



Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-03-23**

Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5**.

Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5). Kalkylator EJ Tillåten.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:

Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:

Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **269** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa med induktion att det för alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 e^x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x. \quad (5p)$$

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{x}. \quad (1p)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}. \quad (2p)$$

(c) Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 4. \quad (2p)$$

3. Definiera

$$f(x) = \ln \cos x + x \tan x - \frac{x^2}{2}$$

för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Vad är $f'(x)$? Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (2p)

(b) Visa att

$$\ln \cos x + x \tan x \geq \frac{x^2}{2}$$

för

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \quad (3p)$$

4. Låt

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 7.$$

(a) Visa att f är inverterbar. (2p)

(b) Finn

$$f^{-1}(3).$$

(1p)

(c) Beräkna

$$(f^{-1})'(3).$$

(2p)

5. Betrakta funktionen

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x}, \quad x > 0.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

6. Sand rinner ner på en konisk hög med en hastighet av $\frac{1}{2}$ m³/min. Antag att högen hela tiden bibehåller formen av en rak cirkulär kon där förhållandet $h : r$ mellan höjden h och radien r är 1 : 2.

(a) Hur fort ökar höjden på konen vid den tidpunkt när högen är 2 m hög? (3p)

(b) Vid vilken höjd ökar höjden på konen med 40 mm/min? (2p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad a_k = a_{k-1} + d.$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n, & r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1}, & r \neq 1. \end{cases}$$

2. Binomialsatsen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Trigonometri

$$\begin{aligned} \cos(s + t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t, \\ \sin(s + t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) [0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon], \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists R) [x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon]. \end{aligned}$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned} (f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \quad x_1, x_2 \in D(f), \\ y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1. \end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)}, \quad f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

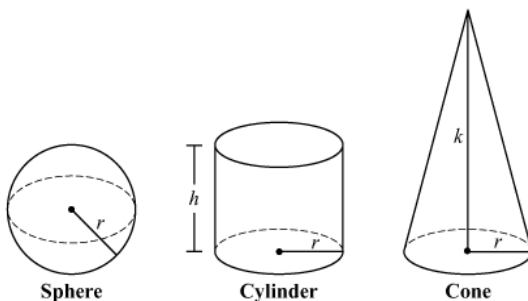
10. Taylors formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x),$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x), \quad s \text{ mellan } x \text{ och } a.$$

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r \sqrt{k^2 + r^2}$