



## Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-04-02**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser:

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

*Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

### Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per Lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

### Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU* – *Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU* – *Rättade tentor*.

### Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009**      Antal exemplar:      Antal sidor: **5**

**Övriga uppgifter:** Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal  $n$  gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n} (xe^{-x}) = (-1)^n (x - n) e^{-x}. \quad (4p)$$

- (b) Visa, exempelvis med hjälp av binomialsatsen, att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1p)$$

2. Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

- (a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{3x}. \quad (1p)$$

- (b)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{x^2}. \quad (2p)$$

- (c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right). \quad (2p)$$

3. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad -2 < x < 2.$$

- (a) Visa att  $f$  är 1-1 (injektiv). (2p)

- (b) Finn inversen  $f^{-1}(x)$ . (2p)

- (c) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd. (1p)

4. Finn en enkel approximation av  $\sqrt{2}$  på två olika sätt genom att:

(a) Linearisera funktionen  $y = \sqrt{x}$  kring  $a = \frac{9}{4}$ . (2p)

(b) (**M0047M**): Skriv kod/kommandon i MATLAB som utför två iterationer med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

på funktionen  $f(x) = x^2 - 2$  med startvärde  $x_0 = 1$ . (1p)

(b) (**M0029M**): Utföra två iterationer med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

på funktionen  $f(x) = x^2 - 2$  med startvärde  $x_0 = 1$ . (1p)

(c) Förklara formeln i Newton-Raphsons metod ovan med figur och härledning. (2p)

5. Bestäm nollställena, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}.$$

Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (5p)

6. Teknologen Balder ska frakta en liten racerbil med lastbilstransport en sträcka på 200 kilometer. Bestäm den mest ekonomiska hastigheten och den minsta kostnaden för denna transport under följande förutsättningar: Balder kostar 320 kronor per timme och drivmedel kostar 10 kronor per liter (i landet Utopia). Vid hastigheten  $v$  kilometer/timme förbrukar lastbilen  $\frac{1}{5} + v/200$  liter drivmedel per kilometer. Antag att  $40 \leq v \leq 100$ . (5p)