Omtentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2020-05-27**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Antag att $-1 < x < 1$ och $-1 < y < 1$.

   (a) Bevisa, exempelvis genom att derivera en lämplig funktion eller använda additionsformler, att

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

(3p)

Lösning: Låt y vara fixt. Bilda funktionen

$$f(x) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x$$

för $-1 < x, y < 1$. Då är $-1 < xy < 1$ och

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1 - xy + xy + y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \\
&= \frac{1+y^2}{(1-2xy+x^2y^2) + (x^2+y^2+2xy)} - \frac{1}{1+x^2} = \\
&= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.
\end{aligned}$$

Därmed måste

$$f(x) = C, \text{ konstant.}$$

I punkten $x = 0$ har vi

$$C = f(0) = \arctan \frac{0+y}{1-0} - \arctan 0 = \arctan y.$$

Därmed följer att

$$f(x) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x = \arctan y,$$

dvs formeln är bevisad.

Alternativt ger additionsformlerna för sinus och cosinus att

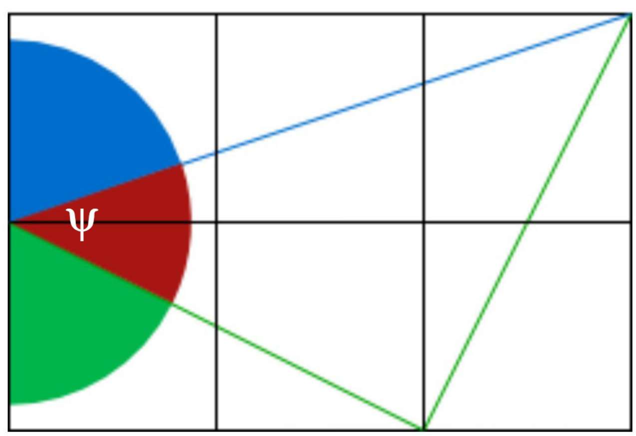
$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned}$$

Därmed är

$$\alpha + \beta = \arctan\left(\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\right)$$

förutsatt att
$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$
Om vi sätter
$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan x, \quad -1 < x < 1\\ \beta &= \arctan y, \quad -1 < y < 1\end{aligned}$$
så är
$$\begin{aligned}x &= \tan\alpha, \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}\\ y &= \tan\beta, \quad -\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$
och därmed
$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$
Insatt i additionsformeln ovan ger det därför
$$\alpha + \beta = \arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}.$$

(b) Beräkna vinkeln ψ (röd) i figuren härunder. Antag att var och en av de 6 kvadraterna (svarta) har sida 1. Kan formeln ovan användas på något sätt månntro? (2p)



Lösning: Dela upp vinkeln ψ i två delar α och β på var sin sida om horisontella mittlinjen, dvs $\psi = \alpha + \beta$, där
$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan\frac{1}{3},\\ \beta &= \arctan\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Formeln ovan ger då (med $x = 1/3$, $y = 1/2$) att
$$\begin{aligned}\psi &= \alpha + \beta = \arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}\\ &= \arctan\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3\cdot 2}} = \arctan\frac{5/6}{5/6} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Alternativt kan man till exempel använda cosinusteoremet. De gröna sidorna har längd $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ och den blå har längd $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. Därmed

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{10}\cos\psi$$
$$\Updownarrow$$
$$10 = 2\sqrt{50}\cos\psi = 10\sqrt{2}\cos\psi$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Den sökta vinkeln är därför $\psi = \frac{\pi}{4}$.

Anmärkning: Om man tänker efter lite grand inser man att vinkeln mellan de två gröna sidorna måste vara rät (Varför?). Eftersom triangeln är likbent måste de två vinklarna mellan hypotenusan (blå) och kateteterna (gröna) vara lika och ha summa $\pi/2$ (eftersom triangelns vinkelsumma är π). Därmed blir den sökta vinkeln $\psi = \pi/4$.

2. Bestäm följande gränsvärden (med motivering), om de existerar:

(a)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}.$$
(1p)

Lösning: Standardgränsvärdet
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$
ger att
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = e^2.$$

(b)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x}.$$
(2p)

Lösning: Förlängning med rotkonjugatet ger

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x}{x^2+2x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}{2x} = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}{2x} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{2} = -1.
\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x \to 2-} \arctan\left(\frac{x-5}{x^2-7x+10}\right).$$

(2p)

Lösning: Eftersom

$$\lim_{x\to 2-} \frac{x-5}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2-} \frac{x-5}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

får vi

$$\lim_{x \to 2-} \arctan\left(\frac{x-5}{x^2-7x+10}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

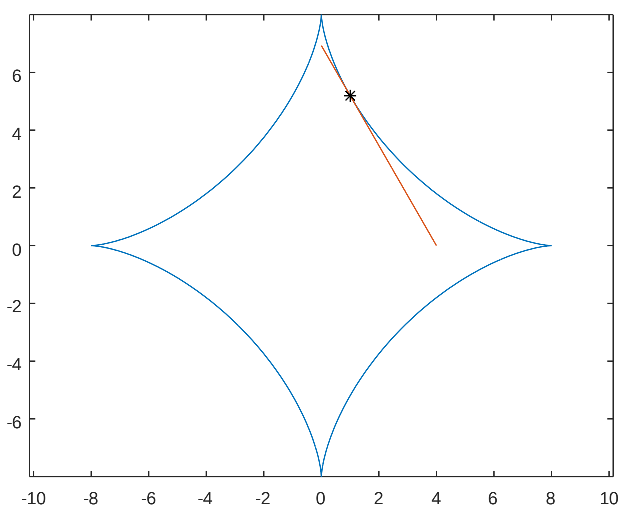
3. Finn tangenten till *astroiden*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$$

genom punkten $\left(1, 3\sqrt{3}\right)$. (5p)

Lösning: Vi kontrollerar först att punkten $\left(1, 3\sqrt{3}\right)$ ligger på kurvan. Det stämmer, ty

$$VL = 1^{2/3} + \left(3\sqrt{3}\right)^{2/3} = 1 + 27^{1/3} = 1 + 3 = 4 = HL.$$



För att finna tangentens lutning sätter vi $y = y(x)$ och deriverar uttrycket implicit med avseende på x. Vi får

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/3} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}.$$

Med $x = 1$ och $y = 3\sqrt{3}$ insatt ger detta tangentens lutning

$$k = y' = -\left(\frac{3\sqrt{3}}{1}\right)^{1/3} - \left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^{1/3} = -\sqrt{3}.$$

Tangentens ekvation fås slutligen ur enpunktsformeln

$$\begin{aligned} y - 3\sqrt{3} &= -\sqrt{3}\,(x-1) \\ &\Updownarrow \\ y &= -\sqrt{3}\,(x-4)\,. \end{aligned}$$

4. Pariserhjulet *London Eye* har en diameter på 120 meter och roterar ett varv på 30 minuter. Med vilken vertikal hastighet stiger man när man är 96 meter över lägsta punkten på hjulet och på väg uppåt? (5p)

   Lösning: Välj ett koordinatsystem med origo i hjulets centrum. Hjulets radie är 60 meter, dvs hjulets centrum befinner sig 60 meter över lägsta punkten. Antag att hjulet vrider sig moturs (ingen begränsning). När man befinner sig 96 meter över lägsta punkten motsvarar det en $y-$koordinat på $y = 96 - 60 = 36$ meter. Det ger då en $x-$koordinat på

$$x = +\sqrt{60^2 - 36^2} = 12\sqrt{5^2 - 3^2} = 48 \text{ meter } (+ \text{ ty rörelse uppåt}).$$

   Låt $\theta = \theta(t)$ beteckna vridningsvinkeln mätt från positiva x-axeln. Då är hjulets vinkelhastighet

$$\theta'(t) = \frac{2\pi}{30}\,\text{rad}\,/\,\text{min}\,.$$

   Koordinaterna för en punkt (x, y) på hjulet kan uttryckas i vridningsvinkeln som

$$\begin{aligned} x &= 60\cos\theta, \\ y &= 60\sin\theta. \end{aligned}$$

   Den vertikala hastigheten är därför

$$y' = \frac{d}{dt}(60\sin\theta) = 60\cos\theta\cdot\theta' = x\cdot\theta' = 48\cdot\frac{2\pi}{30} = \frac{16\pi}{5}\text{m/min}.$$

   Anmärkning: Numeriskt är detta cirka 10 m/min (krävs ej för fullständigt löst uppgift).

5. I en enkel matematisk modell för antalet ackumulerade smittofall $y = y(t)$ i en typisk epidemi lyder y den *logistiska differentialekvationen*

$$\frac{dy}{dt} = ky\,(1 - y/L)\,.$$

(a) Visa att *sigmoiden*

$$y(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-T_0)}}$$

uppfyller differentialekvationen ovan. (2p)

Lösning: Derivering av y ger vänsterledet

$$VL = \frac{dy}{dt} = -\frac{L}{\left(1 + e^{-k(t-T_0)}\right)^2} \cdot \left(-ke^{-k(t-T_0)}\right) = \frac{Lke^{-k(t-T_0)}}{\left(1 + e^{-k(t-T_0)}\right)^2}.$$

Högerledet är

$$\begin{aligned} HL &= ky(1 - y/L) = k\frac{L}{1 + e^{-k(t-T_0)}}\left(1 - \frac{1}{1 + e^{-k(t-T_0)}}\right) = \\ &= \frac{kL}{1 + e^{-k(t-T_0)}}\left(\frac{1 + e^{-k(t-T_0)} - 1}{1 + e^{-k(t-T_0)}}\right) = \frac{Lke^{-k(t-T_0)}}{\left(1 + e^{-k(t-T_0)}\right)^2}. \end{aligned}$$

Eftersom $HL = VL$ uppfyller y differentialekvationen.

(b) Låt $k = 1$, $L = 2$, $T_0 = 0$. Finn inflexionspunkter och asymptoter till sigmoiden ovan. Skissera kurvan. (3p)

Lösning: Här är

$$y(t) = \frac{2}{1 + e^{-t}} = \frac{2e^t}{e^t + 1}.$$

Låt oss börja med att se vad som händer när $t \to \pm\infty$. Vi har att

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim \frac{2}{1 + \underbrace{e^{-t}}_{\to 0}} = \frac{2}{1} = 2, \\ \lim_{t\to-\infty} y(t) &= \lim \frac{2\overbrace{e^t}^{\to 0}}{\underbrace{e^t}_{\to 0} + 1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Därmed har grafen en enkelsidig horisontell asymptot $y = 2$ till höger och en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ till vänster. Grafen saknar därmed sneda asymptoter, ej heller finns det någon vertikal asymptot.

Derivering ger nu

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{2e^t(e^t + 1) - 2e^t \cdot e^t}{(e^t + 1)^2} = \frac{2e^t}{(e^t + 1)^2}, \\ y''(t) &= \frac{2e^t(e^t + 1)^2 - 2e^t \cdot 2e^t(e^t + 1)}{(e^t + 1)^4} = \frac{2e^t(e^t + 1 - 2e^t)}{(e^t + 1)^3}. \end{aligned}$$

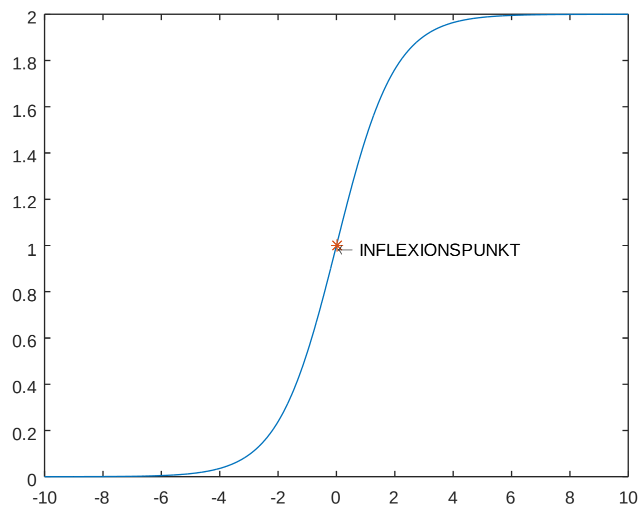
Vi ser att $y'(t) > 0$ för alla t. Därmed är $y(t)$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$. Andraderivatan kan vi skriva

$$y''(t) = \frac{2e^t(1 - e^t)}{(e^t + 1)^3}.$$

Eftersom $0 < e^t < 1$ för $t < 0$ och $1 < e^t < \infty$ för $t > 0$ är $y'' < 0$ (grafen konkav) för $t > 0$ och $y'' > 0$ (grafen konvex) för $t < 0$. Alltså så måste punkten $t = 0$ vara inflexionspunkt. I den punkten har funktionen värdet

$$y(0) = \frac{2}{1+e^0} = \frac{2}{2} = 1.$$

Vi kan därmed skissera grafen som



6. Teknologen Karen, kall och blöt efter ett kraftigt regnväder, befinner sig i en roddbåt R i en sjö 4 km från närmsta punkten A på den rätlinjiga stranden. Hon vill så snabbt som möjligt komma fram till den värmande brasan i vindskyddet P på stranden genom att först ro till stranden och sedan med blöta stövlar gå den eventuellt resterande sträckan till P. Avståndet mellan A och P är 3 km. Mot vilken punkt S på stranden ska hon ro om hon ror med 4 km/tim och går med 5 km/tim? (5p)

Lösning: Kalla avståndet mellan punkten A och punkten S för x. Då måste

$$0 \le x \le 3$$

ty det är självklart långsammare att ro till en punkt S som ej ligger mellan A och P. Totala tiden T det tar från R till P är summan av tiden det tar att ro mellan R och S och tiden det tar att gå mellan S och P. Därmed är

$$T = T(x) = \frac{\sqrt{x^2+4^2}}{4} + \frac{3-x}{5}, \ 0 \le x \le 3.$$

Om Karen först ror till närmsta punkten A och sedan går hela sträckan till P tar det tiden

$$T(0) = \frac{\sqrt{0^2+4^2}}{4} + \frac{3-0}{5} = \frac{4}{4} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \text{ tim} = 96 \text{ min}.$$

Om Karen ror direkt till punkten P tar det tiden

$$T(3) = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{4} + \frac{3-3}{5} = \frac{5}{4} \text{ tim} = 75 \text{ min}.$$

Kan det finnas någon singulär punkt eller kritisk punkt? Derivering ger

$$T'(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+4^2}} - \frac{1}{5}.$$

Därmed saknas singulära punkter. Vi finner kritiska punkter genom att lösa ekvationen $T'(x) = 0$. Då måste

$$\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+4^2}} = \frac{1}{5} \Longleftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2+4^2}.$$

Kvadrering av bägge led medför då (OBS! implikation!)

$$5^2x^2 = 4^2\left(x^2+4^2\right) \Longleftrightarrow 3^2x^2 = \left(5^2-4^2\right)x^2 = 4^2\cdot 4^2.$$

Därmed måste

$$x^2 = \frac{4^2\cdot 4^2}{3^2} = \left(\frac{4\cdot 4}{3}\right)^2.$$

Drar vi roten ur bägge led får vi

$$x = \pm\frac{16}{3}.$$

Notera att ingen av dessa punkter kan vara kritiska eftersom de ligger utanför intervallet $[0,3]$ (de kan därför inte ge minimum). Detta beror på att objektsfunktionen som ska minimeras egentligen är

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+4^2}}{4} + \frac{|3-x|}{5},\ \ x\in\mathbb{R},$$

och denna funktion inser man lätt är strängt avtagande för $x<0$ (faktiskt för $x<3$) och strängt växande för $x>3$.

Svar: Karen ska ro direkt till vindskyddet P för att så fort som möjligt komma till värmen. Det tar 1 timme och 15 minuter.