Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M

Tentamensdatum: **2021-03-24**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$. Ge svaret på polär form.

b) Visa att för z som uppfyller $|z - i| \leq 2$ gäller det att $|z + 1 + i| \leq 9/2$. Ledning: Använd triangelolikheten. (4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för kolonnrummet till A (Col$A$) och en bas för nollrummet till A (Nul$A$).

b) Vektorn

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ligger i nollrummet för A. Bestäm dess koordinater relativt basen för nollrummet som du bestämde i a)-uppgiften.

c) Låt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ligger $\mathbf{v}$ i kolonnrummet för A? Bevisa att $\mathbf{v}$ inte ligger i kolonnrummet för A eller bestäm dess koordinater relativt basen för kolonnrummet som du bestämde i a)-uppgiften. (4 p)

3. Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ vara den linjära operatorn definierad via

$$T(p(t)) = t^2 p''(t) - 3tp'(t) + p(1)t^3.$$

Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{t, t+1, t^2 - 2t\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3\}$. (4 p)

4. Betrakta följande data

x	-1	0	1	2
y	0	0	1	-2

. Bestäm den funktion på formen

$$y = \alpha x + \beta x^3,$$

som bäst anpassar till datapunkterna i minsta-kvadratmetodens mening. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till

$$y'' - 4y' + 3y = (4x - 1)e^{3x}.$$

(4 p)

6. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = -4x + 6y \\ y' = -3x + 5y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 0$ och $y(0) = 1$. (4 p)

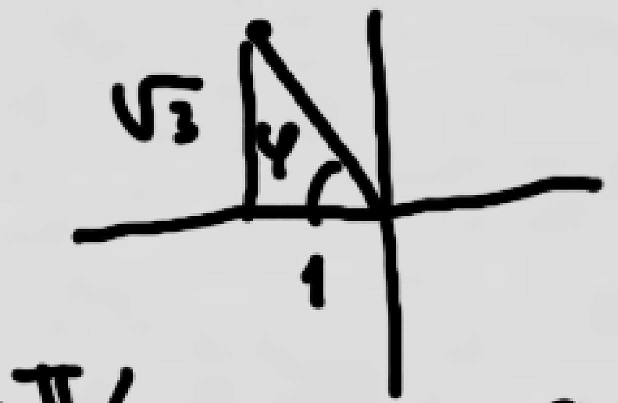
7.

a) Låt A vara en kvadratisk matris. Definiera begreppen egenvärden och egenvektorer för A.

b) Visa att produkten av egenvärdena för en matris är lika med determinanten.
Ledning: Fundera över det karakteristiska polynomen som för en $n \times n$ matris är ett polynom av gradtal n och med ledande koefficient $(-1)^n$. (4 p)

Lösningsförslag M0049M/M0031M, 24/03-21

1\. a) $z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0 \iff z^4 = -1 + i\sqrt{3} \iff$



$\varphi = \pi/3$ $\quad \therefore \arg(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

$|-1+i\sqrt{3}| = 2$

$z^4 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$; ANSÄTT $z = re^{i\varphi} \overset{D-M}{\Longrightarrow}$

$z^4 = r^4 e^{i4\varphi} \quad \therefore \underline{r^4 e^{i4\varphi} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}}$

MEN DETTA BETYDER!

$$\begin{cases} r^4 = 2 \\ 4\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{matrix} r = 2^{1/4} \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \end{matrix}$$

$\therefore z_k = \underline{\underline{2^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)}}}$; $k = 0,1,2,3.$

b) $|z+1+i| = |z-i+1+2i| \le |z-i| + |1+2i|$

TRIANGELOLIKHETEN

$\le 2 + \sqrt{5} < 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ ✓

$\sqrt{5} < \frac{5}{2}$ TY

$5 < \frac{25}{4} \iff 20 < 25$

2\. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ EN BAS FÖR Col A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ //

LÖS $A\bar{x} = \bar{0}$: x_1, x_2 BUNDNA x_3, x_4 FRIA.

UT $x_3 = s$ OCH $x_4 = t$ OCH VI FÅR $x_2 = -x_3 + x_4 = -s + t$

OCH $x_1 = -x_2 - x_4 = s - t - t = s - 2t$

$\therefore \bar{x} = \begin{bmatrix} s - 2t \\ -s + t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ EN BAS FÖR Nul A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = B$

b) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ BESTÄM c_1 OCH c_2.

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore c_2 = -2$, $c_1 = 3$

$\therefore [\bar{u}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ //

c) $\bar{v} \in \text{Col } A \Leftrightarrow$ DET FINNS c_1, c_2 SÅ ATT $\bar{v} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

STÄLL UPP DEN UTÖKADE KOEFFICIENTMATRISEN:

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ LÖSNING SAKNAS

$\therefore \bar{v} \notin \text{Col } A$ //

3. ENLIGT TEORIN GÄLLER DET

$$[T] = \Big[[T(t)]_c \; [T(t+1)]_c \; [T(t^2-2t)]_c \Big]$$

$$t: \; T(t) = t^2 \cdot 0 - 3t \cdot 1 + t^3 = t^3 - 3t; \quad [T(t)]_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t+1: \; T(t+1) = t^2 \cdot 0 - 3t \cdot 1 + 2t^3 = 2t^3 - 3t; \quad [T(t+1)]_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$t^2-2t: \; T(t^2-2t) = t^2 \cdot 2 - 3t(2t-2) - 1 \cdot t^3 =$$

$$= -t^3 - 4t^2 + 6t \; ; \quad [T(t^2-2t)]_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ DEN SÖKTA MATRISEN ÄR $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. SÄTT IN DATAPUNKTERNA I MODELLEN.

$$\begin{cases} 0 = -\alpha - \beta \\ 0 = 0 \\ 1 = \alpha + \beta \\ -2 = 2\alpha + 8\beta \end{cases}$$

(SYSTEMET ÄR UPPENBART INKONSISTENT, DEN FÖRST OCH TREDJE EKVATIONEN MOTSÄGER VARANDRA.)

PÅ MATRISFORM:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

MOTSVARANDE NORMALEKVATION:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -15 \end{bmatrix}$$

UTÖKAD KOEFFICIENTMATRIS:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 18 & -3 \\ 18 & 66 & -15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1/2 \\ 18 & 66 & -15 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1/2 \\ 0 & 12 & -6 \end{array}\right] \quad \therefore \begin{array}{l} \beta = -1/2 \\ \alpha = -\frac{1}{2} - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{array}$$

$\therefore$ DEN OPTIMALA FUNKTIONEN ÄR

$$\underline{\underline{y = x - \frac{1}{2}x^3}}$$

5. $y'' - 4y' + 3y = (4x-1)e^{3x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

Hom.: KAR. EKV.: $r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$r = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = 3;\ 1$

$\therefore\ y_h = Ae^{3x} + Be^{x}$

Part.: ANSATS $y_p = z(x)e^{3x}$

VI FÅR: $y_p' = z'e^{3x} + 3ze^{3x}$

$y_p'' = z''e^{3x} + 6z'e^{3x} + 9ze^{3x}$

IN I EKV.:

$$z''\cancel{e^{3x}} + 6z'\cancel{e^{3x}} + 9z\cancel{e^{3x}} - 4(z'\cancel{e^{3x}} + 3z\cancel{e^{3x}})$$
$$+ 3z\cancel{e^{3x}} = (4x-1)\cancel{e^{3x}} \Leftrightarrow$$

$$z'' + 6z' + 9z - 4z' - 12z + 3z = 4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$z'' + 2z' = 4x - 1$$

(ATT z SKULLE FÖRSVINNA VISSTE VI
TY e^{3x} HOM.LÖS.)

ANSATS: $z(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$

$z' = 2ax + b$, $z'' = 2a$. IN I EKV.:

$2a + 2(2ax + b) = 4x - 1 \Leftrightarrow$

$4ax + 2a + 2b = 4x - 1$

$\therefore\ a = 1,\ b = -3/2$

$z(x) = x^2 - \frac{3}{2}x$

EN PARTIKULÄRLÖSNING ÄR DÄRFÖR

$y_p = (x^2 - \frac{3}{2}x)e^{3x}$

DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN ÄR

$y = y_h + y_p =$

$= Ae^{3x} + Be^{x} + (x^2 - \frac{3}{2}x)e^{3x}$

6. SYSTEMET PÅ MATRISFORM (M0049M)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LÅT $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

BESTÄM EGENVÄRDEN/VEKTORER FÖR A.

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -20 - \lambda + \lambda^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = -1;\, 2$$

[KOLL: $-1+2=1$, $\operatorname{tr} A = -4+5 = 1$ OK
$(-1)\cdot 2 = -2$, $\det A = -20+18 = -2$ OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = -1$: $A\bar{v} = -1\bar{v} \Leftrightarrow (A+I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI
$x_2 = t$, $x_1 = 2t$
$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2$: $A\bar{v} = 2\bar{v} \Leftrightarrow (A - 2I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI
$x_2 = t$, $x_1 = t$
$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

SAMTLIGA LÖSNINGAR (PÅ VEKTORFORM)

ÄR $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} + B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t}$

MEN, $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, OCH DETTA GER

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = -1,\ B = 2$

$\therefore -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t}$, PÅ KOMPONENTFORM

$$\begin{cases} x = -2e^{-t} + 2e^{2t} \\ y = -e^{-t} + 2e^{2t} \end{cases}$$

(M0031M)

6. a) SÄTT IN $y = x$

$$VL = 2x \cdot 1 = 2x$$
$$HL = 2x + x^2 - x^2 = 2x$$
$$VL = HL \quad //$$

b) $y = x + \frac{1}{v(x)}$ GER

$$y' = 1 - \frac{v'}{v^2}. \quad \text{IN I EKV.:}$$

$$2x\left(1 - \frac{v'}{v^2}\right) = 2(x + v^{-1}) + (x + v^{-1})^2 - x^2 \iff$$

$$\cancel{2x} - 2x\frac{v'}{v^2} = \cancel{2x} + 2v^{-1} + \cancel{x^2} + 2xv^{-1} + v^{-2} - \cancel{x^2} \iff$$

$$-2xv' = 2v + 2xv + 1 \iff$$

$$v' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)v = -\frac{1}{2x} \iff$$

$$\text{IF: } \int 1 + \frac{1}{x}\,dx = x + \ln|x| + c \overset{x>0}{=} x + \ln x + c$$

$$\therefore \text{IF} = e^{x + \ln x} = xe^x$$

$$\frac{d}{dx}(xe^x v) = -\frac{1}{2}e^x \iff xe^x v = -\frac{1}{2}e^x + C$$

$$\therefore v = \frac{-1}{2x} + \frac{C}{xe^x}$$

$$\therefore y = x + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{\frac{C}{xe^x} - \frac{1}{2x}}$$

MEN, $y(1) = 2$:

$$2 = 1 + \frac{1}{\frac{C}{e} - \frac{1}{2}} \iff C = \frac{3}{2}e$$

$$\therefore y = x + \frac{1}{\frac{3e}{2xe^x} - \frac{1}{2x}} \iff$$

$$y = x + \frac{2xe^x}{3e - e^x} \quad //$$

7. a) EN NOLLSKILD VEKTOR $\bar{v}$ ÄR EN EGENVEKTOR TILL A OM DET FINNS EN SKALÄR λ SÅ ATT $\boxed{A\bar{v} = \lambda \bar{v}}$. SKALÄREN λ ÄR DET TILLHÖRANDE EGENVÄRDET.

b) LÅT A VARA EN $n \times n$ MATRIS MED EGENVÄRDEN $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (VISSA λ_i KAN VARA LIKA)

EFTERSOM λ_i ÄR NOLLSTÄLLENA TILL DET KARAKTERISTISKA POLYNOMET $\det(A-\lambda I)$ GÄLLER DET ATT:

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

n:TE GRADSPOLYNOM MED NOLLSTÄLLEN λ_i OCH LEDANDE KOEFFICIENT $(-1)^n$.

SÄTT IN $\lambda = 0$ OCH VI FÅR:

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$