Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2022-03-23**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 380, antal sidor: 3.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Lös $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0$.

b) Betrakta en triangel i det komplexa talplanet med hörn i $A = 0$, $B = 2 + i$ och $C = 3i$. Rotera nu triangeln moturs med hörnet A fixt i origo och så att hörnet B hamnar i $1 + 2i$. Var hamnar hörnet C? (4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för kolonnrummet till A (Col$A$) och en bas för nollrummet till A (Nul$A$).

b) Låt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det gäller att $\mathbf{v} \in \text{Col}A$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ relativt basen för kolonnrummet som bestämdes i a) uppgiften. (4 p)

3. Låt $Q(x, y) = x^2 - 8xy - 5y^2$. Bestäm det största och minsta värde $Q(x, y)$ kan få då $x^2 + y^2 = 1$. Ge även exempel på punkter där det maximala respektive minimala värdet antas. (4 p)

4. Låt $\mathbb{P}_3$ beteckna vektorrummet av samtliga polynom av gradtal mindre än eller lika med 3 och utrusta det med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = 3p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Visa att polynomen $p(t) = 1$ och $q(t) = t$ är ortogonal mot varandra.

b) Bestäm en ortogonal bas för underrummet $H = \text{span}\{1, t, t^3 + t^2\}$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - y' - 6y = 8xe^{2x}$. (4 p)

6.

a) Visa att $\sin(2x)$ är en lösning till $y''' + 8y'' + 4y' + 32y = 0$.

b) Bestäm samtliga lösningar till $y''' + 8y'' + 4y' + 32y = 15 \cos x$. (4 p)

7. Att matriserna A och B är similära betyder att det finns en inverterbar matris P sådan att $A = PBP^{-1}$.

a) Antag att λ är ett egenvärde med tillhörande egenvektor $\mathbf{v}$ för A och antag att B är similär med A. Bestäm ett egenvärde med tillhörande egenvektor för B.

b) Antag att någon av A och B går att invertera och bevisa att AB är similär med BA. (4 p)

1. a) $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0 \Leftrightarrow$

$(z-i)^2 - i^2 + 2 + 4i = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{LÅT } w = z - i}$

$w^2 = -3 - 4i$ ANSÄTT $\boxed{w = a + bi}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -3 - 4i \Leftrightarrow$

Re: $a^2 - b^2 = -3$ (1)

Im: $2ab = -4$ (2)

Ur (2): $\boxed{b = -\frac{2}{a}}$ in i (1):

$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$a^2 = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

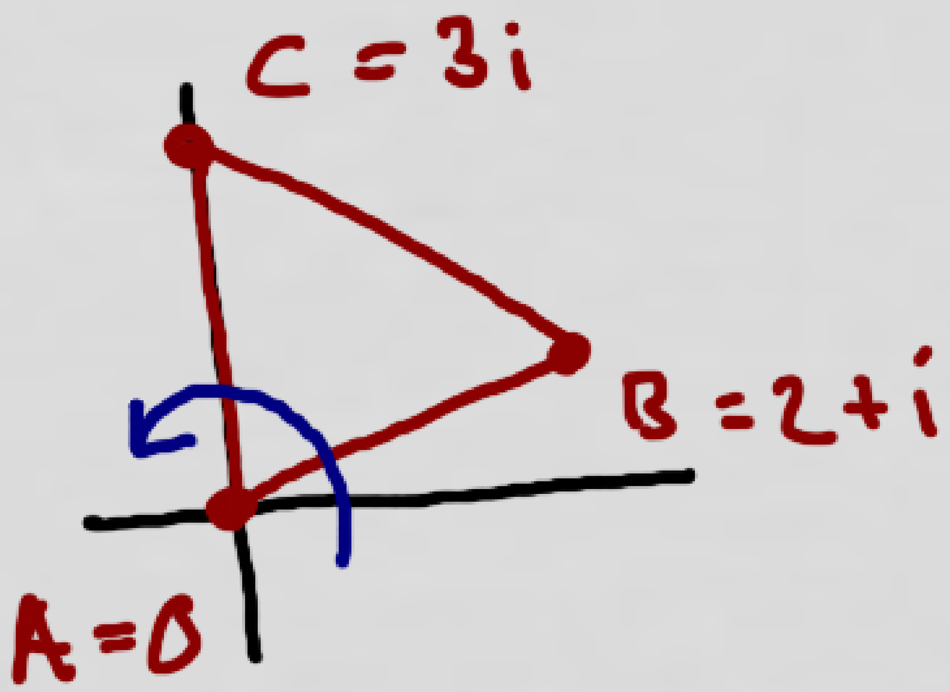
$\therefore$ $a = \pm 1$. BESTÄM NU b, w & z.

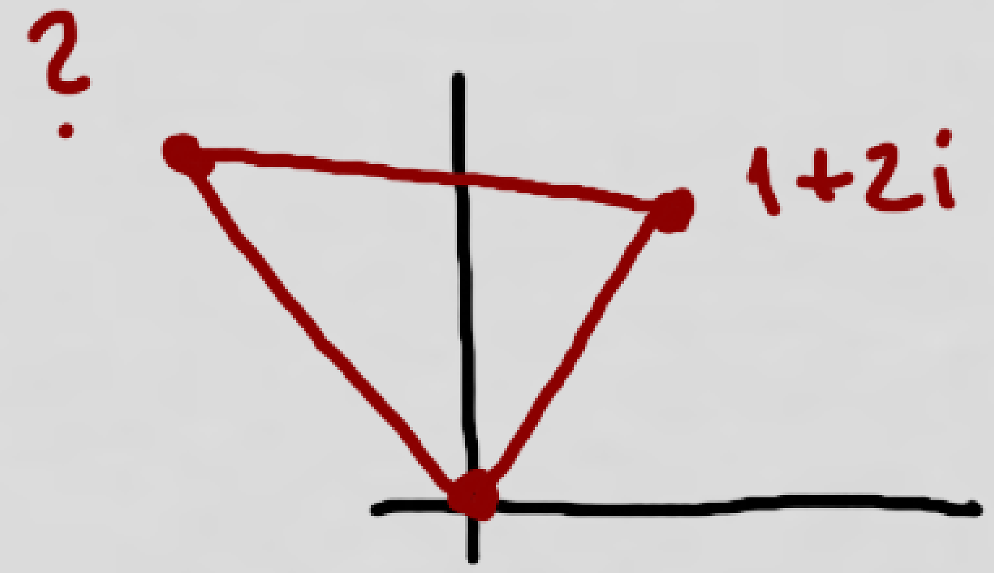
$a = 1$: $b = -2$, $w = 1 - 2i$, $z = 1 - i$

$a = -1$: $b = 2$, $w = -1 + 2i$, $z = -1 + 3i$

RÖTTERNA ÄR: $1 - i$ & $-1 + 3i$

b)





EN ROTATION I DET KOMPLEXA TALPLANET BESKRIVS AV $z \mapsto wz$ DÄR $|w| = 1$

ANSÄTT $w = a + bi$ OCH VI FÅR

$1 + 2i = w(2 + i) \Leftrightarrow w = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{5}$

$= \frac{4+3i}{5}.$

VAR HAMNAR C? JO, $w \cdot 3i = \frac{4+3i}{5} 3i =$

$= -\frac{9}{5} + \frac{12}{5} i$

2. $A = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a)

ENLIGT TEORIN BEVARAS LINJÄR (O)BEROENDEN MELLAN KOLUMNER UNDER $\sim$.

EN BAS FÖR KOLONNRUMMET ÄR SÅLEDES $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = B$ //

FÖR NOLLRUMMET LÖSES $A\bar{x} = \bar{0}$

ENLIGT ELIMINERINGEN: x_1, x_2 BUNDNA, x_3, x_4 FRIA.

SÄTT $x_3 = s$, $x_4 = t$ OCH VI FÅR $x_2 = s - 2t$

$x_1 = -s + 2t - 3t = -s - t$

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ EN BAS FÖR Nul A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ //

b) LÖS $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore x_1 = 1, x_2 = -3$

(SER MAN INTE DET SÅ FÅR MAN GAUSSELIMINERA)

$\therefore [\bar{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ //

3. $Q(x,y) = x^2 - 8xy - 5y^2 = [x\ y] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ENLIGT TEORIN GES SVAREN AV EGENVÄRDEN/VEKTORER FÖR MATRISEN A.

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-5-\lambda) - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-5 - \lambda + 5\lambda + \lambda^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = -7;\ 3$$

[KOLL: $-7+3=-4$, $\operatorname{tr} A = 1-5 = -4$ OK
$(-7)\cdot 3 = -21$, $\det A = -5-16 = -21$ OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = -7$: $A\bar{v} = -7\bar{v} \Leftrightarrow (A + 7I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN x_2 FRI

$x_2 = t$, $x_1 = \frac{1}{2}t$

$\therefore$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

VÄLJ $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$: (VET EGENTLIGEN SVARET TY BLIR ORTOGONAL MOT $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$)

$A\bar{v} = 3\bar{v} \Leftrightarrow (A - 3I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 BUNDEN
x_2 FRI

$x_2 = t$, $x_1 = -2t$ $\therefore$ VÄLJ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ VÄLJ $\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\therefore$ MAX VÄRDE ÄR $\underline{\underline{3}}$ OCH ANTAS I $\pm\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

MIN VÄRDE ÄR $\underline{\underline{-7}}$ OCH ANTAS I $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

4. a)

$$\langle 1, t\rangle = 3\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = -3+0+1+2=0$$

$\therefore$ 1 & t är ortogonala mot varandra.

b) En ortogonal bas för $H = \text{span}\{1, t, t^3+t^2\}$.

De tre polynomen är uppenbarligen linjärt oberoende och utgör därför en bas för det de spänner upp, H.

Ortogonalisera med Gram-Schmidt.

1) $q_1(t) = 1$, $W_1 = \text{span}\{q_1\}$

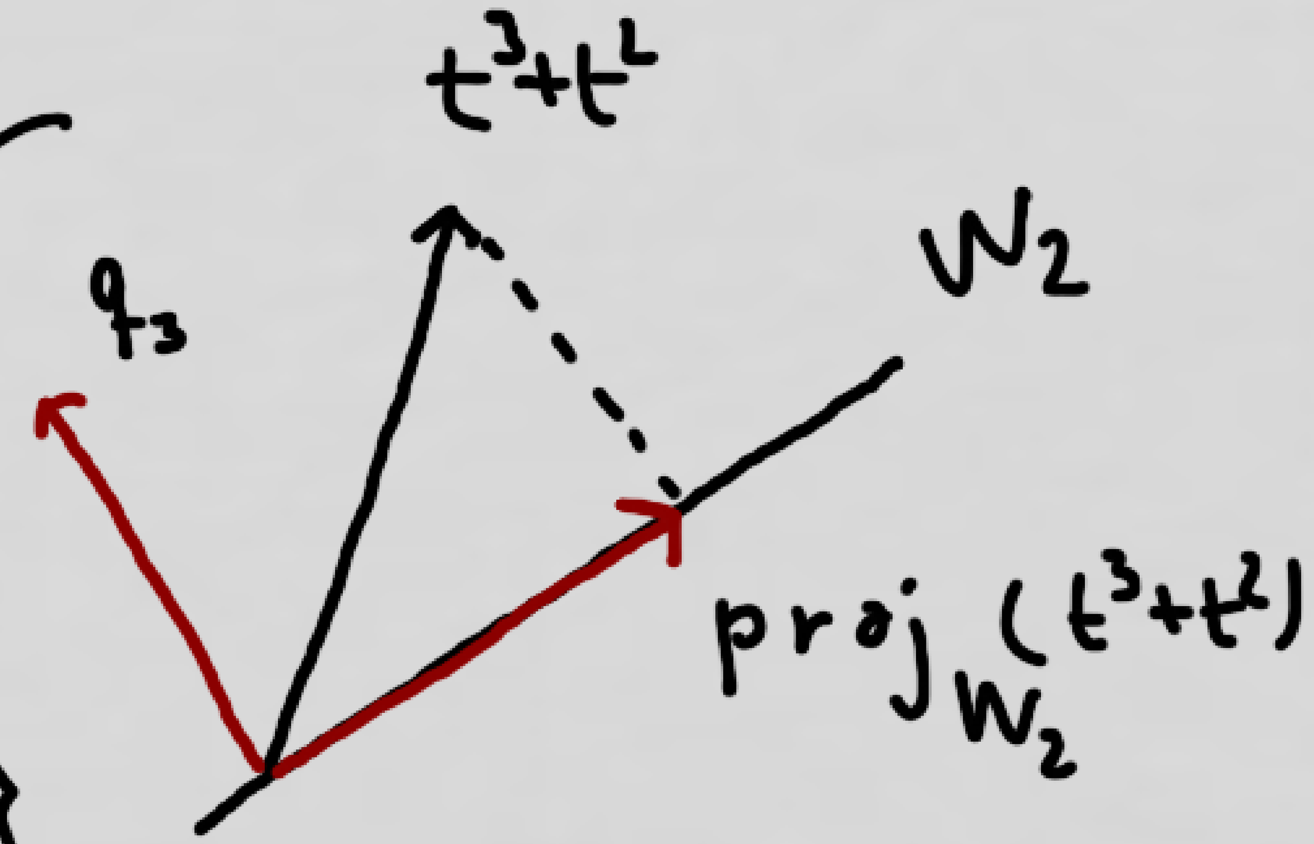
2) $q_2(t) = t$, $W_2 = \text{span}\{q_1, q_2\}$

(Enligt a) visste vi redan att de är ortogonala mot varandra.)

3) $q_3(t) = t^3 + t^2 - \text{proj}_{W_2}(t^3+t^2)$

$$= t^3+t^2 - \left(\frac{\langle 1, t^3+t^2\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 + \frac{\langle t, t^3+t^2\rangle}{\langle t,t\rangle} t\right)$$

$$= t^3+t^2 - \left(\frac{14}{6}\cdot 1 + \frac{26}{8} t\right) =$$



$$= t^3+t^2 - \frac{7}{3} - \frac{13}{4} t$$

$\therefore$ En ortogonal bas för H är:

$$\left\{1, t, t^3+t^2 - \frac{13}{4} t - \frac{7}{3}\right\}$$

$\langle 1, t^3+t^2\rangle = 3\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 12 = 14$

$\langle 1, 1\rangle = 3\cdot 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6$

$\langle t, t^3+t^2\rangle = 3(-1)\cdot 0 + 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot 12 = 26$

$\langle t, t\rangle = 3\cdot(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 8$

5. $y'' - y' - 6y = 8xe^{2x}$

"Homogen + Partikulär"

Hom.: Kar.ekv.: $r^2 - r - 6 = 0 \iff$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3; -2$$

$\therefore y_h = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

Den allmänna homogena lösningen

Part.: Ansats $y_p = z(x)e^{2x}$

$y_p' = z'e^{2x} + 2ze^{2x}$, $y_p'' = z''e^{2x} + 4z'e^{2x} + 4ze^{2x}$

In i ekv.:

$$z''\cancel{e^{2x}} + 4z'\cancel{e^{2x}} + 4z\cancel{e^{2x}} - (z'\cancel{e^{2x}} + 2z\cancel{e^{2x}}) - 6z\cancel{e^{2x}} = 8x\cancel{e^{2x}} \iff$$

$$z'' + 3z' - 4z = 8x$$

Ansats: $z = ax + b$, $z' = a$, $z'' = 0$ in i ekv.:

$0 + 3a - 4ax - 4b = 8x \iff$

$$\left.\begin{array}{l} x^1: \; -4a = 8 \\ x^0: \; 3a - 4b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -2 \\ b = -3/2 \end{array} \qquad \therefore z = -2x - \frac{3}{2}$$

$\therefore y_p = \left(-2x - \frac{3}{2}\right)e^{2x}$

$\therefore y = y_h + y_p =$

$$= \underline{\underline{Ae^{3x} + Be^{-2x} - \left(2x + \frac{3}{2}\right)e^{2x}}}$$

6. a) $\sin 2x \xrightarrow{D} 2\cos 2x \xrightarrow{D} -4\sin 2x \xrightarrow{D} -8\cos 2x$

SÄTT $y = \sin 2x$ I EKV.:

$$-8\cos 2x - 8\cdot 4\sin 2x + 4\cdot 2\cos 2x + 32\sin 2x$$

$$= (-8+8)\cos 2x + (-32+32)\sin 2x = 0 \quad \text{ok.}$$

b) "HOMOGEN + PARTIKULÄR"

Hom.: KAR. EKV.: $r^3 + 8r^2 + 4r + 32 = 0$

MEN $\sin 2x$ EN HOMOGEN LÖSNING OCH DÅ MÅSTE $\pm 2i$ VARA RÖTTER TILL KAR. EKV. SÅLEDES GÅR DET ATT BRYTA UT r^2+4. FINN VIA POLYNOMDIVISION DEN ANDRA FAKTORN:

$$\begin{array}{r|l} & r + 8 \\ \hline r^2+4 & r^3 + 8r^2 + 4r + 32 \\ & r^3 + 4r \\ \hline & 8r^2 + 32 \\ & 8r^2 + 32 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\ r^3 + 8r^2 + 4r + 32 = (r^2+4)(r+8)$

$\therefore$ RÖTTERNA: $\pm 2i, -8$

$\therefore\ y_h = A\cos 2x + B\sin 2x + Ce^{-8x}$

PART.: ANSATS: $y_p = a\cos x + b\sin x$

$y_p' = -a\sin x + b\cos x$, $y_p'' = -a\cos x - b\sin x$

$y_p''' = a\sin x - b\cos x$. IN I EKV.:

$$a\sin x - b\cos x + 8(-a\cos x - b\sin x) + 4(-a\sin x + b\cos x) + 32(a\cos x + b\sin x) = 15\cos x$$

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} \cos:&\ 24a + 3b = 15 \\ \sin:&\ -3a + 24b = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 8a + b &= 5 \\ -3a + 24b &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

ur (1) $b = 5 - 8a$, in i (2)

$$-3a + 24\cdot 5 - 24\cdot 8a = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{120}{195} = \frac{24}{39} = \frac{8}{13}$$

$$b = 5 - 8a = \frac{65-64}{13} = 1/13$$

$\therefore\ y_p = \frac{8}{13}\cos x + \frac{1}{13}\sin x$

$$\therefore\ y = A\cos 2x + B\sin 2x + Ce^{-8x} + \frac{8}{13}\cos x + \frac{1}{13}\sin x$$

7. a) $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, $\bar{v} \neq 0$

$$B = PAP^{-1}$$

ÄR GIVET.

DETTA GER:

$$BP\bar{v} = PAP^{-1}P\bar{v} =$$

$$= PA\bar{v} = P\lambda\bar{v} = \lambda P\bar{v}$$

∴ $\underline{\underline{P\bar{v}}}$ EN EGENVEKTOR FÖR B MED TILLHÖRANDE EGENVÄRDE $\underline{\underline{\lambda}}$.

OBS: $P\bar{v} \neq \bar{0}$ TY $\bar{v} \neq \bar{0}$ OCH P INVERTERBAR.

b) ANTAG A INVERTERBAR:

$\underline{AB} = A\underline{BA}A^{-1}$ ∴ AB SIMILÄR MED BA

OM B INVERTERBAR:

$$\underline{BA} = B\underline{AB}B^{-1}$$

ANM.: OM INGEN AV A OCH B ÄR INVERTERBARA ÄR INTE AB OCH BA NÖDVÄNDIGTVIS SIMILÄRA.

EX. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

OCH DÅ:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DESSA ÄR INTE SIMILÄRA TY $PBAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq AB$

OAVSETT P.