



## Övningstentamen 2

M0049M

Tentamensdatum: **xx-xx-xx**

Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: xxx.

Antal uppgifter: 7, totalpoäng: 28.

Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

*Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Lycka till!

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till  $z^3 + 8i = 0$ . Ge svaret både på polär och rektangulär form.

b) För vilka komplexa tal  $z$  gäller det att  $\frac{iz - 1}{iz + 1}$  är rent imaginärt? (4 p)

2. Låt  $\mathcal{B} = \{1 + t^3, 1 + t^2, 1 + t, 1 + 2t\}$ .

a) Visa att  $\mathcal{B}$  är en bas för  $\mathbb{P}_3$ .

b) Bestäm  $[t^3]_{\mathcal{B}}$ . (4 p)

3. Vilket är det minsta värdet

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz$$

kan få då  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ? Ge exempel på några punkter där minimum antas. (4 p)

4. Utrusta  $\mathbb{P}_2$  med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

och låt  $H$  vara underrummet

$$H = \text{span} \{1, t^2\}.$$

Bestäm  $\text{proj}_H t$ . (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet  $xy' = 1 + y^2$ ,  $y(e) = 1$ .

b) Lös begynnelsevärdesproblemet  $xy' - 2y = x^3 \sin x$ ,  $y(\pi/2) = 1$ . (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 4e^{-x} + x$ . Ledning: binomialsatsen. (4 p)

7. Låt  $A$  vara en kvadratisk matris.

a) Definiera begreppen egenvektor och egenvärde för  $A$ .

b) Visa att  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är linjärt oberoende om de är egenvektorer för  $A$  med olika egenvärden. (4 p)