Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-10-28**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **6**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att summan

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2n+4}{2^n}.$$

(3p)

Bevis: (Induktion) Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1 = 4 - \frac{6}{2} = 4 - \frac{2+4}{2^1} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2p+4}{2^p} \quad \text{(induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p+1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2(p+1)+4}{2^{p+1}}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{p} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) + (p+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1-1} \underset{\text{ind.ant.}}{=} \\
&= 4 - \frac{2p+4}{2^p} + \frac{p+1}{2^p} = 4 - \frac{(2p+4)-(p+1)}{2^p} \\
&= 4 - \frac{p+3}{2^p} = 4 - \frac{2(p+3)}{2^{p+1}} = 4 - \frac{2(p+1)+4}{2^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Alternativt bevis 1: Definiera funktionen f som den geometriska summan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ för } x \neq 1.$$

Då blir derivatan

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{(n+1-1)x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{1 + (nx-n-1)x^n}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Därmed blir summan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{x=\frac{1}{2}}{=} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \left(n \cdot \frac{1}{2} - n - 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} \\
&= \frac{1 + \left(-\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{4}} = 4 - \frac{4\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2^n} = 4 - \frac{2n+4}{2^n}.
\end{aligned}$$

Alternativt bevis 2: Låt oss kalla summan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Då blir

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

Därmed är

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= 1 + \frac{2-1}{2^1} + \frac{3-2}{2^2} + \frac{4-3}{2^3} + \ldots + \frac{n-(n-1)}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n}{2^n} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) - \frac{n}{2^n} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{n}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Multiplikation av bägge led med 2 ger slutligen

$$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2n}{2^n} = 4 - \frac{4+2n}{2^n}.$$

(b) Bestäm koefficienten för x^3-termen i binomialutvecklingen av

$$\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5.$$

(2p)

Lösning: Binomialsatsen ger att

$$\begin{aligned} \left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(3x^3\right)^{5-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^{5-k}x^{3(5-k)}(-2)^k x^{-k} = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^{5-k}(-2)^k x^{15-3k-k}. \end{aligned}$$

Därmed kommer det att finnas nollskilda potenser av x med exponent $15-4k$ i denna summa. Till exempel innebär det att $k=0$ ger en x^{15}-term, $k=1$ en x^{11}-term, osv. För att få en x^3-term måste därför

$$15 - 4k = 3 \iff k = 3.$$

Den termen är då

$$\binom{5}{3}3^{5-3}(-2)^3 x^3 = 10 \cdot 9 \cdot (-8)\, x^3 = -720x^3,$$

ty

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Den sökta koefficienten är därför -720.

2. Avgör huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}.$$

(1p)

Lösning: När $x \to 0$ så kommer $\sin x \to 0$. Därmed får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left\{\begin{array}{c} t = \arcsin x \\ x = \sin t \end{array}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Alternativt kan vi göra en första ordningens taylorutveckling av täljaren $f(x) = \arcsin x$ kring 0. Vi har

$$\begin{array}{ll} f(x) = \arcsin x & f(0) = \arcsin 0 = 0, \\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1, \\ f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} & f''(c) = \frac{c}{(1-c^2)^{3/2}}, \end{array}$$

så att

$$f(x) = P_1(x) + E_1(x) = \underbrace{0 + 1(x-0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}(x-0)^2}_{E_1(x)} = x + x^2\cdot B(x)$$

där $B(x)$ är en begränsad funktion nära 0 då c ligger mellan 0 och x. Därmed blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2\cdot B(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + x\cdot B(x) = 1.$$

(b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^5 - 1}{h}.$$

(2p)

Lösning: Derivatan av funktionen $f(x) = x^5$ är $f'(x) = 5x^4$. Därmed blir gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^5 - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^5 - 1^5}{h} = f'(1) = 5\cdot 1^4 = 5.$$

Alternativt kan vi utnyttja binomialsatsen och få

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^5 - 1}{h} \\ = \; & \lim_{h\to 0}\frac{(1^5 + 5\cdot 1^4 h + 10\cdot 1^3 h^2 + 10\cdot 1^2 h^3 + 5\cdot 1 h^4 + h^5) - 1}{h} \\ = \; & \lim_{h\to 0} 5 + 10h + 10h^2 + 5h^3 + h^4 = 5. \end{aligned}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\sqrt{n}}.$$
(2p)

Lösning: Låt
$$f(n) = n^{1/\sqrt{n}}, \; n > 0.$$
Då är
$$\ln f(n) = \ln n^{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln n = \frac{\ln n}{n^{1/2}},$$
så att
$$f(n) = e^{\ln f(n)} = e^{\frac{\ln n}{n^{1/2}}}.$$
Därmed blir
$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n^{1/2}}} \underset{e^{\cdot}\text{ kont.}}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}}} \underset{\text{STD}}{=} e^0 = 1.$$

3. Betrakta funktionen
$$y = f(x) = \arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \; x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att f är 1-1 (injektiv). (2p)

Lösning: Derivering ger
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} \cdot \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2 + e^x}{(e^x+1)^2 + (e^x-1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x)^2 + 2e^x + 1 + (e^x)^2 - 2e^x + 1} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}. \end{aligned}$$
Vi ser att $f'(x) > 0$ för alla x varför funktionen f är strängt växande på hela $\mathbb{R}$. Alltså är funktionen 1-1 och därmed inverterbar.

Alternativ lösning: Vi sätter
$$f(x_1) = f(x_2)$$
och visar att det medför $x_1 = x_2$. Mer specifikt,
$$\begin{aligned} \arctan \frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1} &= \arctan \frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1} \\ &\Downarrow \; (\arctan \text{ är 1-1 }) \\ \frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1} &= \frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1} \\ &\Updownarrow \\ (e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1) &= (e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1) \\ &\Updownarrow \\ e^{x_1} - e^{x_2} &= e^{x_2} - e^{x_1} \\ &\Updownarrow \\ 2e^{x_1} &= 2e^{x_2} \\ &\Downarrow \; (e^{\cdot} \text{ är 1-1}) \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

(b) Finn inversen $f^{-1}(x)$. (2p)

Lösning: Vi söker inversen

$$y = f^{-1}(x).$$

Det innebär att

$$x = f(y) = \arctan \frac{e^y - 1}{e^y + 1} = \arctan \frac{t-1}{t+1}$$

uttryckt i hjälpvariabeln $t = e^y$. Då är

$$\tan x = \frac{t-1}{t+1} \Leftrightarrow (t+1)\tan x = t - 1 \Leftrightarrow t(1 - \tan x) = 1 + \tan x.$$

Därmed är

$$t = e^y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

så att

$$f^{-1}(x) = y = \ln \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}.$$

(c) Bestäm inversens definitionsmängd. (1p)

Lösning: Eftersom f är strängt växande på $\mathbb{R}$ så kommer värdemängden för f att vara $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, ty

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \underset{\text{arctan kont.}}{=} \arctan \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0} - 1}{\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1} = \\
&= \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \underset{\text{arctan kont.}}{=} \arctan \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \\
&= \arctan \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Därmed är

$$D\left(f^{-1}\right) = R(f) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Antag att $y = y(x)$ är en implicit definierad funktion som uppfyller

$$x^2 + 2y^2 = 6.$$

(a) Finn y' och y'' uttryckta i x och y. (3p)

Lösning: Sätt $y = y(x)$ och derivera $x^2 + 2y^2 = 6$ implicit med avseende på x. Vi får

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2y^2\right) = \frac{d}{dx}(6) \Longrightarrow 2x + 4yy' = 0.$$

Därmed är

$$y' = -\frac{2x}{4y} = -\frac{x}{2y}.$$

En ytterligare implicit derivering med avseende på x ger

$$\frac{d}{dx}(2x+4yy')=\frac{d}{dx}(0)\Longrightarrow 2+4(y')^2+4yy''=0.$$

Vi får därför

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-2-4(y')^2}{4y}=-\frac{1+2\left(-\frac{x}{2y}\right)^2}{2y}=-\frac{1+\frac{x^2}{2y^2}}{2y}= \\ &= -\frac{2y^2+x^2}{4y^3}=-\frac{6}{4y^3}=-\frac{3}{2y^3}. \end{aligned}$$

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(x)$ av ordning 2 till y genom punkten $(2,1)$. (2p)

Lösning: Låt oss först kontrollera att punkten $(2,1)$ ligger på kurvan $x^2+2y^2=6$. Det stämmer, ty

$$2^2+2\cdot 1^2=4+2=6.$$

Taylorpolynomet till $y=y(x)$ av ordning 2 kring $x=2$ ges då av

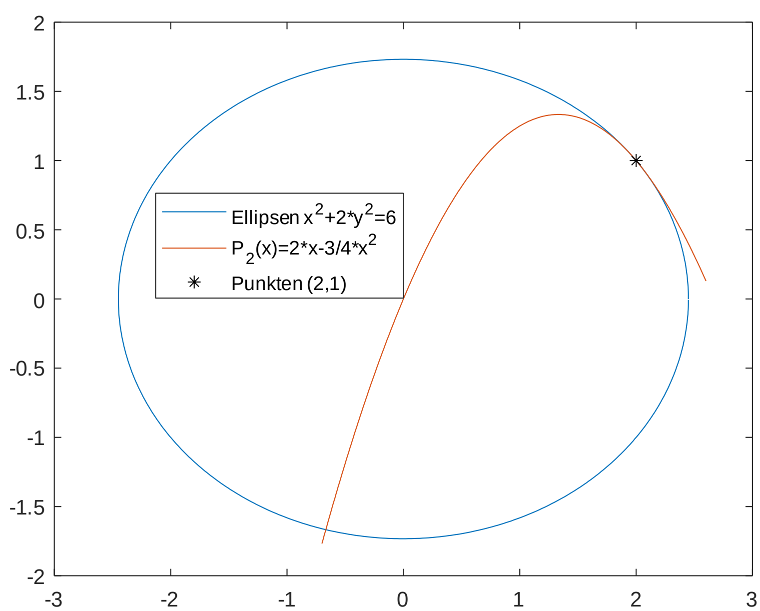
$$P_2(x)=y(2)+y'(2)(x-2)+\frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2$$

där

$$\begin{aligned} y(2) &= 1, \\ y'(2) &= -\frac{2}{2\cdot 1}=-1, \\ y''(2) &= -\frac{3}{2\cdot 1^3}=-\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Därmed blir

$$P_2(x)=1-1(x-2)-\frac{3}{4}(x-2)^2=2x-\frac{3}{4}x^2.$$



5. Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{(x-2)^2 (x+1)}{x^2+1}.$$

Ställ upp teckenschema över derivatan och skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande. Konvexitet behöver ej beaktas. **Anmärkning:** *Man kan ha hjälp av faktoriseringen* $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2+2x+7)$. (5p)

Lösning: Funktionen

$$y = f(x) = \frac{(x-2)^2 (x+1)}{x^2+1} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2+1}$$

varken jämn eller udda, ty

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)^2 + 4}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 - 3x^2 + 4}{x^2+1} \neq \begin{cases} f(x), \\ -f(x). \end{cases}$$

Sedan undersöker vi var funktionen skär koordinataxlarna. Vi har att

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 (x+1)}{x^2+1},$$

varför x-axeln skärs i $x = -1$ och $x = 2$ och y-axeln skärs i $y = f(0) = 4$. Låt oss sedan undersöka asymptoter. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 3 \quad = p(x) \\ \hline
x^2 + 1 & x^3 - 3x^2 + 4 \\
- & (x^3 + x) \\ \hline
 & -3x^2 - x + 4 \\
- & (-3x^2 - 3) \\ \hline
 & -x + 7 \quad \text{rest}
\end{array}$$

Därmed kan vi skriva

$$f(x) = \underbrace{x - 3}_{\text{kvot } p(x)} + \frac{\overbrace{-x+7}^{\text{rest}}}{x^2+1}$$

När $x \to \pm\infty$ så kommer resten delat med nämnaren att gå mot noll, ty grad $(rest) <$ grad $(nämnare)$ så

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x+7}{x^2+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Vi saknar därför horisontella asymptoter eftersom

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \overbrace{x}^{\to \infty} - 3 + \frac{-x+7}{x^2+1} = \infty, \\
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \overbrace{x}^{\to -\infty} - 3 + \frac{-x+7}{x^2+1} = -\infty
\end{aligned}$$

Däremot har vi en dubbelsidig sned asymptot $y = p(x) = x - 3$ som $y = f(x)$ kommer att gå mot när $x \to \pm\infty$. Eftersom $f(x)$ är definerad för alla $x \in \mathbb{R}$ så saknas vertikala asymptoter ty nämnaren $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Derivering av

$$f(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{x^2+1}$$

ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left[2(x-2)(x+1) + (x-2)^2\right](x^2+1) - (x-2)^2(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\left[(2(x+1) + (x-2))\left(x^2+1\right) - 2x(x-2)(x+1)\right] \\
&= \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\left[3x\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2-x-2\right)\right] = \frac{(x-2)x}{(x^2+1)^2}\left[3x^2+3-2x^2+2x+4\right] \\
&= \frac{(x-2)x}{(x^2+1)^2}\left[x^2+2x+7\right] = \frac{x(x-2)\left((x+1)^2+6\right)}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Alternativt, med hjälp av faktoriseringen $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2+2x+7)$, så ger

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2+1}$$

att

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2-6x)(x^2+1) - (x^3-3x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{3x^4+3x^2-6x^3-6x-2x^4+6x^3-8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-14x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{x(x-2)(x^2+2x+7)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x-2)\left((x+1)^2+6\right)}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Därmed har vi två kritiska punkter, $x = 0$ och $x = 2$. Teckenschema:

		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)^2+6$	$+$		$+$		$+$
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

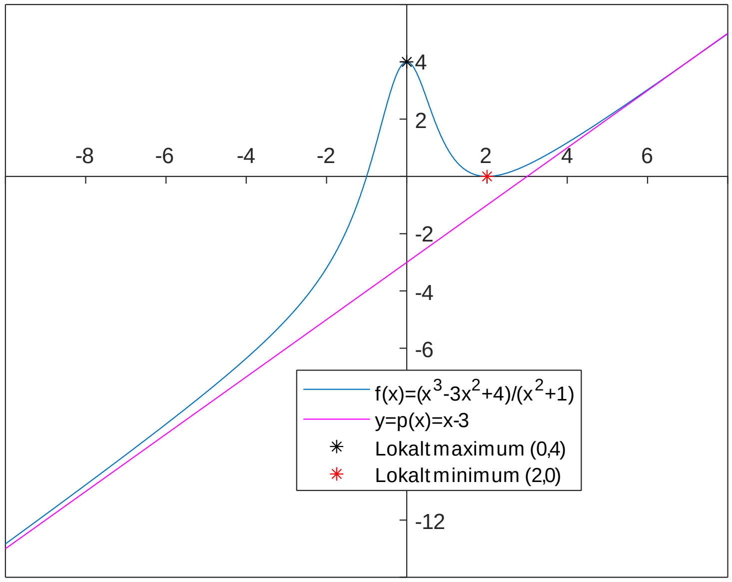
Vi har därmed ett lokalt maximum

$$f(0) = 4$$

och ett lokalt minimum

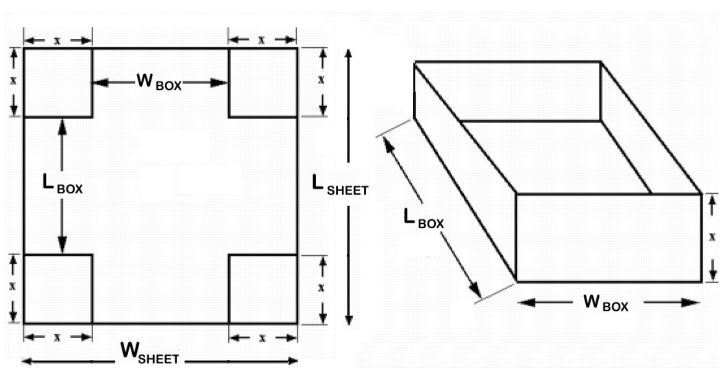
$$f(2) = 0.$$

Funktionen är växande på intervallen $(-\infty, 0]$ och $[2, \infty)$ samt avtagande på intervallet $[0, 2]$. Vi kan slutligen rita grafen som



6. Editor Persson behöver er hjälp att konstruera en låda till alla artiklar folk skrivit åt honom. Till ert förfogande har ni en pappskiva med måtten 6 dm × 16 dm. Lådan ska alltså konstrueras genom att klippa lika stora kvadrater i de fyra hörnen och sedan vika upp flikarna till sidor. Hur stor blir största möjliga volym av en sådan låda?

   Lösning: Kalla kvadratens sida för x.



Kalla lådans längd och bredd för L_{BOX} och W_{BOX}, respektive. Då gäller att

$$\begin{aligned} L_{BOX} &= 16 - 2x = 2(8 - x), \\ W_{BOX} &= 6 - 2x = 2(3 - x). \end{aligned}$$

Därmed måste

$$0 \leq x \leq 3.$$

Lådan får då volym

$$V = V(x) = L_{BOX} \cdot W_{BOX} \cdot x = 4x(8 - x)(3 - x) = 4\left(x^3 - 11x^2 + 24x\right).$$

I intervallets ändpunkter är då volymen noll

$$V(0) = V(3) = 0.$$

Maximum måste därför antas i någon inre punkt i intervallet $[0,3]$. Vi deriverar $V(x)$ och får

$$V'(x) = 4\left(3x^2 - 22x + 24\right) = 12\left(x^2 - \frac{22}{3}x + 8\right).$$

Singulära punkter saknas, men vi har två kritiska punkter

$$\begin{aligned} x &= \frac{11}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 - 8} = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{11^2 - 8 \cdot 3^2}{3^2}} = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121 - 72}{3^2}} \\ &= \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{3^2}} = \frac{11}{3} \pm \frac{7}{3} = \begin{cases} \frac{18}{3} = 6, \\ \frac{4}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Av dessa ligger endast den mindre i det tillåtna intervallet $[0,3]$. Därmed måste maximum antas i denna punkt. Maximal volym blir därför

$$V_{MAX} = \frac{4}{3} \cdot \left(16 - 2 \cdot \frac{4}{3}\right)\left(6 - 2 \cdot \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{40}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1600}{27} \text{ dm}^3.$$

Anmärkning: Andraderivatan av $V(x)$ är

$$V''(x) = 24x - 88 = 8(3x - 11).$$

I den kritiska punkten $x_2 = \frac{4}{3}$ är då

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 8\left(3 \cdot \frac{4}{3} - 11\right) = -56 < 0.$$

Därmed måste den ge maximum.