Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-08-17**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

> *Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009**   Antal exemplar:**270**   Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Det gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   (a) Bevisa formeln ovan, exempelvis med induktion. (4p)

   (b) Vad går summan

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$$

   mot när n går mot oändligheten? (1p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$$
   (1p)

   (b)
   $$\lim_{t \to 0+} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}}$$
   (2p)

   (c)
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(e^{2x} + e^{3x}\right)}{e^{\ln(2x) + \ln(3x)}}$$
   (2p)

3. Antag $x > 0$.

   (a) Visa olikheten

   $$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

   Ledning: Olikheten kan vara enklare att bevisa med variabelbytet $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$. (2p)

   (b) På liknande sätt kan man visa (behövs ej) olikheten

   $$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

   Utnyttja denna olikhet tillsammans med olikheten i uppgift 4. (a) för att beräkna

   $$\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
   (2p)

   (c) Beräkna gränsvärdet

   $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$
   (1p)

4. Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

som går genom punkten $(1, -1)$. (5p)

5. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = x^2 - 8|x| + 15, \quad -7 \leq x \leq 6.$$

(a) Hitta alla lokala extremvärden till funktionen ovan. (3p)

(b) Ange funktionens värdemängd. (1p)

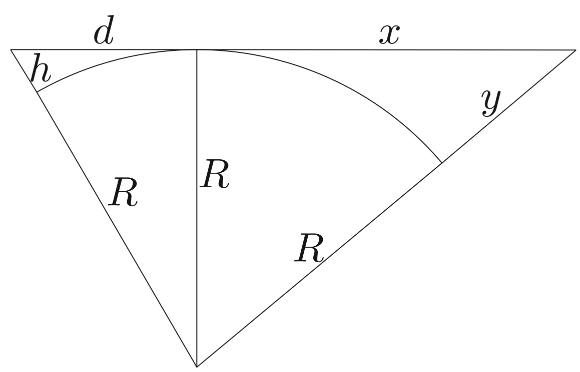
(c) **(M0047M):** Beskriv med MATLAB-kommandon/kod hur vi kan finna globala extremvärden av denna funktion på intervallet $[-7, 6]$. (1p)

(c) **(M0029M/M0057M):** Beräkna $f'(-2)$ med derivatans definition. (1p)

6. Horisonten är den linje i synfältet där markytan och himlen möts, dvs den mest avlägsna punkten på markytan som man kan se. Om betraktarens ögon befinner sig på höjden h ges sambandet med avståndet d till horisonten implicit av ekvationen

$$d^2 = 2Rh + h^2,$$

där R är jordens radie, se nedanstående figur.



Ett typiskt värde på d för en 2 m lång person som står vid havsnivå är $d = 5$ km. På motsvarande sätt kommer den personen att kunna se ett föremål som sticker upp y över havsytan på avståndet $d + x$, där

$$x^2 = 2Ry + y^2$$

(a) Antag $y = y(x)$. Beräkna $y(0)$, $y'(0)$ och $y''(0)$. (2p)

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(x)$ av ordning 2 kring $x = 0$ till funktionen $y = y(x)$. Felterm behöver ej beräknas. (2p)

(c) Antag att man skulle besluta sig för att sätta upp en skog av 330 meter höga vindkraftverk ute till havs, låt oss säga $x + d = 53$ km utanför Sandhamn i Stockholms skärgård. Använd $R = 6400$ km för jordradien, $d = 5$ km och Taylorpolynomet i uppgift (b) för att beräkna om vindkraftverken kommer att synas över horisonten när man tittar ut mot havet från Sandhamn. (1p)