Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-05-24**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

> *Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **200** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Binomialutveckla

$$(2+t)^5-(2-t)^5$$

så långt det går. (3p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)^5-(2-t)^5}{t}.$$

(1p)

(c) Utnyttja binomialsatsen för att visa att

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$$

för $n=2,3,4,\ldots$. **Ledning:** *behöver man undersöka alla termer i utvecklingen?* (1p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to 0+} x^{1/\ln x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+\sin x}-\sqrt{x^2-\sin x}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x^{10}-1}$$

(2p)

3. Definiera

$$f(x)=\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \ 0<x\leq 1.$$

(a) Förenkla $f'(x)$ så långt det går. (2p)

(b) Visa att för $0<x\leq 1$ så är

$$\arcsin x+\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

(2p)

(c) Vad är

$$\arcsin x+\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

om $-1\leq x<0$? (1p)

4. Låt
$$f(x) = x + x^3, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

(b) Beräkna
$$\left(f^{-1}\right)'(-2).$$
(3p)

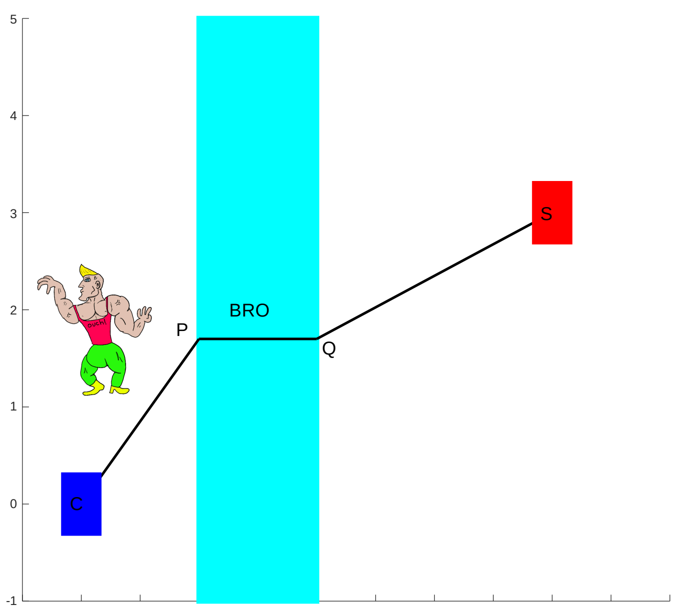
(c) Finn samtliga par av lösningar (x, y) till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + x^3 = y + y^3, \\ \\ x + y = 14. \end{cases}$$
Motivera! (1p)

5. Betrakta funktionen
$$y = f(x) = x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. (4p)

(b) Ange funktionens värdemängd. (1p)

6. Chad och Stacy bor på var sin sida om en lång rak flod som löper i nord-sydlig riktning. Om vi lägger ett koordinatsystem med Chads hus i origo så ligger Stacys hus i punkten $(8, 3)$ och floden upptar området där $2 \leq x \leq 4$. En dag bestämmer sig Chad för att bygga en rakt öst-västlig bro över floden och förbinda den med två raka vägar mellan sitt hus och Stacys hus, se nedanstående figur.



På vilken y-koordinat bör Chad förlägga bron för att totala vägen mellan dem skall bli så kort som möjligt och hur lång blir totala vägen mellan dem då? (5p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \ a_k = a_{k-1} + d.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n, & r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1}, & r \neq 1. \end{cases}$$

2. Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Trigonometri

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t,$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right],$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists R)\left[x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right].$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned} (f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \; x_1, x_2 \in D(f), \\ y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1. \end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)}, \; f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

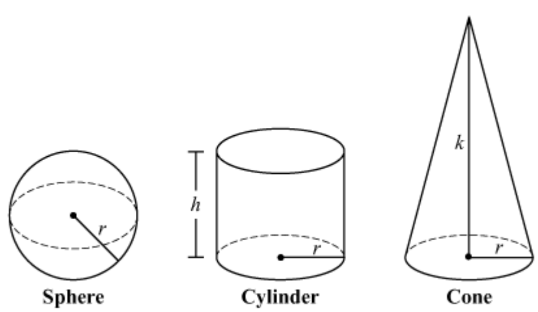
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\ E_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x), \; s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| &\leq M, \; \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I. \end{aligned}$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$