Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-08-18**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 2$ gäller att
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\ln n.$$
(4p)

   (b) Bestäm koefficienten för x^3-termen i binomialutvecklingen av
$$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^5.$$
Motivera! (1p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x^2}$$
(1p)

   (b)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$
(2p)

   (c)
$$\lim_{x\to\infty} \arcsin\frac{x+1}{x+2}$$
(2p)

3. Låt
$$f(x) = x^3 + 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

   (b) Finn
$$f^{-1}(3).$$
(1p)

   (c) Beräkna
$$\left(f^{-1}\right)'(3).$$
(2p)

   (d) Beräkna
$$\left(f^{-1}\right)''(3).$$
Ledning: *gör ytterligare en implicit derivering.* (1p)

4. Ett objekt med massa m som faller under inverkan av jordaccelerationen g i en atmosfär där luftmotståndet är proportionellt mot objektets hastighet i kvadrat uppfyller rörelseekvationen

$$mv' = mg - kv^2,$$

där $v = v(t)$ är objektets hastighet, t tiden och k en proportionalitetskonstant.

   (a) Visa att

$$v(t) = \frac{g}{\lambda} \frac{e^{2\lambda t} - 1}{e^{2\lambda t} + 1}, \text{ där } \lambda = \sqrt{\frac{kg}{m}},$$

   är lösning till rörelseekvationen om objektet släpps från vila (dvs $v(0) = 0$). (3p)

   (b) När $t \to \infty$ kommer objektets hastighet $v(t)$ att gå mot en konstant hastighet, den så kallade gränshastigheten V_t. Bestäm V_t (uttryckt i storheterna m, g och k). Antag här att objektet faller i all oändlighet. (2p)

5. Definiera funktionen

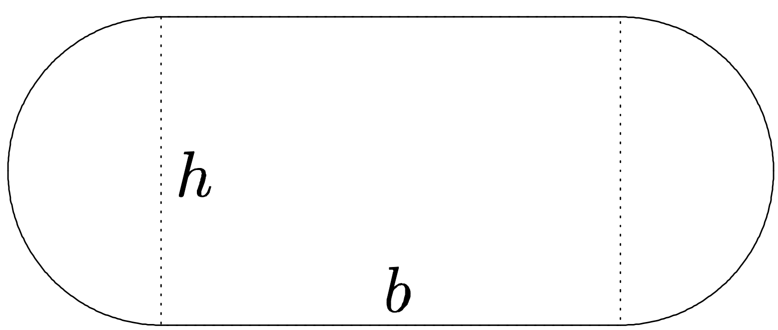
$$y = f(x) = xe^{1/x}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Ange i vilka intervall kurvan är konvex respektive konkav. Skissera kurvan. **Ledning:** *man kan ha hjälp av standard-gränsvärdet*

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(5p)

6. En *stadion* är en tvådimensionell geometrisk figur konstruerad av en rektangel och två halvcirklar på motsatta sidor av rektangeln, se nedanstående figur.



För en stadion med given omkrets P, finn rektangelns sidor b och h (uttryckta i P) som

   (a) ger maximal area på *rektangeln.* Hur stor är då rektangelns maximala area uttryckt i P? (3p)

   (b) ger maximal *total* innesluten area av stadion. Hur stor är då inneslutna områdets maximala area uttryckt i P? (2p)