Lösningsskisser för repetitionsuppgifterna; M0049M

1. Faktorer hänger ihop med nollställen. Lös $z^4 = -16 = 16e^{i\pi}$, låt $z = re^{i\varphi}$ och det följer $z^4 = r^4 e^{i4\varphi}$. Så $r^4 = 16$ och $4\varphi = \pi + 2\pi k$. Nollställena är $z_k = 2e^{i(\pi/4+\pi k/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$. En faktorisering är
$$z^4 + 16 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$
Skriv om nollställena på rektangulär form och man ser $z_0 = \bar{z}_3$ och $z_1 = \bar{z}_2$. Det följer att $(z - z_0)(z - z_3) = z^2 - 2\sqrt{2}z + 4$ och $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + 2\sqrt{2}z + 4$ så
$$z^4 + 16 = \left(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4\right)\left(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4\right).$$

2. Eftersom $z = 1 + i$ är en rot så går det, enligt faktorsatsen, att bryta ut $z - 1 - i$. Den andra faktorn fås via polynomdivision.
$$\begin{array}{r|ccccccc}
 & z^2 & + & (2-4i)z & - & 6 & & \\ \hline
z-1-i & z^3 & + & z^2(1-5i) & + & z(-12+2i) & + & 6+6i \\
 & z^3 & + & z^2(-1-i) & & & & \\ \cline{4-8}
 & & & (2-4i)z^2 & + & z(-12+2i) & + & 6+6i \\
 & & & (2-4i)z^2 & + & z(-6+2i) & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & -6z & + & 6+6i \\
 & & & & & -6z & + & 6+6i \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0
\end{array}$$
Ekvationen kan nu skrivas $(z - 1 - i)(z^2 + (2 - 4i)z - 6) = 0$ så kvar att lösa är $z^2 + (2 - 4i)z - 6 = 0$. Kvadratkomplettera och man får
$$w^2 = 3 - 4i,$$
då $w = z + 1 - 2i$. Ansätt $w = a + bi$ och det leder till systemet (identifierar real- och imaginärdelar)
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4. \end{cases}$$

Från den andra ekvationen fås $b = -2/a$ vilket insatt i den första ekvationen ger $a^2 - 4/a^2 = 3$. Denna sista ekvation är ekvivalent med $a = \pm 2$. Då $a = 2$ fås $b = -1$ och $z = 1+i$. Medan för $a = -2$ fås $b = 1$ och $z = -3+3i$. Rötterna är $1 + i$ mult. 2 och $-3 + 3i$.

3. Låt $w = (3 + i\sqrt{3})^5/(1 - i)^9$ och ekvationen kan skrivas $z^3 = w$. Det gäller, enligt räknelagar, $|w| = \sqrt{12}^5/\sqrt{2}^9 = 2^5 3^{5/2}/2^{9/2} = 9\sqrt{6}$ och $\arg(z) = 5\arg(3 + i\sqrt{3}) - 9\arg(1 - i) = 5 \cdot \pi/6 - 9(-\pi/4) = (10 + 27)\pi/12 = 2\pi + 13\pi/12$. Så $w = 9\sqrt{6}e^{i13\pi/12}$. Låt $z = re^{i\varphi}$ så $z^3 = r^3 e^{i3\varphi}$ och det följer $r = \sqrt[6]{486}$ och $\varphi_k = 13\pi/36 + 2\pi k/3$ så $z_k = \sqrt[6]{486}e^{i(13\pi/36+2\pi k/3)}$, $k = 0, 1, 2$.

4. Dividera med i och man får den ekvivalenta ekvationen

$$z^2 + (1 + i)z - 6 - 2i = 0.$$

Kvadratkomplettera och man får $(z + (1 + i)/2)^2 - (1 + i)^2/4 - 6 - 2i = 0$. Låt $w = z + (1 + i)/2$ och ekvationen kan skrivas som $w^2 = 6 + 5i/2$. Ansätt $w = a + bi$ och det följer $w^2 = a^2 + 2abi - b^2$ så $a^2 - b^2 = 6$ och $2ab = 5/2$. Lös ut b ur den andra ekvationen, $b = 5/4a$, och sätt in i den första och man får $a^2 - 25/16a^2 = 6$ vilket är det samma som $a^4 - 6a^2 - 25/16 = 0$. Detta är en andragradare i a^2 och man får $a^2 = 25/4$ d.v.s. $a = \pm 5/2$. För $a = 5/2$ fås $b = 1/2$ så $z = 5/2 + i/2 - 1/2 - i/2 = 2$ och för $a = -5/2$ fås $b = -i/2$ så $z = -5/2 - i/2 - 1/2 - i/2 = -3 - i$.

5. Ekvationen är reell så $3 + 3i$ är också en rot och det följer att polynomet i högerledet är delbart med $z^2 - 6z + 18$. Efter en polynomdivision så ser man att ekvationen är ekvivalent med $(z^2 - 6z + 18)(z^2 + 3) = 0$. De två återstående rötterna kommer från den andra faktorn och är $\pm\sqrt{3}i$.

6. Förläng med konjugatet och man får

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + 2i)^2(1 + ai)}{1 + a^2} = \frac{(-3 + 4i)(1 + ai)}{1 + a^2} \\ &= \frac{-3 - 4a + i(4 - 3a)}{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Det följer nu att z är rent imaginär om $-3 - 4a = 0$, det vill säga om $a = -3/4$. Beloppet är $5/\sqrt{1 + a^2}$, vilket enklast räknas ut så här

$$|z| = \left|\frac{(1 + 2i)^2}{1 - ai}\right| = \frac{|1 + 2i|^2}{|1 - ai|} = \frac{5}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

För att ett argument skall vara $7\pi/6$ skall kvoten mellan imaginärdelen och realdelen vara $1/\sqrt{3}$ och realdelen negativ (rita upp det komplexa talplanet). Så

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4 - 3a}{-3 - 4a}$$

vilket är ekvivalent med

$$a = \frac{4\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}-4}.$$

Eftersom detta a är positivt blir realdelen negativ.

7. Tredjegradspolynom har tre nollställen om man räkna med multiplicitet. Detta betyder att ett av nollställena har multiplicitet 2. Via faktorsatsen fås (a ett godtyckligt komplext tal)

$$a(z-1)^2(z+2) = az^3 - 3az + 2a$$

eller

$$a(z-1)(z+2)^2 = az^3 + 3az^2 - 4a.$$

8. Sikta på den geometriska tolkningen. Det gäller:

$$|(3+i)z-1| = \left|(3+i)\left(z - \frac{1}{3+i}\right)\right| = 10\left|z - \frac{3-i}{10}\right|.$$

Ekvationen beskriver således en cirkel i det komplexa talplanet med radie $1/5$ och medelpunkt $(3-i)/10$.

9.

a) Låt $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Beloppet av z, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ett argument av z, $\arg(z)$ är en vinkel φ sådan att $a = |z|\cos\varphi$ och $b = |z|\sin\varphi$ (odefinierat om $z = 0$). Märk argumentet är inte entydigt definierat, man kan lägga till och dra bort multipler av 2π. Exponentialfunktionen definieras så här: $e^{zx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$.

b) Att $z = w$ kan definieras på två olika sätt. Variant 1: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ och $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$, variant 2: $|z| = |w|$ och $\arg(z) = \arg(w) + 2\pi k$ något heltal k (eller är båda $= 0$).

10. Gausseliminering ger

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -8 & 4 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Baser för kolonnrummet resp. radrummet är

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}\right\}, \text{ resp. } \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

För nollrummet, lös $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och man finner

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ s/2 + 3t/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så en bas för nollrummet är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rangen för en matris är dimensionen av kolonnrummet, så $\text{rank} A = 2$.

b) Koordinaterna för $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}^T$ bestäms via ekvationen

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 17 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix},$$

och man finner, via gausseliminering, att $c_1 = 1$ och $c_2 = -2$ så koordinaterna är $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

11. Eftersom dimensionen för $\mathbb{P}_3$ är fyra och vi har fyra element så räcker det att visa att de är linjärt oberoende (spänner upp följer per automatik). Låt $c_1(1 + t^3) + c_2(1 + t^2) + c_3(1 + t) + c_4(1 + 2t) = 0$ (för alla t) och det följer att

$$\begin{cases} t^0 : & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ t^1 : & c_3 + 2c_4 = 0 \\ t^2 : & c_2 = 0 \\ t^3 : & c_1 = 0. \end{cases}$$

Eftersom $c_1 = c_2 = 0$ ger differensen mellan de två första ekvationerna att $c_4 = 0$ och då blir även $c_3 = 0$. De är m.a.o. linjärt oberoende och därmed en bas (ty rätt antal element).

Bestäm c_i så att $c_1(1 + t^3) + c_2(1 + t^2) + c_3(1 + t) + c_4(1 + 2t) = t^3$. Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} t^0 : & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ t^1 : & c_3 + 2c_4 = 0 \\ t^2 : & c_2 = 0 \\ t^3 : & c_1 = 1. \end{cases}$$

Så $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$ och $c_4 = 1$ d.v.s. $[t^3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

12. Dimensionen för $M_{2\times 2}$ är fyra ty

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

är en bas. Eftersom $\mathcal{B}$ innehåller fyra element räcker det således att visa att $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende eller spänner upp $M_{2\times 2}$. Linjärt oberoende visas så här:

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Visa nu att detta innebär att $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Ekvationen är ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Gausseliminering ger $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Det följer att $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende och därför en bas för $M_{2\times 2}$ (spänna upp följer per automatik). Koordinaterna för $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ är lösningen till

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 + c_3 + c_4 = 2 \\ c_1 + c_2 + c_4 = 3 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 4. \end{cases}$$

Gausseliminering ger $c_1 = 7/3$, $c_2 = 4/3$, $c_3 = 1/3$ och $c_4 = -2/3$, det vill säga

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

13. För att visa linjärt oberoende ställer man upp

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är ekvivalent med

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 + 5c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0. \end{cases}$$

Då detta löses fås $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, så $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende.
För att bestämma det linjära höljet ställer man upp

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

och eliminerar. Man finner att lösning finns om och endast om $a + 2d = 3b$. Så det linjära höljet är samtliga matriser

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sådana att $a + 2d = 3b$. Eftersom dimensionen för $M_{2\times 2}$ är fyra behövs det precis en matris till för att få en bas. Man lägger till en som inte ligger i det linjära höljet (då fås en bas via en känd sats). En sådan är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. $\mathbf{0} \in H$: självklart, $p, q \in H \Rightarrow p + q \in H$: antag $p, q \in H$, det gäller att $(p + q)(\pm 1) = p(\pm 1) + q(\pm 1) = 0 + 0 = 0$ ok och $p \in H \Rightarrow cp \in H$: antag $p \in H$, $(cp)(\pm 1) = cp(\pm 1) = c \cdot 0 = 0$ ok.
Eftersom polynomen i H har nollställe i ± 1 så måste de vara delbara med $t^2 - 1$. Polynomen i H är således de på formen $(t^2 - 1)(at + b)$. En bas är $\{t(t^2 - 1), t^2 - 1\}$ (dessa spänner uppenbarligen upp H och de är linjärt oberoende). Dimensionen är antalet element i en bas så $\dim H = 2$.

15. $\mathbf{0} \in H$ ($\mathbf{0}$ nollpolynomet): självklart, $p, q \in H \Rightarrow p+q \in H$: antag $p, q \in H$, där $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ med $a = 2c + 3d$ och $q(t) = a't^3 + b't^2 + c't + d'$ med $a' = 2c' + 3d'$. Man får nu

$$p(t) + q(t) = (a + a')t^3 + (b + b')t^2 + (c + c')t + d + d'.$$

Ur villkoren att $p, q \in H$ följer det att $a + a' = 2(c + c') + 3(d + d')$ och därför $p + q \in H$. Antag $p \in H$, $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ med $a = 2c + 3d$ och visa nu att $\alpha p \in H$. Men

$$\alpha p(t) = \alpha(at^3 + bt^2 + ct + d) = \alpha a t^3 + \alpha b t^2 + \alpha c t + \alpha d,$$

med $\alpha a - 2\alpha c - 3\alpha b = \alpha(a - 2c - 3d) = 0$ ok.
Villkoret $a = 2c + 3d$ kan skrivas som $a + 0b - 2c - 3d = 0$. Ett ekvationssystem med en ekvation och fyra obekanta. Med a som bunden och b, c och d fria med $b = u$, $c = v$ och $d = w$ får man $a = 2v + 3w$. Samtliga polynom i H kan därför skrivas

$$p(t) = (2v + 3w)t^3 + ut^2 + vt + w = v(2t^3 + t) + w(3t^3 + 1) + ut^2,$$

så H spänns upp av $\mathcal{B} = \{2t^3 + t, 3t^3 + 1, t^2\}$ (detta är ett alternativt bevis av att H är ett underrum). Polynomen är linjärt oberoende (t finns endast i det första, 1 endast i det andra och t^2 endast i det tredje polynomet) och $\mathcal{B}$ är därför en bas.

16.

a) $\mathcal{B}$ skall vara linjärt oberoende och spänna upp V, det vill säga om

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

så är $c_1 = \ldots = c_n = 0$ och varje element $\mathbf{v} \in V$ kan skrivas som en linjärkombination elementen i $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\mathbf{v}_n.$$

b) H skall vara en delmängd av V sådan att

i. $\mathbf{0} \in H$

ii. om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ (slutet under addition)

iii. om $\mathbf{u} \in H$ och c är en skalär så $c\mathbf{u} \in V$ (slutet under skalär multiplikation).

c) Det är definierat som antalet element i en bas. Märk att det finns en bas och alla baser har lika många element - därför fungerar denna definition.

d) Det är koordinaterna för $\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$, det vill säga

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Märk att det finns precis en sådan uppsättning tal c_i (detta följer av att $\mathcal{B}$ är en bas).

e) T skall vara en funktion från V till W som uppfyller att för varje $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ och varje skalär c

i. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ (additiv)

ii. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ (homogen).

17. Egenvärdena är rötterna till $\det(A-\lambda I) = 0$. Man får $(3-\lambda)(7-\lambda)-96 = 0$ som betyder $\lambda = 15$ eller -5. För $\lambda = 15$ fås $A\mathbf{v} = 15\mathbf{v} \Leftrightarrow (A-15I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vilket ger $\mathbf{v} = t\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ välj $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och för $\lambda = -5$ fås $A\mathbf{v} = -5\mathbf{v} \Leftrightarrow (A+5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vilket ger $\mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ välj $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Slutsatsen är att $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

18. Egenvärdena är rötterna till $\det(A-\lambda I) = 0$. Man får

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 9-\lambda & -20 & 10 \\ 5 & -11-\lambda & 5 \\ 5 & -10 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -20 & 10 \\ 5 & -11-\lambda & 5 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)\left(-1\begin{vmatrix} 9-\lambda & 10 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9-\lambda & -20 \\ 5 & -11-\lambda \end{vmatrix}\right) \\
&= (1+\lambda)(-\lambda^2+3\lambda+4) = -(\lambda+1)^2(\lambda-4).
\end{aligned}$$

Egenvärdena är $\lambda = -1$ mult. 2 och 4 (kontroll: $-1-1+4 = 2$, $\mathrm{tr}A = 9-11+4 = 2$ ok). Bestäm först egenvektorer som hör ihop med $\lambda = -1$ (matrisen är diagonaliserbar om och endast om det blir två fria variabler). Ekvationen $A\mathbf{v} = -1\mathbf{v}$ har den utökade koefficientmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -20 & 10 & 0 \\ 5 & -10 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Två fria variabler, aha, diagonaliserbar. En bas för lösningarna (egenrummet) är

$$\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Nu egenvärdet $\lambda = 4$. Den utökande koefficientmatrisen för systemet $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$ kan reduceras enligt

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -20 & 10 & 0 \\ 5 & -15 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Man ser att x_1 och x_2 bundna medan x_3 är fri. Låt $x_3 = t$ och man får $x_2 = t$ och $x_1 = 2t$ så egenvektorerna är $t \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ $(t \neq 0)$, vi väljer $t = 1$. Så, exempelvis,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

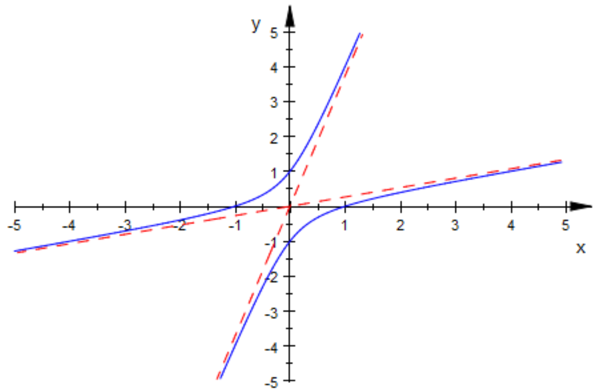
ger diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$.

19. Matrisen är triangulär så diagonalelementen är egenvärdena, 2, 1 mult. 2, 3 och 4. Matrisen är diagonaliserbar om och endast om egenrummet som hör ihop med egenvärdet 1 är tvådimensionellt. Den utökade koefficientmatrisen för $A\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ är

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Man ser att det finns fyra pivotelement och således endast en fri variabel. Slutsatsen är att egenrummet är endimensionellt. Matrisen är inte diagonaliserbar (om ettan i rad två kolumn tre vore en nolla så skulle det bli två fria variabler och A hade då varit diagonaliserbar).

20. Det gäller att $Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Låt A beteckna matrisen. Diagonalisera A ortogonalt. Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 4 = 0$ och man får egenvärdena -1 och 3, aha, en hyperbel. Man finner att $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer. Dessa är ortogonala (så blir det ty A symmetrisk) men måste också normeras. En ortogonal diagonalisering är $A = PDP^T$ med $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Variabelbytet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ transformerar $Q(x, y) = 1$ till $-u^2 + 3v^2 = 1$. v-axeln skärs i $\pm 1/\sqrt{3}$ och asymptoterna är $v = \pm u/\sqrt{3}$. Det största värdet $Q(x, y)$ kan få då $x^2 + y^2 = 1$ är 3 och det minsta är -1 och dessa värden antas i punkterna $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ resp. $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. (Om man vill räkna ut asymptoterna i x, y-koordinater så skall man transformera med variabelbytet. Variabelbytet säger $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vilket ger $u = (x + y)/\sqrt{2}$ och $v = (y - x)/\sqrt{2}$. Därför transformeras $v = u/\sqrt{3}$ till $(y - x)/\sqrt{2} = (x + y)/\sqrt{6}$ som är ekvivalent med $\sqrt{3}(y - x) = y + x$ vilket i sin tur ger $y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}x$. Den andra asymptoten blir på motsvarande sätt $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}x$.)



21. Egenvärden: lös $\det(A-\lambda I)=0$. Determinanten kan beräknas så här (i den andra likheten har första raden lagts till till den andra för att få en nolla)

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\left(-1\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}\right)$$
$$=(1-\lambda)\left(8-4\lambda-4+10-7\lambda+\lambda^2-4\right)$$
$$=(1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+10)=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

Egenvärdena är $\lambda=1$ mult. 2 och $\lambda=10$ (kontroll: $1+1+10=12$, $\mathrm{tr}A=5+5+2=12$ ok). Egenvektorer: $\lambda=1$: lös $A\mathbf{v}=1\mathbf{v}$ vilket är $(A-I)\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Gausseliminering av den utökade koefficientmatrisen ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Två linjärt oberoende egenvektorer är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dessa måste ortogonaliseras. Låt $\mathbf{v}_1$ vara den första och för $\mathbf{v}_2$ väljer vi

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Efter normering fås $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}$ som är en ortonormerad bas för egenrummet $\mathrm{Nul}(A-I)$.
$\lambda = 10$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och en egenvektor är $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ som efter normering blir $\begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.
En ortogonal diagonalisering är $A = PDP^T$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Märk att $Q(x, y, z)$ är den kvadratiska form som hör ihop med matrisen A så minsta värde, då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, är 1 och det antas i alla punkter med norm ett i egenrummet $\mathrm{Nul}(A - I)$. Punkterna där detta värde antas är de som kan skrivas på formen

$$c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

där $c_1^2 + c_2^2 = 1$, så ex. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/3\sqrt{2}, -1/3\sqrt{2}, 4/3\sqrt{2})$ och $(2/3, 1/3, 2/3)$ (sista valet är med $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$). Det största värdet $Q(x, y, z)$ kan få då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ är 10 och det antas i punkterna $(-2/3, 2/3, 1/3)$ och $(2/3, -2/3, -1/3)$.

22.

a) (A):

$$\begin{aligned} T(p+q) &= (1-t^2)(p+q)'(t) + 2(p+q)(-2) \\ &= (1-t^2)p'(t) + (1-t^2)q'(t) + 2p(-2) + 2q(-2) \\ &= T(t) + T(q). \end{aligned}$$

(H):

$$\begin{aligned} T(cp) &= (1-t^2)(cp)'(t) + 2(cp)(-2) \\ &= c(1-t^2)p'(t) + c2p(-2) = cT(p). \end{aligned}$$

Så T är linjär.

b) Enligt teorin gäller det att

$$[T] = \left[[T(1+t)]_{\mathcal{B}_2} \, [T(1-t)]_{\mathcal{B}_2} \, \left[T(t^2)\right]_{\mathcal{B}_2} \right].$$

Vidare fås $T(1+t) = (1-t^2)1 + 2(-1) = -1 - t^2$ vilken har koordinaterna, relativt basen $\mathcal{B}_2$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(1-t) = (1-t^2)(-1) + 2 \cdot 3 = 5 + t^2$ och $T(t^2) = (1-t^2)2t + 2 \cdot 4 = 8 + 2t - 2t^3$. Matrisen blir således

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Verifiera för $p(t) = 2 + t^2$. Man får

$$T(2+t^2) = (1-t^2)2t + 2 \cdot 6 = 12 + 2t - 2t^3,$$

vilken har koordinaterna

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Från andra hållet: koordinaterna för $2 + t^2$ är $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

så ok.

23. Enligt teorin vet vi att basen skall bestå av egenvektorer för A. Bestäm först egenvärdena. Den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ blir i detta fall $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ vilken har lösningarna $\lambda = -1$ och $\lambda = 3$. För $\lambda = -1$ fås en egenvektor $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och för $\lambda = 3$ fås en egenvektor $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. En bas som fungerar är således

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

och $\mathcal{B}$-matrisen för T är

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ avbildas på $A\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix}$. Koordinaterna för $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T$, relativt $\mathcal{B}$, är $[\ 2 \quad -1\ ]^T$ och $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Vektorn med dessa koordinater är

$$-2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \end{bmatrix},$$

det stämmer.

24. Den karakteristiska ekvationen $\det(A-\lambda I) = 0$ blir i detta fall $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ vilken löses till $\lambda = 3 \pm i$. Man vet att om en reell matris har komplexa egenvärden så kommer både egenvärden och egenvektorer i komplexkonjugerade par. Det räcker således att räkna ut egenvektor för en av egenvärdena. Bestäm egenvektor som hör ihop med $\lambda = 3 + i$. Ställ upp och gausseliminera ekvationen $A\mathbf{v} = (3+i)\mathbf{v}$. Man får:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Man finner en egenvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$ och därför är $\begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$ en egenvektor med egenvärde $3 - i$. Det gäller således att $A = PDP^{-1}$ med

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{bmatrix}.$$

25.

a) En vektor $\mathbf{v}$ är en egenvektor för A om den är nollskiljd och om det finns en skalär λ sådan att

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Talet λ är det tillhörande egenvärdet.

b) Om man ser A som en avbildning $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ så är en nollskiljd vektor $\mathbf{v}$ en egenvektor då den avbildas på en en vektor parallell med sig själv. Egenvärdet är ”förlängningen” avbildningen ger i den riktningen.

c) Alla nollskiljda vektorer i planet är egenvektorer med tillhörande egenvärde 1 ty de avbildas på sig själva. Alla nollskiljda vektorer parallella med planets normal är egenvektorer med egenvärde -1 (de ”vänds om” vid spegling).

26. Döp vektorerna till $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_5$ och bilda matrisen A med dessa som kolumner, $A = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_5]$. Detta innebär, såklart, att $H = \operatorname{Col} A$. Bestäm nu en bas för kolonnrummet. Gausseliminering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 & 8 \\ 1 & -4 & -5 & 7 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & -6 & -6 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi finner pivotpositioner i kolumnerna ett, två och fyra och därför är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ en bas för $\operatorname{Col} A = H$. Denna ska nu ortogonaliseras. Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess.
Det första baselementet väljer vi som $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. Det andra baselementet kan nu väljas till

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi skalar om och väljer $\mathbf{w}_2' = (1/3)\mathbf{w}_2$ istället. Slutligen väljs det tredje baselementet som

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_4 - \frac{\mathbf{v}_4 \bullet \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_4 \bullet \mathbf{w}_2'}{\mathbf{w}_2' \bullet \mathbf{w}_2'}\mathbf{w}_2' =$$
$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{20}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Skala om denna genom att dela med två. Slutsatsen är att

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

är en ortogonal bas för H.

27.

a) Det gäller att

$$\left\langle 1+t, 1-t^2 \right\rangle = 0+1+0+3(-3) = -8,$$

$$\left\| t+t^2 \right\|^2 = \left\langle t+t^2, t+t^2 \right\rangle = 0+0+2\cdot 2^2+6^2 = 44,$$

så $\|t+t^2\| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ och

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(1-t, t^2-t)^2 &= \left\| 1-t-(t^2-t) \right\|^2 = \left\| 1-t^2 \right\|^2 \\ &= \left\langle 1-t^2, 1-t^2 \right\rangle = 0+1^2+0+(-3)^2 = 10, \end{aligned}$$

så $\operatorname{dist}(1-t, t^2-t) = \sqrt{10}$.

b) En bas är $\{1, t\}$. Ortogonalisera denna med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Först, välj $q_1(t) = 1$ och $W_1 = \operatorname{span}_{W_1}\{q_1\}$. Välj nu

$$q_2(t) = t - \operatorname{proj}_{W_1}(t) = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = t - \frac{3}{5}.$$

En ortogonal bas är $\{1, t-3/5\}$.

28.

a) Gram-Schmidt: Först, låt $q_1(t) = t$ och $W_1 = \operatorname{span}\{q_1\}$. Det andra baselementet väljs som

$$\begin{aligned} q_2(t) &= t^2 - \operatorname{proj}_{W_1}(t^2) = t^2 - \frac{\langle t^2, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t \\ &= t^2 - \frac{1/4}{1/3} t = t^2 - \frac{3}{4} t. \end{aligned}$$

För att slippa fjärdedelar kan man välja $q_2'(t) = 4t^2 - 3t$. Låt också $W_2 = \operatorname{span}\{q_1(t), q_2'(t)\}$. Det tredje baselementet väljs som

$$\begin{aligned} q_3(t) &= t^3 - \operatorname{proj}_{W_2}(t^3) = t^3 - \frac{\langle t^3, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t \\ &\quad - \frac{\langle t^3, 4t^2-3t\rangle}{\langle 4t^2-3t, 4t^2-3t\rangle}(4t^2-3t) \\ &= t^3 - \frac{1/5}{1/3} t - \frac{1/15}{1/5}(4t^2-3t) \\ &= t^3 - \frac{4}{3} t^2 + \frac{2}{5} t. \end{aligned}$$

Man kan istället välja $q_3'(t) = 15t^3 - 20t^2 + 6t$. En ortogonal bas för H är

$$\left\{ t, 4t^2-3t, 15t^3-20t^2+6t \right\}.$$

b) Eftersom man nu har en ortogonal bas fås projektionen av

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_H 1 &= \frac{\langle 1, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t + \frac{\langle 1, 4t^2-3t\rangle}{\langle 4t^2-3t, 4t^2-3t\rangle}(4t^2-3t) \\
&+ \frac{\langle 1, 15t^3-20t^2+6t\rangle}{\langle 15t^3-20t^2+6t, 15t^3-20t^2+6t\rangle}(15t^3-20t^2+6t) \\
&= \frac{3}{2}t + \frac{-1/6}{1/5}(4t^2-3t) + \frac{1/12}{1/7}(15t^3-20t^2+6t) \\
&= \frac{35}{4}t^3 - 15t^2 + \frac{15}{2}t.
\end{aligned}$$

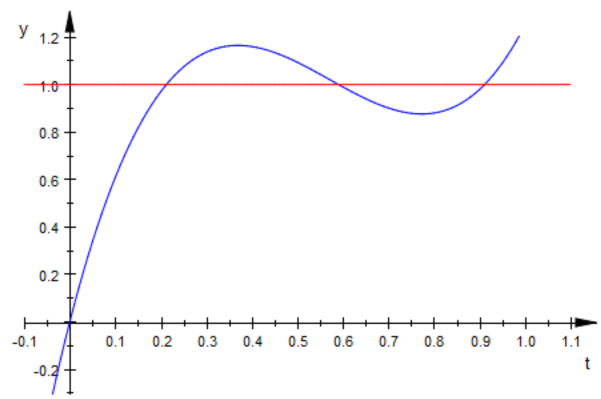


Figure 1: $y = \mathrm{proj}_H 1$ och $y = 1$ där $H = \mathrm{span}\{t, t^2, t^3\}$, för uppgift 28.

29. För att bestämma projektionen måste man ha en ortogonal bas för H. Mängden $\{1+t, t^2\}$ är linjärt oberoende ($c_1(1+t)+c_2t^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$) så de är en bas för det de spänner upp, det vill säga H. Applicera Gram-Schmidt på denna bas. Först välj $q_1(t) = 1+t$ och $W_1 = \mathrm{span}\{1+t\}$. Sedan, låt

$$\begin{aligned}
q_2(t) = t^2 - \mathrm{proj}_{W_1}(t^2) &= t^2 - \frac{\langle t^2, 1+t\rangle}{\langle 1+t, 1+t\rangle}(1+t) \\
&= t^2 - \frac{4}{10}(1+t) = \frac{1}{5}\left(-2-2t+5t^2\right).
\end{aligned}$$

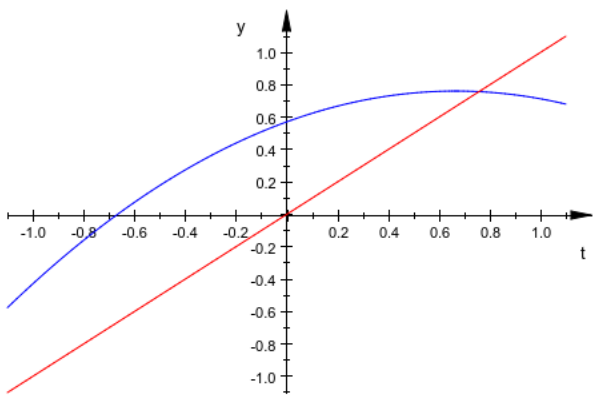
Välj $q_2' = 5q_2$. En ortogonal bas för H är $\{1+t, -2-2t+5t^2\}$. Bestäm nu projektionen,

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_H t &= \frac{\langle 1+t, t\rangle}{\langle 1+t, 1+t\rangle}(1+t) \\
&+ \frac{\langle -2-2t+5t^2, t\rangle}{\langle -2-2t+5t^2, -2-2t+5t^2\rangle}(-2-2t+5t^2) \\
&= \frac{4}{10}(1+t) + \frac{-3}{35}(-2-2t+5t^2) = \frac{2}{5}(1+t) + \frac{-3}{35}(-2-2t+5t^2) \\
&= \frac{1}{35}\left(14+14t+6+6t-15t^2\right) = \frac{4}{7}+\frac{4}{7}t-\frac{3}{7}t^2.
\end{aligned}$$

Märk att det som har minimerats är

$$\left((p(-1)-\hat{p}(-1))^2 + 2(p(0)-\hat{p}(0))^2 + 2(p(1)-\hat{p}(1))^2\right)^{1/2}$$

där $p(t) = t$ (röd kurva i figuren) och $\hat{p}(t) = \mathrm{proj}_H t$ (blå kurva i figuren).



30. Minsta-kvadratlösningen är lösningen till normalekvationen $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ vilket blir

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Denna löses enkelt och minsta-kvadratlösningen är $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11/13 \\ -8/13 \end{bmatrix}$.

Det minsta värdet av $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ fås då $\mathbf{x}$ är minsta-kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Det följer att det minsta värdet är

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| &= \frac{1}{13}\left\| \begin{bmatrix} 19 \\ -8 \\ 14 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \\ 13 \\ 26 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{13}\left\| \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{78}}{13}.
\end{aligned}$$

31. Bestäm den funktion på formen $y = \alpha x + \beta x^2$ som bäst anpassar till datapunkterna i minsta kvadratmetodens mening. Sätt in datapunkterna i modellfunktionen och man får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = -\alpha + \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ 4 = 2\alpha + 4\beta. \end{cases}$$

Man ser direkt att lösning saknas (de två första ekvationerna ger $\alpha = \beta = 1/2$ vilket inte fungerar i den tredje ekvationen). På matrisform skrivs systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Motsvarande normalekvation är

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

vilket blir

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$$

som har lösningen $\alpha = 13/22$ och $\beta = 15/22$.

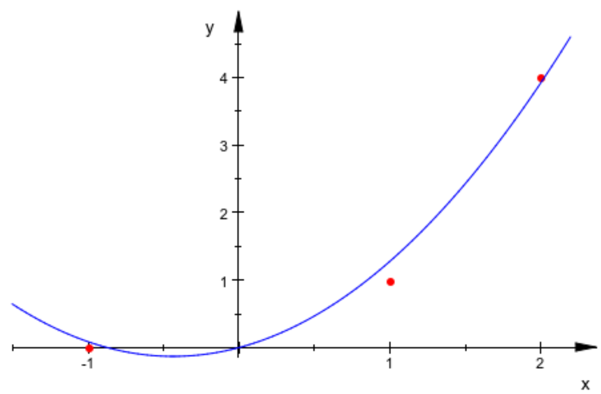


Figure 2: Modell anpassat till data för uppgift 31.

32. Ekvationen är separabel och lösningen ges av

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

som är ekvivalent med $\arctan y = \ln|x| + C$, så $y = \tan(\ln|x| + C)$. Men $y(e) = 1$ ger $1 = \tan(\ln e + C)$ så $C = \pi/4 - 1$. Lösningen ges således av $y = \tan(\ln x + \pi/4 - 1)$ (lösningen är definierad i intervallet $e^{1-3\pi/4} < x < e^{1+\pi/4}$).

33. Ekvationen är linjär så angrip den med en integrerande faktor. Dela med x och man får $y' - 2y/x = x^2 \sin x$. En integrerande faktor är $1/x^2$ ($e^{-2\ln|x|}$). Förläng ekvationen med denna och man får

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \sin x$$

som är ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \sin x.$$

Tag primitiv funktion och man får $y = -x^2 \cos x + Cx^2$. Begynnelsevärdet ger $1 = 0 + C\pi^2/4$ så lösningen är $y = 4x^2/\pi^2 - x^2 \cos x$.

34. Det är en icke-linjär andra ordningens differentialekvation. Låt $z = y'$ och man får ekvationen $e^z z' = 1$ vilket är en separabel ekvation. Lösningarna ges av $\int e^z\, dz = \int 1\, dx$ d.v.s. $e^z = x + C$ så $y' = z = \ln(x + C)$. Tag primitiv och man får

$$\begin{aligned} y &= \int \ln(x+C)\, dx = x\ln(x+C) - \int \frac{x}{x+C}\, dx \\ &= x\ln(x+C) - \int \left(1 - \frac{C}{x+C}\right) dx \\ &= x\ln(x+C) - x + C\ln|x+C| + D. \end{aligned}$$

Begynnelsevärdena ger: $y'(1) = 0$ är $z(1) = 0$ vilket leder till $C = 0$ och $y(1) = 1$ ger $D = 2$. Lösningen är $y = x\ln x - x + 2$, $x > 0$.

35. Homogenlösning: kar. ekv. $r^2 - 5r + 6 = 0$ vilken har lösningarna 2 och 3 så

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}.$$

Partikulärlösning: högerledet har två delar så dela upp partikulärlösningen i två termer $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$. För 1 i högerledet fås $y_{p_1} = 1/6$ (ses direkt) medan för $2xe^{2x}$ gör man ansatsen $y_{p_2} = z(x)e^{2x}$. Man får $y'_{p_2} = z'e^{2x} + 2ze^{2x}$ och $y''_{p_2} = z''e^{2x} + 4z'e^{2x} + 4ze^{2x}$. Sätt in det i differentialekvationen (utan 1:an i högerledet) och man får

$$z''e^{2x} + 4z'e^{2x} + 4ze^{2x} - 5(z'e^{2x} + 2ze^{2x}) + 6ze^{2x} = 2xe^{2x}.$$

Förkorta e^{2x} och sortera om och man får

$$z'' - z' = 2x,$$

(vi visste z skulle försvinna ty e^{2x} är en homogen lösning). Ansätt $z = ax^2 + bx$ vilket leder till $2a - 2ax - b = 2x$ så $a = -1$ och $b = -2$, d.v.s. $z(x) = -x^2 - 2x$ och därmed $y_{p_2} = (-x^2 - 2x)e^{2x}$. En partikulärlösning är

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{6} - (x^2 + 2x)e^{2x}$$

och den allmänna lösningen är därför

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6} - (x^2 + 2x)e^{2x}.$$

Man behöver derivatan för det ena begynnelsevärdet så derivera och man får

$$y' = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x} - (2x+2)e^{2x} - 2(x^2+2x)e^{2x}.$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger

$$1 = A + B + \frac{1}{6}$$

medan $y'(0) = 0$ ger

$$0 = 2A + 3B - 2.$$

Detta system av ekvationer har lösningen $A = 1/2$ och $B = 1/3$. Lösningen till differentialekvationen är således

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{6} - (x^2+2x)e^{2x}.$$

36. Homogenlösning: kar. ekv. $r^2 - 2r + 10 = 0$ vilken har lösningarna $1 \pm 3i$ så den allmänna homogena lösningen är

$$y_h = e^x \left(A\cos 3x + B\sin 3x\right).$$

Partikulärlösning: den lämpliga ansatsen är $y_p = a\cos 3x + b\sin 3x$. Derivering ger $y_p' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x$ och $y_p'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$ vilket insatt i differentialekvationen blir

$$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x - 2\left(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x\right) + 10\left(a\cos 3x + b\sin 3x\right)$$

$$= 3\cos 3x + \sin 3x.$$

Eftersom sin och cos är linjärt oberoende så måste antalet sin resp. cos vara lika på vardera sida. Man får ekvationssystemet

$$\begin{cases} \cos: & a - 6b = 3 \\ \sin: & 6a + b = 1 \end{cases}$$

som löses till $a = 9/37$ och $b = -17/37$. En partikulärlösning är därför

$$y_p = \frac{9}{37}\cos 3x - \frac{17}{37}\sin 3x$$

och det följer att den allmänna lösningen är

$$y = y_h + y_p = e^x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + \frac{9}{37}\cos 3x - \frac{17}{37}\sin 3x.$$

37. Homogenlösning: kar. ekv. $r^2 + 16 = 0$ vilken löses till $r = \pm 4i$ så

$$y_h = A\cos 4x + B\sin 4x.$$

Partikulärlösning: ansatsen $C\cos 4x + D\sin 4x$ fungerar ej ty de är homogenlösningar. Det gäller att $\sin 4x = \mathrm{Im} e^{4ix}$ och man inför hjälpekvationen

$$u'' + 16u = e^{4ix}$$

och då är $\mathrm{Im} u_p = y_p$. Ansatsen $u_p = Ce^{4ix}$ fungerar inte men det gör däremot $u_p = z(x)e^{4ix}$. Derivering ger $u_p' = z'e^{4ix} + 4ize^{4ix}$ och $u_p'' = z''e^{4ix} + z'8ie^{4ix} - 16ze^{4ix}$. Insatt i ekvationen fås

$$z''e^{4ix} + z'8ie^{4ix} - 16ze^{4ix} + 16ze^{4ix} = e^{4ix}.$$

Detta förenklas till $z'' + 8iz' = 1$. Ansats för z: $z = ax$ ger $0 + 8ia = 1$, d.v.s. $a = -i/8$ så

$$u_p = -\frac{ix}{8}e^{4ix} = -\frac{ix}{8}\left(\cos 4x + i\sin 4x\right).$$

Av detta följer det att $y_p = \mathrm{Im} u_p = -(x/8)\cos 4x$. Den allmänna lösningen är

$$y = y_h + y_p = A\cos 4x + B\sin 4x - \frac{x}{8}\cos 4x.$$

Villkoret $y(0) = 2$ ger $A = 2$ medan $y'(0) = -1$ ger $B = -7/32$. Lösningen är

$$y = 2\cos 4x - \frac{7}{32}\sin 4x - \frac{x}{8}\cos 4x.$$

38. Homogenlösningarna är

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}.$$

För en partikulärlösning så inför hjälpekvationen

$$u'' - u = (10x - 5)e^{2ix}.$$

En ansats för partikulärlösning är $u_p = z(x)e^{2ix}$ vilken insatt i ekvationen ger, efter att e^{2ix} har förkortats,

$$z'' + 4iz' - 5z = 10x - 5.$$

En ansats för z är $c_0 + c_1x$ vilken leder till

$$4ic_1 - 5(c_0 + c_1x) = 10x - 5.$$

Identifiera nu koefficienterna och man får $c_1 = -2$ och $c_0 = (-5-4ic_1)/(-5) = 1 - 8i/5$. Detta ger

$$\begin{aligned} y_p &= \mathrm{Re}(u_p) = \mathrm{Re}\left(z(x)e^{2ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(1 - \frac{8}{5}i - 2x\right)(\cos 2x + i\sin 2x)\right) \\ &= (1-2x)\cos 2x + \frac{8}{5}\sin 2x. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är

$$y = Ae^x + Be^{-x} + (1-2x)\cos 2x + \frac{8}{5}\sin 2x.$$

39. På matrisform skrivs systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ med

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -12 & -9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enligt teorin ges samtliga lösningar av en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar. Dessutom, $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ är en lösning om $\mathbf{v}$ är en egenvektor för A med tillhörande egenvärde λ. Bestäm egenvärden och egenvektorer. Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 8 \\ -12 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (11-\lambda)(-9-\lambda) + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow -99 - 2\lambda + \lambda^2 + 96 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1;\ \lambda = 3.$$

Egenvektorer: Först $\lambda = -1$, $A\mathbf{v} = -1\mathbf{v} \Leftrightarrow (A + I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 8 & 0 \\ -12 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Om x_2 sätts till t fås $x_1 = -2t/3$. En egenvektor tillhörande egenvärdet $\lambda = -1$ är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För $\lambda = 3$ fås $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 0 \\ -12 & -12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Om x_2 sätts till t fås $x_1 = -t$. En egenvektor tillhörande egenvärdet $\lambda = 3$ är

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är således

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Men, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ur denna utläses $c_1 = 1$ och $c_2 = -3$. Lösningen är

$$\mathbf{x} = e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller på komponentform

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} + 3e^{3t} \\ y(t) = 3e^{-t} - 3e^{3t}. \end{cases}$$

40. På matrisform skrivs systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ med

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Enligt teorin ges samtliga lösningar av en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar. Dessutom, $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ är en lösning om $\mathbf{v}$ är en egenvektor för A med tillhörande egenvärde λ. Bestäm egenvärden och egenvektorer. Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-6-\lambda) + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12 + 4\lambda + \lambda^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm 3i.$$

Egenvektorer: Då matrisen är reell vet man att egenvärden och egenvektorer kommer i komplexkonjugerade par. Det räcker således att bestämma en egenvektor. För egenvärdet $\lambda = -2 + 3i$ fås

$$A\mathbf{v} = (-2+3i)\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - (-2+3i)I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Det utökande koefficientmatrisen blir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4-3i & -5 & 0 \\ 5 & -4-3i & 0 \end{array}\right].$$

I detta läge vet man att om man gausseliminerar blir det bara nollor i den andra raden. Man behöver således bara bry sig om den översta raden. Enklast är nu att sätta $x_1 = 5$ ty då fås $x_2 = 4 - 3i$ direkt. En egenvektor är därför

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-3i \end{bmatrix}$$

och det följer att en lösning är

$$\mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-3i \end{bmatrix} e^{(-2+3i)t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-3i \end{bmatrix} e^{-2t}\left(\cos 3t + i \sin 3t\right).$$

Två linjärt oberoende lösningar fås av real- respektive imaginärdel av denna, det vill säga

$$e^{-2t}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \cos 3t - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \sin 3t\right) \text{ och } e^{-2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cos 3t + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \sin 3t\right).$$

Samtliga lösningar ges därför av

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= c_1 e^{-2t}\left(\left[\begin{array}{c}5\\4\end{array}\right]\cos 3t - \left[\begin{array}{c}0\\-3\end{array}\right]\sin 3t\right)\\ &+ c_2 e^{-2t}\left(\left[\begin{array}{c}0\\-3\end{array}\right]\cos 3t + \left[\begin{array}{c}5\\4\end{array}\right]\sin 3t\right).\end{aligned}$$

Men, $\mathbf{x}(0) = \left[\begin{array}{c}5\\-2\end{array}\right]$, så

$$c_1\left[\begin{array}{c}5\\4\end{array}\right] + c_2\left[\begin{array}{c}0\\-3\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}5\\-2\end{array}\right].$$

Detta löses till $c_1 = 1$ och $c_2 = 2$. Lösningen är

$$\mathbf{x} = e^{-2t}\left(\left[\begin{array}{c}5\\4\end{array}\right]\cos 3t - \left[\begin{array}{c}0\\-3\end{array}\right]\sin 3t\right) + 2e^{-2t}\left(\left[\begin{array}{c}0\\-3\end{array}\right]\cos 3t + \left[\begin{array}{c}5\\4\end{array}\right]\sin 3t\right),$$

eller på komponentform

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t}\left(5\cos 3t + 10\sin 3t\right)\\ y(t) = e^{-2t}\left(-2\cos 3t + 11\sin 3t\right).\end{cases}$$

41. Detta är en Euler-ekvation. Låt $x = e^t$ och bilda $z(t) = y(x)$. Det följer $z' = xy'$ och $z'' - z' = x^2y''$ (har bevisats en gång för alla). Insatt i ekvationen fås

$$z'' - z' - 5z' + 10z = 10e^{4t}$$

det vill säga

$$z'' - 6z' + 10z = 10e^{4t}.$$

Homogenlösning: kar. ekv. $r^2 - 6r + 10 = 0$ vilken har lösningarna $r = 3 \pm i$ så

$$z_h = e^{3t}\left(A\cos t + B\sin t\right).$$

Partikulärlösning: ansatsen $z_p = ae^{4t}$ ger $z_p' = 4ae^{4t}$ och $z_p'' = 16ae^{4t}$. Då detta sätts in i differentialekvationen fås

$$16ae^{4t} - 6\cdot 4ae^{4t} + 10ae^{4t} = 10e^{4t}$$

vilket ger $a = 5$ så $z_p = 5e^{4t}$ och därmed

$$z = z_h + z_p = e^{3t}\left(A\cos t + B\sin t\right) + 5e^{4t}.$$

Slutligen måste man byta tillbaka till de ursprungliga variablerna och man finner då

$$y = x^3\left(A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)\right) + 5x^4.$$

42. Efter en division med x ser vi att det är en Euler-ekvation. Låt $x = e^t$ och bilda $z(t) = y(x)$. Det följer $z' = xy'$ och $z'' - z' = x^2y''$. Insatt i ekvationen ger detta
$$z'' - 2z' + z = e^{-t}.$$
Homogenlösningar: kar. ekv. $r^2 - 2r + 1 = 0$ vilken har dubbelroten $r = 1$ så $z_h = Ae^t + Bte^t$. Partikulärlösning: ansatsen $z_p = Ce^{-t}$ leder till
$$Ce^{-t} + 2Ce^{-t} + Ce^{-t} = e^{-t}$$
vilket ger $C = 1/4$ och därmed $z_p = e^{-t}/4$. Detta ger
$$z = z_h + z_p = Ae^t + Bte^t + \frac{e^{-t}}{4}$$
och därmed
$$y = Ax + Bx \ln x + \frac{1}{4x}.$$

43. Homogenlösning: kar. ekv. $r^3 + 8 = 0$. Detta är en binomisk ekvation med lösningarna $r = -2$, $1 \pm \sqrt{3}i$ så den allmänna homogenlösningen är
$$y_h = Ae^{-2x} + e^x \left(B\cos\left(\sqrt{3}x\right) + C\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right).$$
Partikulärlösning: ansatsen $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ leder till
$$6a + 8(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3x^3 + 1.$$
Vilket betyder $a = 3/8$, $b = 0$, $c = 0$ och $d = -5/32$ så
$$y_p = \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{32}.$$
Lösningarna är
$$y = y_h + y_p = Ae^{-2x} + e^x \left(B\cos\left(\sqrt{3}x\right) + C\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) + \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{32}.$$

44. Homogenlösning: kar. ekv. $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ vilken, via binomialsatsen, är $(r + 1)^3 = 0$ och som har $r = -1$ som rot med multiplicitet tre. Den allmänna homogenlösningen är således
$$y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x}.$$
Partikulärlösning: högerledet består av två bitar vilka man behandlar separat. En ansats, för HL$=4e^{-x}$, är $y_{p_1} = z(x)e^{-x}$. Derivering ger $y'_{p_1} = z'e^{-x} - ze^{-x}$, $y''_{p_1} = z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}$ och $y'''_{p_1} = z'''e^{-x} - 3z''e^{-x} + 3z'e^{-x} - ze^{-x}$. Då detta sätts in i ekvationen fås
$$z'''e^{-x} - 3z''e^{-x} + 3z'e^{-x} - ze^{-x} + 3\left(z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}\right)$$

$$+3\left(z'e^{-x}-ze^{-x}\right)+ze^{-x}=4e^{-x},$$

vilken förenklas till $z'''=4$. En lösning till denna ses direkt: $z=2x^3/3$ så $y_{p_1}=2x^3e^{-x}/3$. En ansats, för HL=x, är $z=ax+b$ vilken insatt i ekvationen leder till

$$3a+ax+b=x.$$

Identifiering ger $a=1$ och $b=-3$ och det följer att $y_{p_2}=x-3$. Lösningen är

$$y=y_h+y_{p_1}+y_{p_2}=Ae^{-x}+Bxe^{-x}+Cx^2e^{-x}+\frac{2}{3}x^3e^{-x}+x-3.$$

45. Homogenlösningar: kar. ekv. $r^4-6r^3+21r^2-18r+54=0$. Eftersom $e^{3x}\sin 3x$ är en homogenlösning så är $3\pm 3i$ rötter till den karakteristiska ekvationen. Övriga lösningar är, det är samma ekvation som i uppgift 5, $\pm\sqrt{3}i$. Så den allmänna homogena lösningen är

$$y_h=e^{3x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+C\cos\left(\sqrt{3}x\right)+D\sin\left(\sqrt{3}x\right).$$

Partikulär: ansats $y_p=ax+b$, $y'=a$, $y''=y'''=y^{(4)}=0$, in i ekvationen och man får

$$-18a+54(ax+b)=x+1$$

som ger $a=1/54$ och $b=2/81$. Den allmänna lösningen är

$$y=e^{3x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+C\cos\left(\sqrt{3}x\right)+D\sin\left(\sqrt{3}x\right)+\frac{x}{54}+\frac{2}{81}.$$

46. Derivera variabelbytet och man får $z'=y^{-2/3}y'/3$ vilket insatt i ekvationen ger

$$3z'y^{2/3}=3y+3e^xy^{2/3}.$$

Efter division med $y^{2/3}$ och omstuvning fås $z'-z=e^x$. En integrerande faktor är e^{-x} så ekvationen kan skrivas $(e^{-x}z)'=1$ varpå man får $e^{-x}z=x+C$ så $z=(x+C)e^x$. När man substituerar tillbaka fås då $y=((x+C)e^x)^3=(x+C)^3e^{3x}$. Men $y(0)=1$ så $1=(0+C)^3$ d.v.s. $C=1$. Lösningen är $y=(x+1)^3e^{3x}$.

47. Det gäller att $y'=z'e^x+ze^x$ och $y''=z''e^x+2z'e^x+ze^x$. Sätt in detta i ekvationen och man får

$$z''e^x+2z'e^x+ze^x-2\left(z'e^x+ze^x\right)+ze^x=\frac{1}{x}e^x.$$

Efter förkortning återstår

$$z''=\frac{1}{x}.$$

Lös denna genom att integrera två gånger och man får (en primitiv till $\ln x$ är $x \ln x - x$)

$$z = x \ln x - x + Ax + B$$

Det följer ($C = A - 1$)

$$y = z(x)e^x = (x \ln x + Cx + B)e^x.$$

48. Derivera variabelbytet och man får $y' = 1 - v^{-2}v'$ vilket insatt i ekvationen blir

$$2x(1 - v^{-2}v') = 2(x + v^{-1}) + (x + v^{-1})^2 - x^2.$$

Detta förenklas till

$$-2xv^{-2}v' = 2v^{-1} + 2xv^{-1} + v^{-2}$$

och som efter förkortning med $-v^{-2}$ och omsortering är

$$v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right) v = -\frac{1}{2x}.$$

En integrerande faktor är xe^x (antar att $x > 0$). Multiplicera med denna och man kan skriva ekvationen som $(xe^x v)' = -e^x/2$ vilket leder till $xe^x v = -e^x/2 + C$ så

$$v = -\frac{1}{2x} + \frac{C}{xe^x}.$$

Substituera tillbaka:

$$y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + \frac{C}{xe^x}}.$$

Men $y(1) = 2$ leder till $2 = 1 + 1/(-1/2 + C/e)$ så $C = 3e/2$ och man får

$$y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + \frac{3e}{2xe^x}} = x + \frac{2x}{3e^{1-x} - 1}.$$

Detta blir en lösning på $(-\infty, 1 + \ln 3)$ trots att, i räkningen, användes $x > 0$.

49. Homogenlösningarna är

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

Partikulärlösning: vi använder variation av konstanterna så $y_p = u_1 e^{-x} + u_2 e^{-2x}$ vilket ger $y_p' = u_1' e^{-x} - u_1 e^{-x} + u_2' e^{-2x} - 2u_2 e^{-2x}$. Sätt nu

$$u_1' e^{-x} + u_2' e^{-2x} = 0,$$

en första ekvation, och då blir $y_p' = -u_1e^{-x} - 2u_2e^{-2x}$. Derivera igen och man får $y_p'' = -u_1'e^{-x} + u_1e^{-x} - 2u_2'e^{-2x} + 4u_2e^{-2x}$. Sätt in i differentialekvationen och det blir

$$-u_1'e^{-x} + u_1e^{-x} - 2u_2'e^{-2x} + 4u_2e^{-2x} + 3\left(-u_1e^{-x} - 2u_2e^{-2x}\right)$$

$$+2(u_1e^{-x} + u_2e^{-2x}) = \frac{1}{1+e^{2x}}.$$

Flera termer tar ut varandra, kvar blir

$$-u_1'e^{-x} - 2u_2'e^{-2x} = \frac{1}{1+e^{2x}},$$

och detta är den andra ekvationen. Man har fått systemet

$$\begin{cases} u_1'e^{-x} + u_2'e^{-2x} = 0 \\ -u_1'e^{-x} - 2u_2'e^{-2x} = \frac{1}{1+e^{2x}} \end{cases}$$

som nu skall lösas. Lägg ihop ekvationerna och man får $u_2' = -e^{2x}/(1+e^{2x})$ som i sin tur ger $u_1' = e^x/(1+e^{2x})$. Integrera och man får $u_1 = \arctan(e^x) + C$ (variabelbytet $z = e^x$ om man är osäker) och $u_2 = -\ln(1+e^{2x})/2$ (variabelbytet $z = 1 + e^{2x}$ om man är osäker) så, med $C = D = 0$,

$$y_p = e^{-x}\arctan(e^x) - \frac{e^{-2x}\ln(1+e^{2x})}{2}.$$

Den allmänna lösningen är

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x}\arctan(e^x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}).$$