Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-12-21**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009**   Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att produkten

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

(4p)

Bevis: (Induktion) Låt oss först observera att

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

Vi börjar med basfallet $n=2$. Vi har då att

$$VL=\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}=HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n=p$, dvs att

$$\prod_{k=2}^{p}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{p+1}{2p}\ \text{(induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n=p+1$, dvs att

$$\prod_{k=2}^{p+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{(p+1)+1}{2(p+1)}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{p+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{p}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \\
&= \frac{p+1}{2p}\cdot\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right)=\frac{p+1}{2p}\cdot\frac{(p+1)^2-1}{(p+1)^2} \underset{\text{konj.reg.}}{=} \\
&= \frac{p+1}{2p}\cdot\frac{(p+1-1)(p+1+1)}{(p+1)^2}=\frac{p+1}{2p}\cdot\frac{p(p+2)}{(p+1)^2}=\frac{p+2}{2(p+1)}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Alternativt bevis: Denna formel är ett exempel på en teleskoperande produkt. Vi har att

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\cdot\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)= \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)= \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

(b) Beräkna den oändliga produkten

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

(1p)

Lösning: Produkten blir $\frac{1}{2}$, ty

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. Avgör och motivera huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}.$$

Lösning: Förlängning med $1+\cos h$ i täljare och nämnare ger

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h^2(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h^2(1+\cos h)}= \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{1}{1+\cos h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\cos h}_{\to 1}}\underset{\text{STD.}}{=}1^2\cdot\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alternativ lösning 1: Vi vet att

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha &= 1, &(1)\\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha &= \cos 2\alpha. &(2)\end{aligned}$$

Därmed ger (1) - (2) att

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha.$$

Med $h=2\alpha$ får vi därför

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos 2\alpha}{(2\alpha)^2}=\frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin^2\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\underset{\text{STD.}}{=}\frac{1}{2}\cdot 1^2.$$

Alternativ lösning 2: Vi gör en Taylorutveckling av $f(t)=1-\cos t$ av ordning 2 kring 0. Vi har

$$\begin{array}{ll} f(t)=1-\cos t & f(0)=1-\cos 0=0 \\ f'(t)=\sin t & f'(0)=\sin 0=0 \\ f''(t)=\cos t & f''(0)=\cos 0=1 \\ f'''(t)=-\sin t & f'''(c)=-\sin c,\ c \text{ mellan } 0 \text{ och } t. \end{array}$$

Därmed kan vi skriva

$$f(t) = P_2(t) + E_2(t) = \underbrace{0 + 0(t-0) + \frac{1}{2}(t-0)^2}_{P_2(t)} + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!}(t-0)^3}_{E_2(t)} = \frac{t^2}{2} + t^3 \cdot B(t),$$

där $B(t)$ är en begränsad funktion ty $\left|\frac{f'''(c)}{3!}\right| = \frac{|-\sin c|}{6} \leq \frac{1}{6}$. Alltså blir

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{2} + h^3 \cdot B(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} + h \cdot B(h) = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{3x+2} + e^{2x+1} - 9^{x-2}}{3^{2x-3} - 7^{x+3}}.$$

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{2^{3x+2} + e^{2x+1} - 9^{x-2}}{3^{2x-3} - 7^{x+3}} = \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{2^2 \cdot (2^3)^x + e^1 \cdot (e^2)^x - 9^{-2} \cdot 9^x}{3^{-3} \cdot (3^2)^x - 7^3 \cdot 7^x} = \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{4 \cdot 8^x + e \cdot (e^2)^x - \frac{1}{81} \cdot 9^x}{\frac{1}{27} \cdot 9^x - 343 \cdot 7^x} \underset{\text{Dela med } 9^x \text{ överallt}}{=} \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x + e \cdot \left(\frac{e^2}{9}\right)^x - \frac{1}{81}}{\frac{1}{27} - 343 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^x} = \\
= &\frac{4 \cdot 0 + e \cdot 0 - \frac{1}{81}}{\frac{1}{27} - 343 \cdot 0} = \frac{-\frac{1}{81}}{\frac{1}{27}} = -\frac{27}{81} = -\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

ty $e^2 < 3^2 = 9$ och

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0$$

om $0 < a < 1$.

(c)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} - \frac{x^4 - (x-h)^4}{h}}{h}.$$

Lösning: Omskrivning med binomialsatsen ger

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} - \frac{x^4 - (x-h)^4}{h}}{h} = \\
= &\lim_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^4 - x^4\right) - \left(x^4 - (x-h)^4\right)}{h^2} = \\
= &\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - 2x^4 + (x-h)^4}{h^2} = \\
= &\lim_{h\to 0} \frac{(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - 2x^4 + (x^4 - 4x^3h + 6x^2h^2 - 4xh^3 + h^4)}{h^2} \\
= &\lim_{h\to 0} \frac{12x^2h^2 + 2h^4}{h^2} = \lim_{h\to 0} 12x^2 + 2h^2 = 12x^2,
\end{aligned}$$

där vi använt att

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 4,$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{12}{2} = 6,$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 4.$$

Anmärkning: Med $f(x) = x^4$ är det sökta gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h},$$

dvs en differenskvot av en differenskvot. Om $f(x)$ är (åtminstone) två gånger deriverbar så kommer därför

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right) = f''(x),$$

vilket i fallet $f(x) = x^4$ ger $f''(x) = 12x^2$.

3. Visa att kurvorna

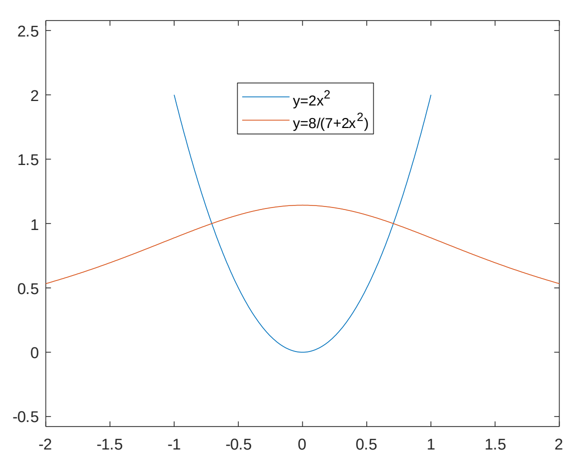
$$y = \frac{8}{7+2x^2}$$

och

$$y = 2x^2$$

skär varandra under räta vinklar. (5p)

Lösning: Först visar vi att kurvorna skär varandra. Kalla skärningspunkten (a, b).



För skärning måste vi ha lika y-värde för lika x-värde, dvs

$$b = 2a^2 = \frac{8}{7+2a^2}$$

eller

$$2a^2\left(7+2a^2\right)=8 \Longleftrightarrow 4a^4+14a^2-8=0 \Longleftrightarrow t^2+\frac{7}{2}t-2=0$$

uttryckt i hjälpvariabeln $t=a^2$. För skärning måste därför

$$\begin{aligned} t &= -\frac{7}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{7}{4}\right)^2-(-2)}=-\frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{7^2+2\cdot 4^2}{4^2}}= \\ &= -\frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{49+32}{4^2}}=-\frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{81}{4^2}}=\begin{cases} -\frac{7}{4}+\frac{9}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \\ -\frac{7}{4}-\frac{9}{4}=-\frac{16}{4}=-4. \end{cases} \end{aligned}$$

Eftersom $t=a^2\geq 0$ så kan bara $t=a^2=1/2$ vara lösning. I dessa punkter är då $b=2a^2=1$. Därmed skär kurvorna varandra i två punkter

$$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1\right).$$

Låt oss sedan visa att i dessa punkter så skär kurvorna varandra under räta vinklar. Det innebär att tangenterna till kurvorna i skärningspunkten skär varandra under räta vinklar. Kurvorna har derivata

$$y'=4x$$

respektive

$$y'=-\frac{8\cdot 4x}{\left(7+2x^2\right)^2}.$$

Därmed har tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna (a,b) lutningar

$$\begin{aligned} k_1 &= 4a, \\ k_2 &= -\frac{32a}{\left(7+2a^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Det medför att

$$k_1k_2=4a\cdot\left(-\frac{32a}{\left(7+2a^2\right)^2}\right)=-\frac{128a^2}{\left(7+2a^2\right)^2}\underset{a^2=\frac{1}{2}}{=}\frac{-64}{\left(7+1\right)^2}=-1,$$

dvs kurvorna skär varandra under räta vinklar.

4. Antag att $y=y(x)$ är en implicit definierad icke-konstant funktion som uppfyller den ickelinjära differentialekvationen

$$\left(y'\right)^2=1-y^2.$$

(a) Finn y'', y''' och $y^{(4)}$ uttryckta i y och y'. (2p)

Lösning: Eftersom y är icke-konstant så kan inte y' vara identiskt lika med noll. Implicit derivering med avseende på x ger då

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\left(y'\right)^2\right) &= \frac{d}{dx}\left(1-y^2\right) \\ &\Downarrow \\ 2y'y'' &= 0-2yy' \\ &\Updownarrow \\ y'' &= -y. \end{aligned}$$

Ytterligare derivering med avseende på x ger därför

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}(-y) = -y', \\ y^{(4)} &= \frac{d}{dx}(y''') = \frac{d}{dx}(-y') = -y'' = -(-y) = y. \end{aligned}$$

(b) Finn taylorpolynomet $P_4(x)$ av ordning 4 till y kring 0 om vi vet att $y(0) = 1$. *Ledning: vad måste då $y'(0)$, $y''(0)$, osv. vara?* (2p)

Lösning: Insättning av $x = 0$ i uttrycken ovan ger

$$(y'(0))^2 = 1 - (y(0))^2 = 1 - 1^2 = 0.$$

Därmed är $y'(0) = 0$. Vi får därför även

$$\begin{aligned} y''(0) &= -y(0) = -1, \\ y'''(0) &= -y'(0) = 0, \\ y^{(4)}(0) &= y(0) = 1. \end{aligned}$$

Taylorpolynomet av ordning 4 kring 0 till $y = y(x)$ blir således

$$\begin{aligned} & P_4(x) = \\ = \; & y(0) + y'(0)(x-0) + \frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{y'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ = \; & 1 + 0x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

ÖVERKURS: Differentialekvationen kan skrivas om som

$$(y')^2 = 1 - y^2 \iff y' = \pm\sqrt{1-y^2},$$

det vill säga

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \pm 1.$$

Observera nu att

$$\frac{d}{dx}(\arcsin y(x)) = \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ för } -1 \leq y(x) \leq 1.$$

Därmed måste

$$\arcsin y(x) = \pm x + C,$$

där C konstant. Vi får därför

$$y(x) = \sin(\pm x + C), \text{ där } -\frac{\pi}{2} \leq \pm x + C \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vi vet dessutom att $y(0) = 1$, vilket innebär att

$$1 = y(0) = \sin C.$$

Vi väljer därför $C = \pi/2$. Det ger slutligen att

$$y(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x \pm \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1\cos x \pm 0 \sin x = \cos x.$$

Därmed blir $y' = -\sin x$. Det innebär att differentialekvationen

$$(y')^2 = 1 - y^2,\ y(0) = 1,$$

helt enkelt säger att

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Notera slutligen att taylorpolynomet av ordning 4 till $y(x) = \cos x$ kring 0 är

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = x^3 e^{-x}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Skissera kurvan. (4p)

Lösning: Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom

$$f(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)} = -x^3 e^x \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}.$$

Vi observerar även att $f(0) = 0$ samt att

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ om } x > 0, \\ f(x) < 0 \text{ om } x < 0, \end{cases}$$

ty $e^{-x} > 0$. Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Vi har att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} x^3 e^{-x} &= \lim_{t\to\infty} \overbrace{(-t)^3}^{\to-\infty} \overbrace{e^t}^{\to\infty} = -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0 \text{ (STD)}, \end{aligned}$$

där det sista gränsvärdet följer av att en potensfunktion domineras av en exponentialfunktion. Därmed har funktionen en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ åt höger. Det kan därför möjligen finnas en sned asymptot åt vänster. Vi undersöker således gränsvärdet

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} \underset{\{t=-x\}}{=} \lim_{t\to\infty} \overbrace{(-t)^2}^{\to\infty} \overbrace{e^t}^{\to\infty} = \infty$$

och konstaterar att så inte är fallet. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $\mathbb{R}$, så inga vertikala asymptoter kan finnas. Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 (3 - x) e^{-x}, \\ y'' &= \left(6x - 3x^2\right) e^{-x} - \left(3x^2 - x^3\right) e^{-x} = x\left(x^2 - 6x + 6\right) e^{-x} \\ &= x\left(x - \left(3 + \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(3 - \sqrt{3}\right)\right) e^{-x}. \end{aligned}$$

Alltså har vi två kritiska punkter $x = 0$ och $x = 3$ där $y' = 0$ samt tre möjliga inflexionspunkter $x = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{3}$ där $y'' = 0$. Teckenstudium ger

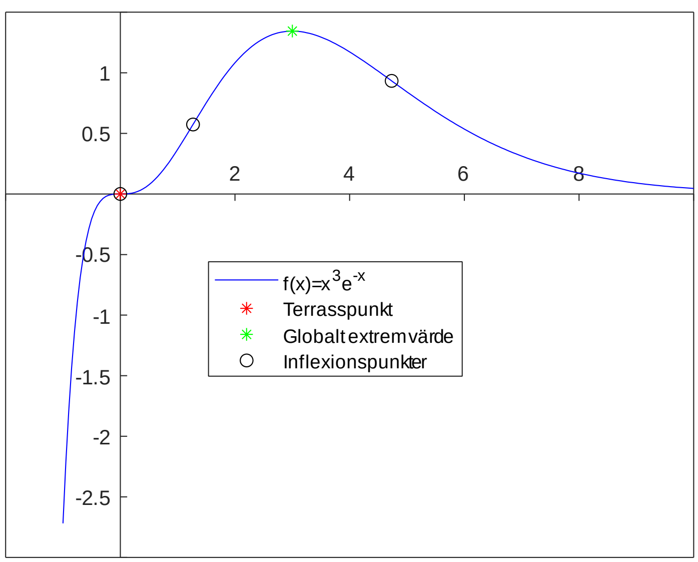
		0		3	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$3 - x$	$+$		$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$		$+$		$+$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	terrass	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

		0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x - \left(3 + \sqrt{3}\right)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x - \left(3 - \sqrt{3}\right)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
e^{-x}	$+$		$+$		$+$		$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\frown$	infl.	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

Vi ser därför att punkterna $x = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{3}$ samtliga är inflexionspunkter. Funktionen har då ett (lokalt och globalt) maximum i $x = 3$ som är

$$f(3) = 3^3 e^{-3} = \left(\frac{3}{e}\right)^3 \quad \text{(drygt 1)}$$

men inget lokalt eller globalt minimum. Vi kan slutligen skissera grafen som



(b) (**M0047M**): Beskriv med kod/kommandon hur grafen till denna funktion skulle kunna plottas i MATLAB på ett sådant sätt att de intressanta delarna av grafen framträder. (1p)

Lösning: Exempelvis ger koden

```
x=-1:0.05:10; % Tänk på att få med det intressanta intervallet.
y=x.^3.*exp(-x); % OBS! punktvis potens och produkt!
plot(x,y)
```

alternativt koden

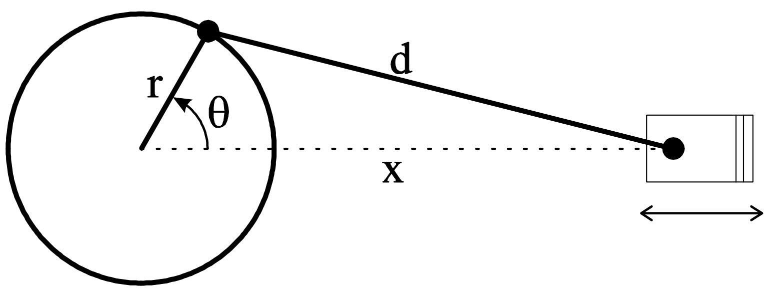
```
f=@(x) x.^3.*exp(-x);
fplot(f,[-1,10]); % Enbart fplot(f) ger ointressant intervall.
```

figuren ovan.

(b) (**M0029M**): Ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (1p)

Lösning: Funktionen är växande på $(-\infty, 3]$ och avtagande på $[3, \infty)$. Funktionen är konvex på intervallen $\left(0, 3-\sqrt{3}\right)$ och $\left(3+\sqrt{3}, \infty\right)$ samt konkav på intervallen $(-\infty, 0)$ och $\left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$.

6. Chefsingenjör Ronald har konstruerat en ny kolvmotor, se nedanstående figur.



Antag att vevaxeln roterar moturs med en hastighet av 6500 rpm (6500 varv per minut). På vevaxeln sitter ett svänghjul med radie $r = 3$ cm i vilket en vevstake med längd $d = 7$ cm är fäst. I andra änden av vevstaken är en rörlig kolv fäst. När vinkeln θ ändras kommer då kolven att utföra horisontell rörelse x.

(a) Vad är avståndet x vid tillfället när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$? (2p)

Lösning: Cosinusteoremet säger att

$$d^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cdot \cos\theta,$$

dvs med värden insatta har vi

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 6x\cos\theta$$

eller

$$x^2 - 6x \cdot \cos\theta - 40 = 0,$$

där $x = x(t)$ och $\theta = \theta(t)$ är funktioner av tiden t. Vid tillfället när $\theta = \frac{\pi}{3}$ innebär det att

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

ty $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Då är alltså

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-40)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2 + 4 \cdot 40}{2^2}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2} = \begin{cases} \frac{16}{2} = 8, \\ -\frac{10}{2} = -5. \end{cases}$$

Notera att eftersom avståndet x alltid måste vara åtminstone $d - r = 4$ så förkastar vi lösningen $x = -5$. Därmed är $x = 8$ cm när $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(b) Hjälp Ronald att beräkna kolvens hastighet när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$. (3p)

Lösning: För att finna kolvens hastighet x' vid denna vinkel så deriverar vi uttrycket

$$x^2 - 6x \cdot \cos\theta - 40 = 0$$

med avseende på tiden t. Vi får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(x^2 - 6x \cdot \cos\theta - 40\right) &= \frac{d}{dt}(0) \\ &\Downarrow \\ 2x \cdot x' - 6x' \cdot \cos\theta - 6x \cdot (-\sin\theta) \cdot \theta' &= 0. \end{aligned}$$

Nu är vinkelhastigheten

$$\theta' = 6500 \text{ varv/min} \cdot \frac{1}{60} \text{ min/s} \cdot 2\pi \text{ rad/varv} = \frac{650}{3}\pi \text{ rad/s}$$

som tillsammans med $x = 8$ cm och $\theta = \frac{\pi}{3}$ insatta i ekvationen ger

$$2 \cdot 8 \cdot x' - 6x' \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{650}{3}\pi = 0$$

eller

$$(16 - 3)\, x' = -8 \cdot 650\sqrt{3}\pi \iff x' = -\frac{8 \cdot 650\sqrt{3}\pi}{13} \text{cm/s} = -400\sqrt{3}\pi \text{ cm/s}.$$

Därmed åker kolven vid tillfället när $\theta = \frac{\pi}{3}$ åt vänster med en hastighet av

$$400\sqrt{3}\pi \text{ cm/s} = 4\sqrt{3}\pi \text{ m/s } (\approx 21.8 \text{ m/s}).$$

Alternativ lösning: Om vi löser ut x ur andragradsekvationen

$$x^2 - 6x \cdot \cos\theta - 40 = 0,$$

får vi

$$x = 3\cos\theta + \sqrt{9\cos^2\theta + 40}$$

(OBS! enbart +lösningen). Därmed blir

$$x' = -3\sin\theta \cdot \theta' + \frac{-18\cos\theta\sin\theta\cdot\theta'}{2\sqrt{9\cos^2\theta + 40}} = -3\sin\theta\left(1 + \frac{3\cos\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta+40}}\right)\theta'.$$

Med värdena

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{3}, \\ \theta' &= \frac{650}{3}\pi, \end{aligned}$$

får vi då

$$\begin{aligned} x' &= -3\sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(1 + \frac{3\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{3}+40}}\right)\cdot\frac{650}{3}\pi = \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}+40}}\right)\cdot\frac{650}{3}\pi = -\frac{650\pi\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{3}{2\sqrt{\frac{169}{4}}}\right) = \\ &= -\frac{650\pi\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{3}{13}\right) = -\frac{650\pi\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{16}{13} = -400\sqrt{3}\pi \text{ cm/s}. \end{aligned}$$