Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-08-16**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **000** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Kalkylator EJ tillåten. Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Husen längs Pells gata är numrerade i ordning 1, 2, 3, ... ända upp till 49.

   (a) Vad är summan av alla husnumren på Pells gata? (2p)

   Lösning: Summan av de n första heltalen $1, 2, 3, \ldots, n$ är en aritmetisk summa med värde

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

   Det innebär att summan av numren av alla 49 hus längs gatan är

$$S_{49} = \sum_{k=1}^{49} k = \frac{49 \cdot 50}{2} = 49 \cdot 25 = 7^2 \cdot 5^2 = 35^2 = 1225.$$

   (b) Ramanujan bor längs denna gata i hus nummer m. En dag observerar han att summan av numren på husen till vänster om hans hus är samma som summan av numren på husen till höger om hans hus. Vad är m? (3p)

Lösning: Låt oss säga att husen är numrerade $1, 2, 3, \ldots, 49$ från vänster till höger. Om Ramanujan då bor i hus m så är summan av husnumren på vänster sida av hans hus

$$S_{m-1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) = \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{(m-1)\,m}{2}.$$

Vi vet att summan av numren på husen till vänster av hans hus är samma som summan av numren på husen till höger av hans hus. Därmed får vi totala summan av alla 49 husnumren som

$$S_{49} = \underbrace{S_{m-1}}_{\text{hus } 1,2,\ldots,m-1} + \underbrace{m}_{\text{hus } m} + \underbrace{S_{m-1}}_{\text{hus } m+1,\ldots,49} = 2 \cdot \frac{(m-1)\,m}{2} + m = m^2 - m + m = m^2.$$

Då vi ovan redan beräknat att $S_{49} = 35^2$ konkluderar vi därför att Ramanujan bor i hus $m = 35$.

Alternativ lösning: Likt ovan vet vi att summan av husnumren på vänster sida av hus m är

$$S_{vänster} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) = S_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{(m-1)\,m}{2}.$$

Summan av husnumren till höger om hus m är då

$$\begin{aligned} S_{höger} &= (m+1) + (m+2) + \ldots + 49 = \sum_{k=m+1}^{49} k = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{49} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} k\right) = 35^2 - \frac{m\,(m+1)}{2}. \end{aligned}$$

dvs totala summan av alla husnummer på gatan $S_{49} = 35^2$ minus summan S_m av husnumren från 1 upp till och med m. Nu är $S_{vänster} = S_{höger}$, dvs

$$\frac{(m-1)\,m}{2} = 35^2 - \frac{m\,(m+1)}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{(m-1)\,m}{2} + \frac{m\,(m+1)}{2} = 35^2.$$

Således måste $m = 35$.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$
(1p)

Lösning: Vi har att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin x^2}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{\sin x^2}{x^2}} \underset{\text{STD.}}{=} \frac{1^2}{1} = 1.$$

Alternativ lösning: Eftersom gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ så taylorutvecklar vi täljare och nämnare kring $x = 0$. Om

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \Rightarrow f(0) = \sin^2 0 = 0, \\ g(x) &= \sin x^2 \Rightarrow g(0) = \sin 0^2 = 0, \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x \cos x \Rightarrow f'(0) = 2\sin 0 \cos 0 = 0, \\ f''(x) &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x \Rightarrow f''(0) = 2\cos^2 0 - 2\sin^2 0 = 2, \\ g'(x) &= 2x\cos x^2 \Rightarrow g'(0) = 2 \cdot 0 \cos 0^2 = 0, \\ g''(x) &= 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 \Rightarrow g''(0) = 2\cos 0^2 - 4 \cdot 0^2 \sin 0^2 = 2. \end{aligned}$$

Därmed kan vi utveckla täljaren och nämnaren som

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + (x-0)^3 B_1(x) = \\ &= 0 + 0 + \frac{2}{2}x^2 + x^3 B_1(x) = x^2 + x^3 B_1(x), \\ g(x) &= g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{g''(0)}{2}(x-0)^2 + (x-0)^3 B_2(x) = \\ &= 0 + 0 + \frac{2}{2}x^2 + x^3 B_2(x) = x^2 + x^3 B_2(x), \end{aligned}$$

där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade funktioner i en omgivning av 0 eftersom f och g är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara. Alltså blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 B_1(x)}{x^2 + x^3 B_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + xB_1(x)}{1 + xB_2(x)} = \frac{1}{1} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{4+x}-2}.$$

(2p)

Lösning: Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Förlängning av täljare och nämnare med bägge uttryckens rotkonjugat ger

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{4+x}-2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-1\right)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left((1+4x)-1\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{\left((4+x)-4\right)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{1+4x}+1\right)} \\
&= 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{1+4x}+1} = 4\cdot\frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1}+1} = 4\cdot\frac{4}{2} = 8.
\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{4^x-2^x}.$$

(2p)

Lösning: Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Faktorisering ger

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{4^x-2^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2\cdot 2)^x-1}{(2\cdot 2)^x-2^x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\cdot 2^x-1}{2^x\cdot 2^x-2^x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(2^x+1)}{(2^x-1)2^x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2^x+1}{2^x} = \frac{1+1}{1} = 2.
\end{aligned}$$

3. Låt $x>0$ och definiera

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x/4}, \\
g(x) &= k\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

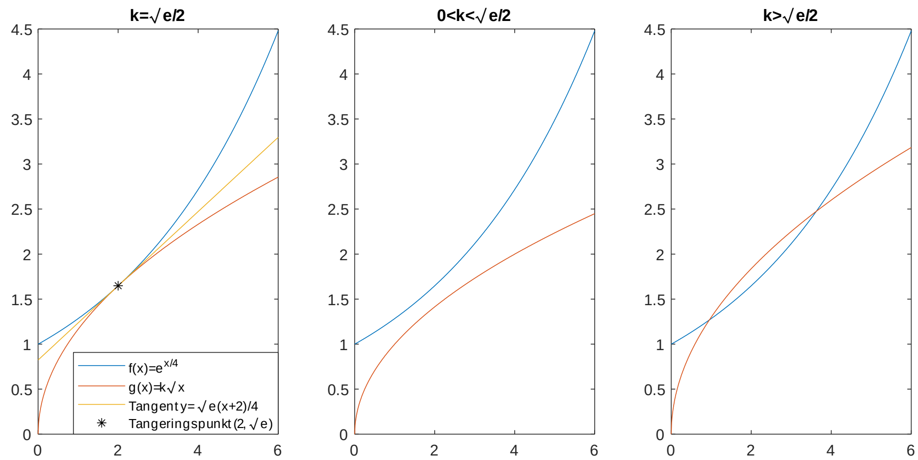
(a) Finn det $k>0$ som gör att funktionerna f och g tangerar varandra i en punkt. (4p)

Ledning: två funktioner tangerar varandra om de i en skärningspunkt $x=a$ har samma tangent.

Lösning: Två deriveringar av f och g ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^{x/4}}{4}>0,\ g'(x)=\frac{k}{2\sqrt{x}}>0, \\
f''(x) &= \frac{e^{x/4}}{16}>0,\ g''(x)=-\frac{k}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}<0.
\end{aligned}$$

Det innebär att både f och g är växande samt att f är konvex men g konkav. Det i sin tur medför att det finns precis ett värde $k=\widetilde{k}$ för vilket kurvorna tangerar varandra. Är k mindre än $\widetilde{k}$ kommer kurvorna aldrig att skära varandra (g ligger alltid under f) och skulle k vara större än $\widetilde{k}$ kommer kurvorna att skära varandra i två punkter, men i dessa skärningspunkter kommer de att ha olika tangenter. Se nedanstående figur:



Antag nu att funktionerna tangerar varandra i punkten $x = a$. Det betyder att $f(a) = g(a)$ (eftersom de måste ha samma y-värde i skärningspunkten) och $f'(a) = g'(a)$ (eftersom de har samma tangent i skärningspunkten). Således får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^{a/4} = k\sqrt{a}, \\ \\ \dfrac{e^{a/4}}{4} = \dfrac{k}{2\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Om vi multiplicerar den andra av dessa ekvationer med 4 och sätter in den i den första ekvationen får vi

$$k\sqrt{a} = e^{a/4} = 4 \cdot \frac{k}{2\sqrt{a}} \Rightarrow ka - 2k = 0 \Leftrightarrow k(a-2) = 0.$$

Alltså är antingen $k = 0$ eller $a = 2$. Men $k = 0$ medför att $e^{a/4} = 0$ vilket är omöjligt. Därmed måste $a = 2$. Insatt i den första ekvationen får vi då

$$e^{2/4} = k\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{e} = k\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Vi konstaterar därför att funktionerna f och g tangerar varandra i punkten $(2, \sqrt{e})$ om $\widetilde{k} = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

(b) Bestäm funktionernas gemensamma tangent för detta värde på k. (1p)

Lösning: Funktionernas gemensamma tangent fås ur enpunktsformeln som

$$y - e^{2/4} = \frac{e^{2/4}}{4}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{4}(x-2) + \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{4}(x+2).$$

4. Definiera

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$$

för $x > 0$.

(a) Visa att f är inverterbar. (1p)

Lösning: Derivering ger

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

Då $x > 0$ så ser vi att $f'(x) > 0$. Därmed är $f(x)$ strängt växande för alla $x \in D(f) = (0, \infty)$ och således också $1 - 1$, det vill säga, inverterbar.

Alternativ lösning: Vi sätter $f(x_1) = f(x_2)$ och visar att det medför att $x_1 = x_2$. Mer specifikt har vi att

$$\begin{gathered} f(x_1) = \sqrt{x_1^2 + 6x_1} = \sqrt{x_2^2 + 6x_2} = f(x_2) \\ \Downarrow \\ x_1^2 + 6x_1 = x_2^2 + 6x_2 \\ \Updownarrow \\ x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 = 0 \\ \Updownarrow \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 6(x_1 - x_2) = 0 \\ \Updownarrow \\ (x_1 - x_2)\underbrace{(x_1 + x_2 + 6)}_{>6 \text{ ty } x_1, x_2 > 0} = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2. \end{gathered}$$

(b) Finn inversen f^{-1} till f. (3p)

Lösning: Vi såg ovan att funktionen f var inverterbar då den var strängt växande för alla $x > 0$. Nu är

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} \sqrt{x^2 + 6x} = 0, \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 6x} = \lim_{x \to \infty} \underbrace{|x|}_{\to \infty} \sqrt{1 + \frac{6}{x}} = +\infty. \end{aligned}$$

Således är värdemängden för f

$$R(f) = \left(\lim_{x \to 0+} f(x), \lim_{x \to \infty} f(x) \right) = (0, \infty)$$

och därmed definitionsmängden för f^{-1}

$$D\left(f^{-1}\right) = R(f) = (0, \infty).$$

Vi söker därför inversen

$$y = f^{-1}(x), \ x > 0.$$

Det innebär att

$$x = f(y) = \sqrt{y^2 + 6y} \Rightarrow x^2 = y^2 + 6y \Leftrightarrow x^2 + 9 = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2 .$$

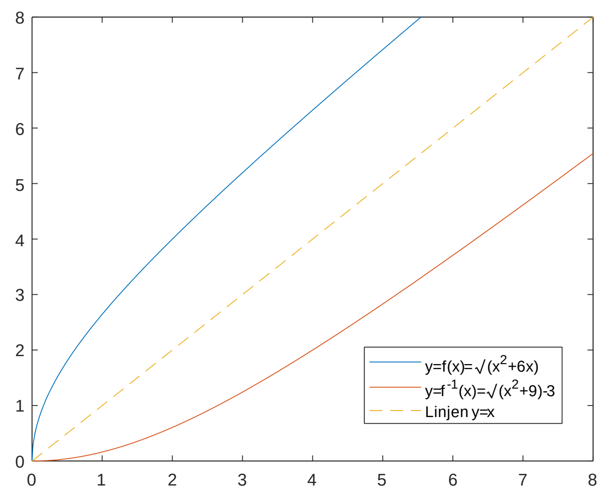
Tar vi kvadratroten ur bägge led får vi således

$$y + 3 = \pm\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow y = -3 \pm \sqrt{x^2 + 9}.$$

Kan bägge dessa funktioner vara invers till f? Nej, vi har ju ovan visat att f är injektiv så enbart den ena kan vara invers till f. Nu vet vi att f avbildar ett positivt x-värde på ett positivt y-värde (ty $R(f) = (0, \infty)$), således måste även det även gälla för inversen. Därmed är funktionen

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 9} - 3, \; x > 0,$$

invers till f.



(c) Bestäm funktionen g om

$$g(f(x)) = (x + 3)^2 .$$

(1p)

Lösning: Eftersom f är inverterbar vet vi att

$$t = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(t) = \sqrt{t^2 + 9} - 3.$$

Således får vi

$$g(t) = g(f(x)) = (x + 3)^2 = \left(f^{-1}(t) + 3\right)^2 = \left(\left(\sqrt{t^2 + 9} - 3\right) + 3\right)^2 = t^2 + 9.$$

Därmed är den sökta funktionen

$$g(x) = x^2 + 9.$$

Alternativ lösning: Vi observerar att

$$g(f(x)) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 = \left(\sqrt{x^2 + 6x}\right)^2 + 9 = (f(x))^2 + 9.$$

Således är

$$g(x) = x^2 + 9.$$

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right) e^{x/2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Lösning: Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom $e^{x/2}$ varken är udda eller jämn. Vi observerar även att

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right) e^{x/2} = (x-1)(x-4)\, e^{x/2}.$$

Därmed skär funktionen x-axeln i punkterna $x = 1$ respektive $x = 4$, samt y-axeln i $f(0) = 4$. Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Vi har att

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^2 - 5x + 4\right) e^{x/2} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\left(x^2 - 5x + 4\right)}^{\to\infty} \overbrace{e^{x/2}}^{\to\infty} = +\infty, \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - 5x + 4\right) e^{x/2} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2 e^{x/2}}_{\to 0 \text{ STD.}} - \underbrace{5x e^{x/2}}_{\to 0 \text{ STD.}} + \underbrace{4e^{x/2}}_{\to 0 \text{ STD.}} = 0,
\end{aligned}$$

där det sista gränsvärdet följer av att en potensfunktion domineras av en exponentialfunktion. Därmed har funktionen en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ åt vänster. Det kan därför möjligen finnas en sned asymptot åt höger. Vi undersöker således gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2 - 5x + 4\right) e^{x/2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\left(x - 5 + \frac{4}{x}\right)}^{\to\infty} \overbrace{e^{x/2}}^{\to\infty} = \infty$$

och konstaterar att så inte är fallet. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $\mathbb{R}$, så inga vertikala asymptoter kan finnas. Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned}
y' &= (2x-5)\, e^{x/2} + \left(x^2 - 5x + 4\right) \frac{e^{x/2}}{2} = \frac{x^2 - x - 6}{2} e^{x/2} = \frac{(x+2)(x-3)\, e^{x/2}}{2}, \\
y'' &= \frac{2x-1}{2} e^{x/2} + \frac{x^2 - x - 6}{2} \cdot \frac{e^{x/2}}{2} = \frac{x^2 + 3x - 8}{4} e^{x/2} = \frac{(x - r_1)(x - r_2)}{4} e^{x/2}
\end{aligned}$$

Således har vi två kritiska punkter $x = -2$ och $x = 3$ där $y' = 0$ samt två möjliga inflexionspunkter

$$x = r_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 8} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

där $y'' = 0$. Teckenstudium ger

		-2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{e^{x/2}}{2}$	$+$		$+$		$+$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har därför ett lokalt maximum i $x = -2$ som är

$$f(-2) = \left((-2)^2 - 5(-2) + 4\right) e^{-2/2} = \frac{18}{e}$$

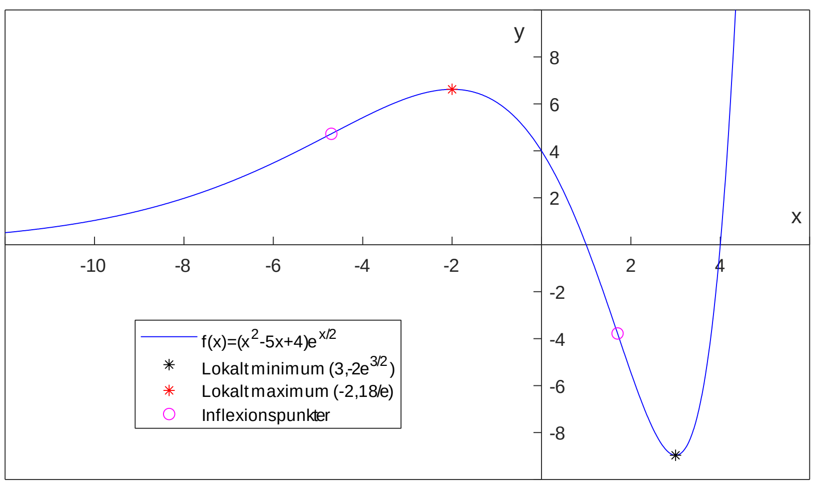
och ett (lokalt och globalt) minimum i $x = 3$ som är

$$f(3) = \left(3^2 - 5 \cdot 3 + 4\right) e^{3/2} = -2e^{3/2}.$$

Däremot saknas globalt maximum.

		$r_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{2}$		$r_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{2}$	
$x - r_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - r_2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{e^{x/2}}{4}$	$+$		$+$		$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

Vi ser därför att bägge punkterna $x = r_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$ är inflexionspunkter. Vi kan slutligen skissera grafen som



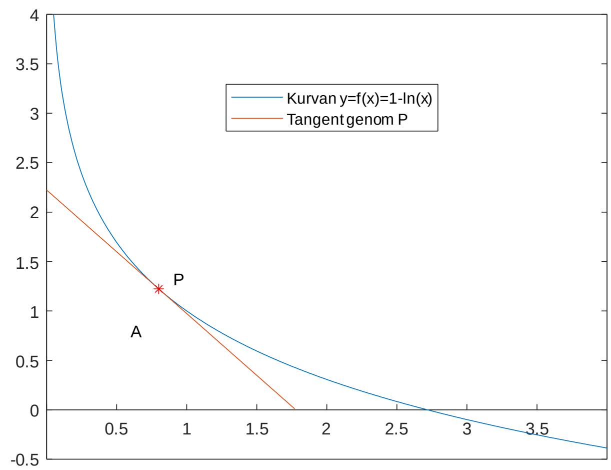
Anmärkning: Inflexionspunkten r_1 ligger mellan -5 och -4 och inflexionspunkten r_2 ligger mellan 1 och 2, ty

$$5 = \sqrt{25} < \sqrt{41} < \sqrt{49} = 7 \Longrightarrow \begin{cases} -5 = \frac{-3-7}{2} < \frac{-3-\sqrt{41}}{2} < \frac{-3-5}{2} = -4, \\ \\ 1 = \frac{-3+5}{2} < \frac{-3+\sqrt{41}}{2} < \frac{-3+7}{2} = 2. \end{cases}$$

6. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = 1 - \ln x, \;\; 0 < x \leq e.$$

(a) Låt $P = (a, f(a))$ vara en punkt på kurvan ovan. Ställ upp ett uttryck för arean A av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten till kurvan f genom punkten P. (2p)



Lösning: Låt oss börja med att finna en tangent till kurvan. Derivatan är här

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{x},$$

därmed blir tangentens lutning i tangeringspunkten $(a, 1 - \ln a)$

$$k = -\frac{1}{a}.$$

Enpunktsformeln ger då tangentens ekvation

$$y - (1 - \ln a) = -\frac{1}{a}(x - a) \Leftrightarrow y = 2 - \ln a - \frac{x}{a} \Leftrightarrow y + \frac{x}{a} = 2 - \ln a.$$

Denna tangent skär x-axeln när den har y-värde noll, dvs i punkten $x_0 = a(2 - \ln a)$. Tangenten skär y-axeln när $x = 0$, dvs för $y_0 = 2 - \ln a$. Därmed blir arean för den sökta triangeln

$$A = A(a) = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{a(2 - \ln a)^2}{2}.$$

(b) Finn det värde $a \in (0, e]$ för vilket arean av triangeln ovan är maximal. (3p)

Lösning: I högra ändpunkten $(a = e)$ har triangeln area

$$A(e) = \frac{e(2 - \ln e)^2}{2} = \frac{e(2 - 1)^2}{2} = \frac{e}{2}.$$

I intervallets vänstra ände går triangelns area mot 0, ty

$$\lim_{a\to 0+} A(a) = \lim_{a\to 0+} \frac{a(2-\ln a)^2}{2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0+}\left(\overbrace{4a}^{\to 0} - \overbrace{4a\ln a}^{\to 0 \text{ STD.}} + \overbrace{\left(a^{\frac{1}{2}}\ln a\right)^2}^{\to 0^2 \text{ STD.}}\right) = 0.$$

Kan det finnas någon inre punkt där arean är maximal? I så fall i en kritisk punkt, ty funktionen A saknar singulära punkter i intervallet $(0, e]$. Derivatan av A är

$$A'(a) = \frac{1}{2}(2-\ln a)^2 + \frac{a}{2}\cdot 2(2-\ln a)\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{(2-\ln a)}{2}(2-\ln a - 2) = -\frac{(2-\ln a)\ln a}{2}.$$

Funktionen har alltså två kritiska punkter, när $\ln a = 2$ respektive när $\ln a = 0$. Den första av dessa ($a = e^2$) ligger dock utanför det intressanta intervallet $(0, e]$. Däremot är den andra ($a = 1$) intressant. Den ger arean

$$A(1) = \frac{1(2-\ln 1)^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2.$$

Detta värde är maximum, ty $e < 4$ medför

$$A(e) = \frac{e}{2} < \frac{4}{2} = 2 = A(1).$$

Den sökta värdet är därför $a = 1$.

Anmärkning: Teckenstudium av derivatan ger

	0		1		e		e^2	
$-\frac{\ln a}{2}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
$2-\ln a$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$A'(a)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$A(a)$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Andraderivatan är

$$A''(a) = -\frac{1}{a} + \frac{\ln a}{a} = -\frac{1-\ln a}{a}.$$

I punkten $a = 1$ har vi då

$$A''(a) = -\frac{1-\ln 1}{1} = -1 < 0 \text{ (maximum)}.$$