



Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-10-28**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-493092

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5**.

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per Lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU* – *Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU* – *Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **650** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att summan

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2n+4}{2^n}.$$

(3p)

- (b) Bestäm koefficienten för x^3 -termen i binomialutvecklingen av

$$\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5.$$

(2p)

2. Avgör huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^5 - 1}{h}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\sqrt{n}}.$$

(2p)

3. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att f är 1-1 (injektiv). (2p)

(b) Finn inversen $f^{-1}(x)$. (2p)

(c) Bestäm inversens definitionsmängd. (1p)

4. Antag att $y = y(x)$ är en implicit definierad funktion som uppfyller

$$x^2 + 2y^2 = 6.$$

- (a) Finn y' och y'' uttryckta i x och y . (3p)
- (b) Finn taylorpolynomet $P_2(x)$ av ordning 2 till y genom punkten $(2, 1)$. (2p)

5. Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{x^2+1}.$$

Ställ upp teckenschema över derivatan och skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande. Konvexitet behöver ej beaktas.

Anmärkning: Man kan ha hjälp av $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 2x + 7)$. (5p)

6. Editor Persson behöver er hjälp att konstruera en låda till alla artiklar folk skrivit åt honom. Till ert förfogande har ni en pappskiva med måtten 6 dm \times 16 dm. Lådan ska alltså konstrueras genom att klippa lika stora kvadrater i de fyra hörnen och sedan vika upp flikarna till sidor. Hur stor blir största möjliga volym av en sådan låda? (5p)