



Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-12-21**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-19 **3**, 20-24 **4**, 25-30 **5**.

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per Lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Antag att $t > 0$. Visa olikheten

$$2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2} < 2 - \frac{1}{t+1}.$$

(2p)

- (b) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

(3p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+t^2) - (1-t^2)}}{(1+t) - (1-t)}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

(2p)

3. Finn de värden på r för vilka kurvorna

$$y = f(x) = \arcsin rx$$

och

$$y = g(x) = \arccos rx$$

skär varandra under rät vinkel. I vilka punkter skär kurvorna varandra? **Ledning:** *finns det något enkelt samband mellan dessa funktioner?*

(5p)

4. Ekvationen

$$4x^2y^2 = 9x^2 + 9y^2$$

beskriver en så kallad *kruciform-kurva*.

(a) Finn tangenten till kurvan genom punkten $(\sqrt{3}, 3)$.

(4p)

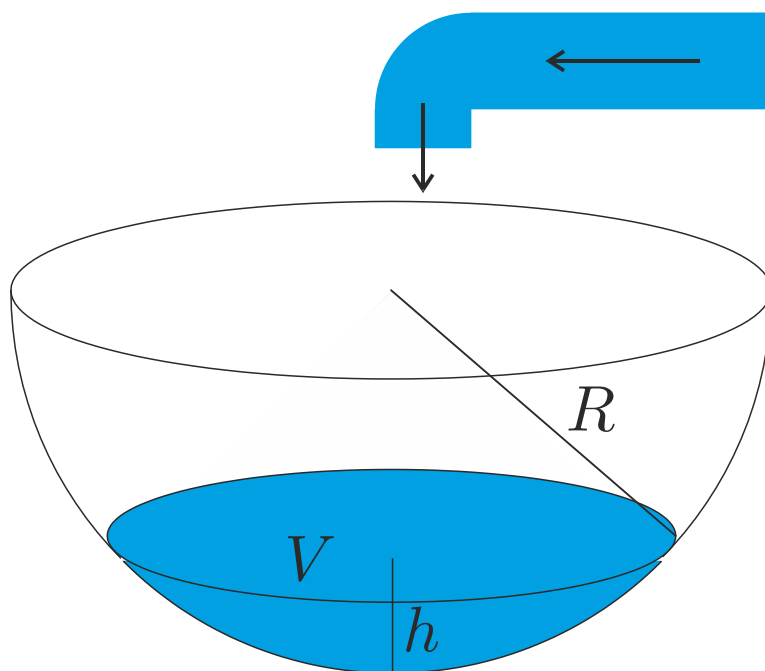
(b) Beräkna arean av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten i uppgift 4.(a).

(1p)

5. Betrakta funktionen

$$y = x^{1/x}, \quad x > 0.$$

- (a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. **Ledning:** skriv först om funktionen på lämpligt sätt. (3p)
- (b) Ange funktionens värdemängd. Motivera! (1p)
- (c) Avgör vilket av talen $\sqrt[3]{3}$ och $\sqrt[4]{4}$ som är störst. Motivera! (1p)
6. En tank har halvsfärisk form med radie $R = 2$ m. Tanken fylls på uppifrån med ett inflöde av vatten, se nedanstående figur.



När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen V av

$$V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3} \text{ m}^3.$$

Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är $\frac{1}{2}$ m och vatten tillförs med en hastighet av 11 liter per sekund? (5p)