LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-03-23**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5). Kalkylator EJ Tillåten.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa med induktion att det för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 e^x\right) = \left(x^2 + 2nx + n\,(n-1)\right) e^x.$$

(5p)

Bevis: Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \frac{d}{dx}\left(x^2 e^x\right) = 2xe^x + x^2 e^x = \left(x^2 + 2x\right) e^x = \left(x^2 + 2\cdot 1x + 1\cdot(1-1)\right) e^x = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(x^2 e^x\right) = \left(x^2 + 2px + p\,(p-1)\right) e^x \;\; \text{(induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(x^2 e^x\right) = \left(x^2 + 2\,(p+1)\,x + (p+1)\,p\right) e^x.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(x^2 e^x\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p}{dx^p}\left(x^2 e^x\right)\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \frac{d}{dx}\left(\left(x^2 + 2px + p\,(p-1)\right) e^x\right) \\
&= (2x + 2p)\, e^x + \left(x^2 + 2px + p^2 - p\right) e^x = \\
&= \left(x^2 + 2px + 2x + p^2 - p + 2p\right) = \left(x^2 + 2\,(p+1)\,x + (p+1)\,p\right) e^x.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x}.$$

(1p)

Lösning: Vi har att

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)\overbrace{\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}}^{\to\sqrt{4}=2}}{x} = -2.$$

   (b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3+x^2-x-1}.$$

(2p)

Lösning: Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eftersom $x = 1$ är ett nollställe till både täljaren och nämnaren så kan de enligt faktorsatsen faktoriseras som

$$x^3 - 1 = (x-1)\,p(x)$$

respektive

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)\,q(x)$$

För att finna polynomen $p(x)$ och $q(x)$ utför vi polynomdivision. Det kan vi exempelvis göra med så kallad *lång division*

$$\begin{array}{rll}
 & x^2 + x + 1 & = p(x) \text{ kvot} \\ \cline{2-2}
x - 1 & \multicolumn{1}{|l}{x^3 - 1} & \\ \cline{1-1}
- & (x^3 - x^2) & \\ \cline{2-2}
 & x^2 - 1 & \\
- & (x^2 - x) & \\ \cline{2-2}
 & x - 1 & \\
- & (x - 1) & \\ \cline{2-2}
 & \hfill 0 & \text{rest}
\end{array}$$

eller *kort division*

$$\begin{aligned}
x^3 + x^2 - x - 1 &= x^3 + \left(-x^2 + 2x^2\right) - (2x - x) - 1 = \left(x^3 - x^2\right) + \left(2x^2 - 2x\right) + (x - 1) \\
&= x^2(x-1) + 2x(x-1) + 1(x-1) = \underbrace{\left(x^2 + 2x + 1\right)}_{q(x)}(x-1)\,.
\end{aligned}$$

Därmed blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{(x-1)\left(x^2 + 2x + 1\right)} = \\
\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{1^2 + 1 + 1}{1^2 + 2 + 1} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 4.$$

(2p)

Lösning: Vi ser att nämnaren $x - 3$ går mot noll när $x \to 3$. Om gränsvärdet ska vara 4 (ändligt) måste därför även täljaren $x^2 + ax + b$ innehålla en faktor $x - 3$ som kan kancellera nämnaren. Eftersom täljaren är ett andragradspolynom med ledande koefficient 1 kan den då faktoriseras som

$$x^2 + ax + b = (x-3)(x-k)$$

för något tal k. Nu vet vi att

$$4 = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-k)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x - k) = 3 - k,$$

varför

$$k = -1.$$

Därmed blir

$$x^2 + ax + b = (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3,$$

det vill säga, konstanterna a och b är $a = -2$ respektive $b = -3$.

3. Definiera

$$f(x) = \ln\cos x + x\tan x - \frac{x^2}{2}$$

för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Vad är $f'(x)$? Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (2p)

Lösning: Derivatan $f'(x)$ är

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + \tan x + x\left(1 + \tan^2 x\right) - x = x\tan^2 x.$$

(b) Visa att

$$\ln\cos x + x\tan x \geq \frac{x^2}{2}$$

för

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

(3p)

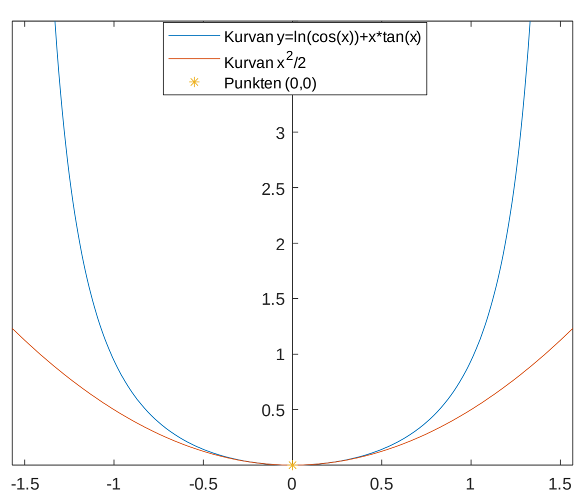
Lösning: Att visa olikheten

$$\ln\cos x + x\tan x \geq \frac{x^2}{2}$$

är ekvivalent med att visa att

$$f(x) = \ln\cos x + x\tan x - \frac{x^2}{2} \geq 0$$

för $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Vi såg ovan att

$$f'(x) = x\tan^2 x,$$

därmed är

$$f'(x) = 0$$

enbart för $x = 0$ i det givna intervallet. Vi ställer upp ett teckenschema för derivatan:

	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
x		$-$	0	$+$	
$\tan^2 x$		$+$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	

Därmed måste

$$f(x) \geq f(0) = \ln\cos 0 + 0 \cdot \tan 0 = 0.$$

4. Låt

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 7.$$

(a) Visa att f är inverterbar. (2p)

Lösning: Derivering ger

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 3\left(x^2 - 4x + 5\right) = 3\underbrace{\left((x-2)^2 + 1\right)}_{\geq 1}.$$

Vi ser att $f'(x) \geq 3 > 0$. Därmed är $f(x)$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därför också $1-1$, det vill säga, inverterbar.

Alternativ lösning: Vi sätter $f(x_1) = f(x_2)$ och visar att det medför att $x_1 = x_2$. Mer specifikt har vi att

$$\begin{gathered}
f(x_1) = x_1^3 - 6x_1^2 + 15x_1 - 7 = x_2^3 - 6x_2^2 + 15x_2 - 7 = f(x_2) \\
\Updownarrow \\
x_1^3 - x_2^3 - (6x_1^2 - 6x_2^2) + 15x_1 - 15x_2 = 0 \\
\Updownarrow \\
(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 6(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 15(x_1 - x_2) = 0 \\
\Updownarrow \\
(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6(x_1 + x_2) + 15) = 0 \\
\Updownarrow \\
(x_1 - x_2)\left(\tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) + 15\right) = 0 \\
\Updownarrow \\
(x_1 - x_2)\left(\tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{3}{4}\left((x_1 + x_2)^2 - 8(x_1 + x_2) + 16 + 4\right)\right) = 0 \\
\Updownarrow \\
(x_1 - x_2)\underbrace{\left(\frac{1}{4}\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \frac{3}{4}\left(\underbrace{(x_1 + x_2 - 4)^2}_{\geq 0} + 4\right)\right)}_{\geq 3} = 0 \\
\Downarrow \\
x_1 = x_2.
\end{gathered}$$

(b) Finn

$$f^{-1}(3).$$

(1p)

Lösning: Vi vet att

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = y^3 - 6y^2 + 15y - 7.$$

I synnerhet, för punkten $x = 3$ gäller att

$$3 = y^3 - 6y^2 + 15y - 7 \Leftrightarrow y^3 - 6y^2 + 15y - 10 = 0.$$

Vi ser direkt att $y = 1$ är *en* (reell) lösning till denna ekvation. Men detta är en tredjegradsekvation. Kan det finnas fler lösningar? Nej, vi har ju ovan visat att funktionen f är injektiv, dvs att ett x-värde motsvaras av exakt ett y-värde. Således är $y = 1$ den enda lösningen. Därmed är

$$f^{-1}(3) = 1.$$

Alternativt kan vi observera att lösningen $y = 1$ är unik genom

$$\begin{aligned}
f(y) - 3 &= y^3 - 6y^2 + 15y - 10 = \left(y^3 - y^2\right) - \left(5y^2 - 5y\right) + (10y - 10) = \\
&= y^2(y-1) - 5y(y-1) + 10(y-1) \\
&= \left(y^2 - 5y + 10\right)(y-1) = \underbrace{\left(\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)}_{\geq \frac{15}{4}}(y-1),
\end{aligned}$$

vilket visar att $f(y) = 3$ enbart har en enda reell lösning, nämligen $y = 1$.

(c) Beräkna

$$\left(f^{-1}\right)'(3).$$

(2p)

Lösning: Vi söker derivatan y' till $y = f^{-1}(x)$ i punkten $x = 3$. För att finna y' deriverar vi $x = f(y)$ implicit med avseende på x och får

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(f(y)) = \frac{d}{dx}\left(y^3 - 6y^2 + 15y - 7\right) \\
&\Downarrow \\
1 &= f'(y)\,y' = 3y^2y' - 12yy' + 15y' = \left(3y^2 - 12y + 15\right)y' \\
&\Updownarrow \\
y' &= \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2 - 12y + 15}.
\end{aligned}$$

Vi får därför

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \left(f^{-1}\right)'(x)\Big|_{x=3} = y'|_{y=1} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 15} = \frac{1}{6}.$$

Observera att vi här sätter in $y = 1$ för att evaluera $\left(f^{-1}\right)'(x)$ i $x = 3$.

5. Betrakta funktionen

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x}, \ x > 0.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Lösning: Vi undersöker först vad som händer när x går mot 0 från höger. Vi har att

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{\to+\infty} = \infty$$

eftersom $\ln x \to -\infty$ när $x \to 0+$. Därmed har grafen en vertikal asymptot $x = 0$ när x går mot 0 från höger. Låt oss sedan se vad som händer när x går mot $+\infty$. Vi har att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{1/2}}\right)^2 \underset{(\cdot)^2 \text{ kont.}}{=} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}}\right)^2 \underset{\text{STD.}}{=} 0^2 = 0,$$

varför grafen har en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ åt höger. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $(0, \infty)$, så inga andra asymptoter kan finnas. Vi ser också att $f(x) \geq 0$ med likhet enbart i punkten $x = 1$, eftersom

$$y(1) = \frac{(\ln 1)^2}{1} = 0.$$

Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)^2\cdot 1}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}, \\ y'' &= \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)x^2 - \left(2\ln x - (\ln x)^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \\ &= \frac{2x - 2x\ln x - 4x\ln x + 2x(\ln x)^2}{x^4} = \frac{2\left((\ln x)^2 - 3\ln x + 1\right)}{x^3}. \end{aligned}$$

Således har vi två kritiska punkter $x = 1$ och $x = e^2$ när $\ln x = 0$ respektive $\ln x = 2$. Vi har också två möjliga inflexionspunkter $x_{1,2} = e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$, ty

$$(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}.$$

Teckenstudium av derivatan ger

	0		1		e^2	
$2-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$
x^2		$+$		$+$		$+$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	asy.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Funktionen har därmed två lokala extremvärden, ett lokalt och globalt minimum i $x = 1$ som är

$$y(1) = 0$$

och ett lokalt maximum i $x = e^2$ som är

$$y\left(e^2\right) = \frac{\left(\ln e^2\right)^2}{e^2} = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}.$$

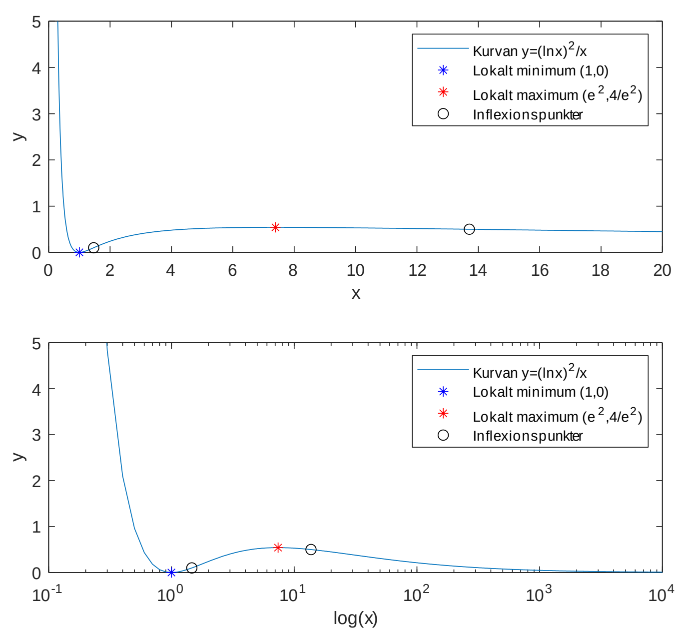
Teckenstudium av andraderivatan ger

	0		$x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	
$\ln x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$
x^3		$+$		$+$		$+$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$
y	asy.	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

Vi har därför två inflexionspunkter $x_{1,2} = e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$, där x_1 ligger mellan 1 och e^2 och x_2 till höger om e^2, ty

$$0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3+1}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \implies 1 < e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < e^2 < e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Vi kan slutligen skissera grafen (i linjär respektive logaritmisk skala) som



6. Sand rinner ner på en konisk hög med en hastighet av $\frac{1}{2}$ m^3/min. Antag att högen hela tiden bibehåller formen av en rak cirkulär kon där förhållandet $h : r$ mellan höjden h och radien r är $1 : 2$.

   (a) Hur fort ökar höjden på konen vid den tidpunkt när högen är 2 m hög? (3p)
   Lösning: Kalla höjden h och radien r. Då ges konens volym V av

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

   I detta fall vet vi dessutom att

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = 2h.$$

   Därmed kan vi skriva konens volym som en funktion av höjden som

$$V = \frac{\pi (2h)^2 h}{3} = \frac{4\pi h^3}{3}.$$

   Om nu volymen $V = V(t)$ är en funktion av tiden medför det att höjden också kommer att variera med tiden, $h = h(t)$. Derivering av hela uttrycket med avseende på tiden t ger då

$$V'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi h^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} = 4\pi h^2 h'(t).$$

   Nu visste vi att $V'(t) = \frac{1}{2}$ m^3/min (konstant). Därmed är

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi h^2} = \frac{1}{8\pi h^2}.$$

   Vid den tidpunkt t_0 när konen är 2 m hög växer alltså konens höjd med hastigheten

$$h'(t_0) = \frac{1}{8\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{32\pi} \text{m/min} \underset{\text{Anm.}}{\approx} 1 \text{ cm/min}.$$

   (b) Vid vilken höjd ökar höjden på konen med 40 mm/min? (2p)
   Lösning: Vi vet att

$$h'(t) = \frac{1}{8\pi h^2}.$$

   Därmed ökar konens höjd med $h' = 40$ mm/min $= 1/25$ m/min när höjden är

$$h = \sqrt{\frac{1}{8\pi h'}} = \sqrt{\frac{1}{8\pi \cdot \frac{1}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{8\pi}} \text{ m} \underset{\text{Anm.}}{\approx} 1 \text{ m}.$$

   Anmärkning: Vi har ovan som approximation (cirka 0.5% fel) utnyttjat att

$$\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125.$$

   (behövs ej för fullständig lösning).