



Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-12-20**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5**.

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **350** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt

$$f(x) = 2x - 3.$$

(a) Bestäm

$$f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)).$$

(1p)

(b) Visa med induktion att den n :te itererade funktionen f_n till f är

$$f_n(x) = 2^n x - 3 \cdot 2^n + 3, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där

$$f_1 = f, \quad f_2 = f \circ f, \quad f_3 = f \circ f \circ f, \quad \text{osv.}$$

(4p).

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 4x}$$

Ledning: dubbla vinkeln.

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4)^{x-2}.$$

(2p)

3. Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 7$$

som går genom punkten $(2, -4)$.

(5p)

4. Låt

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

(a) Finn andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x)$ kring punkten 8. (3p)

(b) Använd $P_2(x)$ för att finna en rationell approximation till $\sqrt[3]{10}$. (1p)

(c) **(M0047M)**: Beskriv med MATLAB-kod/kommandon hur vi kan rita upp kurvorna

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$

och

$$y = P_2(x)$$

i samma graf. Markera $\sqrt[3]{10}$. (1p)

(c) **(M0029M)**: Finn en uppskattning på hur stort fel som görs i approximationen i uppgift 4. (b) med hjälp av Lagranges restterm. (1p)

5. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden, konvexitet och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Skissera kurvan. (4p)

(b) Är funktionen f injektiv $(1-1)$? Motivera! (1p)

6. Vad är (kortaste) avståndet mellan origo och grafen till kurvan $y = f(x) = e^{-x^2}$? I vilken punkt antas minimum? (5p)

