Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-10-28**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

> *Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **6**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n}.$$

Ledning: *rotkonjugat.* (4p)

Lösning: (Induktion) Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} = 1 = \sqrt{1} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{p} \ \text{(induktionsantagande)}\,.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{p+1}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} &= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}} \underset{\text{ind.ant.}}{=} \sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}} \\
&= \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)\left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)} = \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{(p+1)-p} = \\
&= \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{1} = \sqrt{p} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right) = \sqrt{p+1}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Alternativ lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}-\sqrt{k-1} = \\
&= \left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right) + \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) = \\
&= \sqrt{n}-\sqrt{0} = \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

(b) De n spelarna i laget "Oddballs" har valt sina unika tröjnummer att vara de udda talen från 5 upp till $2n+3$ (dvs $5, 7, 9, 11, \ldots, 2n+3$). Summan av alla spelares tröjnummer är 396. Hur många spelare finns det i laget? (1p)

Lösning: Eftersom differensen mellan två efterföljande termer är konstant (i detta fall 2) är detta en aritmetisk summa. Vi vet att värdet av en aritmetisk summa fås genom att multiplicera antal termer med medelvärdet av minsta termen och största termen. Således får vi ekvationen

$$396 = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\,(5 + (2n+3))}{2} = \frac{n\,(2n+8)}{2} = n\,(n+4)\,.$$

Om vi adderar 4 på bägge sidor får vi därför

$$400 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \iff n + 2 = \pm 20 \iff n = 18 \vee n = -22.$$

Då n måste vara positivt konstaterar vi att laget har 18 spelare.

Alternativ lösning: Den aritmetiska summan är

$$\underbrace{5 + 7 + 9 + \ldots + (2n+3)}_{=396} = \sum_{k=1}^{n} (2k+3) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 3\right) = 2\frac{n\,(n+1)}{2} + 3n$$

vilket ger samma ekvation som ovan.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \to -1+} \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

(1p)

Lösning: Gränsvärdet blir

$$\lim_{x \to -1+} \frac{\arcsin x}{\arccos x} = \frac{\arcsin(-1)}{\arccos(-1)} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi} = -\frac{1}{2},$$

eftersom både arcsin och arccos är högerkontinuerliga i -1.

Anmärkning: På förekommen anledning:

$$\frac{\arcsin x}{\arccos x} \neq \arctan x.$$

(b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(3x^2)}{\ln(2x^3)}$$

(2p)

Lösning: Logaritmlagar ger

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(3x^2)}{\ln(2x^3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln 3 + 2\ln x}{\ln 2 + 3\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{\ln 3}{\ln x}\right)}^{\to 0} + 2}{\underbrace{\left(\frac{\ln 2}{\ln x}\right)}_{\to 0} + 3} = \frac{2}{3}$$

eftersom $\ln x \to \infty$ när $x \to \infty$.

(c)

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

(2p)

Lösning: Förlängning med rotkonjugat i täljare och nämnare ger

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(x^2-\left(x^2-1\right)\right)}{x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \underset{x<0}{=} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $|x| = -x$ när $x < 0$.

3. Vi definierar *krökningen* $\kappa = \kappa(x)$ i en punkt x på kurva C given av funktionen $y = f(x)$ som

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}.$$

(a) Beräkna krökningen för parabeln

$$y = f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R},$$

i punkten $x = \sqrt{2}$. (2p)

Lösning: Två deriveringar ger

$$\begin{aligned}
y' &= 2x, \\
y'' &= 2,
\end{aligned}$$

varför

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}.$$

I punkten $x = \sqrt{2}$ är krökningen därför

$$\kappa\left(\sqrt{2}\right) = \frac{2}{(1+4\cdot 2)^{3/2}} = \frac{2}{9^{3/2}} = \frac{2}{9\sqrt{9}} = \frac{2}{27}.$$

(b) Beräkna krökningen i varje punkt på cirkeln

$$x^2 + y^2 = R^2,\ y \neq 0,$$

med radie R (konstant). **Ledning:** *Sätt $y = y(x)$ och derivera implicit.* (3p)

Lösning: Låt $y = y(x)$. Två implicita deriveringar med avseende på x ger

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right) &= \frac{d}{dx}\left(R^2\right) \Longrightarrow 2x + 2yy' = 0, \\
\frac{d}{dx}\left(2x+2yy'\right) &= \frac{d}{dx}(0) \Longrightarrow 2 + 2\left(y'\right)^2 + 2yy'' = 0.
\end{aligned}$$

För $y \neq 0$ är således

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \Longrightarrow 1+(y')^2 = 1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2}, \\ y'' &= -\frac{1+(y')^2}{y} = -\frac{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}, \end{aligned}$$

varför

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{R^2}{|y|^3}}{\left(\frac{R^2}{y^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{R^2}{|y|^3}}{\frac{R^3}{|y|^3}} = \frac{1}{R}.$$

Krökningen är alltså konstant $1/R$ i varje punkt på cirkeln.
Alternativ lösning: Vi kan lösa ut y som

$$y = f(x) = \pm\sqrt{R^2-x^2}, \quad -R < x < R.$$

Två deriveringar ger

$$\begin{aligned} y' &= \pm\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \\ y'' &= \mp\frac{1\cdot\sqrt{R^2-x^2} - x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}{R^2-x^2} = \mp\frac{(R^2-x^2)+x^2}{(R^2-x^2)^{3/2}} = \mp\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Då är

$$1+(y')^2 = 1+\left(\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{(R^2-x^2)+x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2},$$

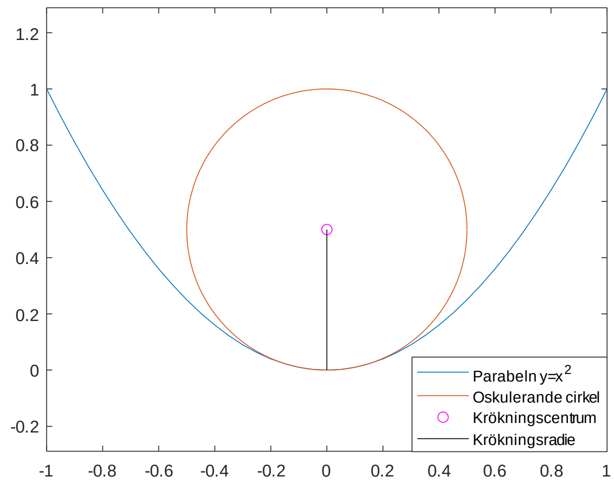
varför

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\left(\frac{R^2}{R^2-x^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\frac{R^3}{(R^2-x^2)^{3/2}}} = \frac{1}{R}.$$

Anmärkning: En kurvas krökning κ i en punkt x är ett mått på hur mycket kurvan böjer sig (dvs, hur mycket den avviker från en rät linje). Till exempel såg vi ovan att parabeln $y = x^2$ hade sin maximala krökning i sin vertex $x = 0$. En rät linje har krökning noll överallt (ty $y'' = 0$) och en cirkel har konstant krökning $1/R$. Krökningen κ är det reciproka värdet av radien R (kallad *krökningsradien*) på den *den oskulerande cirkeln* (av latinets *osculor*, "att kyssa") som bäst approximerar kurvan i punkten x. Det innebär till exempel att den cirkel som bäst ansluter till parabeln $y = x^2$ i punkten $x = 0$ har radie

$$R = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{1}{2}.$$

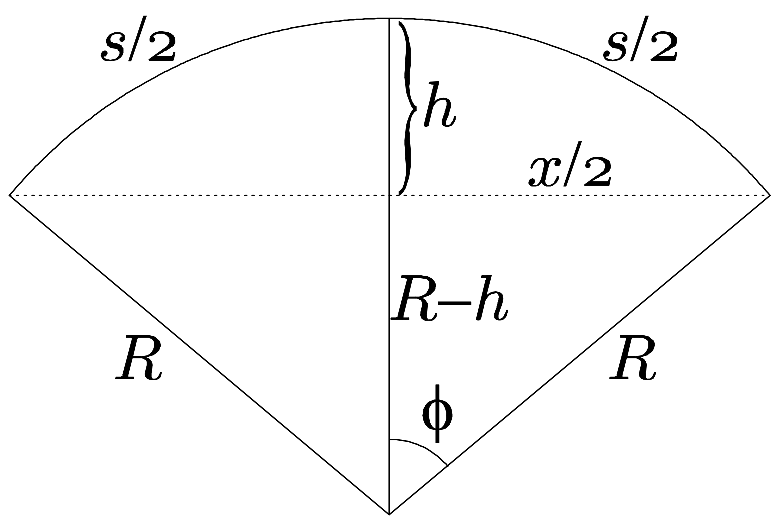
Centrum för den oskulerande cirkeln kallas *krökningscentrum*. Grafen som fås som mängden av alla krökningscentra till en kurva kallas för kurvans *evoluta*.



4. Höjden $h = h(s)$ (kallad *sagitta,* latin för "pil") av ett cirkelsegment med båglängd s ges av

$$h = R\left(1 - \cos\frac{s}{2R}\right),$$

där R (konstant) är cirkelns radie, se nedanstående figur.



(a) Beräkna $h(0)$, $h'(0)$ och $h''(0)$. (2p)

Lösning: Två deriveringar ger

$$\begin{aligned} h'(s) &= R \cdot \frac{1}{2R}\sin\frac{s}{2R} = \frac{1}{2}\sin\frac{s}{2R}, \\ h''(s) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2R}\cos\frac{s}{2R} = \frac{1}{4R}\cos\frac{s}{2R}. \end{aligned}$$

Således är

$$\begin{aligned} h(0) &= R(1-\cos 0) = 0, \\ h'(0) &= \frac{1}{2}\sin 0 = 0, \\ h''(0) &= \frac{1}{4R}\cos 0 = \frac{1}{4R}. \end{aligned}$$

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(s)$ av ordning 2 kring $s = 0$ till funktionen $h = h(s)$. (2p)

Lösning: Taylorpolynomet av ordning 2 kring $s = 0$ till $h = h(s)$ ges av

$$P_2(s) = h(0) + h'(0)(s-0) + \frac{h''(0)}{2!}(s-0)^2 = 0 + 0s + \frac{s^2}{2 \cdot 4R} = \frac{s^2}{8R}.$$

(c) Antag att vi skulle spänna ett rep tvärs över en s km lång sjö på jorden. Då skulle repet som djupast ligga h km under ytan mitt på sjön, där h ges av uttrycket ovan. Bajkalsjön är ungefär 640 km lång och jordens radie R är ungefär 6400 km. Använd taylorpolynomet ovan för att approximera det maximala djupet som ett spänt rep skulle hamna under Bajkalsjöns yta. Man kan här anta att sjön är bottenlös.

Lösning: För små värden på s relativt R är $h(s) \approx P_2(s)$. Således blir det maximala djupet för repet ungefär

$$P_2(640) = \frac{640^2}{8 \cdot 6400}\text{km} = \frac{64 \cdot 64 \cdot 100}{8 \cdot 64 \cdot 100}\text{km} = 8 \text{ km}.$$

Anmärkning 1: Bajkalsjön (ryska: Озеро Байкал) är en sjö i södra Sibirien i Ryssland som är världens djupaste sjö. Bajkalsjöns största djup ligger på 1642 meter. Därmed skulle repet i verkligheten ta i botten om vi spände det över sjön. Sjön är världens till ytan sjunde största sjö och till volymen världens näst största (efter Kaspiska havet). Den innehåller cirka 23% av allt icke-fryst sötvatten på jordens yta. Vissa beräkningar pekar på att sjön kan vara 25 miljoner år gammal, vilket skulle göra den till inte bara världens djupaste utan även världens äldsta sjö.

Anmärkning 2: En motsvarande taylorutveckling för kordan

$$x = x(s) = 2R \sin \frac{s}{2R}$$

i cirkelsektorn ger att

$$x(s) \approx s - \frac{s^3}{24R^2}.$$

Således blir längden på repet efter det spänts över sjön ungefär

$$d = \frac{s^3}{24R^2} = \frac{640^3}{24 \cdot 6400^2}\text{km} = \frac{64 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 1000}{24 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 10000}\text{km} = \frac{64}{24 \cdot 10} \text{ km} = \frac{4}{15} \text{ km}$$

kortare (strax över 250 m, ty $1/4 = 4/16 < 4/15 = 8/30 < 9/30 = 3/10$).

Anmärkning 3: Med samma resonemang som ovan så skulle ett rep spänt genom Vättern från Askersund till Huskvarna som djupast hamna omkring 300 meter under ytan. Även här kommer det att ta i botten då Vätterns största djup är 128 m.

Anmärkning 4: Ekvationerna ovan kommer från beteckningarna i figuren:

$$\begin{aligned} s/2 &= R\phi \Longleftrightarrow \phi = \frac{s}{2R}, \\ \cos\phi &= \frac{R-h}{R} \Longleftrightarrow R - h = R\cos\phi, \\ \sin\phi &= \frac{x/2}{R} \Longleftrightarrow x = 2R\sin\phi, \end{aligned}$$

som ger

$$\begin{aligned} h &= R(1-\cos\phi) = R\left(1 - \cos\frac{s}{2R}\right), \\ x &= 2R\sin\frac{s}{2R}. \end{aligned}$$

5. Låt

$$y = p(x) = x^5 - 5x + 7,\ x \in \mathbb{R}.$$

Använd verktyg och begrepp som gränsvärden, teckenstudium av derivatan, graf och satsen om mellanliggande värden för att motivera svaren till nedanstående uppgifter.

Allmänt: Satsen om mellanliggande värden (*IVT* eller *Bolzanos sats*) säger att om f är en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ och om s är ett värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ så finns det ett $c \in [a, b]$ så att

$$f(c) = s.$$

En konsekvens av satsen är att en kontinuerlig funktion definierad på ett slutet intervall antar alla värden mellan sitt minsta värde och sitt största värde. Satsen om mellanliggande värden är avhängig av (och ekvivalent med) fullständighetsegenskapen hos reella tal.

(a) Vad är värdemängden för p? Motivera! (1p)

Lösning: I detta fall har vi en kontinuerlig funktion p (polynom) som är definierad på hela $\mathbb{R}$. Eftersom

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} p(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(x^5 - 5x + 7\right) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^5}_{\to-\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right)}_{\to 1} = -\infty, \\
\lim_{x\to\infty} p(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^5 - 5x + 7\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^5}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right)}_{\to 1} = \infty,
\end{aligned}$$

så ger satsen om mellanliggande värden att värdemängden är

$$R(p) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

(b) Avgör hur många reella nollställen som polynomet $p(x)$ har. Motivera! (2p)

Lösning: Ett nollställe x_0 till en kontinuerlig funktion motsvaras av att grafen korsar x-axeln i punkten x_0, det vill säga x_0 är en lösning till ekvationen

$$p(x) = 0.$$

Låt oss mer generellt undersöka hur många lösningar ekvationen

$$p(x) = C$$

har för olika värden på konstanten C. För en kontinuerlig funktion motsvaras det av hur många gånger grafen $y = p(x)$ skärs av den horisontella linjen $y = C$. Vi analyserar därför polynomet. Derivering ger

$$p'(x) = 5x^4 - 5 = 5\left(x^4 - 1\right) = 5\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = 5(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right).$$

Därmed har funktionen två kritiska punkter, $x = \pm 1$, i vilka derivatan är noll. Teckenstudium av derivatan ger

		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$5(x^2+1)$	$+$		$+$		$+$
$p'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$p(x)$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

I den lokala max-punkten är

$$p(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1) + 7 = -1 + 5 + 7 = 11$$

och i den lokala min-punkten

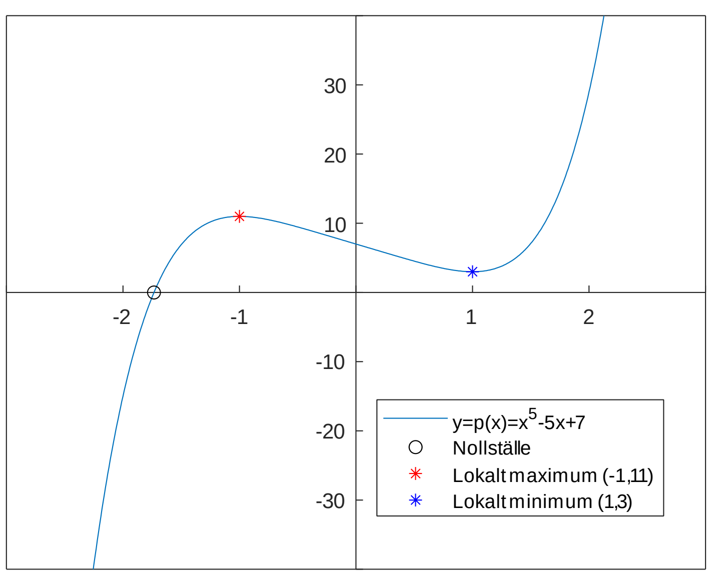
$$p(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 7 = 1 - 5 + 7 = 3.$$

Låt oss kalla en punkt på grafen där den byter från att vara växande till avtagande (eller tvärtom) för *vändpunkt*. Ett polynom av gradtal n kan då ha högst $n-1$ stycken vändpunkter. Till exempel har femtegradspolynomet p i detta fall två stycken vändpunkter. Antalet lösningar till ekvationen

$$p(x) = C$$

beror på hur många vändpunkter grafen har. Som en konsekvens av satsen om mellanliggande värden kommer ekvationen $p(x) = C$ ha en lösning mellan två efterföljande vändpunkter om funktionen antar värden på var sin sida om C i dessa vändpunkter. På samma sätt har ekvationen en lösning mellan en ändpunkt och en vändpunkt (eller den andra ändpunkten) om funktionen antar (eller går mot) värden på var sin sida om C i dessa punkter. Om en kontinuerlig funktion har m stycken vändpunkter kan ekvationen $p(x) = C$ således ha högst $m+1$ lösningar.

I detta fall har polynomet p två stycken vändpunkter och ekvationen $p(x) = C$ kan därför ha maximalt tre lösningar. Detta inträffar när $3 < C < 11$. För $C = 3$ eller $C = 11$ har ekvationen $p(x) = C$ två lösningar och för alla andra värden på C har ekvationen $p(x) = C$ exakt en lösning (detta på grund av gränsvärdena i uppgift (a)), se grafen härunder.



I synnerhet innebär det att ekvationen

$$p(x) = 0$$

har exakt en lösning. Eftersom gränsvärdet för p då $x \to -\infty$ är negativt och funktionsvärdet i första vändpunkten $x = -1$ är positivt inser vi att nollstället ligger i intervallet $(-\infty, -1)$. Däremot kan det inte finnas något nollställe i intervallen $[-1, 1]$ eller $(1, \infty)$. Vi konstaterar således att funktionen p enbart har ett nollställe.

(c) Lokalisera nollställena i uppgift (b) genom att ange i vilka intervall $[m, n]$ (där m och n är heltal, $n = m + 1$) nollställena ligger. Motivera! (1p)

Lösning: I uppgift (b) ovan konstaterade vi att p har exakt ett nollställe och att det ligger i intervallet $(-\infty, -1)$. Vi såg även att

$$p(-1) = 11 > 0.$$

En snabb uträkning visar att

$$p(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2) + 7 = -32 + 10 + 7 = -15 < 0.$$

Eftersom $p(-1)$ och $p(-2)$ har olika tecken ger satsen om mellanliggande värden att det måste finnas ett $x_0 \in [-2, -1]$ där $p(x_0) = 0$. Därmed konstaterar vi att p har ett reellt nollställe och att det ligger i intervallet $[-2, -1]$.

Anmärkning: Om vi önskar att lokalisera detta nollställe ännu noggrannare så kan vi halvera intervallet och undersöka funktionsvärdets tecken i intervallets mittpunkt $x = -3/2$. Här är

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{2}\right)^5 - 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 7 = -\frac{243}{32} + \frac{15}{2} + 7 = \\ &= \frac{-243 + 15 \cdot 16 + 7 \cdot 32}{32} = \frac{221}{32} > 0. \end{aligned}$$

Därmed måste nollstället ligga i intervallet $[-2, -\frac{3}{2}]$. Denna intervallhalverings-procedur kan upprepas till önskad noggrannhet uppnås.

(d) Är funktionen p inverterbar? Motivera! (1p)

Lösning: En kontinuerlig funktion p som är definierad på ett sammanhängande intervall är injektiv (1-1) om ekvationen

$$p(x) = C$$

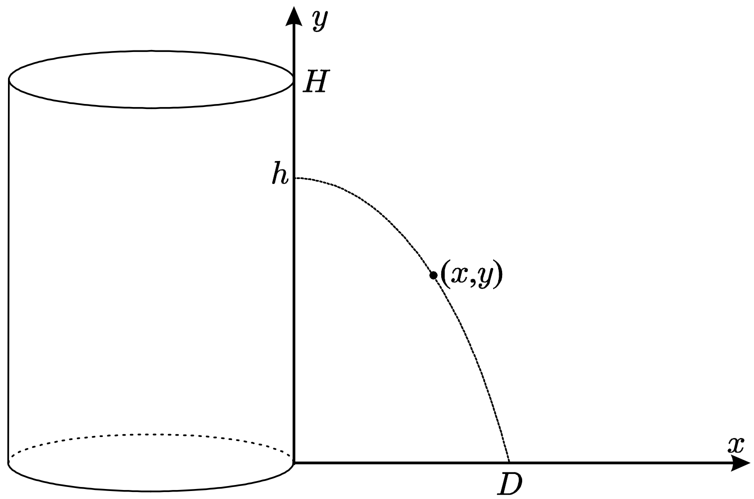
har högst en lösning för varje val av C. Ett nödvändigt krav för att en sådan ekvation inte ska ha flera lösningar är att den saknar vändpunkter. Eftersom p har två stycken vändpunkter är den således inte injektiv och därmed inte inverterbar.

Anmärkning: Däremot skulle man kunna få p inverterbar genom att begränsa definitionsmängden. Till exempel är

$$y = p(x) = x^5 - 5x + 7, \; x \in [1, \infty),$$

injektiv.

6. Antag att vi har en cylindrisk vertikal vattentank med höjd H som är fylld med vatten. Vi lägger in ett koordinatsystem som i figuren härunder.



Vi slår sedan ett litet hål på tanken på höjden h över markplanet varpå vatten börjar strila ut följandes parabeln

$$y = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2,$$

där g är tyngdaccelerationen och v_x vattnets horisontella hastighet som enligt Torricellis lag är proportionell mot roten ur vattenpelarens höjd, mer specifikt

$$v_x = \sqrt{2g\,(H-h)}.$$

(a) Låt D vara avståndet från tanken där vattenstrålen träffar markplanet direkt efter vi slagit hål på tanken. Finn ett uttryck som relaterar D till hålets höjd h. (2p)

Lösning: Med insättning av v_x i parabeln får vi ekvationen

$$y = h - \frac{g}{2}\frac{x^2}{2g\,(H-h)} = h - \frac{x^2}{4\,(H-h)}.$$

Vattenstrålen träffar markplanet i $x = D$ när $y = 0$. Då har vi

$$0 = h - \frac{D^2}{4\,(H-h)} \iff D^2 = 4h\,(H-h) \iff D = 2\sqrt{h\,(H-h)}.$$

(b) På vilken höjd h skall hålet göras för att D ska bli maximal och vad blir då D för detta värde på h? (3p)

Lösning: Vi söker maximum av

$$D = D\,(h) = 2\sqrt{Hh - h^2}$$

för $0 \le h \le H$ (kontinuerlig funktion definierad på slutet och begränsat intervall). I ändpunkterna har vi

$$D\,(0) = D\,(H) = 0.$$

Derivering ger

$$D'\,(h) = \frac{2\,(H-2h)}{2\sqrt{Hh-h^2}} = \frac{H-2h}{\sqrt{Hh-h^2}}.$$

Här är bägge ändpunkterna singulära punkter (redan undersökta). Dessutom har vi en kritisk punkt

$$h = \frac{H}{2}$$

som således måste ge maximum. I den punkten är

$$D_{\max} = D\left(\frac{H}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H - \frac{H}{2}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2} = H.$$

Alternativ lösning: Kvadratkomplettering ger

$$Hh - h^2 = -\left(h^2 - Hh + \left(\frac{H}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{H}{2}\right)^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(h - \frac{H}{2}\right)^2 = \frac{H^2 - (2h - H)^2}{4}.$$

Därmed kan vi skriva

$$D = D\left(h\right) = 2\sqrt{Hh - h^2} = 2\sqrt{\frac{H^2 - (2h - H)^2}{4}} = \sqrt{H^2 - (2h - H)^2}.$$

Denna funktion antar maximum

$$D_{\max} = \sqrt{H^2} = H$$

för

$$2h - H = 0 \Longleftrightarrow h = \frac{H}{2}.$$

Överkurs: Uttrycket

$$y = h - \frac{x^2}{4\left(H - h\right)}$$

kan vi se som en *familj av plana kurvor* beroende på parametern h. Låt oss skriva om uttrycket som

$$F\left(x, y, h\right) = 4\left(y - h\right)\left(H - h\right) + x^2 = 0.$$

En *envelopp* till en familj av kurvor är en kurva som är tangent till varje kurva i familjen i någon punkt och dessa tangeringspunkter utgör då hela enveloppen. Man kan visa (se till exempel kapitel 13.6 i Adams, Essex: *Calculus*) att ekvationssystemet

$$\begin{cases} F\left(x, y, h\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial h} F\left(x, y, h\right) = 0, \end{cases}$$

är ett nödvändigt villkor för att en envelopp ska existera för en given familj av kurvor. I detta fall ger den andra ekvationen

$$\frac{\partial}{\partial h} F\left(x, y, h\right) = \frac{\partial}{\partial h}\left(4\left(y - h\right)\left(H - h\right) + x^2\right) = -4\left(H - h\right) - 4\left(y - h\right) = 0,$$

det vill säga

$$h = \frac{H+y}{2}.$$

Insatt i första ekvationen får vi då

$$F(x,y,h) = 4\left(y - \frac{H+y}{2}\right)\left(H - \frac{H+y}{2}\right) + x^2 = 4\frac{y-H}{2}\frac{H-y}{2} + x^2 = 0,$$

det vill säga

$$(H-y)^2 = x^2 \Longleftrightarrow H - y = \pm x \Longleftrightarrow y = H \mp x.$$

Då $y \leq H$ är således enveloppen till familjen av parabelformade vattenstrålar den räta linjen

$$y = H - x,$$

se nedanstående figur. ´