Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-05-27**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att talet

$$c_n = 3^{2n} - 1$$

är delbart med 8. **Ledning:** *ett heltal c är delbart med ett annat heltal d om det finns ett heltal k så att $c = kd$.* (5p)

Bevis: (Induktion) Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$c_1 = 3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8 \cdot 1,$$

som uppenbart är delbart med 8. Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att $c_p = 3^{2p} - 1$ är delbart med 8, dvs att det finns ett heltal k så att

$$c_p = 3^{2p} - 1 = 8k \ \text{(induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att även c_{p+1} är delbart med 8, dvs att det finns något heltal l så att

$$c_{p+1} = 3^{2(p+1)} - 1 = 8l.$$

Det är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned} c_{p+1} &= 3^{2(p+1)} - 1 = 3^{2p} \cdot 3^2 - 1 = 9 \cdot 3^{2p} - (9 - 8) = 9 \cdot 3^{2p} - 9 + 8 = \\ &= 9\left(3^{2p} - 1\right) + 8 = 9c_p + 8 \underset{\text{ind.ant.}}{=} 9 \cdot 8k + 8 = 8(9k + 1) = 8l, \end{aligned}$$

där

$$l = 9k + 1$$

är ett heltal eftersom k är ett heltal. Enligt induktionsaxiomet är talet $c_n = 3^{2n} - 1$ därför delbart med 8 för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Korollarium: Talföljden $\{c_n\}$ kan därmed beskrivas rekursivt genom formeln

$$\begin{cases} c_{n+1} = 9c_n + 8, \\ c_1 = 8. \end{cases}$$

Alternativt bevis 1: Låt n vara ett positivt heltal och $r \neq 1$. Då gäller att den geometriska summan

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

så att

$$r^n - 1 = (r - 1) \sum_{k=0}^{n-1} r^k.$$

I synnerhet, med $r = 3^2 = 9$, har vi att

$$c_n = 3^{2n} - 1 = \left(3^2\right)^n - 1 = \left(3^2 - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(3^2\right)^k = 8 \sum_{k=0}^{n-1} 9^k = 8 \cdot \underbrace{\left(1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{n-1}\right)}_{\text{heltal när } n=1,2,3,\ldots},$$

dvs talet $c_n = 3^{2n} - 1$ är delbart med 8 för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Alternativt bevis 2: Binomialsatsen ger att

$$\begin{aligned}
c_n &= 3^{2n}-1=\left(3^2\right)^n-1=9^n-1=(1+8)^n-1=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}8^k\right)-1 \underset{1^{n-k}=1}{=} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}8^0+\binom{n}{1}8^1+\binom{n}{2}8^2+\binom{n}{3}8^3+\ldots+\binom{n}{n}8^n-1= \\
&= 8\cdot\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}8^1+\binom{n}{3}8^2+\ldots+\binom{n}{n}8^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

som är delbart med 8.

Alternativt bevis 3: Notera att vi kan faktorisera c_n som

$$c_n=3^{2n}-1=\left(3^n\right)^2-1=\left(3^n-1\right)\left(3^n+1\right)=a_nb_n.$$

Nu gäller det att 3^n alltid är ett udda tal, ty en produkt av udda tal är udda (här n stycken treor). Därmed är talen $a_n=3^n-1$ och $b_n=3^n+1$ bägge jämna, dessutom är $b_n=a_n+2$. Från lemmat härunder följer därmed att c_n är delbart med 8.

Lemma 1 *Produkten av två på varandra följande jämna heltal a och $b=a+2$ är delbar med 8.*

Bevis. *Eftersom talen a och b bägge är jämna innehåller båda faktorn 2 och kan således skrivas som*

$$\begin{aligned}
a &= 2m, \\
b &= 2(m+1),
\end{aligned}$$

för något heltal m som antingen är jämnt eller udda. Om m är jämnt så kan vi skriva $m=2s$ för något heltal s, då är

$$ab=2m\cdot2(m+1)=2\cdot2s\cdot2(2s+1)=8s(2s+1).$$

Om m är udda så kan vi skriva $m=2t-1$ för något heltal t, då är

$$ab=2m\cdot2(m+1)=2\cdot(2t-1)\cdot2\cdot2t=8t(2t-1).$$

I bägge dessa fall är alltså ab delbart med 8. ■■

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to1}e^{\cos\ln x}$$

(1p)

Lösning: Funktionen

$$f(x)=e^{\cos\ln x}$$

är definierad och kontinuerlig för alla $x>0$ varför

$$\lim_{x\to1}e^{\cos\ln x}=f(1)=e^{\cos\ln1}=e^{\cos0}=e^1=e.$$

(b) Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Ledning: *instängningssatsen.* (2p)

Lösning: Låt $n > 3$ vara ett positivt heltal. Notera nu att

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ faktorer}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} = 2\cdot \overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot \ldots \cdot \frac{2}{n}}^{n-2 \text{ faktorer}} < 2\cdot \overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}}^{n-2 \text{ faktorer}} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0$$

när $n \to \infty$. Därmed följer det av instängningssatsen att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Alternativ lösning: Låt $n > 3$ vara ett positivt heltal. Notera nu att

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2}^{n \text{ faktorer}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n} = 2\cdot \overbrace{\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot \ldots \cdot \frac{2}{n-1}}^{n-2 \text{ faktorer}}\cdot\frac{2}{n} < 2\cdot \overbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}^{n-2 \text{ faktorer}}\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n} \to 0$$

när $n \to \infty$. Därmed följer det av instängningssatsen att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0+} x^{\ln x}$$

(2p)

Lösning: Om vi skriver

$$f(x) = x^{\ln x}$$

ser vi att

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^2.$$

Därmed är

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{(\ln x)^2}$$

så att

$$\lim_{x\to 0+} x^{\ln x} = \lim_{x\to 0+} e^{(\ln x)^2} \underset{e^{\cdot} \text{ kont.}}{=} e^{\lim_{x\to 0+} (\ln x)^2} = +\infty,$$

eftersom

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0+} (\ln x)^2 = +\infty$$

och

$$\lim_{t\to\infty} e^t = \infty.$$

3. Låt

$$f(x) = xe^x, \quad -1 \le x < \infty,$$

och definiera *Lamberts W-funktion* W som inversen till f, dvs $W(x) = f^{-1}(x)$.

(a) Visa att f är inverterbar. Vad är definitionsmängden för W? (2p)

Lösning: Derivering ger

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

Vi ser att $f'(x) \ge 0$ för $x \ge -1$ med likhet enbart för $x = -1$. Därmed är $f(x)$ strängt växande på hela $[-1, \infty)$ och därför också $1-1$, det vill säga, inverterbar. Det medför att värdemängden för f är $\left[-\frac{1}{e}, \infty\right)$, ty

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} xe^x = \infty. \end{aligned}$$

Alltså är

$$D(W) = D\left(f^{-1}\right) = R(f) = \left[-\frac{1}{e}, \infty\right).$$

(b) Visa att derivatan $W'(x)$ uppfyller

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

om $x \ne 0$. **Ledning:** *implicit derivering.* (2p)

Lösning: Låt $x > -\frac{1}{e}$. Vi vet att

$$y = W(x) \Longleftrightarrow x = f(y) = ye^y \Longleftrightarrow e^y = \frac{x}{y}.$$

Sätt $y = y(x)$. Implicit derivering av $x = f(y)$ med avseende på x ger

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(f(y)) = f'(y) \cdot y'.$$

Därmed är

$$W'(x) = y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(1+y)e^y}.$$

För $x \ne 0$ har vi

$$W'(x) = \frac{1}{(1+y)e^y} = \frac{1}{(1+y)\frac{x}{y}} = \frac{y}{x(1+y)} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Anmärkning: Om $x = 0$ motsvarar det $y = 0$, ty

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \Longleftrightarrow W(0) = 0.$$

Därmed är

$$W'(0) = \frac{1}{(1+0)e^0} = 1.$$

(c) Finn tangenten till kurvan $y = W(x)$ i punkten $x = e$. **Tips:** *formeln i uppgift (b) kan vara användbar.* (2p)

Lösning: Vi vet att tangenten till $y = W(x)$ i $x = e$ ges av enpunktsformeln

$$y - W(e) = W'(e)(x - e).$$

Låt oss först beräkna $W(e)$. Vi vet att

$$y = W(x) \Longleftrightarrow x = f(y) = ye^y.$$

I synnerhet, för punkten $x = e$ gäller att

$$e = ye^y.$$

Vi ser direkt att $y = 1$ är *en* lösning till denna ekvation. Kan det finnas fler lösningar? Nej, vi har ju ovan visat att funktionen f är injektiv, dvs att ett x-värde motsvaras av exakt ett y-värde. Alltså är $y = 1$ den enda lösningen. Därmed är

$$W(e) = 1.$$

För att beräkna $W'(e)$ använder vi formeln ovan och får

$$W'(e) = \frac{W(e)}{e(1 + W(e))} = \frac{1}{e(1+1)} = \frac{1}{2e}.$$

Därmed är tangentens ekvation

$$y - 1 = \frac{1}{2e}(x - e) \Longleftrightarrow y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Alternativ lösning: Vi vet att grafen till en invers funktion f^{-1} är spegelbilden i linjen $y = x$ av grafen till f. Samma förhållande måste då även gälla tangenterna till dessa. I synnerhet blir tangenten till $y = f^{-1}(x) = W(x)$ i $x = e$ spegelbilden i linjen $y = x$ av tangenten till $y = f(x) = xe^x$ i $y = e$ [*sic!*]. Den tangenten har ekvation

$$y - e = f'(x_0)(x - x_0)$$

där x_0 är lösningen till ekvationen

$$e = f(x_0) = x_0 e^{x_0}$$

som vi med liknande resonemang som ovan inser är $x_0 = 1$. Därmed är

$$f'(x_0) = f'(1) = (1 + 1)e^1 = 2e$$

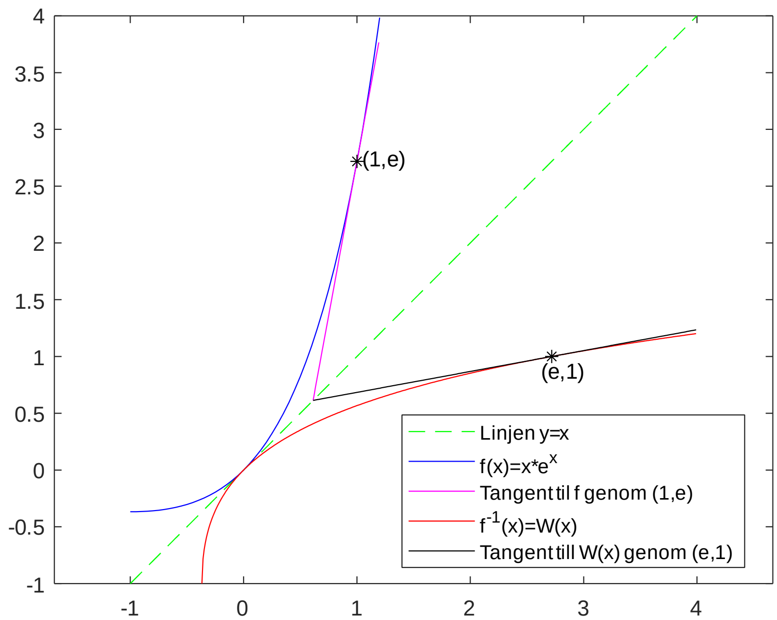
och sålunda ges tangenten till $y = f(x)$ i $y = e$ av ekvationen

$$y - e = 2e(x - 1) \Longleftrightarrow y = 2ex - e.$$

Nu gäller det att speglingen av en punkt (a, b) i linjen $y = x$ är punkten (b, a), dvs x- och y-koordinaterna byter plats. Vi får därför den sökta tangenten till $y = W(x)$ i $x = e$ genom att byta plats på x och y i tangenten till $y = f(x)$ genom $y = e$. Därmed är den sökta tangenten

$$x = 2ey - e \Longleftrightarrow \frac{x}{2e} = y - \frac{e}{2e} \Longleftrightarrow y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Se figur på nästa sida.



4. En partikel med vilomassa m_0 rör sig med hastigheten v (där $|v| < c$) relativt ett visst koordinatsystem. Einstein visade under sitt *annus mirabilis* 1905 att partikelns totala energi E är

$$E = mc^2,$$

där partikelns relativistiska massa m ges av

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Partikelns kinetiska energi T ges därmed av differensen mellan totala energin och viloenergin enligt

$$T = T(v) = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

där c är ljusets hastighet i vakuum.

(a) Beräkna förstaderivatan $T'(v)$ och andraderivatan $T''(v)$. (2p)
Lösning: Vi skriver $T(v)$ som

$$T(v) = m_0c^2 \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right).$$

Två deriveringar ger

$$
\begin{aligned}
T'(v) &= m_0c^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{-2v}{c^2} = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},\\
T''(v) &= m_0\frac{1\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - v\cdot\frac{3}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{-2v}{c^2}}{\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \\
&= m_0\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+3\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3-\frac{1}{2}}} = \frac{m_0\left(1+\frac{2v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}
$$

(b) Approximera $T(v)$ med ett andra ordningens Taylorpolynom till $T(v)$ kring $v=0$. Restterm behöver ej beräknas. (2p)

Lösning: Taylorpolynomet $P_2(v)$ av ordning 2 av $T(v)$ kring $v=0$ ges av

$$P_2(v) = T(0) + T'(0)\cdot(v-0) + \frac{T''(0)}{2!}(v-0)^2.$$

Nu är

$$
\begin{aligned}
T(0) &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}}-1\right) = m_0c^2\left(\frac{1}{1}-1\right) = 0,\\
T'(0) &= \frac{m_0\cdot 0}{\left(1-\frac{0^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,\\
T''(0) &= \frac{m_0\left(1+\frac{2\cdot 0^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{0^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{2}}} = m_0,
\end{aligned}
$$

varför

$$P_2(v) = 0 + 0\cdot v + \frac{m_0}{2}v^2 = \frac{m_0v^2}{2}.$$

För hastigheter v som till beloppet är små i förhållande till c gäller därför att den kinetiska energin

$$T(v) \approx P_2(v) = \frac{m_0v^2}{2}.$$

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x-2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp detaljerade teckenscheman. Skissera kurvan. (5p)

Lösning: Vi noterar först att grafen skär koordinataxlarna enbart i origo eftersom

$$f(0) = \frac{0^3}{0-2} = 0.$$

Vi observerar sedan att den rationella funktionen har gradtal 3 i täljaren och gradtal 1 i nämnaren. Därmed kommer funktionen varken ha någon horisontell eller sned asymptot. I själva verket gäller att

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3}{x-2} = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 4x - 8 + 8}{x-2} = \\
&= \frac{x^2(x-2) + 2x(x-2) + 4(x-2) + 8}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}.
\end{aligned}$$

Långt från origo beter sig därför funktionen f ungefär som parabeln

$$p(x) = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3.$$

När $x \to \pm\infty$ har vi således att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty}}{1-\frac{2}{x}} = +\infty.$$

Funktionen har däremot en vertikal asymptot $x = 2$, ty

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} \frac{\overbrace{x^3}^{\to 8}}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} = -\infty \\
\lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+} \frac{\overbrace{x^3}^{\to 8}}{\underbrace{x-2}_{\to 0+}} = +\infty
\end{aligned}$$

Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x-2}\right) = \frac{3x^2(x-2) - x^3\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}, \\
y'' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}\right) = \frac{(6x^2 - 12x)(x-2)^2 - (2x^3 - 6x^2)\cdot 2(x-2)}{\left((x-2)^2\right)^2} = \\
&= \frac{(6x^2 - 12x)(x-2) - 2\cdot(2x^3 - 6x^2)}{(x-2)^3} = \frac{6x^3 - 12x^2 - 12x^2 + 24x - 4x^3 + 12x^2}{(x-2)^3} \\
&= \frac{2x^3 - 12x^2 + 24x}{(x-2)^3} = \frac{2x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3} = \frac{2x\left((x-3)^2 + 3\right)}{(x-2)^3}.
\end{aligned}$$

Alltså har vi två kritiska punkter $x = 0$ och $x = 3$ där $y' = 0$ och en möjlig inflexionspunkt $x = 0$. Teckenstudium ger

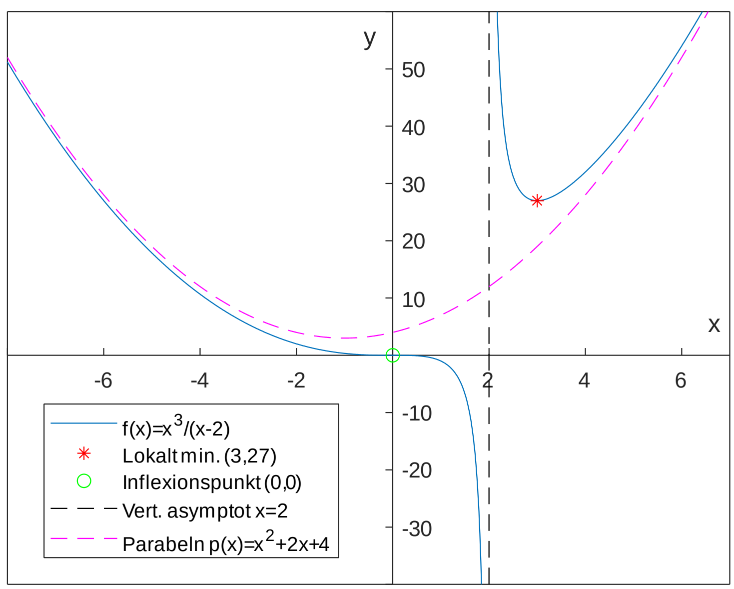
		0		2		3	
$2x^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
y'	$-$	0	$-$	odef.	$-$		$+$
y	$\searrow$	terrass	$\searrow$	asy.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

		0		2	
$2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\left((x-3)^2+3\right)$	$+$		$+$		$+$
$(x-2)^3$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	odef.	$+$
y	$\smile$	infl.	$\frown$	asy.	$\smile$

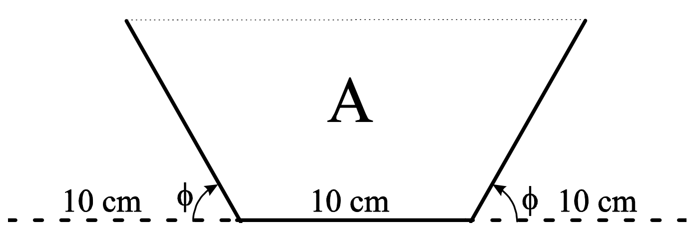
Därmed är terrasspunkten $x = 0$ en inflexionspunkt. Funktionen har ett lokalt minimum i $x = 3$ som är

$$f(3) = \frac{3^3}{3-2} = 27.$$

Funktionen är växande på intervallet $[3, \infty)$ samt avtagande på intervallen $(-\infty, 2)$ och $(2, 3]$. Funktionen är konvex på intervallen $(-\infty, 0)$ och $(2, \infty)$ samt konkav på intervallet $(0, 2)$. Vi kan slutligen skissera grafen som

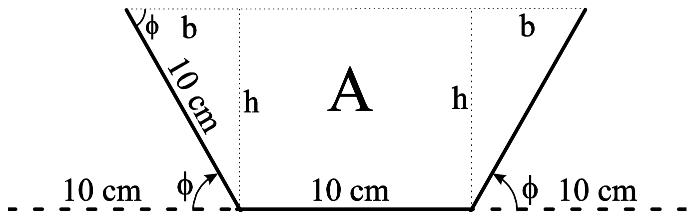


6. En öppen ränna för vatten skall konstrueras ur en 30 cm bred plåt genom att bocka upp en tredjedel av plåten vinkeln ϕ på varje sida, se rännans tvärsnitt i figuren under.



Hur skall vinkeln ϕ väljas för att rännan skall rymma så mycket vatten som möjligt och hur stor är tvärsnittsarean A då? (5p)

Lösning: Låt oss skriva tvärsnittsarean A som en funktion av vinkeln ϕ.



Om vi delar upp tvärsnittet av rännan i en rektangel och två räta trianglar som i figuren ovan kan vi skriva

$$A = 10h + 2 \cdot \frac{bh}{2},$$

där

$$\begin{aligned}
\frac{b}{10} &= \cos\phi \Longleftrightarrow b = 10\cos\phi, \\
\frac{h}{10} &= \sin\phi \Longleftrightarrow h = 10\sin\phi.
\end{aligned}$$

Därmed kan vi skriva

$$A = A(\phi) = 100\sin\phi + 100\cos\phi\sin\phi = 100\,(1+\cos\phi)\sin\phi.$$

Vi inser dessutom att $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, ty om $\phi < 0$ så rinner vattnet ut och om $\phi > \frac{\pi}{2}$ så måste tvärsnittsarean bli mindre än den är för $\phi = \frac{\pi}{2}$. Vi skall därför finna maximum av den kontinuerliga funktionen $A(\phi)$ på det slutna och begränsade intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. I ändpunkterna har vi

$$\begin{aligned}
A(0) &= 100\,(1+\cos 0)\sin 0 = 0, \\
A\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 100\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} = 100 \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

Derivering ger nu

$$\begin{aligned}
A'(\phi) &= 100\,(-\sin\phi)\sin\phi + 100\,(1+\cos\phi)\cos\phi = \\
&= 100\left(\cos\phi + \cos^2\phi - \sin^2\phi\right) = 100\left(\cos\phi + \cos^2\phi - \left(1-\cos^2\phi\right)\right) = \\
&= 100\left(2\cos^2\phi + \cos\phi - 1\right) = 200\left(t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

uttryckt i hjälpvariabeln $t = \cos\phi$. Derivatan existerar överallt så singulära punkter saknas. I kritiska punkter är $A'(\phi) = 0$, dvs vi måste där ha att

$$t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Det erhålls för

$$t = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1+8}{4^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1. \end{cases}$$

Vi skall därför lösa ekvationerna

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{1}{2},\\ \cos\phi &= -1,\end{aligned}$$

för $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Nu är cosinus ickenegativ i första kvadranten varför den andra av dessa ekvationer saknar lösning. Däremot ger den första av dessa lösningen $\phi = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. För den vinkeln är

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 100\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 100\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

Nu är $A\left(\frac{\pi}{3}\right) > A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ty

$$100\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} > 100 \Longleftrightarrow 3\sqrt{3} > 4 \underset{\text{pos.area}}{\Longleftrightarrow} 27 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 > 4^2 = 16.$$

Eftersom det inte finns någon annan intressant punkt fås därför maximal tvärsnittsarea $A_{\max} = 75\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ ($\approx 130\ \mathrm{cm}^2$) för vinkeln $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Anmärkning 1: Ytterligare en derivering ger

$$A''(\phi) = 100\left(-4\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\right) = -100\left(1+4\cos\phi\right)\sin\phi.$$

Därmed är $A''(\phi) < 0$ för $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Alltså måste $\phi = \frac{\pi}{3}$ ge maximum.

Alternativ lösning 1: Derivering ger

$$\begin{aligned}A'(\phi) &= 100\left(-\sin\phi\right)\sin\phi + 100\left(1+\cos\phi\right)\cos\phi =\\ &= 100\left(\cos\phi + \cos^2\phi - \sin^2\phi\right) = 100\left(\cos\phi + \cos 2\phi\right).\end{aligned}$$

Derivatan existerar överallt så singulära punkter saknas. I kritiska punkter är $A'(\phi) = 0$, dvs vi måste där ha att

$$\cos\phi = -\cos 2\phi \Longleftrightarrow \cos\phi = \cos\left(\pi - 2\phi\right) \Longleftrightarrow \pm\phi = \pi - 2\phi + n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z},$$

som ger lösningarna

$$\begin{cases} 3\phi = \pi + n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}, \\ \phi = \pi + n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{3} + n\cdot\frac{2\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}, \\ \phi = \pi + n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Av dessa oändligt många lösningar (beroende på heltalet n) finns det bara en i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nämligen

$$\phi = \frac{\pi}{3}.$$

För övrigt är resonemanget samma som ovan.

Alternativ lösning 2: Låt oss istället skriva tvärsnittsarean A som en funktion av höjden h. Då ger Pythagoras sats att

$$b = \sqrt{10^2 - h^2}$$

så att

$$A(h) = 10h + 2 \cdot \frac{bh}{2} = h\left(10 + \sqrt{10^2 - h^2}\right),$$

för $0 \leq h \leq 10$. Vi skall därför finna maximum av den kontinuerliga funktionen $A(h)$ på det slutna och begränsade intervallet $[0, 10]$. I ändpunkterna har vi

$$\begin{aligned} A(0) &= 0\left(10 + \sqrt{10^2}\right) = 0, \\ A(10) &= 10\left(10 + \sqrt{0}\right) = 100 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Derivering ger nu

$$A'(h) = \left(10 + \sqrt{10^2 - h^2}\right) + h \cdot \frac{-2h}{2\sqrt{10^2 - h^2}} = \frac{10\sqrt{10^2 - h^2} + (10^2 - h^2) - h^2}{\sqrt{10^2 - h^2}}.$$

I intervallet $[0, 10]$ finns en singulär punkt, men det är den redan undersökta högra ändpunkten $h = 10$. I kritiska punkter är $A'(h) = 0$, dvs vi måste där ha att

$$\begin{aligned} 10\sqrt{10^2 - h^2} + 10^2 - 2h^2 &= 0 \Longleftrightarrow 5\sqrt{10^2 - h^2} = h^2 - 50 \\ &\Downarrow \\ 2500 - 25h^2 = 25\left(100 - h^2\right) &= \left(h^2 - 50\right)^2 = \left(h^2\right)^2 - 100h^2 + 2500 \\ &\Updownarrow \\ \left(h^2\right)^2 - 75h^2 &= h^2\left(h^2 - 75\right) = 0. \end{aligned}$$

Därmed måste

$$h = 0 \vee h = \pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3}.$$

Av dessa lösningar är $h = 0$ redan undersökt (vänster ändpunkt) och $h = -5\sqrt{3}$ tillhör ej intervallet $[0, 10]$. Således återstår

$$h = 5\sqrt{3},$$

som ger arean

$$A\left(5\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3}\left(10 + \sqrt{10^2 - 75}\right) = 5\sqrt{3}(10 + 5) = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

för vinkeln

$$\phi = \arcsin\frac{5\sqrt{3}}{10} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Nu är $A\left(5\sqrt{3}\right) > A(10)$ ty

$$75\sqrt{3} > 100 \Longleftrightarrow 3\sqrt{3} > 4 \underset{\text{pos.area}}{\Longleftrightarrow} 27 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 > 4^2 = 16.$$

Eftersom det inte finns någon annan intressant punkt fås därför maximal tvärsnittsarea $A_{\max} = 75\sqrt{3}$ cm^2 (≈ 130 cm^2) för vinkeln $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Anmärkning 2: Man kan matematiskt visa att den mest optimala form en sådan plåtskiva kan böjas till är en halvcirkel (*Drottning Didos problem, isoperimetriska problemet*). Om en plåt med bredd s böjs till en halvcirkel blir radien på den

$$r = \frac{s}{\pi}.$$

Det ger en tvärsnittsarea A på rännan

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{s^2}{2\pi}.$$

Det innebär att den maximala tvärsnittsarea vi kan uppnå på en öppen ränna genom att böja en $s = 30$ cm bred plåt är

$$\widetilde{A} = \frac{30^2}{2\pi} = \frac{450}{\pi} \text{ cm}^2 \ \left(\approx 143 \text{ cm}^2\right).$$

Man kan även visa att om vi sätter bivillkoret att plåten skall vikas till $n \geq 2$ stycken räta linjestycken så ges maximal tvärsnittsarea för den plåt som har formen som en halv regelbunden polygon (dvs med sidlängd $a = s/n$, yttervinkel $\phi = \pi/n$). Då ges den maximala tvärsnittsarean av

$$A_n = \frac{s^2}{4n \tan \frac{\pi}{2n}}.$$

Talföljden $\{A_n\}$ är växande och uppåt begränsad, med gränsvärde

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \widetilde{A} = \frac{s^2}{2\pi}.$$

I fallet vi visade ovan har den optimala rännan formen av en halv regelbunden hexagon ($n = 3$).