Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-10-27**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **630** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt oss undersöka derivator av funktionen

$$f\left(x\right) = xe^{2x},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(xe^{2x}\right) = 2^{n-1}\left(n+2x\right)e^{2x}.$$

(4p).

   (b) Använd formeln i uppgift $1(a)$ för att finna en *primitiv funktion (Adams: antiderivata)* till $f\left(x\right) = xe^{2x}$, dvs utnyttja formeln för att gissa en funktion $F\left(x\right)$ som har derivata $f\left(x\right)$ och visa sedan att $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$. **Ledning:** vilket n borde i så fall primitiva funktionen motsvaras av? (1p).

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 7x}{\ln 3x}.$$

(1p)

   (b)

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^2-4}.$$

(2p)

   (c)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}.$$

(2p)

3. Visa att kurvorna

$$x^2+y^2=9$$

   och

$$x^2-10x+y^2=-9$$

   skär varandra under räta vinklar. **Ledning:** *visa först att kurvorna skär varandra och visa sedan att tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra.* (5p)

4. Betrakta funktionen

$$y = f\left(x\right) = \frac{3x-1}{x+2},\ \ x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}.$$

   (a) Bestäm funktionens värdemängd. Motivera! (2p)

   (b) Finn inversen f^{-1} till f. (2p)

   (c) Bestäm funktionen g om

$$f\left(g\left(x\right)\right) = 7x-4.$$

(1p)

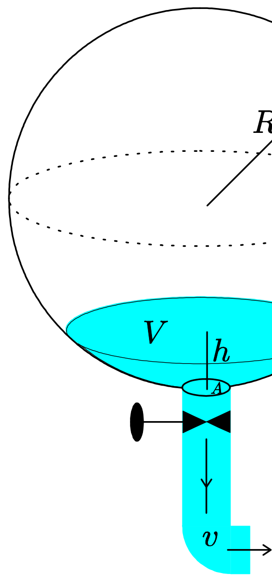
5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = \left(x^2 - 9\right) e^{-x/4}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema. Konvexitet behöver ej beaktas. Skissera kurvan. (4p)

(b) Bestäm funktionens värdemängd. Motivera! (1p)

6. En tank har sfärisk form med radie $R = 6$ m. I botten av tanken sitter det en kran som vi kan tappa vatten ur tanken med, se figur.



När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen i tanken V av

$$V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3} \text{ m}^3, \ 0 \leq h \leq 2R,$$

och när kranen öppnas flödar vatten ut genom tanken med en hastighet v som är proportionell mot kvadratroten av vattenpelarens höjd, vilket ger att volymen ändras med en hastighet av

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{10}\sqrt{h} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vi öppnar kranen och låter vattnet flöda ut.

(a) Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är 2 m? (3p)

(b) Vid vilket djup h förändras djupet som långsammast? (2p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n\,(a_1+a_n)}{2},\ a_k = a_{k-1}+d.\\ \sum_{k=0}^{n-1} r^k &= \begin{cases} n, & r=1,\\ \frac{r^n-1}{r-1}, & r\neq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

2. Binomialsatsen

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix} a^{n-k}b^k,\\ \begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.\end{aligned}$$

3. Trigonometri

$$\begin{aligned}\cos(s+t) &= \cos s\cos t - \sin s\sin t,\\ \sin(s+t) &= \sin s\cos t + \cos s\sin t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},\\ a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= L \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,[0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon],\\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= L \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)\,(\exists R)\,[x>R \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon].\end{aligned}$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned}(f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),\ x_1, x_2 \in D(f), \\ y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1.\end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)},\ f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

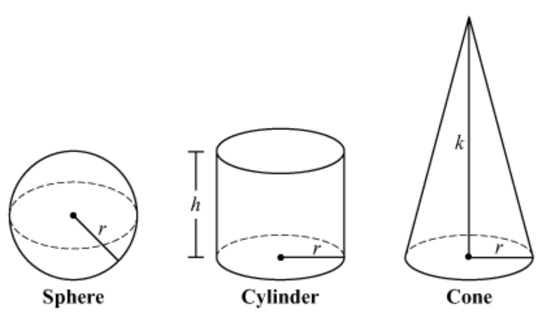
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\ E_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x),\ s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| &\leq M,\ \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.\end{aligned}$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi rh$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$