LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET

Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-10-28**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **6**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n}.$$

Ledning: *rotkonjugat.* (4p)

(b) De n spelarna i laget "Oddballs" har valt sina unika tröjnummer att vara de udda talen från 5 upp till $2n+3$ (dvs $5, 7, 9, 11, \ldots, 2n+3$). Summan av alla spelares tröjnummer är 396. Hur många spelare finns det i laget? (1p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \to -1+} \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(3x^2\right)}{\ln\left(2x^3\right)}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

(2p)

3. Vi definierar *krökningen* $\kappa = \kappa(x)$ i en punkt x på kurva C given av funktionen $y = f(x)$ som

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}.$$

(a) Beräkna krökningen för parabeln

$$y = f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R},$$

i punkten $x = \sqrt{2}$. (2p)

(b) Beräkna krökningen i varje punkt på cirkeln

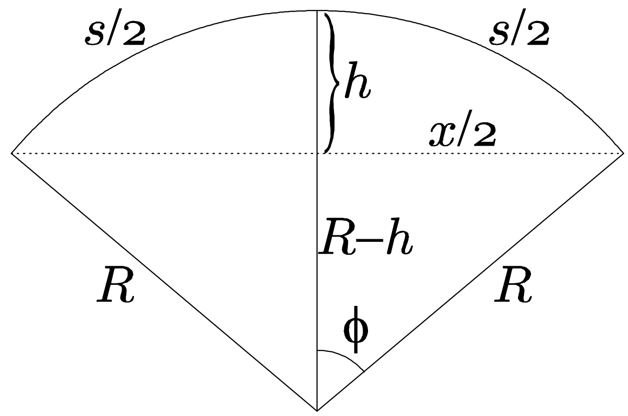
$$x^2 + y^2 = R^2,\ y \neq 0,$$

med radie R (konstant). **Ledning:** *Sätt $y = y(x)$ och derivera implicit.* (3p)

4. Höjden $h = h(s)$ (kallad *sagitta*) av ett cirkelsegment med båglängd s ges av

$$h = R\left(1 - \cos\frac{s}{2R}\right),$$

där R (konstant) är cirkelns radie, se nedanstående figur.



(a) Beräkna $h(0)$, $h'(0)$ och $h''(0)$. (2p)

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(s)$ av ordning 2 kring $s = 0$ till funktionen $h = h(s)$. (2p)

(c) Antag att vi skulle spänna ett rep tvärs över en s km lång sjö på jorden. Då skulle repet som djupast ligga h km under ytan mitt på sjön, där h ges av uttrycket ovan. Bajkalsjön är ungefär 640 km lång och jordens radie R är ungefär 6400 km. Använd taylorpolynomet i (b) för att approximera det maximala djupet som ett spänt rep skulle hamna under Bajkalsjöns yta. Man kan här anta att sjön är bottenlös. (1p)

5. Låt

$$y = p(x) = x^5 - 5x + 7,\ x \in \mathbb{R}.$$

Använd verktyg och begrepp som gränsvärden, teckenstudium av derivatan, graf och satsen om mellanliggande värden för att motivera svaren till nedanstående uppgifter.

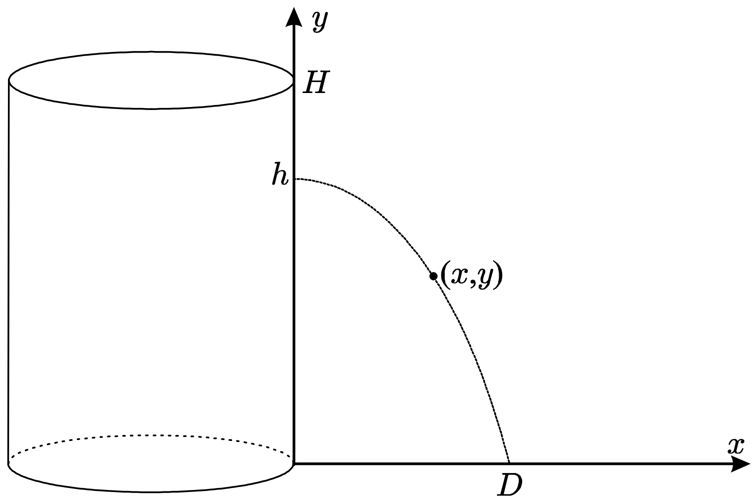
(a) Vad är värdemängden för p? Motivera! (1p)

(b) Avgör hur många reella nollställen som polynomet $p(x)$ har. Motivera! (2p)

(c) Lokalisera nollställena i uppgift (b) genom att ange i vilka intervall $[m, n]$ (där m och n är heltal, $n = m + 1$) nollställena ligger. Motivera! (1p)

(d) Är funktionen p inverterbar? Motivera! (1p)

6. Antag att vi har en cylindrisk vertikal vattentank med höjd H som är fylld med vatten. Vi lägger in ett koordinatsystem som i figuren härunder.



Vi slår sedan ett litet hål på tanken på höjden h över markplanet varpå vatten börjar strila ut följandes parabeln

$$y = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2,$$

där g är tyngdaccelerationen och v_x vattnets horisontella hastighet som enligt Torricellis lag är proportionell mot roten ur vattenpelarens höjd, mer specifikt

$$v_x = \sqrt{2g\,(H-h)}.$$

(a) Låt D vara avståndet från tanken där vattenstrålen träffar markplanet direkt efter vi slagit hål på tanken. Finn ett uttryck som relaterar D till hålets höjd h. (2p)

(b) På vilken höjd h skall hålet göras för att D ska bli maximal och vad blir då D för detta värde på h? (3p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2},\ a_k = a_{k-1} + d. \\ \sum_{k=0}^{n-1} r^k &= \begin{cases} n,\ r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1},\ r \neq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

2. Binomialsatsen

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k, \\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.\end{aligned}$$

3. Trigonometri

$$\begin{aligned}\cos\left(s+t\right) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t, \\ \sin\left(s+t\right) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.\end{aligned}$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f\left(x\right) &= L \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0\right)\left(\exists \delta > 0\right)\left[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f\left(x\right) - L| < \varepsilon\right], \\ \lim_{x\to\infty} f\left(x\right) &= L \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0\right)\left(\exists R\right)\left[x > R \Rightarrow |f\left(x\right) - L| < \varepsilon\right].\end{aligned}$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'\left(x\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned} (f \text{ är } 1-1) \quad &\Leftrightarrow \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),\ x_1, x_2 \in D(f), \\ y \quad &= \quad f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1. \end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)},\ f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

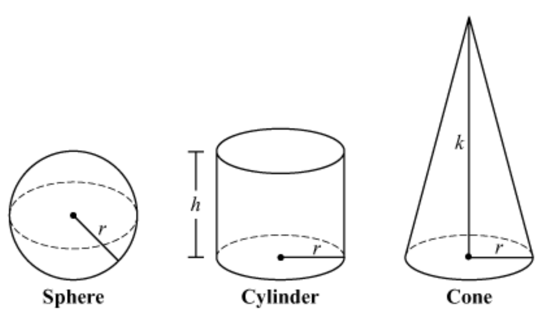
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\ E_n(x) \quad &= \quad \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x),\ s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| \quad &\leq \quad M,\ \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I. \end{aligned}$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$