Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-03-24**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

> *Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009**   Antal exemplar: **270**   Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa med induktion att det för $x > 0$ och alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(5p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
   $$\lim_{x\to\infty} e^x \sin e^{-x}$$
   (1p)

   (b)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$
   Ledning: Taylor. (2p)

   (c)
   $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$
   (2p)

3. Låt
$$y = f(x) = 1/x,\ x > 0.$$

   (a) Illustrera medelvärdessatsen genom att finna en punkt i det öppna intervallet $(2, 3)$ i vilken tangenten till kurvan $y = f(x)$ är parallell med kordan som sammanbinder punkterna $(2, f(2))$ och $(3, f(3))$. (2p)

   (b) Visa att arean av triangeln som begränsas av tangenten till f och koordinataxlarna är konstant, oberoende av tangeringspunkt. Vad blir arean? **Ledning:** finn först tangenten till f i någon godtycklig punkt $x = a$ på kurvan och finn därefter ett uttryck för arean av triangeln. (3p)

4. Vi definierar funktionen *tangens hyperbolicus* som

$$f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \; x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Visa att f är injektiv $(1-1)$. (2p)

   (b) Bestäm inversen till denna funktion. (2p)

   (c) Bestäm inversens definitionsmängd. Motivera! (1p)

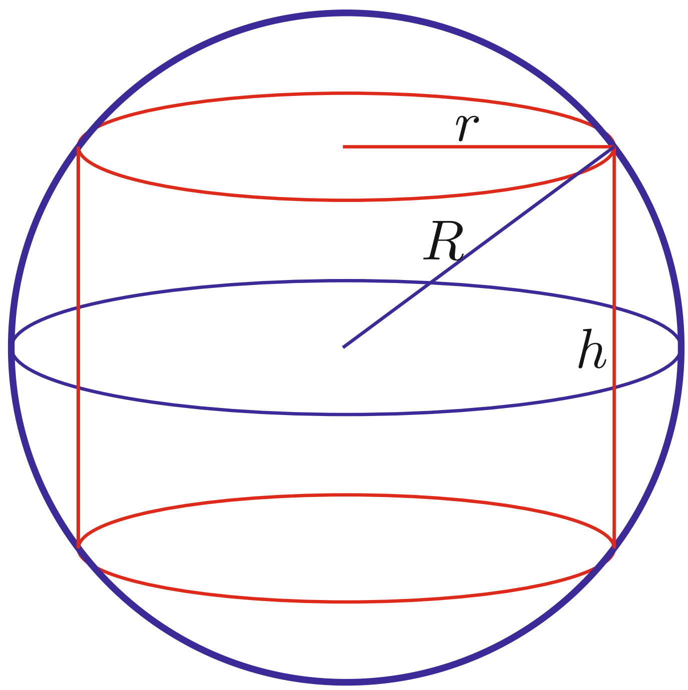
5. Betrakta funktionen

$$y = \arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2}.$$

   (a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. (4p)

   (b) Avgör om f har något globalt maximum eller globalt minimum och om så är fallet, bestäm dessa. (1p)

6. En rak cirkulär cylinder är inskriven i ett klot, se figuren nedan.



Bestäm det största värde som förhållandet V_c/V_b mellan cylinderns volym V_c och klotets volym V_b kan anta. Ange cylinderns radie r och höjd h (uttryckta i klotets radie R) som ger maximum för detta förhållande. (5p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \; a_k = a_{k-1} + d.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n, & r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1}, & r \neq 1. \end{cases}$$

2. Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

3. Trigonometri

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t,$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right],$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists R)\left[x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right].$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$
\begin{aligned}
(f \text{ är } 1-1) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right) \Rightarrow x_1=x_2\right), \; x_1, x_2 \in D\left(f\right), \\
y \quad &= \quad f^{-1}\left(x\right) \Leftrightarrow x=f\left(y\right), \text{ om } f \text{ är } 1-1.
\end{aligned}
$$

7. Användbar identitet

$$y=f\left(x\right)=e^{\ln f(x)}, \; f\left(x\right)>0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt}=ky \Leftrightarrow y\left(t\right)=Ce^{kt}.$$

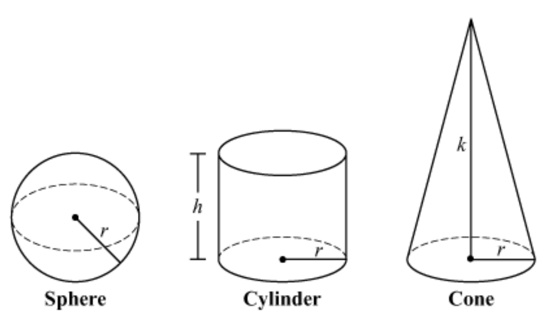
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \; \sinh\left(x\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k+E_n\left(x\right), \\
E_n\left(x\right) \quad &= \quad \frac{f^{(n+1)}\left(s\right)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}=\left(x-a\right)^{n+1}B\left(x\right), \; s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\
\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right| \quad &\leq \quad M, \; \forall x \in I \Rightarrow \left|B\left(x\right)\right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.
\end{aligned}
$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph}=\frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl}=\pi r^2 h$	$V_{con}=\frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph}=4\pi r^2$	$A_{cyl}=2\pi rh$	$A_{con}=\pi r\sqrt{k^2+r^2}$