



Omtentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2019-12-19**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5**.

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU* – *Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU* – *Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **180** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n} (xe^{2x}) = (2^n x + n \cdot 2^{n-1}) e^{2x}.$$

(5p)

2. Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 15x^5 e^{-x}}{4x^2 \sin x - 7x^3}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x - 2| - |2x + 2|}{x}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 3x}{2 \tan 3x - 4x \cos x}.$$

(2p)

3. Låt

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestäm ett andra ordningens taylorpolynom till f kring punkten $a = 0$, inklusive Lagranges restterm. (3p)

- (b) Använd detta polynom för att visa att

$$\sqrt{e} > \frac{13}{8}.$$

(1p)

- (c) Använd feltermen för att bestämma det maximala värdet differensen

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8}$$

(1p)

kan få.

4. Bilda funktionen

$$f(x) = x^{x \ln x}, \quad x > 0.$$

Bestäm eventuella lokala extremvärden. Gör teckenstudium av derivatan, skissera kurvan i dess huvuddrag och ange funktionens värdemängd. *Ledning: skriv först om $f(x)$ som $e^{\ln f(x)}$.* (5p)

5. Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (2p)

(b) Finn

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

(1p)

(c) Beräkna

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right).$$

(2p)

6. Bestäm den maximala volymen av en rak cirkulär cylinder inskriven i en cirkulär kon med höjden 12 cm och basradien 4 cm. Vi förutsätter att symmetriaxlarna till cylindern och konen sammanfaller. (5p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad a_k = a_{k-1} + d.$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n, & r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1}, & r \neq 1. \end{cases}$$

2. Binomialsatsen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Trigonometri

$$\begin{aligned} \cos(s + t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t, \\ \sin(s + t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) [0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon], \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists R) [x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon]. \end{aligned}$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned} (f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \quad x_1, x_2 \in D(f), \\ y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1. \end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)}, \quad f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

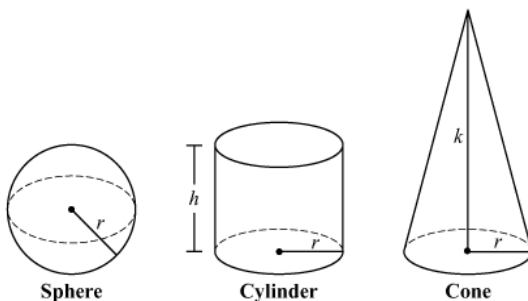
10. Taylors formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x),$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x), \quad s \text{ mellan } x \text{ och } a.$$

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r \sqrt{k^2 + r^2}$