Omtentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-08-19**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

   (a) Finn Taylorutvecklingen (inklusive felterm) av ordning 4 kring punkten $x = 0$ av $f(x)$. (2p)

   (b) Använd taylorpolynomet P_4 för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$. Ge en uppskattning av felet som görs med denna approximation. (2p)

   (c) Vilken är den lägsta ordning n av Taylorpolynom kring $x = 0$ av $f(x)$ som krävs för att man ska kunna garantera att det absoluta felet vid approximation av $\ln 2$ är mindre än $1/100$? Motivera! (1p)

2. Avgör huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x + 5}.$$

(1p)

   (b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arctan(1 + h) - \frac{\pi}{4}}{h}.$$

   Ledning: Derivata av arctan. (2p)

   (c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}.$$

(2p)

3. Man kan med viss möda visa att funktionen

$$f(t) = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

   är strängt växande och därmed $1 - 1$ på intervallet $(0, 2\pi)$. Därmed har den invers f^{-1}.

   (a) Bestäm inversens definitionsmängd. Motivera! (2p)

   (b) Beräkna $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (3p)

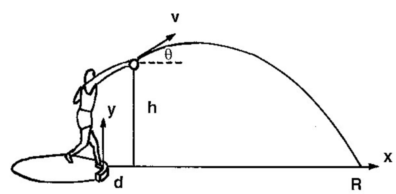
4. Visa att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin(x)) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

   för varje heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$. (5p)

5. Bestäm nollställen, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan
$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}.$$
Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (5p)

6. Det resultat som en kulstötare uppnår beror bland annat på elevationsvinkeln θ och höjden h kulan lämnar handen.



Kastparabelns ekvation är
$$y = h + x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$
där v är utgångsfarten och g tyngdaccelerationen. *Ledning:* Kulan träffar marken i punkten $(x, y) = (R, 0)$.

(a) Bilda kastvidden R som implicit funktion av $z = \tan\theta$. Bestäm $\frac{dR}{dz}$ genom implicit derivering. (2p)

(b) Hur långt kan han maximalt stöta? (2p)

(c) Hur ska θ väljas för att han ska stöta så långt som möjligt? (1p)