LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M

Tentamensdatum: **2020-04-01**
Skrivtid: **09.00 - 14.30**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel: 0920-493330.

För betyg 3 gör man uppgifterna 1-7 och inga andra. Med 13 eller fler poäng fås betyg 3. För högre betyg ersätter man uppgifterna fyra och fem med uppgifterna åtta och nio. Det finns ingen direkt poänggräns för betygen fyra och fem. En allmän bedömning görs. För högre betyg görs således uppgifterna 1-3 och 6-9.

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar och läroböckerna

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Polynomet $P(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 + 38z + 130$ har nollstället $2 + 3i$. Bestäm samtliga nollställen för $P(z)$.

b) Bestäm ett argument för $3i/(-\sqrt{3} + 3i)^3$. (4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för kolonnrummet till A (Col$A$) och en bas för nollrummet till A (Nul$A$).

b) Låt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Det gäller att $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}A$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ relativt basen för kolonnrummet som bestämdes i a) uppgiften. (4 p)

3.

a) Definiera den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ via

$$T(p(t)) = 2tp'(t) + p(1).$$

Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}_1 = \{1 + t, 1 - t, 1 + t^2\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{1, t, t^2\}$. Matrisen som ska bestämmas är med andra ord den matris M som uppfyller $[T(p(t))]_{\mathcal{B}_2} = M[p(t)]_{\mathcal{B}_1}$.

b) Låt V och W vara vektorrum. Beskriv noggrant vad det betyder att en operator $S : V \to W$ är linjär. Ge exempel på en operator $S : V \to W$ som inte är linjär (även V och W ska anges). (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt,$$

och låt H vara underrummet som spänns upp av $\{t, t^2\}$, det vill säga $H = \mathrm{Span}\{t, t^2\}$.

a) Bestäm en ortogonal bas för H.

b) Bestäm den ortogonala projektionen av 1 på H, det vill säga bestäm $\mathrm{proj}_H 1$. (4 p)

5.

a) Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$.

b) För differentialekvationerna nedan ge en lämplig ansats för en partikulärlösning och beskriv hur man går tillväga för att beräkna den (märk att du behöver inte bestämma partikulärlösningen).

i. $y'' + y = \sin(3x) - 2\cos(4x)$.

ii. $y'' + y = 2xe^x \cos(x)$. (4 p)

6. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 8x + y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $y(0) = 4$. (4 p)

7.

a) Låt $H = \text{Span}\{p_i(t)\colon\ i = 1, \ldots, 87\}$ där $p_i \in \mathbb{P}_{98}$. Beskriv hur man kan bestämma en bas för H. Ledning: Det finns en isomorfi mellan $\mathbb{P}_{98}$ och ..., sedan ...

b) Om P är ett polynom så kan man bilda $P(A)$ för en kvadratisk matris A. Exempelvis, om $P(z) = 2 - z + 2z^3$ så är $P(A) = 2I - A + 2A^3$. Låt A vara en 2×2 matris. Visa att det finns ett nollskiljt polynom $P \in \mathbb{P}_4$ så att $P(A)$ är nollmatrisen. (4 p)

8.

a) Låt $H = \{a + (a + b)t + bt^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Bevisa att H är ett underrum till $\mathbb{P}_2$.

b) Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt.$$

Bestäm en ortogonal bas för H.

c) Beskriv hur man kan bestämma a och b så att

$$\int_0^1 (t^2 + a + (a + b)t + bt^2)^2\,dt$$

blir så liten som möjligt. (4 p)

9.

a) Bestäm samtliga lösningar till $y'' + y = 12x^2 \sin(x)$. (4 p)

b) För differentialekvationerna nedan ge en lämplig ansats för en partikulärlösning och beskriv hur man går tillväga för att beräkna den (märk att du behöver inte bestämma partikulärlösningen).

i. $y'' + y = \sin^2(3x)$.

ii. $y'' + 2y' + y = 3^x$. (4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG M0049M ~~25/2-20~~ 01/04-20

1 a) POLYNOMET ÄR REELLT OCH DET FÖLJER ATT $2-3i$ OCKSÅ ÄR ETT NOLLSTÄLLE. FAKTORSATSEN GER ATT $z-(2+3i)$ OCH $z-(2-3i)$ BÅDA ÄR FAKTORER I $P(z)$, OCH DÅ ÄR OCKSÅ PRODUKTEN DET.* DET GÄLLER:

$$(z-(2+3i))(z-(2-3i)) = z^2-4z+13.$$

POLYNOMDIVISION:

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2+6z+10 \\
\hline
z^2-4z+13 & z^4+2z^3-z^2+38z+130 \\
 & z^4-4z^3+13z^2 \\
\hline
 & 6z^3-14z^2+38z+130 \\
 & 6z^3-24z^2+78z \\
\hline
 & 10z^2-40z+130 \\
 & 10z^2-40z+130 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

⟵ VISSTE ATT DIVISIONEN SKULLE GÅ JÄMNT UT

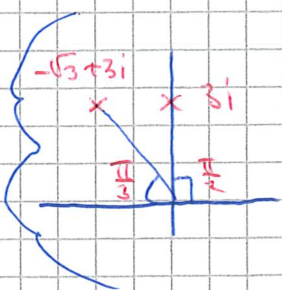
$\therefore\ P(z) = (z^2-4z+13)(z^2+6z+10)$

KVAR ATT LÖSA: $z^2+6z+10=0 \Leftrightarrow z=-3\pm\sqrt{9-10} = -3\pm i$

SAMTLIGA NOLLSTÄLLEN ÄR: $2+3i,\ 2-3i,\ -3+i,\ -3-i$

b) $\arg\dfrac{3i}{(-\sqrt{3}+3i)^3} = \arg(3i) - 3\arg(-\sqrt{3}+3i) =$

$= \dfrac{\pi}{2} - 3\,\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi$



$\therefore$ ETT ARGUMENT ÄR $\dfrac{\pi}{2}$

* MAN "SKALAR" AV EN FAKTOR I TAGET.

2. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ EN BAS FÖR $\mathrm{Col}\,A$ ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{B}$

FÖR NOLLRUMMET: x_1, x_3 BUNDNA, x_2, x_4, x_5 FRIA

$x_2 = s,\ x_4 = t,\ x_5 = u.$

$x_3 = -\frac{3}{5}x_4 - x_5 = -\frac{3}{5}t - u$

$x_1 = -2x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -2s + \frac{6}{5}t + 2u - t - u$

$= -2s + \frac{1}{5}t + u$

∴ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s + \frac{1}{5}t + u \\ s \\ -\frac{3}{5}t - u \\ t \\ u \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

∴ EN BAS FÖR $\mathrm{Nul}\,A$ ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ TY $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

(SER MAN INTE DETTA DIREKT STÄLLER MAN UPP $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ OCH LÖSER)

3. a) TEORIN GER ATT $M = \left[[T(1+t)]_{B_2} \; [T(1-t)]_{B_2} \; [T(1+t^2)]_{B_2} \right]$

$T(1+t) = 2t \cdot 1 + 2 = 2t + 2$; $[T(1+t)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1-t) = 2t(-1) + 0 = -2t$; $[T(1-t)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1+t^2) = 2t \cdot 2t + 2 = 4t^2 + 2$; $[T(1+t^2)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \underline{M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$

b) ATT $T: V \to W$ ÄR LINJÄR BETYDER TVÅ SAKER.
FÖR DET FÖRSTA OPERATORN SKA VARA HOMOGEN, DVS
FÖR VARJE $c \in \mathbb{R}$ OCH $\bar{u} \in V$ SÅ SKA DET GÄLLA
$\underline{T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})}$
FÖR DET ANDRA SKA OPERATORN VARA ADDITIV, DVS
FÖR VARJE VAL AV $\bar{u}, \bar{v} \in V$ SÅ SKA DET GÄLLA ATT
$\underline{T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})}$

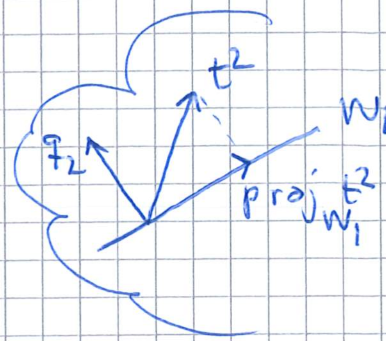
EXEMPEL PÅ ICKE LINJÄR:

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$ ELLER
$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(p) = 1 + p(t)$
$\vdots$

4. a) GRAM-SCHMIDT

1) $q_1(t) = t$, $W_1 = \text{Span}\{q_1\}$

2) $q_2(t) = t^2 - \text{proj}_{W_1} t^2 =$



$= t^2 - \dfrac{\langle t^2, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t =$

$\ulcorner \langle t^2, t\rangle = \int_0^1 t^2 \cdot t \, dt = \frac{1}{4}$

$\langle t, t\rangle = \int_0^1 t \cdot t \, dt = 1/3 \lrcorner$

$= t^2 - \dfrac{1/4}{1/3} t = t^2 - \frac{3}{4} t$ Välj: $\tilde{q}_2(t) = 4t^2 - 3t$

$\therefore$ EN ORTOGONALBAS FÖR H ÄR $\{t, 4t^2 - 3t\}$

b) $\text{proj}_H 1 = \dfrac{\langle 1, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t + \dfrac{\langle 1, 4t^2-3t\rangle}{\langle 4t^2-3t, 4t^2-3t\rangle}(4t^2-3t) =$

$\ulcorner \langle 1, t\rangle = \int_0^1 1 \cdot t \, dt = 1/2$

$\langle t, t\rangle = 1/3$

$\langle 1, 4t^2 - 3t\rangle = \int_0^1 4t^2 - 3t \, dt = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$

$\langle 4t^2-3t, 4t^2-3t\rangle = \int_0^1 (4t^2-3t)(4t^2-3t) \, dt =$

$= \int_0^1 16t^4 - 24t^3 + 9t^2 \, dt = \frac{16}{5} - 6 + 3 = \frac{1}{5} \lrcorner$

$= \dfrac{1/2}{1/3} t - \dfrac{1/6}{1/5}(4t^2 - 3t) = \frac{3}{2} t - \frac{5}{6}(4t^2 - 3t)$

$= -\frac{10}{3} t^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) t = -\frac{10}{3} t^2 + 4t$

5 a) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR.EKV.: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = -1$ MULT. 2

$\therefore y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$

PART.: ANSATS: $y_p = z(x)e^{-x}$

$y_p' = z'e^{-x} - ze^{-x}, \; y_p'' = z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}$

IN I EKV.:

$z''\cancel{e^{-x}} - 2z'\cancel{e^{-x}} + z\cancel{e^{-x}} + 2(z'\cancel{e^{-x}} - z\cancel{e^{-x}}) + z\cancel{e^{-x}} = x\cancel{e^{-x}}$

$\Leftrightarrow z'' \cancel{-2z'} + \cancel{z} \cancel{+2z'} \cancel{-2z} + \cancel{z} = x \Leftrightarrow z'' = x$

DENNA KAN LÖSAS MED ANSATS ELLER PRIMITIV TVÅ GÅNGER OM.

ANSATS: $z = x^2(ax + b) = ax^3 + bx^2, \; z'' = 6ax + 2b$

OCH MAN FÅR $6ax + 2b = x \Leftrightarrow a = 1/6, b = 0$

$\therefore z = \frac{1}{6}x^3 \quad \therefore y_p = \frac{1}{6}x^3e^{-x}$

SAMTLIGA LÖSNINGAR (DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN) GES AV

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}$$

b) i) DELA UPP I TVÅ OLIKA PARTIKULÄRLÖSNINGAR, EN FÖR $\sin 3x$ OCH EN FÖR $-2\cos 4x$. LÄGG SEDAN IHOP.

FÖR $\sin 3x$ GÖRS ANSATSEN $y_{p_1} = a\sin 3x + b\cos 3x$

OCH FÖR $-2\cos 4x$, $y_{p_2} = c\sin 4 + d\cos 4x$.

TILL SIST $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

ii) KOMPLEX HJÄLPEKVATION $u'' + u = 2xe^{(1+i)x}$

ANSATS: $u_p = z(x)e^{(1+i)x}$ OCH SLUTLIGEN $y_p = \operatorname{Re} u_p$

6 $\begin{cases} x' = 5x + 4y & , x(0) = 1 \\ y' = 8x + y & , y(0) = 4 \end{cases}$

PÅ MATRISFORM $\bar{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $\begin{cases} \bar{x}' = A\bar{x} \\ \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{cases}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

EGENVÄRDE: KAR.EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\iff (5-\lambda)(1-\lambda) - 32 = 0 \iff 5 - 6\lambda + \lambda^2 - 32 = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0$

$\iff \lambda = 3 \pm \sqrt{9+27} = 3 \pm 6 = -3 \,;\, 9$

[KOLL: $-3 + 9 = +6$
$\operatorname{tr} A = 5 + 1 = 6$
$(-3)9 = -27$
$\det A = 5 - 32 = -27$]

EGENVEKTORER:

$\lambda = -3$: $A\bar{v} = -3\bar{v} \iff (A + 3I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN
x_2 FRI, $x_2 = t$ GER $x_1 = -\frac{1}{2}t$ $\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

VÄLJ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 9$: $A\bar{v} = 9\bar{v} \iff (A - 9I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN | $x_2 = t$ GER
x_2 FRI | $x_1 = t$ $\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

VÄLJ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

LÖSNINGARNA GES AV: $\bar{x}(t) = A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-3t} + B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{9t}$

MEN, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -A + B = 1 \\ 2A + B = 4 \end{cases}$

$\iff A = 1, B = 2$

$\therefore \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-3t} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{9t}$ PÅ KOMPONENTFORM

$\begin{cases} x(t) = -e^{-3t} + 2e^{9t} \\ y(t) = 2e^{-3t} + 2e^{9t} \end{cases}$

7 a) VÄLJ EN BAS FÖR P_{98}, LÄMPLIGEN $\{1, t, t^2, \ldots, t^{98}\} = B$

LINJÄRT BEROENDE OCH OBEROENDE ÄR PRECIS SAMMA I $\{p_1, p_2, \ldots, p_{87}\}$ SOM I $\{[p_1]_B, [p_2]_B, \ldots, [p_{87}]\}$

NU KAN VI ANVÄNDA TEKNIKEN FÖR ATT FINNA BAS I KOLONNRUM, SÅ GAUSSELIMINERA OCH VÄLJ UT PIVOT-KOLUMNERNA I $[[p_1]_B\ [p_2]_B \ldots [p_{87}]]$

MOTSVARANDE POLYNOM GER NU EN BAS FÖR H.

b) LÅT $M_{2\times2}$ BETECKNA VEKTORRUMMET AV SAMTLIGA 2×2 MATRISER. DET GÄLLER ATT $\dim M_{2\times2} = 4$

(EN BAS ÄR $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$)

DET GÄLLER DÄRFÖR ATT VARJE MÄNGD MED 5 ELEMENT (ELLER FLER) ÄR LINJÄRT BEROENDE.

SÅ DET FINNS c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 ALLA EJ NOLL SÅ

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + c_4 A^4 = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ETT POLYNOM SOM FUNGERAR ÄR SÅLEDES

$$p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4$$

8 a) DIREKT SES ATT $H = \text{Span}\{1+t, t+t^2\}$ OCH

LINJÄRA HÖLJEN ÄR ALLTID UNDERRUM.

b) BETRAKTA $\mathbb{P}_2$ OCH UTRUSTA DET MED SKALÄRPRODUKTEN

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt$$

I c) UPPGIFTEN

DET SOM SKA MINIMERAS ÄR DÅ $\| t^2 + a + (a+b)t + bt^2 \|^2$

AHA, $-t^2$ SKA PROJICERAS ORTOGONALT PÅ H.

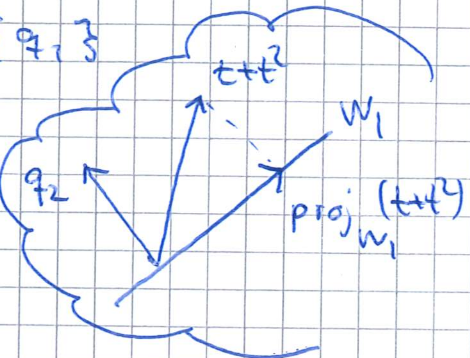
VI BESTÄMMER DÄRFÖR FÖRST EN ORTOGONALBAS FÖR H.

GRAM – SCHMIDT.

1) $q_1(t) = 1+t$, $W_1 = \text{Span}\{q_1\}$

2) $q_2(t) = t+t^2 - \text{proj}_{W_1}(t+t^2)$

$$= t+t^2 - \frac{\langle t+t^2, 1+t \rangle}{\langle 1+t, 1+t \rangle}(1+t)$$



$$\langle t+t^2, 1+t \rangle = \int_0^1 (t+t^2)(1+t)\, dt$$

$$= \int_0^1 t+t^2+t^2+t^3\, dt = \int_0^1 t+2t^2+t^3\, dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{17}{12}$$

$$\langle 1+t, 1+t \rangle = \int_0^1 (1+t)^2\, dt = \int_0^1 1+2t+t^2\, dt = 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$= t+t^2 - \frac{17/12}{7/3}(1+t) = t+t^2 - \frac{17}{28}(1+t) =$$

$$= -\frac{17}{28} + \frac{11}{28}t + t^2 .$$ NÄCA $-17 + 11t + 28t^2$

$\therefore$ EN ORTOGONALBAS ÄR $\{1+t, -17+11t+28t^2\}$

c)

NU BESTÄMMER I PROJEKTIONEN

$$\text{proj}_H(-t^2) = \frac{\langle -t^2, 1+t \rangle}{\langle 1+t, 1+t \rangle}(1+t) + \frac{\langle -t^2, -17+11t+28t^2 \rangle}{\langle -17+11t+28t^2, -17+11t+28t^2 \rangle}(-17+11t+28t^2)$$

$$= -\frac{1}{4}(1+t) - \frac{23}{1164}(-17+11t+28t)$$

$$= \ldots$$

HÄRUR FÅS a OCH b SOM MINIMERAR INTEGRALEN

9 a) $y'' + y = 12x^2 \sin(x)$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR.EKV.: $r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ $\therefore y_h = A\cos x + B\sin x$

PART.: KOMPLEX HJÄLPEKVATION: $u'' + u = 12x^2 e^{ix}$

ANSATS: $u_p(x) = z(x)e^{ix}$, $u_p' = z'e^{ix} + ize^{ix}$

$u_p'' = z''e^{ix} + 2iz'e^{ix} - ze^{ix}$.

IN I EKV.: $z''e^{ix} + 2iz'e^{ix} \cancel{- ze^{ix}} \cancel{+ ze^{ix}} = 12x^2 e^{ix} \iff$

$z'' + 2iz' = 12x^2$

ANSATS: $z = (ax^2 + bx + c)x = ax^3 + bx^2 + cx$, $z' = 3ax^2 + 2bx + c$

$z'' = 6ax + 2b$ IN I EKV.:

$6ax + 2b + 2i(3ax^2 + 2bx + c) = 12x^2$

IDENT.: $\left.\begin{aligned} x^0 &: 2b + 2ic = 0 \\ x^1 &: 6a + 4bi = 0 \\ x^2 &: 6ia = 12 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &a = -2i \\ &-12i + 4bi = 0 \iff b = 3 \\ &c = 3i \end{aligned}$

$\therefore z = -2ix^3 + 3x^2 + 3ix$, $u_p = (-2ix^3 + 3x^2 + 3ix)e^{ix}$

OCH $y_p = \operatorname{Im} u_p = \operatorname{Im}\left(-2ix^3 + 3x^2 + 3ix\right)(\cos x + i\sin x)$

$= -2x^3\cos x + 3x^2\sin x + 3x\cos x$

$\therefore y = y_h + y_p = \underline{\underline{A\cos x + B\sin x - 2x^3\cos x + 3x^2\sin x + 3x\cos x}}$

b) i) $\sin^2(3x) = \dfrac{1 - \cos 6x}{2}$ ANSATS $y_{p_1} = a$

$y_{p_2} = b\cos 6x + c\sin 6x$

OCH $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

ii) $3^x = e^{x\ln 3}$ SÅ $y_p = ae^{x\cdot\ln 3}$ ÄR EN

FUNGERANDE ANSATS