LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Lösningsskisser övningstentamen 2; M0049M

1.

a) Ekvationen är binomisk, $z^3 = -8i$. Skriv om högerledet på polär form, $z^3 = 8e^{i3\pi/2}$. Ansätt $z = re^{i\varphi}$, och det följer $z^3 = r^3 e^{i3\varphi}$. Sätt in i ekvationen och identifiera belopp och argument. Man får $r = 2$ och $\varphi = \pi/2 + 2\pi k/3$. Lösningarna på polär form är $z_k = 2e^{i(\pi/2+2\pi k/3)}$, $k = 0, 1, 2$. På rektangulär form:

$$z_0 = 2e^{i\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$z_1 = 2e^{i7\pi/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2e^{i11\pi/3} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i,$$

b) En enkel räkning ger (först multiplikation med $-i$ sedan multiplikation med nämnarens konjugat)

$$\frac{iz-1}{iz+1} = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2} = \frac{|z|^2 + i(z+\bar{z}) - 1}{|z-i|^2}.$$

Detta blir rent imaginärt då $|z| = 1$ ty $z + \bar{z}$ är reellt (men $z \neq i$ annars noll i nämnaren).

2. Eftersom dimensionen för $\mathbb{P}_3$ är fyra och vi har fyra element så räcker det att visa att de är linjärt oberoende (spänner upp följer per automatik). Låt $c_1(1+t^3) + c_2(1+t^2) + c_3(1+t) + c_4(1+2t) = 0$ (för alla t) och det följer att

$$\begin{cases} t^0: & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ t^1: & c_3 + 2c_4 = 0 \\ t^2: & c_2 = 0 \\ t^3: & c_1 = 0. \end{cases}$$

Eftersom $c_1 = c_2 = 0$ ger differensen mellan de två första ekvationerna att $c_4 = 0$ och då blir även $c_3 = 0$. De är m.a.o. linjärt oberoende och därmed en bas (ty rätt antal element).
Bestäm c_i så att $c_1(1+t^3) + c_2(1+t^2) + c_3(1+t) + c_4(1+2t) = t^3$. Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} t^0: & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ t^1: & c_3 + 2c_4 = 0 \\ t^2: & c_2 = 0 \\ t^3: & c_1 = 1. \end{cases}$$

Så $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$ och $c_4 = 1$ d.v.s. $[t^3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

3. Den kvadratiska formen kan skrivas

$$Q(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

och vi kallar matrisen A. Enligt teorin ges svaret på frågorna av egenvärden och egenvektorer för A. Egenvärden: lös $\det(A - \lambda I) = 0$. Determinanten kan beräknas så här (i den andra likheten har första raden lagts till till den andra för att få en nolla)

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \left(-1 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right) \\
&= (1-\lambda) \left(8 - 4\lambda - 4 + 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 \right) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10).
\end{aligned}$$

Egenvärdena är $\lambda = 1$ mult. 2 och $\lambda = 10$ (kontroll: $1 + 1 + 10 = 12$, $\mathrm{tr}A = 5 + 5 + 2 = 12$ ok). Det minsta egenvärdet är det minsta värdet, så 1. Egenvektorer för egenvärdet $\lambda = 1:$ lös $A\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ vilket är $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Gausseliminering av den utökade koefficientmatrisen ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Två linjärt oberoende egenvektorer är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Minimat antas i punkter med på avstånd ett från origo och som ligger på planet dessa egenvektorer spänner upp. Exempelvis i, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\pm(1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5})$ och $\pm(2/3, 1/3, 2/3)$.

4. För att bestämma projektionen måste man ha en ortogonal bas för H. Mängden $\{1, t^2\}$ är linjärt oberoende ($c_1 1 + c_2 t^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$) så de är en bas för det de spänner upp, det vill säga H. Applicera Gram-Schmidt på denna bas. Först välj $q_1(t) = 1$ och $W_1 = \text{span}\{1\}$. Sedan, låt

$$\begin{aligned} q_2(t) &= t^2 - \text{proj}_{W_1}(t^2) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 \\ &= t^2 - \frac{1}{3}1 = \frac{1}{3}\left(3t^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Välj $q_2' = 3q_2$. En ortogonal bas för H är $\{1, 3t^2 - 1\}$. Bestäm nu projektionen,

$$\begin{aligned} \text{proj}_H t &= \frac{\langle 1, t\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 + \frac{\langle 3t^2 - 1, t\rangle}{\langle 3t^2 - 1, 3t^2 - 1\rangle}(3t^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1/4}{4/5}(-2 - 2t + 5t^2) = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(3t^2 - 1) \\ &= \frac{1}{16}\left(8 + 15t^2 - 5\right) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}t^2. \end{aligned}$$

5.

a) Ekvationen är separabel och lösningen ges av

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

som är ekvivalent med $\arctan y = \ln|x| + C$, så $y = \tan(\ln|x| + C)$. Men $y(e) = 1$ ger $1 = \tan(\ln e + C)$ så $C = \pi/4 - 1$. Lösningen ges således av $y = \tan(\ln x + \pi/4 - 1)$ (lösningen är definierad i intervallet $e^{1-3\pi/4} < x < e^{1+\pi/4}$).

b) Ekvationen är linjär så angrip den med en integrerande faktor. Dela med x och man får $y' - 2y/x = x^2 \sin x$. En integrerande faktor är $1/x^2$ ($e^{-2\ln|x|}$). Förläng ekvationen med denna och man får

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \sin x$$

som är ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \sin x.$$

Tag primitiv funktion och man får $y = -x^2\cos x + Cx^2$. Begynnelsevärdet ger $1 = 0 + C\pi^2/4$ så lösningen är $y = 4x^2/\pi^2 - x^2\cos x$.

6. Homogenlösning: kar. ekv. $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ vilken, via binomialsatsen, är $(r+1)^3 = 0$ och som har $r = -1$ som rot med multiplicitet tre. Den allmänna homogenlösningen är således

$$y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x}.$$

Partikulärlösning: högerledet består av två bitar vilka man behandlar separat. En ansats, för HL=$4e^{-x}$, är $y_{p_1} = z(x)e^{-x}$. Derivering ger $y'_{p_1} = z'e^{-x} - ze^{-x}$, $y''_{p_1} = z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}$ och $y'''_{p_1} = z'''e^{-x} - 3z''e^{-x} + 3z'e^{-x} - ze^{-x}$. Då detta sätts in i ekvationen fås

$$z'''e^{-x} - 3z''e^{-x} + 3z'e^{-x} - ze^{-x} + 3\left(z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}\right)$$
$$+3\left(z'e^{-x} - ze^{-x}\right) + ze^{-x} = 4e^{-x},$$

vilken förenklas till $z''' = 4$. En lösning till denna ses direkt: $z = 2x^3/3$ så $y_{p_1} = 2x^3e^{-x}/3$. En ansats, för HL=x, är $z = ax + b$ vilken insatt i ekvationen leder till

$$3a + ax + b = x.$$

Identifiering ger $a = 1$ och $b = -3$ och det följer att $y_{p_2} = x - 3$. Lösningen är

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x} + \frac{2}{3}x^3e^{-x} + x - 3.$$

7.

a) En vektor $\mathbf{v}$ är en egenvektor för A om den är nollskiljd och om det finns en skalär λ sådan att

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Talet λ är det tillhörande egenvärdet.

b) Antag $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och visa att $c = d = 0$. Multiplicera med A från vänster och utnyttja att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer (med egenvärdena vara λ respektive μ). Man får

$$\mathbf{0} = A(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\lambda\mathbf{u} + d\mu\mathbf{v}.$$

Denna ekvationen minus λ gånger den första ger $\mathbf{0} = d(\mu - \lambda)\mathbf{v}$. Eftersom egenvärdena är olika, $\mu \neq \lambda$, och $\mathbf{v}$ är en egenvektor (nollskiljd) följer det att $d = 0$. Om $d = 0$ följer det från den första ekvationen att även $c = 0$.