LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2022-05-25**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 140, antal sidor: 2.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Lös $z^5 = -1 + i$. Ge svaret på polär form.

b) Bestäm samtliga z för vilka det gäller att $z^3 + \bar{z}^3 = 0$. (4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{1 + t, 1 - t^2, -t + t^2\}$.

a) Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

b) Bestäm koordinaterna för $p(t) = 1 - t - t^2$ relativt $\mathcal{B}$. (4 p)

3. Diagonalisera

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ortogonalt. (4 p)

4. Betrakta följande data

x	-1	0	1	2
y	2	1	-1	-2

. Bestäm den funktion på formen $y = A + Bx^2$ som bäst anpassar till datapunkterna i minstakvadratmetodens mening. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 4y' + 8y = 5 \sin 2x$. (4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till $x^2y'' - xy' - 3y = 2x^3$, $x > 0$. (4 p)

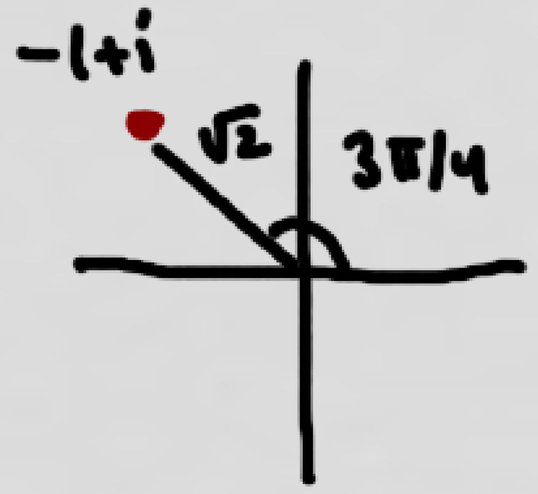
7.

a) Låt A vara en matris. Ge definitioner för $\mathrm{Col}A$, $\mathrm{Nul}A$ och $\mathrm{rank}A$.

b) Antag att A är en kvadratisk matris sådan att $\mathrm{Nul}A = \mathrm{Col}A$. Bestäm $\mathrm{Nul}(A^2)$. (4 p)

Lösningsförslag M0049M, 220525

1. a) $z^5 = -1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$



ANSÄTS: $z = re^{i\varphi}$

D-M: $z^5 = r^5 e^{i5\varphi}$ OCH MAN FÅR

$$r^5 e^{i5\varphi} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \iff$$

$$\begin{cases} r^5 = \sqrt{2} \\ 5\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\therefore \ r = 2^{\frac{1}{10}}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$\therefore \ z_k = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k\right)}, \ k = 0,1,2,3,4.$$

b) LÅT $z = a+bi$ OCH MAN FÅR

$$z^3 + \bar{z}^3 = 0 \iff (a+bi)^3 + (a-bi)^3 = 0 \iff$$

$$a^3 + \cancel{3a^2bi} - 3ab^2 - \cancel{b^3i} + (a^3 - \cancel{3a^2bi} - 3ab^2 + \cancel{b^3i}) = 0 \iff$$

$$2a^3 - 6ab^2 = 0 \iff a(a^2 - 3b^2) = 0 \iff$$

$a = 0$ ELLER $a = \pm\sqrt{3}\,b$. $\therefore$ $z = ti$; $z = \pm\sqrt{3}\,t + ti$; $t \in \mathbb{R}$

2. $B = \{1+t, 1-t^2, -t+t^2\}$

a) $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ TY $\{1, t, t^2\}$ EN BAS

EFTERSOM B INNEHÅLLER TRE (RÄTT ANTAL) ELEMENT RÄCKER DET ATT VISA ATT B ÄR LINJÄRT OBEROENDE (SPÄNNER UPP FÅS PÅ KÖPET).

VISA L.O.: $c_1(1+t)+c_2(1-t^2)+c_3(-t+t^2)=0$

ALLA t

IDENT.:

$$\begin{aligned} t^0&: c_1+c_2=0 \\ t^1&: c_1-c_3=0 \\ t^2&: -c_2+c_3=0 \end{aligned}$$

PÅ MATRISFORM:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

ALLA VARIABLER BUNDNA $\therefore$ $c_1=c_2=c_3=0$

$\therefore$ LINJÄRT OBEROENDE. //

b) LÅT KOORDINATERNA VARA $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ OCH

ENLIGT DEFINITIONEN SKA DET DÅ GÄLLA

$$c_1(1+t)+c_2(1-t^2)+c_3(-t+t^3)=1-t-t^2$$

IDENT.:

$$\begin{aligned} t^0&: c_1+c_2=1 \\ t^1&: c_1-c_3=-1 \\ t^2&: -c_2+c_3=-1 \end{aligned}$$

PÅ MATRISFORM:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ $2c_3=1 \iff c_3=1/2$

$c_2=2-c_3=3/2$

$c_1=1-c_2=-1/2$

$\therefore$ $[1-t-t^2]_B = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ //

[KONTROLL:
$-\frac{1}{2}(1+t)+\frac{3}{2}(1-t^2)+\frac{1}{2}(-t+t^2)=1-t-t^2$ OK]

3. Ska skriva A som PDP^T med $P^T = P^{-1}$.

Egenvärden: Kar. ekv.: $\det(A-\lambda I)=0 \iff$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 2\\ -1 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix}1-\lambda & -2+\lambda & 2\\ -1 & 2-\lambda & 2\\ 2 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$L(-1)$

$$\iff (2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \iff (2-\lambda)\Bigg(1\cdot \overbrace{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}}^{=2+\lambda-4=\lambda-2} +$$

$$+1\underbrace{\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}}_{=-2+\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2+\lambda-6}\Bigg)=0 \iff (2-\lambda)\underbrace{\left(\lambda-2+\lambda^2+\lambda-6\right)}_{=\lambda^2+2\lambda-8}=0$$

Kvar att lösa: $\lambda^2+2\lambda-8=0 \iff \lambda=-1\pm\sqrt{1+8}=-4;2$

$\therefore$ 2 mult. 2; -4 [Koll: $2+2-4=0$; $\operatorname{tr}A=1+1-2=0$ OK]

Egenvektorer:

$\lambda=-4$: $A\bar v=-4\bar v \iff (A+4I)\bar v=\bar 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}5 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 5 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 5 & 2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & 0\\ 0 & 6 & 3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

x_1, x_2 bundna x_3 fri. $x_3=t$ ger $x_2=-t/2$, $x_1=-t/2$

$\therefore \bar v = t\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}$ välj $\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$ välj igen $\begin{bmatrix}-1/\sqrt6\\-1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{bmatrix}$ //

$\lambda=2$: $A\bar v=2\bar v \iff (A-2I)\bar v=\bar 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

x_1 bunden, x_2, x_3 fria. $x_2=s$, $x_3=t$ ger $x_1=-s+2t$

$\therefore \bar v = s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ välj $\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}}_{\bar v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}}_{\bar v_2}$. Dessa måste nu ortogonaliseras.

G-S: $\bar u_1=\bar v_1$

$$\bar u_2=\bar v_2 - \frac{\bar v_2\cdot\bar v_1}{\bar v_1\cdot \bar v_1}\bar v_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\therefore \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ normera: $\begin{bmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\1/\sqrt3\end{bmatrix}$

Nu fås $A=PDP^T$, $P^T=P^{-1}$

med $P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt6 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt3\\ -1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt3\\ 2/\sqrt6 & 0 & 1/\sqrt3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ //

4.

x	-1	0	1	2
y	2	1	-1	-2

; MODELL: $y = A + Bx^2$

SÄTT IN DATAPUNKTERNA I MODELLEN:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = A \\ -1 = A + B \\ -2 = A + 4B \end{cases}$$

(SYSTEMET SAKNAR UPPENBARLIGEN LÖSNING ETT A+B KAN INTE BÅDE VARA 2 OCH −1.)

PÅ MATRISFORM:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

MOTSVARANDE NORMALEKVATION ÄR DÅ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (=)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} (3) \\ (2) \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 18 & -7 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 0 \\ 12 & 36 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & -14 \end{array}\right]$$

$\therefore B = \frac{-14}{18} = \frac{-7}{9}$

$A = -\frac{3}{2}B = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 9} = \frac{7}{6}$

$\therefore$ DEN OPTIMALA FUNKTIONEN PÅ FORMEN $A + Bx^2$ ÄR

$$y = \frac{7}{6} - \frac{7}{9}x^2$$

5. $y'' + 4y' + 8y = 5\sin 2x$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR. EKV.: $r^2 + 4r + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$r = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i$

$\therefore y_h = e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

PART.: ANSATS: $y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$

VI FÅR: $y_p' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$

$y_p'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

IN I EKV.:

$-4a\cos 2x - 4b\sin 2x + 4(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x)$

$+ 8(a\cos 2x + b\sin 2x) = 5\sin 2x$

IDENT.:

$$\begin{array}{ll} \cos: -4a + 8b + 8a = 0 \Leftrightarrow & a + 2b = 0 \quad (1) \\ \sin: -4b - 8a + 8b = 5 \Leftrightarrow & -2a + b = \frac{5}{4} \quad (2) \end{array}$$

$2(1)+(2)$: $5b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$, SOM GER $a = -\frac{1}{2}$

$\therefore y_p = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$

$\therefore$ DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN ÄR

$y = y_h + y_p =$

$= e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$

6. $x^2y'' - xy' - 3y = 2x^3, \quad x>0.$

DETTA ÄR EN EULEREKVATION.

LÅT $x = e^t$ OCH $z(t) = y(e^t) = y(x)$

DETTA GER

$xy' = z'$ OCH $x^2y'' = z'' - z'$

EKVATIONEN TRANSFORMERAS DÄRFÖR TILL

$z'' - z' - z' - 3z = 2e^{3t} \iff$

$z'' - 2z' - 3z = 2e^{3t}.$

"HOMOGEN + PART."

Hom. KAR.EKV.: $r^2 - 2r - 3 = 0 \iff$

$r = 1 \pm \sqrt{1+3} = 3; -1$

$\therefore z_h(t) = Ae^{3t} + Be^{-t}$

PART. ANSATS: $z_p = u(t)e^{3t}$

(MÅSTE HA ae^{3t} EJ FUNKAR TY HOM.LÖS.)

$z_p' = u'e^{3t} + u3e^{3t}, \quad z_p'' = u''e^{3t} + 6u'e^{3t} + 9ue^{3t}$

IN I EKV.:

$u''\cancel{e^{3t}} + 6u'\cancel{e^{3t}} + 9u\cancel{e^{3t}} - 2(u'\cancel{e^{3t}} + 3u\cancel{e^{3t}}) - 3u\cancel{e^{3t}} = 2\cancel{e^{3t}}$

$\iff$

$u'' + 4u' = 2$

ANSATS: $u = at, u' = a, u'' = 0$

$4a = 2 \iff a = \frac{1}{2}$

$\therefore u = \frac{1}{2}t$

$\therefore z_p = \frac{1}{2}te^{3t}$

$\therefore z = z_h + z_p = Ae^{3t} + Be^{-t} + \frac{1}{2}te^{3t}$

TRANSFORMERA TILLBAKA!

$$y(x) = Ax^3 + \frac{B}{x} + \frac{1}{2}x^3 \ln x$$

7. a) LÅT $A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$; DÄR

$\bar{a}_i \in \mathbb{R}^m$ ÄR MATRISENS KOLUMNER.

$$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\} =$$

$$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m : \bar{x} = A\bar{c} \text{ FÖR NÅGOT } \bar{c} \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\mathrm{Nul}\,A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\}$$

$$\mathrm{rank}\,A = \dim \mathrm{Col}\,A$$

b) $\bar{x} \in \mathrm{Nul}(A^2) \iff A^2\bar{x} = \bar{0} \iff$

$A\bar{x} \in \mathrm{Nul}\,A \iff A\bar{x} \in \mathrm{Col}\,A$

DETTA SISTA PÅSTÅENDE ÄR ALLTID SANT ENLIGT DEFINITIONEN AV Col A.

$\because$ ALLA $\bar{x} \in \mathrm{Nul}(A^2)$.

OM A $n \times n$ MATRIS SÅ $\mathrm{Nul}(A^2) = \mathbb{R}^n$