LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET

Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-10-26**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **580** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Kalkylator EJ tillåten. Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bestäm koefficienten för x^8-termen i binomialutvecklingen av

$$\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^9.$$

(3p)

(b) Vid ett möte deltog nio personer. Innan mötet skakade alla personer hand med varandra en gång. Hur många handskakningar utfördes totalt innan mötet? (2p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{4x^8+9x^6}-6x^3\sin x}{5x^7e^{-x}-2x^4}\right).$$

(2p)

3. Finn alla normallinjer till kurvan

$$y = f(x) = x^2 - 2x$$

som går genom punkten $Q = \left(1, \frac{7}{2}\right)$. (5p)

4. Låt

$$f(x) = \sqrt{3x+13} - \sqrt{3x-3}, \; x \in [1, \infty).$$

(a) Visa att f är injektiv (dvs ett-till-ett). (2p)

(b) Finn värdemängd $R(f)$ för f. (1p)

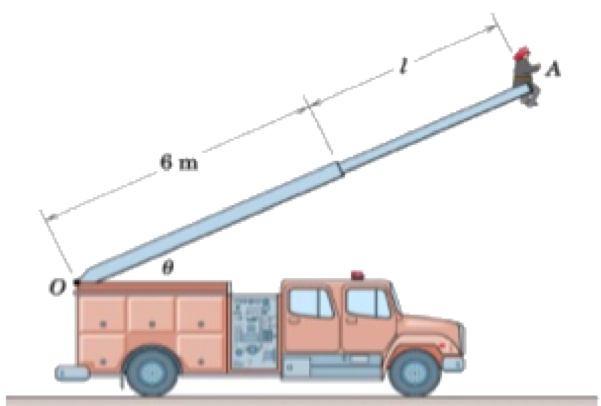
(c) Finn invers funktion f^{-1} till f. (2p)

5. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4x + 4}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd $R(f)$. Skissera kurvan. (5p)

6. Nederdelen av en stege på en brandbil är fäst på ovansidan av bilen på en höjd 3 meter över marken. Stegen reses genom att öka vinkeln θ samtidigt som man förlänger stegens längd från 6 m med l, se nedanstående figur.



Längst ut på stegen sitter en brandman. Hur fort ökar brandmannens höjd y över marken vid den tidpunkt när stegen förlängts med $l = 2$ m och längden ökar med en hastighet av $\frac{1}{5}$m/s samtidigt som vinkeln är $\theta = \frac{\pi}{6}$ och ökar med vinkelhastigheten

$$\omega = \frac{1}{14} \text{ rad/s?}$$

(5p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2},\ a_k = a_{k-1} + d.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n,\ r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1},\ r \neq 1. \end{cases}$$

2. Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

3. Trigonometri

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t,$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right],$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists R)\left[x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right].$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned}(f \text{ är 1-1}) \quad &\Leftrightarrow \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \; x_1, x_2 \in D(f), \\ y \quad &= \quad f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är 1-1.}\end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)}, \; f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

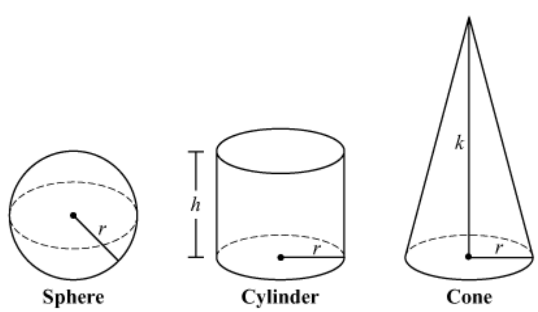
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\ E_n(x) \quad &= \quad \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x), \; s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| \quad &\leq \quad M, \; \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.\end{aligned}$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$