -1$ kommer att konvergera mot den *attraktiva* fixpunkten $a = 2$, medan fixpunkten -1 kallas för *repulsiv* då ingen annan startpunkt än $x_0 = -1$ kommer att konvergera mot den.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\sin x-\ln x\right).$$
(1p)

   Lösning: Vi har att

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\sin x-\ln x\right)=\lim_{x\to 0+}\ln\frac{\sin x}{x}\underset{\ln\ \text{kont.}}{=}\ln\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\right)\underset{\text{STD.}}{=}\ln 1=0.$$

   (b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{e^{x}-1}.$$
(2p)

   Lösning: Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Notera att $e^{kx}=\left(e^{x}\right)^{k}$. Således ger konjugategeln att

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{e^{x}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}\right)^{4}-1}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(e^{x}\right)^{2}+1\right)\left(\left(e^{x}\right)^{2}-1\right)}{e^{x}-1}=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(e^{x}\right)^{2}+1\right)\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(e^{2x}+1\right)}_{\to 2}\underbrace{\left(e^{x}+1\right)}_{\to 2}=4.\end{aligned}$$

   Alternativ lösning 1: För en geometrisk summa gäller att

$$1+a+a^{2}+\ldots+a^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a^{k}=\begin{cases}\dfrac{a^{n}-1}{a-1}, & \text{om } a\neq 1,\\[2ex] n, & \text{om } a=1.\end{cases}$$

   Därmed får vi med $n=4$, $a=e^{x}$ att

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}\right)^{4}-1}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{3}\left(e^{x}\right)^{k}=\lim_{x\to 0}\left(1+e^{x}+e^{2x}+e^{3x}\right)=4.$$

   Alternativ lösning 2: Eftersom gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ så taylorutvecklar vi täljare och nämnare kring $x=0$. Om

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= e^{4x}-1\Longrightarrow f\left(0\right)=e^{0}-1=0,\\ g\left(x\right) &= e^{x}-1\Longrightarrow g\left(0\right)=e^{0}-1=0,\end{aligned}$$

   får vi

$$\begin{aligned}f'\left(x\right) &= 4e^{4x}\Longrightarrow f'\left(0\right)=4e^{0}=4,\\ g'\left(x\right) &= e^{x}\Longrightarrow g'\left(0\right)=e^{0}=1.\end{aligned}$$

Därmed kan vi utveckla täljaren och nämnaren som

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + (x-0)^2 B_1(x) = 4x + x^2 B_1(x), \\ g(x) &= g(0) + g'(0)(x-0) + (x-0)^2 B_2(x) = x + x^2 B_2(x), \end{aligned}$$

där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade funktioner i en omgivning av 0 eftersom f och g är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara. Alltså blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{4x + x^2 B_1(x)}{x + x^2 B_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4 + x B_1(x)}{1 + x B_2(x)} = \frac{4}{1} = 4.$$

(c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8x + 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}.$$

(2p)

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eftersom $x = 2$ är ett nollställe till täljaren så kan den enligt faktorsatsen faktoriseras som

$$x^3 - 8x + 8 = (x-2)\, p(x).$$

För att finna $p(x)$ utför vi polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l l} & x^2 + 2x - 4 & = p(x) \text{ kvot} \\ \hline x - 2 & x^3 - 8x + 8 & \\ - & (x^3 - 2x^2) & \\ \hline & 2x^2 - 8x + 8 & \\ - & (2x^2 - 4x) & \\ \hline & -4x + 8 & \\ - & (-4x + 8) & \\ \hline & \qquad\quad 0 & \text{rest} \end{array}$$

På motsvarande sätt är $x = 2$ också ett nollställe till nämnaren, så att den kan faktoriseras som

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)\, q(x).$$

För att finna $q(x)$ kan vi likt ovan utföra polynomdivision. Det behövs dock ej då vi i detta fall tämligen enkelt ser hur nämnaren kan faktoriseras, ty

$$\left(x^3 - 2x^2\right) + (4x - 8) = x^2 (x-2) + 4(x-2) = \left(x^2 + 4\right)(x-2).$$

Således är

$$q(x) = x^2 + 4$$

och därmed blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8x + 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(x^2 + 2x - 4\right)}{(x-2)\left(x^2 + 4\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4} = \frac{2^2 + 2\cdot 2 - 4}{2^2 + 4} = \frac{1}{2}.$$

3. Bestäm tangenten till Descartes folium

$$2\left(x^3+y^3\right)=9xy$$

i punkten $(1,2)$. (5p)

Lösning: Vi kontrollerar först att punkten $(1,2)$ ligger på kurvan. Det stämmer, ty

$$VL=2\left(1^3+2^3\right)=18=9\cdot 1\cdot 2=HL.$$

För att finna tangentens lutning sätter vi $y=y(x)$ och deriverar uttrycket implicit med avseende på x. Vi får

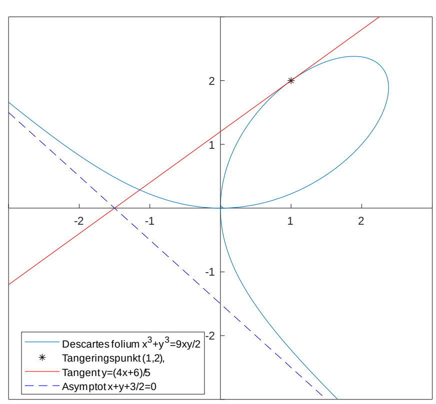
$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dx}\left(2\left(x^3+y^3\right)\right) & = & \dfrac{d}{dx}(9xy) \\
 & \Downarrow & \\
6x^2+6y^2y' & = & 9y+9xy' \\
 & \Updownarrow & \\
y'\left(6y^2-9x\right) & = & 9y-6x^2 \\
 & \Updownarrow & \\
y'=\dfrac{9y-6x^2}{6y^2-9x} & = & \dfrac{3y-2x^2}{2y^2-3x}.
\end{array}$$

I punkten $(1,2)$ är därför tangentens lutning

$$k=\frac{3\cdot 2-2\cdot 1^2}{2\cdot 2^2-3\cdot 1}=\frac{6-2}{8-3}=\frac{4}{5}.$$

Tangentens ekvation fås slutligen ur enpunktsformeln

$$\begin{array}{rcl}
y-2 & = & \dfrac{4}{5}(x-1) \\
 & \Updownarrow & \\
5y-10 & = & 4x-4 \\
 & \Updownarrow & \\
5y-4x & = & 6.
\end{array}$$



4. Kurvorna

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^2, \\ y &= g(x) = x^4, \end{aligned}$$

har en uppsättning tangentlinjer som är gemensamma för bägge kurvorna. Finn samtliga sådana tangentlinjer. (5p)

Lösning: Antag att $y = f(x)$ tangeras i punkten $P = (a, f(a))$ och att $y = g(x)$ tangeras i $Q = (b, g(b))$ av den gemensamma tangenten. I punkten $P = (a, f(a))$ ges då tangenten till $y = f(x)$ av enpunktsformeln

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - a^2 = 2a(x - a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2.$$

På motsvarande sätt fås tangenten till $y = g(x)$ i punkten $Q = (b, g(b))$ som

$$y - b^4 = 4b^3(x - b) \Leftrightarrow y = 4b^3x - 3b^4.$$

Nu vet vi att två ickevertikala tangenter

$$\begin{aligned} y &= k_1x + m_1, \\ y &= k_2x + m_2, \end{aligned}$$

är lika om och endast om

$$k_1 = k_2, \ m_1 = m_2.$$

Det innebär att vi måste ha att

$$\begin{cases} 2a = 4b^3, \\ \\ a^2 = 3b^4. \end{cases}$$

Den första av dessa ekvationer ger att

$$a = 2b^3 \Rightarrow a^2 = 4b^6.$$

Insatt i den andra ekvationen får vi då

$$4b^6 = a^2 = 3b^4 \Rightarrow 4b^6 - 3b^4 = b^4\left(4b^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi får således tre möjligheter:

(a) Om $b = 0$ ger det $a = 0$ och därmed är kurvornas gemensamma tangent $y = 0$ genom punkten $P_1 = Q_1 = (0, 0)$.

(b) Om $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ger det

$$\begin{aligned} a &= 2b^3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \\ a^2 &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{27}{16}. \end{aligned}$$

Därmed är kurvornas gemensamma tangent

$$y = 2ax - a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{27}{16}$$

genom punkterna $P_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{27}{16}\right)$ och $Q_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{16}\right)$.

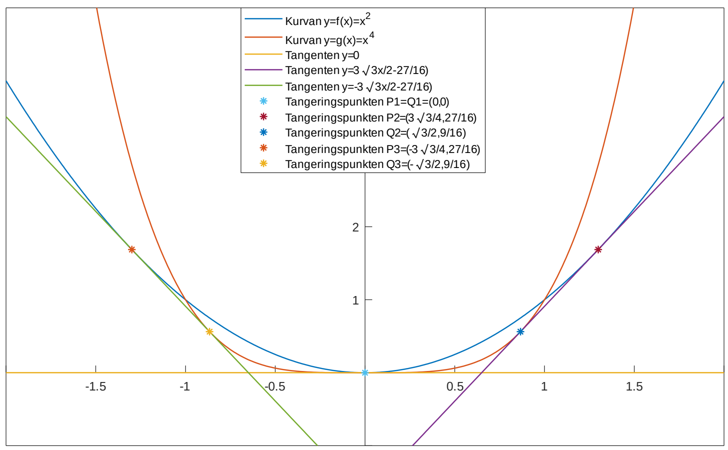
(c) Om $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ger det

$$\begin{aligned} a &= 2b^3 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \\ a^2 &= \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{27}{16}. \end{aligned}$$

Därmed är kurvornas gemensamma tangent

$$y = 2ax - a^2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{27}{16}$$

genom punkterna $P_3 = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{27}{16}\right)$ och $Q_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{16}\right)$.



5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Lösning: Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom

$$f(-x) = (-x)^4 - \frac{28}{3}(-x)^3 + 20(-x)^2 = x^4 + \frac{28}{3}x^3 + 20x^2 \begin{cases} \neq f(x), \\ \neq -f(x). \end{cases}$$

Vi observerar även att

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - \frac{28}{3}x + 20\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - \frac{28}{3}x + 20 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningar

$$\begin{aligned} x &= \frac{14}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2 - 20} = \frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{14^2 - 3^2 \cdot 20}{3^2}} = \frac{14 \pm \sqrt{2^2 \cdot 7^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5}}{3} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{4 \cdot (7^2 - 9 \cdot 5)}}{3} = \frac{14 \pm \sqrt{4 \cdot (49 - 45)}}{3} = \frac{14 \pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{18}{3} = 6, \\ \frac{10}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Därmed skär funktionen x-axeln i punkterna $x = 0$, $x = \frac{10}{3}$ respektive $x = 6$, samt y-axeln i $f(0) = 0$. Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Vi har att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2 = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^4}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{28}{3x} + \frac{20}{x^2}\right)}_{\to 1} = +\infty.$$

Funktionen saknar därmed horisontella asymptoter. Det kan dock möjligen finnas någon sned asymptot. Vi undersöker därför gränsvärdena

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^3}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{28}{3x} + \frac{20}{x^2}\right)}_{\to 1} = +\infty, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^3}_{\to-\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{28}{3x} + \frac{20}{x^2}\right)}_{\to 1} = -\infty,
\end{aligned}$$

och konstaterar att så inte är fallet. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $\mathbb{R}$, så inga vertikala asymptoter kan heller finnas. Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned}
y' &= 4x^3 - 28x^2 + 40x = 4x\left(x^2 - 7x + 10\right) = 4x(x-2)(x-5), \\
y'' &= 12x^2 - 56x + 40 = 12\left(x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{10}{3}\right) = 12(x - r_1)(x - r_2)
\end{aligned}$$

Således har vi tre kritiska punkter $x = 0$, $x = 2$ och $x = 5$ där $y' = 0$ samt två möjliga inflexionspunkter

$$x = r_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49 - 3\cdot 10}{3^2}} = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{3}$$

där $y'' = 0$. Teckenstudium ger

		0		2		5	
$4x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har då lokala minima i $x = 0$ och $x = 5$ som är

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, \\
f(5) &= 5^4 - \frac{28}{3}\cdot 5^3 + 20\cdot 5^2 = 5^3\left(5 - \frac{28}{3} + 4\right) = 5^3 \cdot \frac{15 - 28 + 12}{3} = -\frac{5^3}{3} = -\frac{125}{3},
\end{aligned}$$

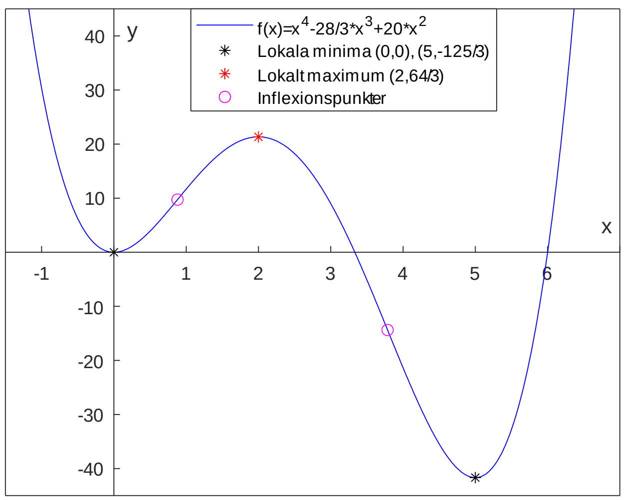
och ett lokalt maximum i $x = 2$ som är

$$f(3) = 2^4 - \frac{28}{3}\cdot 2^3 + 20\cdot 2^2 = 2^3\left(2 - \frac{28}{3} + 10\right) = 2^3 \cdot \frac{6 - 28 + 30}{3} = \frac{2^6}{3} = \frac{64}{3}.$$

Globalt minimum är således $f(5) = -\frac{125}{3}$. Däremot saknas globalt maximum.

		$r_1 = \frac{7-\sqrt{19}}{2}$		$r_2 = \frac{7+\sqrt{19}}{2}$	
$12(x - r_1)$	$-$	0	$+$		$+$
$x - r_2$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

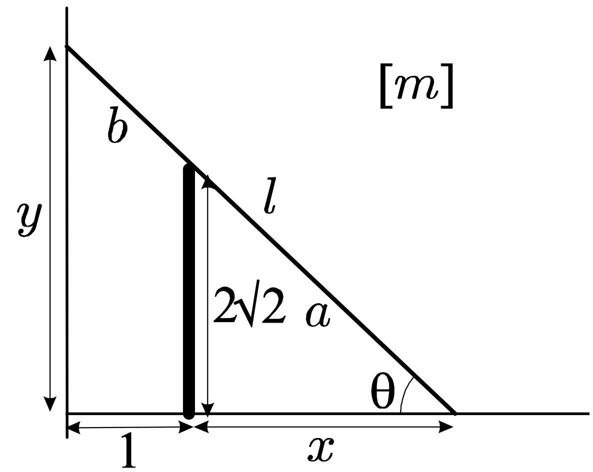
Vi ser därför att bägge punkterna $x = r_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{19}}{3}$ är inflexionspunkter. Vi kan slutligen skissera grafen som



Anmärkning: Inflexionspunkten r_1 ligger mellan $\frac{2}{3}$ och 1 och inflexionspunkten r_2 ligger mellan $\frac{11}{3}$ och 4, ty

$$4 = \sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25} = 5 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{7-5}{3} < \frac{7-\sqrt{19}}{3} < \frac{7-4}{3} = 1, \\ \frac{11}{3} = \frac{7+4}{3} < \frac{7+\sqrt{19}}{3} < \frac{7+5}{3} = 4. \end{cases}$$

6. En meter framför ett hus står en $2\sqrt{2}$ meter hög mur. En brandman ska resa en stege mot huset över muren. Vilken är den kortaste möjliga stege l brandmannen kan använda för att den ska luta mot huset? (5p)



Lösning: Kalla avståndet från muren till stegens fot för x och kalla höjden som stegen träffar huset på för y. Kalla stegens längd för l och kalla stegens vinkel för θ. Då gäller det att

$$l^2 = (x+1)^2 + y^2.$$

Likformiga trianglar ger att

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{2}}{x} = \frac{y}{x+1}.$$

Således är

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{x}(x+1).$$

För att finna kortaste möjliga stege ska vi alltså minimera l, vilket är ekvivalent med att minimera l^2, dvs att minimera funktionen

$$f(x) = (x+1)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{x}(x+1)\right)^2 = (x+1)^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)$$

för $0 < x < \infty$. Nu är

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \overbrace{(x+1)^2}^{\to\infty}\overbrace{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}^{\to 1} = \infty,\\
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \overbrace{(x+1)^2}^{\to 1}\overbrace{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}^{\to\infty} = \infty,
\end{aligned}$$

därmed måste minimum antas i en inre punkt av intervallet. Vi deriverar f och får

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x+1)\left(1+\frac{8}{x^2}\right) + (x+1)^2\left(-\frac{16}{x^3}\right) = \\
&= 2(x+1)\left(1+\frac{8}{x^2} - (x+1)\frac{8}{x^3}\right) = 2(x+1)\left(1-\frac{8}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

Anmärkning: Om man utvecklat f till

$$f(x) = x^2 + 2x + 9 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2}$$

ger även det derivatan

$$f'(x) = 2x + 2 - \frac{16}{x^2} - \frac{16}{x^3} = 2(x+1) - \frac{16(x+1)}{x^3} = 2(x+1)\left(1 - \frac{8}{x^3}\right).$$

Singulära punkter saknas ty $x > 0$. Därmed måste minimum antas i en kritisk punkt (där $f'(x) = 0$). Funktionen har två kritiska punkter

$$\begin{aligned} x &= -1, \\ x &= 2, \end{aligned}$$

ty

$$1 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = (x-2)\left((x+1)^2 + 3\right) = 0.$$

Eftersom enbart $x = 2$ ligger i intervallet $(0, \infty)$ måste den ge minimum. Då är

$$l_{\min} = \sqrt{f(2)} = \sqrt{(2+1)^2\left(1 + \frac{8}{2^2}\right)} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} \text{ meter.}$$

Anmärkning: Ytterligare en derivering ger

$$f''(x) = 2\left(1 - \frac{8}{x^3}\right) + 2(x+1)\frac{24}{x^4} = \frac{2\left(x^4 + 16x + 24\right)}{x^4} > 0$$

för $x > 0$. Således är $f(x)$ konvex på hela $(0, \infty)$ och minimum antas därför i den kritiska punkten $x = 2$.

Alternativ lösning: Kalla avståndet från muren till stegens fot för x, kalla stegens längd för l och kalla stegens vinkel för θ. Då gäller det att

$$l = a + b$$

där

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{2\sqrt{2}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}, \\ \cos\theta &= \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\cos\theta}. \end{aligned}$$

Därmed söker vi minimum av funktionen

$$g(\theta) = a + b = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

för $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. På detta intervall är både $\cos\theta$ och $\sin\theta$ positiva, därmed är också kvoten $\tan\theta$ mellan dessa positiv. Nu är

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} g(\theta) &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \overbrace{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}\right)}^{\to 2\sqrt{2}} + \overbrace{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}^{\to+\infty} = \infty, \\
\lim_{\theta\to 0+} g(\theta) &= \lim_{\theta\to 0+} \overbrace{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}\right)}^{\to+\infty} + \overbrace{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}^{\to 1} = \infty,
\end{aligned}$$

således måste minimum antas i en inre punkt av intervallet. Vi deriverar g och får

$$g'(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^3\theta - 2\sqrt{2}\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Singulära punkter saknas ty $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ för $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Därmed måste minimum antas i en kritisk punkt (där $g'(\theta) = 0$). Det innebär att

$$\sin^3\theta - 2\sqrt{2}\cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} - \left(\sqrt{2}\right)^3 = \tan^3\theta - \left(\sqrt{2}\right)^3 = 0.$$

Kom nu ihåg att

$$t^3 - a^3 = (t-a)\left(t^2 + at + a^2\right) = (t-a)\left(\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right).$$

Det medför att ekvationen

$$\tan^3\theta - \left(\sqrt{2}\right)^3 = 0$$

enbart har en (reell) lösning, nämligen vinkeln $\theta = \widetilde{\theta}$ som uppfyller

$$\tan\theta = \sqrt{2}.$$

I vår figur innebär det att

$$\frac{2\sqrt{2}}{x} = \tan\widetilde{\theta} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Därmed är

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \\
\cos\widetilde{\theta} &= \frac{x}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \frac{1}{\cos\widetilde{\theta}} = \sqrt{3},
\end{aligned}$$

så att

$$l_{\min} = g\left(\widetilde{\theta}\right) = a + b = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ meter}.$$

Anmärkning:

$$26^2 - 1 = (26-1)(26+1) = 25 \cdot 27 = 5^2 \cdot 27$$

ger

$$l_{\min} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} = \sqrt{\frac{26^2-1}{5^2}} \approx \sqrt{\frac{26^2}{5^2}} = \frac{26}{5} = 5.2 \text{ m}.$$