Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-03-25**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Trollpackan Natasja är väldigt förtjust i att skicka sina förbannelser med brev. Hon har fått en idé att under n st dagar massposta en hög med brev. Första dagen skickar hon ett brev ($b_1 = 1$). Dag två skickar hon tre brev ($b_2 = 3$), dag tre skickar hon sju brev ($b_3 = 7$) och så vidare. Varje dag skickar hon dubbelt så många brev som dagen innan plus ytterligare ett brev.

   (a) Finn ett explicit uttryck för antal brev $b_k = f(k)$ som Natasja skickar dag k. Bevisa ditt påstående med induktion. (3p)

   (b) Hur många brev har Natasja totalt skickat efter n st dagar? (2p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}.$$
(1p)

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} 2n \sin\frac{\pi}{n}$$
(2p)

   (c) Bestäm konstanterna a och b så att
$$\lim_{x\to 3} \frac{ax+b}{x^2-2x-3} = 1.$$
(2p)

3. En funktion f som är sin egen invers (dvs $f^{-1} = f$) kallas för en *involution.*

   (a) Visa att funktionen
$$f(x) = \frac{3x-2}{4x-3},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\},$$
   är en involution. (2p)

   (b) Vad är $\left(f^{-1}\right)'(2)$? (2p)

   (c) Vad är värdemängden för f? (1p)

4. Visa att ellipsen
$$2x^2 + 5y^2 = 10$$
och hyperbeln
$$x^2 - 2y^2 = 2$$
skär varandra under räta vinklar. *Ledning: visa först att kurvorna skär varandra och visa sedan att tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra.* (5p)

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^{x}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Konvexitet behöver ej beaktas. Skissera kurvan. *Ledning:* $e^{kx} = (e^{x})^{k}$. (4p)

(b) Bestäm hur många olika lösningar ekvationen

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^{x} = C.$$

har för alla värden på talet $C \in \mathbb{R}$. Motivera! (1p)

6. Ur en lång timmerstock med cirkulärt tvärsnitt med radie R skall en balk med rektangulärt tvärsnitt sågas. Böjmotståndet W hos en sådan balk ges av

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

där b är balkens bredd och h balkens höjd. Hur skall b och h väljas för att böjmotståndet W skall bli maximalt och vad blir det maximala böjmotståndet $W_{\max}$? (5p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \; a_k = a_{k-1} + d.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n, \; r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r-1}, \; r \neq 1. \end{cases}$$

2. Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

3. Trigonometri

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t,$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right],$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists R)\left[x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right].$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$
\begin{aligned}
(f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),\ x_1, x_2 \in D(f), \\
y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1.
\end{aligned}
$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)},\ f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

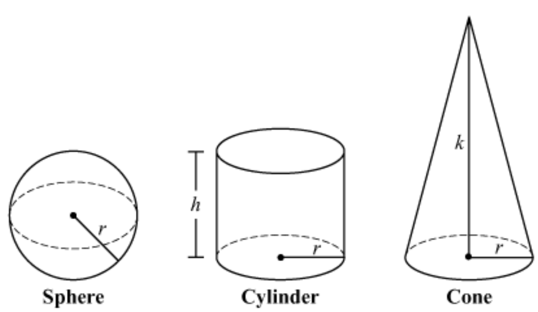
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\
E_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x),\ s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\
\left|f^{(n+1)}(x)\right| &\leq M,\ \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.
\end{aligned}
$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$