Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0039M

Tentamensdatum: **2021-05-28**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Lös $z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$.

b) Bestäm det reella talet a så att

$$\frac{(2+i)(3+ai)}{1-4i}$$

blir rent imaginärt. (4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{1+t^3, 1+t^2, 1+t, 1+2t\}$.

a) Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_3$.

b) Bestäm $[t^3]_{\mathcal{B}}$. (4 p)

3. Skissera $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ i ett x, y-koordinatsystem. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = 2p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1).$$

a) Bestäm $\langle 1-t, 2-t^2 \rangle$, $\|1+t^2\|$ och $\operatorname{dist}(2t-1, t^2+2t)$.

b) Finn en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - 2y' + 10y = 3\cos 3x$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + 2x^3$. (4 p)

7. Låt V och W vara vektorrum.

a) Vad menas med att T är en linjär avbildning från V till W? Ge en definition.

b) Låt T vara en linjär avbildning från V till W.

i. Visa att $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$ är ett underrum till V.

ii. Visa att $\mathrm{Ran}T = \{\mathbf{v} \in W : \text{det finns } \mathbf{u} \in V \text{ så att } T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}$ är ett underrum till W. (4 p)

Lösningsförslag M0049M/M0031M, 210528

1. a) $z^2-(1+3i)z-4+3i=0 \iff$

$\left(z-\frac{1+3i}{2}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2}_{\frac{1+6i-9}{4}=-2+\frac{3}{2}i}-4+3i=0 \iff$

$\boxed{\text{LÅT } w=z-\frac{1+3i}{2}}$

$w^2=2-\frac{3}{2}i$; $\boxed{\text{ANSÄTT } w=a+bi}$

$\iff$

$a^2+2abi-b^2=2-\frac{3}{2}i \iff$

Re: $a^2-b^2=2$ (1)

Im: $2ab=-\frac{3}{2}$ (2)

(2) $\iff \boxed{b=-\frac{3}{4a}}$ IN I (1):

$a^2-\frac{9}{16a^2}=2 \iff a^4-2a^2-\frac{9}{16}=0$

$\iff a^2=1(\pm)\sqrt{1+\frac{9}{16}}=1+\sqrt{\frac{25}{16}}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore a=\pm\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{2}$: $b=-\frac{3}{4\cdot\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$; $w=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$; $z=2+i$

$a=-\frac{3}{2}$: $b=\frac{1}{2}$; $w=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; $z=-1+2i$

LÖSNINGARNA ÄR: $2+i$, $-1+2i$

b) $\frac{(2+i)(3+ai)}{1-4i}=\frac{6+2ai+3i-a}{1-4i}=$

$=\frac{6-a+i(2a+3)}{1-4i}=\frac{(6-a+i(2a+3))(1+4i)}{\underbrace{(1-4i)(1+4i)}_{=17}}$

RENT IMAGINÄRT DÅ REALDELEN ÄR LIKA MED 0

REALDEN ÄR $\frac{1}{17}\left(6-a-4(2a+3)\right)=\frac{-6-9a}{17}$

$\frac{-6-9a}{17}=0 \iff a=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$

TALET BLIR RENT IMAGINÄRT DÅ $a=-\frac{2}{3}$.

2. $B = \{1+t^3, 1+t^2, 1+t, 1+2t\}$

a) Visa att B är en bas för $\mathbb{P}_3$.

Dimensionen för $\mathbb{P}_3$ är 4 och B innehåller 4 element, enligt en sats gör detta att linjärt oberoende är ekvivalent med att B spänner upp $\mathbb{P}_3$. Det räcker således att visa att B är linjärt oberoende.

Nollan i $\mathbb{P}_3$, dvs noll för alla t.

$$c_1(1+t^3)+c_2(1+t^2)+c_3(1+t)+c_4(1+2t) = 0$$

Identifiera:

$$\left.\begin{aligned} t^0 &: c_1+c_2+c_3+c_4=0 \\ t^1 &: c_3+2c_4=0 \\ t^2 &: c_2=0 \\ t^3 &: c_1=0 \end{aligned}\right\} \quad c_1=0,\ c_2=0 \quad \begin{cases} c_3+c_4=0 \\ c_3+2c_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad c_3=c_4=0$$

$\therefore$ c_1, c_2, c_3, c_4 alla noll, så B är linjärt oberoende och därmed (enligt resonemanget ovan) en bas.

b) $[t^3]_B$:

$$c_1(1+t^3)+c_2(1+t^2)+c_3(1+t)+c_4(1+2t) = t^3$$

Identifiering:

$$\left.\begin{aligned} t^0 &: c_1+c_2+c_3+c_4=0 \\ t^1 &: c_3+2c_4=0 \\ t^2 &: c_2=0 \\ t^3 &: c_1=1 \end{aligned}\right\} \quad \therefore\ c_1=1,\ c_2=0 \quad \begin{cases} c_3+c_4=-1 \\ c_3+2c_4=0 \end{cases} \quad \therefore\ c_4=1,\ c_3=-2$$

$$\therefore\ [t^3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$1(1+t^3)+0(1+t^2)-2(1+t)+1(1+2t) =$$

$$= \cancel{1}+t^3-\cancel{2}-\cancel{2t}+\cancel{1}+\cancel{2t} = t^3$$ ok

3. $x^2-4xy+y^2=1$; PÅ MATRISFORM

$$[x\ y]\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=1 ; \quad \bar{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$$

$\therefore\ \bar{x}^TA\bar{x}=1$

BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER FÖR A.

KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I)=0 \iff \begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\iff (1-\lambda)^2-4=0 \iff (1-\lambda)^2=4 \iff \lambda=1\pm 2$

$\iff \lambda=3;-1$ ⌈KOLL: $3+(-1)=2$, $\operatorname{tr}A=1+1=2$

$3(-1)=-3$, $\det A=1-4=-3$ ok ⌋

$\therefore$ DET BLIR EN HYPERBEL.

EGENVEKTORER:

$\lambda=3$: $A\bar{v}=3\bar{v} \iff (A-3I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-2&-2&0\\-2&-2&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right] \quad \therefore\ \bar{v}=t\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

VÄLJ $\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$\lambda=-1$: $A\bar{v}=-1\bar{v} \iff (A+I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&-2&0\\-2&2&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right] \quad \therefore\ \bar{v}=t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

VÄLJ $\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

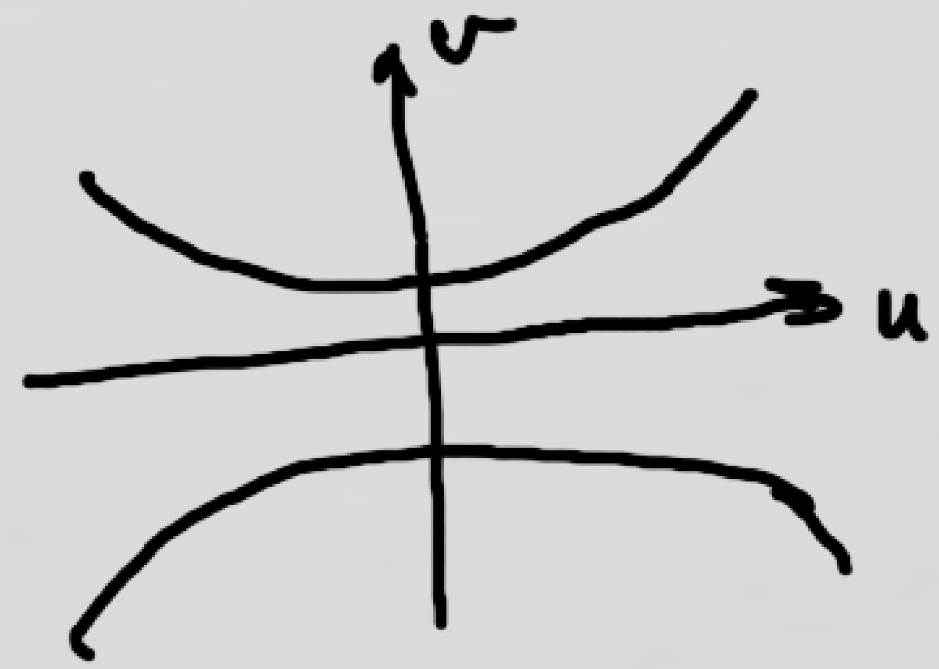
$\therefore\ A=PDP^{-1}=PDP^T$

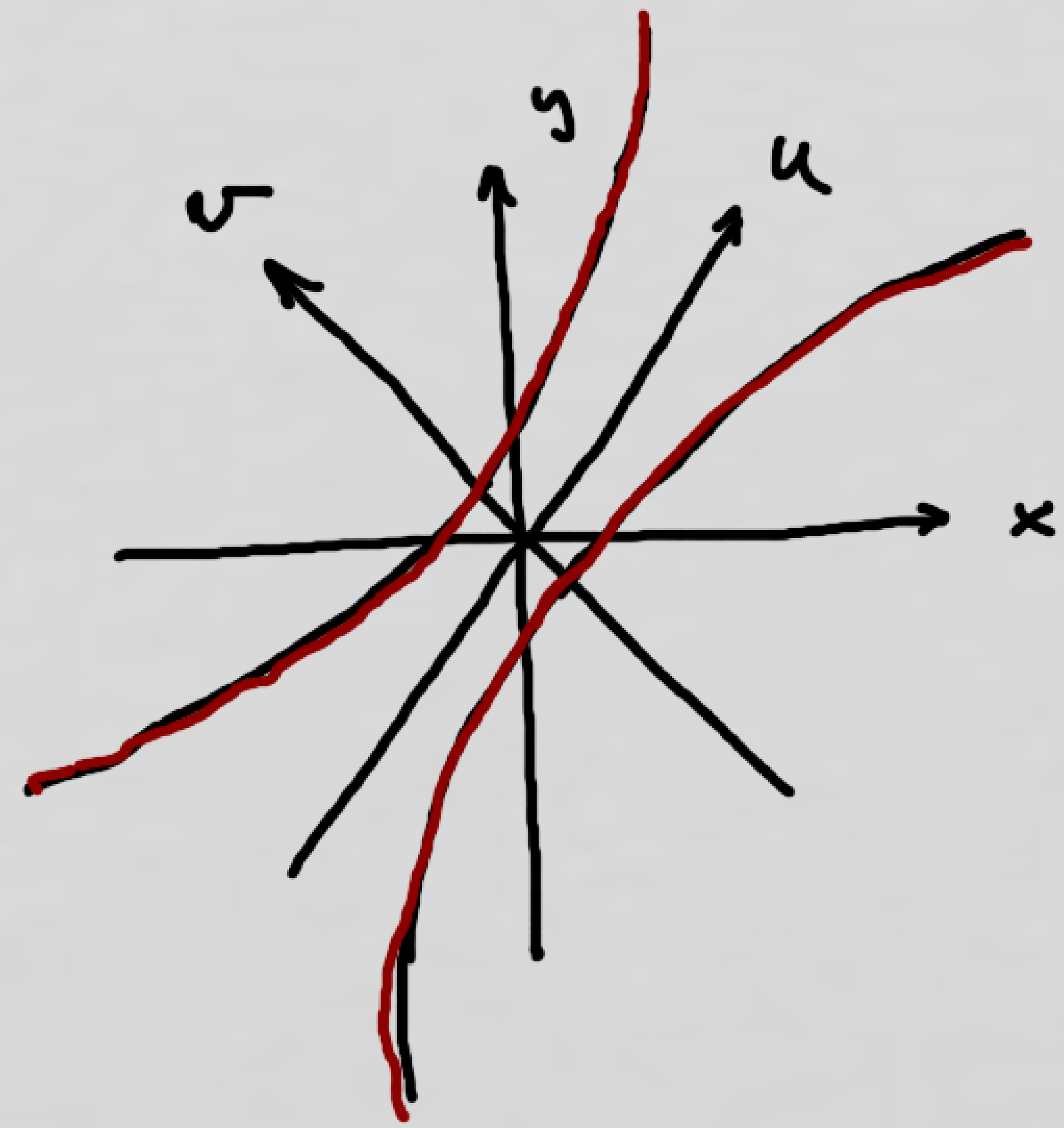
MED $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$

OCH $\bar{x}^TA\bar{x}=1 \iff \bar{u}^TD\bar{u}=1$

MED $\bar{u}=P\bar{x}$ DÅ $\bar{u}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ BLIR NU

$\bar{x}^TA\bar{x}=1 \iff \bar{u}^TD\bar{u}=1 \iff -u^2+3v^2=1$





4. $\mathbb{P}_2$

$$\langle p,q\rangle = 2p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1)$$

a) $\langle 1-t,\, 2-t^2\rangle = 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 1 = 6$

$\|1+t^2\|^2 = \langle 1+t^2,\, 1+t^2\rangle = 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 = 17$

$\therefore \|1+t^2\| = \sqrt{17}$

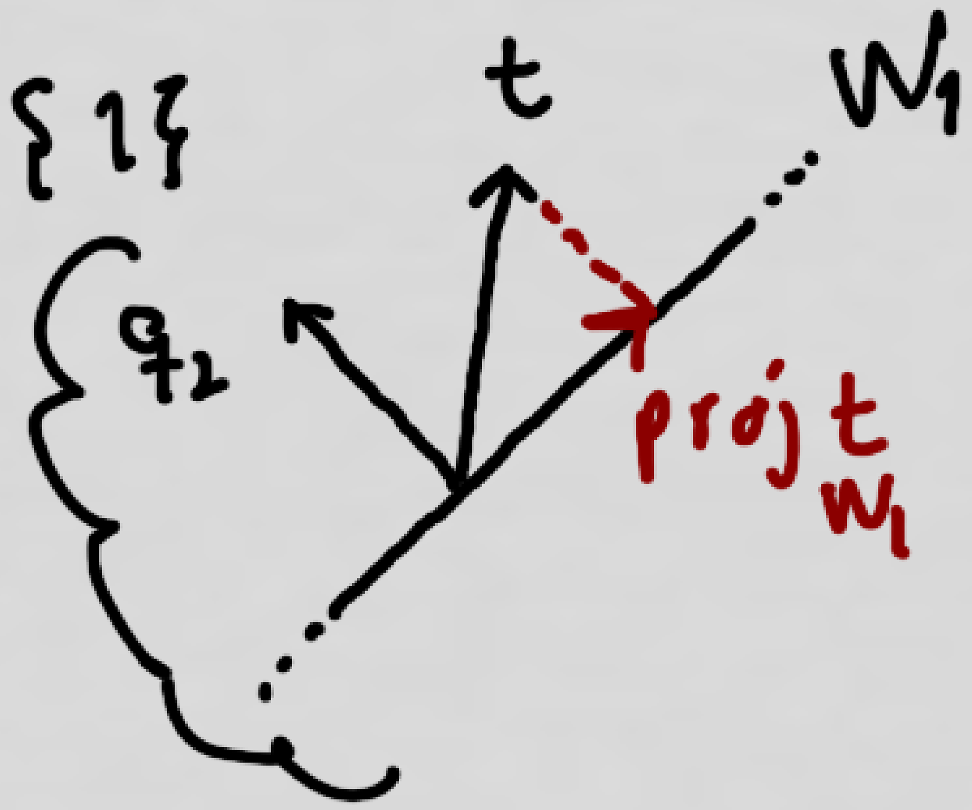
$\text{dist}(2t-1,\, t^2+2t)^2 = \|2t-1-(t^2+2t)\|^2$

$= \|-1-t^2\|^2 = \|1+t^2\|^2 = 17$

$\therefore \text{dist}(2t-1,\, t^2+2t) = \sqrt{17}$

b) EN BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, t\}$. APPLICERA GRAM-SCHMIDT PÅ DENNA.

1° $q_1(t) = 1$, $W_1 = \text{Span}\{1\}$



2° $q_2(t) = t - \text{proj}_{W_1} t$

$= t - \dfrac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = t$

$\therefore$ EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, t\}$

$\langle t,1\rangle = 2\cdot(-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 = 0$

$\therefore$ VAR REDAN ORTOGONALA

5. $y'' - 2y' + 10y = 3\cos 3x$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOMOGEN: KAR. EKV.: $r^2 - 2r + 10 = 0$

$\Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i$

$\therefore y_h = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x)$

PARTIKULÄR: ANSATS $y_p = a\cos 3x + b\sin 3x$

$y_p' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x$

$y_p'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$

IN I EKV.:

$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x - 2(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x)$

$+ 10(a\cos 3x + b\sin 3x) = 3\cos 3x$

IDENTIFIERING:

$$\left.\begin{aligned} \cos: &\ -9a - 6b + 10a = 3 \\ \sin: &\ -9b + 6a + 10b = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a - 6b &= 3 \\ 6a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 6a - 36b &= 18 \\ 6a + b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\therefore 37b = -18 \Leftrightarrow b = -\frac{18}{37}$

$a = 3 + 6b = \frac{111-108}{37} = \frac{3}{37}$

$\therefore y_p = \frac{3}{37}\cos 3x - \frac{18}{37}\sin 3x$

$\therefore y = y_h + y_p =$

$= e^x(A\cos 3x + B\sin 3x) + \frac{3}{37}\cos 3x - \frac{18}{37}\sin 3x$

6. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + 2x^3$

DET ÄR EN EULEREKVATION.

VARIABELBYTET: $x = e^t$, $y(x) = y(e^t) = z(t)$

GER $xy' = z'$ & $x^2y'' = z'' - z'$.

EKVATIONEN BLIR NU: $z'' - z - 3z' + 4z = e^t + 2e^{3t}$

$\Leftrightarrow$ $z'' - 4z' + 4z = e^t + 2e^{3t}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOMOGEN KAR. EKV.: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$ MULT. 2

$\therefore$ $z_h = Ae^{2t} + Bte^{2t}$

PARTIKULÄR DELA UPP I TVÅ DELAR, EN FÖR e^t OCH EN FÖR $2e^{3t}$

I: ANSATS: $z_p = ae^t$, $z'_{p_1} = ae^t$, $z''_{p_1} = ae^t$

IN I EKV. $ae^t - 4ae^t + 4ae^t = e^t \Leftrightarrow a = 1$

$\therefore$ $z_{p_1} = e^t$

II: ANSATS $z_{p_2} = ae^{3t}$, $z'_{p_2} = 3ae^{3t}$

$z''_{p_2} = 9ae^{3t}$. IN I EKV.:

$9ae^{3t} - 4 \cdot 3ae^{3t} + 4ae^{3t} = 2e^{3t} \hookrightarrow$

$9a - 12a + 4a = 2 \Leftrightarrow a = 2$

$\therefore$ $z_{p_2} = 2e^{3t}$

$\therefore$ $z_p = e^t + 2e^{3t}$

$\therefore$ $z = z_h + z_p = Ae^{2t} + Bte^{2t} + e^t + 2e^{3t}$

$\therefore$ $y = Ax^2 + Bx^2\ln x + x + 2x^3$

7. a) T ÄR EN FUNKTION FRÅN V TILL W
SÅ ATT (A) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$
(H) $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$

b) VISA FÖRST ATT $T(\bar{0}) = \bar{0}$.
$T(\bar{0}) = T(0\bar{0}) = 0T(\bar{0}) = \bar{0}$ OK

i. Ker T:
- $\bar{0} \in \ker T$: $T(\bar{0}) = \bar{0}$ $\therefore \bar{0} \in \ker T$
- $\bar{u}, \bar{v} \in \ker T$; VISA $\bar{u}+\bar{v} \in \ker T$

$T(\bar{u}+\bar{v}) = \underbrace{T(\bar{u})}_{=\bar{0}} + \underbrace{T(\bar{v})}_{=\bar{0}} = \bar{0}+\bar{0} = \bar{0}$ $\therefore \bar{u}+\bar{v} \in \ker T$
TY $\bar{u} \in \ker T$ TY $\bar{v} \in \ker T$

- $\bar{u} \in \ker T$; VISA $c\bar{u} \in \ker T$

$T(c\bar{u}) = cT(\bar{u}) = c\bar{0} = \bar{0}$ $\therefore c\bar{u} \in \ker T$

$\therefore$ Ker T ÄR ETT UNDERRUM TILL V.

ii. Ran T:
- $\bar{0} \in \operatorname{Ran} T$: $T(\bar{0}) = \bar{0}$ $\therefore \bar{0} \in \operatorname{Ran} T$
- $\bar{u}, \bar{v} \in \operatorname{Ran} T$ VISA $\bar{u}+\bar{v} \in \operatorname{Ran} T$

$\bar{u}, \bar{v} \in \operatorname{Ran} T$ BETYDER ATT DET FINNS $\bar{w}, \bar{z}$ I V SÅ ATT
$T(\bar{w}) = \bar{u}$ OCH $T(\bar{z}) = \bar{v}$

MAN FÅR NU:
$T(\bar{w}+\bar{z}) = T(\bar{w}) + T(\bar{z}) = \bar{u}+\bar{v}$
$\therefore \bar{u}+\bar{v} \in \operatorname{Ran} T$

- $\bar{u} \in \operatorname{Ran} T$ VISA $c\bar{u} \in \operatorname{Ran} T$

LÅT $\bar{w}$ VARA SÅ ATT $T(\bar{w}) = \bar{u}$

MAN FÅR NU:
$T(c\bar{w}) = cT(\bar{w}) = c\bar{u}$
$\therefore c\bar{u} \in \operatorname{Ran} T$

$\therefore$ Ran T ÄR ETT UNDERRUM TILL W.