LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M, M0031M och M0059M

Tentamensdatum: **2023-12-20**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.
Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28. Skrivtid: 5 timmar.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^4 = -\sqrt{3} + 3i$. Ge svaret på polär form.

b) Bestäm det reella talet a så att $(3-i)/(1-ai)$ blir rent imaginärt. (4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{1-t, 2-t^2, t-2t^2\}$.

a) Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

b) Bestäm koordinaterna för $p(t) = 1 - t - t^2$ relativt $\mathcal{B}$. (4 p)

3. Låt $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 8xz$. Bestäm det största och minsta värde $Q(x, y, z)$ kan få då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ge även exempel på punkter där det maximala respektive minimala värdet antas. (4 p)

4. Betrakta matrisen A och vektorn $\mathbf{x}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det gäller att $\mathbf{x}$ inte ligger i kolonnrummet för A, bevisa det. Bestäm α och β så att följande fel blir minimalt:

$$\left\| \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|.$$

Vad blir felet och vad blir α och β? (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + 4xy = xe^{x-2x^2}$, $y(0) = 1$,

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y^2y' = x + xy^3$, $y(0) = 1$. (4 p)

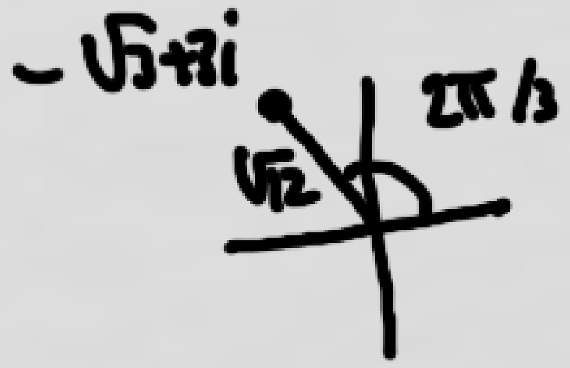
6. Bestäm samtliga lösningar till $x^2y'' + 4xy' - 4y = x^3, x > 0$. (4 p)

7.

a) Låt A vara en matris. Ge definitioner för Col$A$, Row$A$, Nul$A$ och rank$A$.

b) Bevisa $(\text{Col}A)^\perp = \text{Nul}(A^T)$. Ledning: Bevisa först ett motsvarande resultat för radrummet. (4 p)

Lösningsförslag M0049M, 23-12-20



1\. a) $z^4 = -\sqrt{3}+3i = \sqrt{12}\,e^{2\pi i/3}$

ANSÄTT: $z = re^{i\varphi}$, D-M: $z^4 = r^4 e^{i4\varphi}$

OCH VI FÅR: $r^4 e^{i4\varphi} = \sqrt{12}\,e^{2\pi i/3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r^4 = \sqrt{12} \\ 4\varphi = 2\pi/3 + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r = 12^{1/8} \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \end{array}$$

$$\therefore\ \underline{\underline{z_k = 12^{1/8} e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)},\quad k = 0,1,2,3.}}$$

b) $a \in \mathbb{R}$; $\dfrac{3-i}{1-ai} = \dfrac{(3-i)(1+ai)}{1+a^2} =$

$= \dfrac{3+3ai-i+a}{1+a^2}$. RENT IMAGINÄR DÅ REALDELEN ÄR NOLL, DVS $3+a=0 \therefore \underline{\underline{a=-3}}$

2. $B = \{1-t, 2-t^2, t-2t^2\}$

a) $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ TY $\{1, t, t^2\}$ EN BAS.

B HAR SÅLEDES RÄTT ANTAL ELEMENT OCH DÅ VET VI ENLIGT BASSATSEN ATT B ÄR EN BAS OM DEN ÄR LINJÄRT OBEROENDE (SPÄNNA UPP FÅS PÅ KÖPET).

VISA L.O.:

ANTAG $c_1(1-t)+c_2(2-t^2)+c_3(t-2t^2) = \bar{0} = 0$

0 funk t

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} t^0&: c_1+2c_2=0 \\ t^1&: -c_1+c_3=0 \\ t^2&: -c_2-2c_3=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$ $\therefore c_1=c_2=c_3=0 \therefore$ L.O.

$\therefore$ EN BAS //

b) BESTÄM c_1, c_2, c_3 SÅ ATT

$c_1(1-t)+c_2(2-t^2)+c_3(t-2t^2) = 1-t-t^2$

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} t^0&: c_1+2c_2=1 \\ t^1&: -c_1+c_3=-1 \\ t^2&: -c_2-2c_3=-1 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

$\therefore c_3 = 2/3;\ c_2 = -(-1+2c_3) = -1/3$

$c_1 = 1-2(-\frac{1}{3}) = 5/3$

$\therefore [1-t-t^2]_B = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ //

KONTROLL: $\frac{5}{3}(1-t)-\frac{1}{3}(2-t^2)+\frac{2}{3}(t-2t^2)$

$= 1-t-t^2$ ok.

3. $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 8xz$

$$= [x \ y \ z] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

BESTÄM EGENVÄRDEN/VEKTORER FÖR A.

• KAR.EKV.: $\det(A-\lambda I) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -(1+\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 16\right) = 0$$

$$\lambda = -1, \ (\lambda-2)^2 = 16 \iff \lambda - 2 = \pm 4 \iff \lambda = 6; -2$$

$\therefore -1, -2, 6$ [KOLL: $-1-2+6=3$
$\text{tr} A = 2-1+2 = 3$ ok]

$\therefore$ STÖRSTA VÄRDE: 6
MINSTA VÄRDE: -2

EXTREMVÄRDENA ANTAS I EGENRIKTNINGARNA

$\lambda = 6$: $A\bar{v} = 6\bar{v} \iff (A-6I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1, x_2 BUNDNA
x_3 FRI.
$x_3 = t, x_2 = 0, x_1 = 1$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore 6$ | $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lambda = -2$: $A\bar{v} = -2\bar{v} \iff (A+2I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1, x_2 BUNDNA
x_3 FRI $x_3 = t$
$x_2 = 0, x_1 = -t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore -2$ | $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

[KONTROLL: $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+1+4 = 6$
$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+1-4 = -2$]

4. VISA ATT $\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$

SAKNAR LÖSNING.

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\\3 & 1 & 2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 4 & 2\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2\end{array}\right] \leftarrow$$ LÖSNING SAKNAS //

BESTÄM NU MINSTAKVADRATLÖSNING

FÖR EKVATIONEN.

N-E: $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix}14 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}14 & 2 & 10\\2 & 2 & 2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\7 & 1 & 5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\0 & -6 & -2\end{array}\right]$$

$\therefore\ \beta=\frac{1}{3},\ \alpha=\frac{2}{3}$

$$\left\|\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\right\| =$$

$$\left\|\begin{bmatrix}1/3\\-2/3\\1/3\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\therefore$ MINSTA VÄRDE $\sqrt{6}/3$ DÅ $\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=\frac{1}{3}$

5. a) $y' + 4xy = xe^{x-2x^2} \iff$

IF: $\int 4x\,dx = 2x^2 + C$

Now $\text{IF} = e^{2x^2}$

$$e^{2x^2}y' + 4xe^{2x^2}y = xe^{x} \iff$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x^2}y\right) = xe^{x} \iff$$

$$e^{2x^2}y = \int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x} + c$$

$$\therefore y = (x-1)e^{x-2x^2} + ce^{-2x^2}$$

MEN, $y(0) = 1$: $1 = -1 + c \therefore c = 2$

$$\therefore y = (x-1)e^{x-2x^2} + 2e^{-2x^2}$$

b) $y^2y' = x + xy^3 \iff y^2y' = x(1+y^3) \iff$

$$\frac{y^2}{1+y^3}y' = x \iff \frac{y^2}{1+y^3}\frac{dy}{dx} = x \iff$$

$$\int \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = \int x\,dx \iff \frac{1}{3}\ln|1+y^3| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\iff \ln|1+y^3| = \frac{3}{2}x^2 + C \iff$$

$$|1+y^3| = Ae^{\frac{3}{2}x^2} \therefore y^3 = Be^{\frac{3}{2}x^2} - 1$$

DVS $y = \left(Be^{\frac{3}{2}x^2} - 1\right)^{1/3}$

MEN, $y(0) = 1$: $1 = (B-1)^{1/3} \therefore B = 2$

$$\therefore y = \left(2e^{\frac{3}{2}x^2} - 1\right)^{1/3}$$

6. $x^2y'' + 4xy' - 4y = x^3,\ x>0$

SÄTT $x = e^t,\ y(x) = z(t)$ OCH MAN FÅR: $z' = xy'$ & $z'' - z' = x^2y''$.

$\therefore\ z'' - z' + 4z' - 4z = e^{3t} \Leftrightarrow$

$z'' + 3z' - 4z = e^{3t}$

"HOM. + PART."

<u>HOM.</u>: KAR. EKV.: $r^2 + 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = 1; -4$

$\therefore\ z_h(t) = Ae^t + Be^{-4t}$

<u>PART.</u>: ANSATS: $z_p = ae^{3t}$

$z' = 3ae^{3t},\ z'' = 9ae^{3t}$. IN I EKV.:

$9ae^{3t} + 3\cdot 3ae^{3t} - 4ae^{3t} = e^{3t} \Leftrightarrow$

$14a = 1 \Leftrightarrow a = 1/14$

$\therefore\ z_p = \frac{1}{14}e^{3t}$

$\therefore\ z = z_h + z_p = Ae^t + Be^{-4t} + \frac{1}{14}e^{3t}$

$\therefore\ y = Ax + \frac{B}{x^4} + \frac{1}{14}x^3$

7. a) $A = [\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \; \dots \; \bar{a}_n] = \begin{bmatrix} - b_1 - \\ \vdots \\ - b_m - \end{bmatrix}$

- $\text{Col}\, A = \text{Span}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\} = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^m : \bar{y} = A\bar{x} \text{ NÅGOT } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \}$
- $\text{Row}\, A = \text{Col}\, A^T = \text{Span}\{ b_1^T, b_2^T, \dots, b_m^T \}$
- $\text{Nul}\, A = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = 0 \}$
- $\text{rank}\, A = \dim \text{Col}\, A$

b) $(\text{Col}\, A)^\perp = \text{Nul}(A^T) \iff (\text{Row}\, B)^\perp = \text{Nul}\, B$

$\bar{x} \in (\text{Row}\, B)^\perp \iff \bar{x} \perp$ ALLA RADER I $B \iff$

$B\bar{x} = \bar{0} \iff x \in \text{Nul}\, B$