LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-05-24**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Binomialutveckla

$$(2+t)^5 - (2-t)^5$$

så långt det går. (3p)

Lösning: Binomialsatsen ger att

$$\begin{aligned}
&(2+t)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k} t^k = \\
= &\binom{5}{0} 2^5 t^0 + \binom{5}{1} 2^4 t^1 + \binom{5}{2} 2^3 t^2 + \binom{5}{3} 2^2 t^3 + \binom{5}{4} 2^1 t^4 + \binom{5}{5} 2^0 t^5 \\
= &\ 32 + 5 \cdot 16t + 10 \cdot 8t^2 + 10 \cdot 4t^3 + 5 \cdot 2t^4 + t^5 = 32 + 80t + 80t^2 + 40t^3 + 10t^4 + t^5.
\end{aligned}$$

På motsvarande sätt blir då

$$(2-t)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k} (-t)^k = 32 - 80t + 80t^2 - 40t^3 + 10t^4 - t^5$$

(udda potenser av t blir negativa). Därmed är

$$\begin{aligned}
& (2+t)^5 - (2-t)^5 = \\
= & \left(32 + 80t + 80t^2 + 40t^3 + 10t^4 + t^5\right) - \left(32 - 80t + 80t^2 - 40t^3 + 10t^4 - t^5\right) \\
= & \ 160t + 80t^3 + 2t^5.
\end{aligned}$$

Anmärkning: Binomialkoefficienterna ovan kan antingen beräknas genom

$$\binom{5}{k} = \frac{5!}{k!\,(5-k)!}$$

eller genom att läsa av raden motsvarande $n = 5$ i Pascals triangel

n											
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{t \to 0} \frac{(2+t)^5 - (2-t)^5}{t}.$$

(1p)

Lösning:

$$\lim_{t \to 0} \frac{(2+t)^5 - (2-t)^5}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{160t + 80t^3 + 2t^5}{t} = \lim_{t \to 0} 160 + 80t^2 + 2t^4 = 160.$$

Alternativ lösning: Betrakta kurvan $y = x^5$. Välj nu två punkter på denna kurva på var sin sida om $x = 2$, på avstånd t från 2. Då har punkterna koordinaterna

$\left(2-t,(2-t)^5\right)$ respektive $\left(2+t,(2+t)^5\right)$. Dra sedan en sekant mellan dessa punkter. Den sekanten har då lutning

$$k(t)=\frac{(2+t)^5-(2-t)^5}{(2+t)-(2-t)}=\frac{(2+t)^5-(2-t)^5}{2t}.$$

När t går mot noll, dvs när punkterna rör sig mot 2 från var sin sida, så kommer sekanten att gå mot tangenten till $y=x^5$ i $x=2$. Denna tangent har lutning

$$k=\left.\left(\frac{d}{dx}\left(x^5\right)\right)\right|_{x=2}=\left.5x^4\right|_{x=2}=5\cdot 2^4=80.$$

Således måste

$$\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)^5-(2-t)^5}{t}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)^5-(2-t)^5}{2t}=2\cdot\lim_{t\to 0}k(t)=2k=2\cdot 80=160.$$

(c) Utnyttja binomialsatsen för att visa att

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$$

för $n=2,3,4,\ldots$. **Ledning:** *behöver man undersöka alla termer i utvecklingen?* (1p)
Bevis: Binomialsatsen säger att

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Med $a=1$ och $b=\frac{1}{n}$ får vi då

$$\begin{aligned}
f(n) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}= \\
&= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}= \\
&= \underbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}_{=2}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}>2
\end{aligned}$$

eftersom varje term är positiv.
Överkurs: Vi kan även konkludera att

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,$$

ty

$$\begin{aligned}
f(n) &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n!}{n!} \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Dessutom är $f(n)$ växande, ty

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > \\
&> 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = f(n).
\end{aligned}$$

Eftersom talföljden $f(n)$ är växande och uppåt begränsad så är den konvergent. Man kan visa att den konvergerar till talet e, dvs

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x \to 0+} x^{1/\ln x}$$
(1p)

Lösning: Låt

$$f(x) = x^{1/\ln x}$$

för $x > 0$, $x \neq 1$. Då är

$$\ln f(x) = \ln x^{1/\ln x} = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x = 1,$$

varför

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^1$$

och därmed

$$\lim_{x\to 0+} x^{1/\ln x} = \lim_{x\to 0+} e^1 = e.$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+\sin x} - \sqrt{x^2-\sin x}$$

(2p)

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $[\infty - \infty]$. Vi förlänger täljare och nämnare i uttrycket med rotkonjugatet $\sqrt{x^2+\sin x} + \sqrt{x^2-\sin x}$ och får

$$\begin{aligned}\frac{(x^2+\sin x)-(x^2-\sin x)}{\sqrt{x^2+\sin x}+\sqrt{x^2-\sin x}} &= \frac{2\sin x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{\sin x}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)}} = \\ &= \frac{2\sin x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{\sin x}{x^2}}\right)}.\end{aligned}$$

Eftersom $x \to \infty$ så är $|x| = x$, varför

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+\sin x} - \sqrt{x^2-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{\sin x}{x^2}}} = 0,$$

ty

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0 \ [sic!].$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-1}{x^{10}-1}$$

(2p)

Lösning: Konjugatregeln ger

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^{10}\right)^2-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^{10}+1\right)\left(x^{10}-1\right)}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1} x^{10}+1 = 1^{10}+1 = 2.$$

3. Definiera

$$f(x) = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \ 0 < x \leq 1.$$

(a) Förenkla $f'(x)$ så långt det går. (2p)

Lösning: Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} \cdot \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - 1 \cdot \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \\ &= \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} \cdot \frac{-x^2-(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{x^2+(1-x^2)} \cdot \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

(b) Visa att för $0 < x \leq 1$ så är

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

(2p)

Lösning: Vi bildar funktionen

$$g(x) = \arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \ 0 < x \leq 1.$$

Om vi kan visa att

$$g(x) \equiv \frac{\pi}{2}$$

är vi klara. Derivering ger

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\arcsin x) + \frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Därmed måste

$$g(x) = C,$$

konstant. För att bestämma denna konstant väljer vi en lämplig punkt i intervallet $(0,1]$, till exempel $x = 1$. För den gäller att

$$C = g(1) = \arcsin 1 + \arctan \frac{\sqrt{1-1^2}}{1} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

ty

$$\begin{aligned} \arctan 0 &= 0, \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

eftersom

$$\begin{aligned} \tan 0 &= 0, \ 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin \frac{\pi}{2} &= 1, \ \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Betrakta en rätvinklig triangel med hypotenusa $c = 1$ och kateter $b = x$ respektive $a = \sqrt{1-x^2}$, för $0 < x \leq 1$. Då är

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Leftrightarrow A = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \\ \sin B &= \frac{b}{c} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow B = \arcsin x. \end{aligned}$$

Då vinkelsumman i en plan triangel alltid är π har vi därför

$$\begin{aligned} A + B + C &= \pi \\ &\Updownarrow \\ \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \frac{\pi}{2} &= \pi \\ &\Updownarrow \\ \arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(c) Vad är

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

om $-1 \leq x < 0$? (1p)

Lösning: På motsvarande sätt som i uppgift (b) ser vi att funktionen

$$h(x) = \arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0,$$

är konstant, $h(x) = C_1$, då dess derivata är noll. För att bestämma denna konstant väljer vi en lämplig punkt i intervallet $[-1, 0)$, till exempel $x = -1$. För den gäller att

$$C_1 = h(-1) = \arcsin(-1) + \arctan \frac{\sqrt{1-(-1)^2}}{-1} = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Således är

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

för $-1 \leq x < 0$.

4. Låt

$$f(x) = x + x^3, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

Lösning: Derivering ger

$$f'(x) = 1 + 3x^2.$$

Vi ser att $f'(x) \geq 1 > 0$. Därmed är $f(x)$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därför också $1-1$, det vill säga, inverterbar.

(b) Beräkna

$$\left(f^{-1}\right)'(-2).$$

(3p)

Lösning: Låt oss börja med att finna

$$f^{-1}(-2).$$

Vi vet att

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = y + y^3.$$

I synnerhet, för punkten $x = -2$ gäller att

$$-2 = y + y^3 \Leftrightarrow y^3 + y + 2 = 0.$$

Vi ser direkt att $y = -1$ är *en* (reell) lösning till denna ekvation. Men detta är en tredjegradsekvation. Kan det finnas fler lösningar? Nej, vi har ju ovan visat att funktionen f är injektiv, dvs att ett x-värde motsvaras av exakt ett y-värde. Alltså är $y = -1$ den enda lösningen. Därmed är

$$f^{-1}(-2) = -1.$$

Vi söker sedan derivatan y' till $y = f^{-1}(x)$ i punkten $x = -2$. För att finna y' deriverar vi $x = f(y)$ implicit med avseende på x och får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(f(y)) = \frac{d}{dx}\left(y + y^3\right) \\ &\Downarrow \\ 1 &= f'(y)\, y' = \left(1 + 3y^2\right) y' \\ &\Updownarrow \\ y' &= \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+3y^2}. \end{aligned}$$

Vi får därför

$$\left(f^{-1}\right)'(-2) = \left(f^{-1}\right)'(x)\Big|_{x=-2} = y'|_{y=-1} = \frac{1}{1+3\cdot(-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Observera att vi här sätter in $y = -1$ för att evaluera $\left(f^{-1}\right)'(x)$ i $x = -2$.

(c) Finn samtliga par av lösningar (x, y) till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + x^3 = y + y^3, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Motivera! (1p)

Lösning: Givet funktionen f ovan kan vi skriva systemet som

$$\begin{cases} f(x) = f(y), \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Eftersom f är injektiv $(1-1)$ vet vi att

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Således ger den andra ekvationen att

$$x = y = 7$$

är den *enda* lösningen till detta system.

Alternativ lösning: Vi kan skriva om den första ekvationen som

$$\begin{aligned} x + x^3 &= y + y^3 \\ &\Updownarrow \\ x - y + x^3 - y^3 &= 0 \\ &\Updownarrow \\ (x-y) + (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) &= (x-y)\left(1 + x^2 + xy + y^2\right) = 0 \\ &\Updownarrow \\ (x-y)\left(1 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Eftersom

$$1+\underbrace{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{3}{4}y^2}_{\geq 0}\geq 1>0$$

måste därför $x=y$. Därmed är

$$x=y=7$$

den *enda* lösningen till detta system.

Anmärkning: i denna uppgift är det trivialt att se att $x=y=7$ är *en* lösning, problemet ligger i att inse att det är *den enda* lösningen.

5. Betrakta funktionen

$$y=f(x)=x^2e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. (4p)

Lösning: Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom

$$f(-x)=(-x)^2e^{-\frac{(-x-1)^2}{2}}=x^2e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\begin{cases}\neq f(x)\\ \neq -f(x)\end{cases}.$$

Vi observerar även att

$$\begin{cases}f(x)>0 \text{ om } x\neq 0,\\ f(x)=0 \text{ om } x=0,\end{cases}$$

ty $e^{\cdot}>0$. Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Variabelbytet

$$t=\frac{(x-1)^2}{2}>0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2t}$$

ger

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^2e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{(x-1)^2}{2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(1\pm\sqrt{2t}\right)^2}{e^t}\underset{\text{STD}}{=}0$$

där det sista gränsvärdet följer av att en potensfunktion domineras av en exponentialfunktion. Därmed har funktionen en dubbelsidig horisontell asymptot $y=0$. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $\mathbb{R}$, så inga vertikala asymptoter kan finnas. Derivering av funktionen ger

$$y'=2xe^{-\frac{(x-1)^2}{2}}-x^2(x-1)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}=-x\left(x^2-x-2\right)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}=-x(x+1)(x-2)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Således har vi tre kritiska punkter $x=0$, $x=-1$ samt $x=2$ där $y'=0$. Teckenstudium ger

		-1		0		2	
$-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$	$+$		$+$		$+$		$+$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

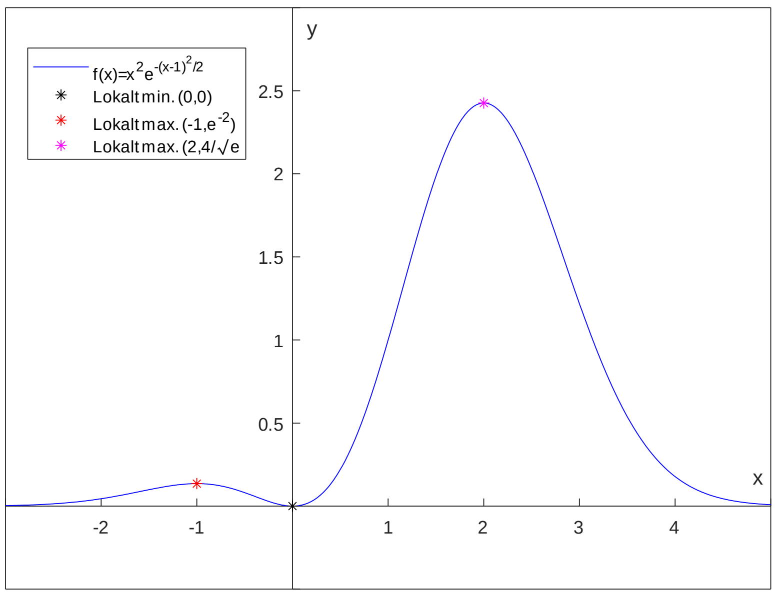
Funktionen är växande på intervallen $(-\infty, -1]$ och $[0, 2]$ samt avtagande på intervallen $[-1, 0]$ och $[2, \infty)$. Funktionen har lokala maxima i $x = -1$ och $x = 2$ som är

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 e^{-\frac{(-1-1)^2}{2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \\ f(2) &= 2^2 e^{-\frac{(2-1)^2}{2}} = 4e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}, \end{aligned}$$

och ett lokalt minimum i $x = 0$ som är

$$f(0) = 0.$$

Vi kan slutligen skissera grafen som



(b) Ange funktionens värdemängd. (1p)
Lösning: Funktionens värdemängd är

$$R(f) = \left[0, \frac{4}{\sqrt{e}}\right],$$

då f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och globalt minimum är

$$f(0) = 0$$

samt globalt maximum är

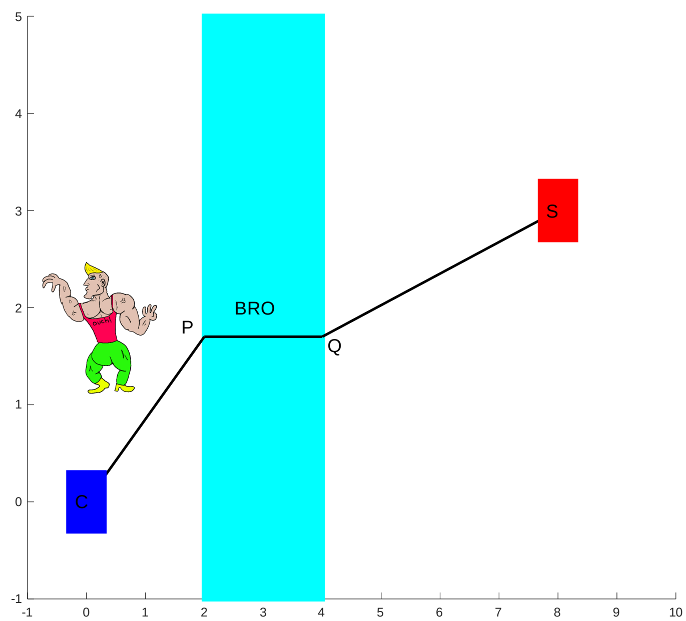
$$f(2) = \frac{4}{\sqrt{e}},$$

ty

$$f(2) = \frac{4}{\sqrt{e}} > \frac{1}{e^2} = f(-1) \Leftrightarrow \frac{16}{e} > \frac{1}{e^4} \Leftrightarrow e^3 > \frac{1}{16}$$

som är sant eftersom $e > 1$.

6. Chad och Stacy bor på var sin sida om en lång rak flod som löper i nord-sydlig riktning. Om vi lägger ett koordinatsystem med Chads hus i origo så ligger Stacys hus i punkten $(8, 3)$ och floden upptar området där $2 \leq x \leq 4$. En dag bestämmer sig Chad för att bygga en rakt öst-västlig bro över floden och förbinda den med två raka vägar mellan sitt hus och Stacys hus, se nedanstående figur.



På vilken y-koordinat bör Chad förlägga bron för att totala vägen mellan dem skall bli så kort som möjligt och hur lång blir totala vägen mellan dem då? (5p)

Lösning: Låt oss kalla punkterna $C = (0, 0)$ och $S = (8, 3)$, Med bron placerad mellan punkterna $P = (2, y)$ och $Q = (4, y)$ inser vi att totala sträckan mellan Chad och Stacy blir

$$\begin{aligned} d &= d(y) = |CP| + |PQ| + |QS| = \sqrt{(2-0)^2 + (y-0)^2} + 2 + \sqrt{(8-4)^2 + (3-y)^2} = \\ &= 2 + \sqrt{2^2 + y^2} + \sqrt{4^2 + (3-y)^2}. \end{aligned}$$

För att finna minimum av denna funktion är det rimligt att söka i intervallet $0 \leq y \leq 3$ (skulle y ligga utanför det intervallet blir totala sträckan nödvändigtvis längre). I ändpunkterna har vi då

$$\begin{aligned} d(0) &= 2 + \sqrt{2^2} + \sqrt{4^2 + 3^2} = 2 + 2 + 5 = 9, \\ d(3) &= 2 + \sqrt{2^2 + 3^2} + \sqrt{4^2} = 2 + \sqrt{13} + 4 = 6 + \sqrt{13}. \end{aligned}$$

För dessa gäller det att

$$d(0) = 9 = 6 + \sqrt{9} < 6 + \sqrt{13} = d(3).$$

Kan det finnas någon intressant punkt i det inre av intervallet $[0, 3]$? I så fall måste det vara en singulär punkt eller en kritisk punkt. Derivering ger

$$d'(y) = \frac{2y}{2\sqrt{2^2 + y^2}} + \frac{-2(3-y)}{2\sqrt{4^2 + (3-y)^2}}.$$

Därmed saknas singulära punkter. För kritisk punkt $(d'(y) = 0)$ måste vi ha

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\sqrt{2^2 + y^2}} &= \frac{3 - y}{\sqrt{4^2 + (3 - y)^2}} \\
&\Downarrow \\
\frac{y^2}{2^2 + y^2} &= \frac{(3 - y)^2}{4^2 + (3 - y)^2} \\
&\Updownarrow \\
y^2 \left(4^2 + (3 - y)^2\right) &= \left(2^2 + y^2\right)(3 - y)^2 \\
&\Updownarrow \\
4^2 y^2 &= 2^2 (3 - y)^2 \\
&\Updownarrow \\
\pm 4y &= 2(3 - y) \\
\\
6y &= 6 \vee -2y = 6 \\
&\Updownarrow \\
y &= 1 \vee y = -3 \text{ (förkastas ty } y \in [0, 3]).
\end{aligned}$$

Därmed har vi en kritisk punkt

$$y = 1.$$

För den punkten är det sökta avståndet

$$d(1) = 2 + \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{4^2 + (3 - 1)^2} = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{20} = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2 + 3\sqrt{5}.$$

Detta måste vara minimum, ty

$$d(1) = 2 + 3\sqrt{5} = 2 + \sqrt{45} < 2 + \sqrt{49} = 9 = d(0) < d(3).$$

Alternativ lösning: Eftersom längden av bron alltid är konstant 2 kan vi lika gärna ignorera den. Vi kan tänka oss att vi "klipper bort" strimlan $2 \leq x \leq 4$ och klistrar ihop det som återstår. Då handlar problemet helt enkelt om att finna kortaste avståndet mellan origo $(0, 0)$ och punkten $(6, 3)$ (kom ihåg, högra punkten S blir då skiftad två enheter åt vänster). Vi vet att kortaste avståndet mellan två punkter i planet är en rät linje, i detta fall linjen $y = \frac{x}{2}$. Om vi sedan "sätter tillbaka" strimlan igen vid $x = 2$ inser vi att bron skall förläggas vid $y = \frac{2}{2} = 1$ och totala längden blir då

$$d = 2 + \sqrt{6^2 + 3^2} = 2 + \sqrt{45} = 2 + 3\sqrt{5},$$

summan av brons längd och längden av räta linjestycket mellan $(0, 0)$ och $(6, 3)$.