LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-08-16**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **294** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Kalkylator EJ tillåten. Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Husen längs Pells gata är numrerade i ordning $1, 2, 3, \ldots$ ända upp till 49.

   (a) Vad är summan av alla husnumren på Pells gata? (2p)

   (b) Ramanujan bor längs denna gata i hus nummer m. En dag observerar han att summan av numren på husen till vänster om hans hus är samma som summan av numren på husen till höger om hans hus. Vad är m? (3p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$
(1p)

   (b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{4+x}-2}.$$
(2p)

   (c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{4^x-1}{4^x-2^x}.$$
(2p)

3. Låt $x > 0$ och definiera

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x/4}, \\ g(x) &= k\sqrt{x}. \end{aligned}$$

   (a) Finn det $k > 0$ som gör att funktionerna f och g tangerar varandra i en punkt. (4p)

   (b) Bestäm funktionernas gemensamma tangent för detta värde på k. (1p)

4. Definiera
$$f(x) = \sqrt{x^2+6x}$$
för $x > 0$.

   (a) Visa att f är inverterbar. (1p)

   (b) Finn inversen f^{-1} till f. (3p)

   (c) Bestäm funktionen g om
$$g(f(x)) = (x+3)^2.$$
(1p)

5. Definiera funktionen

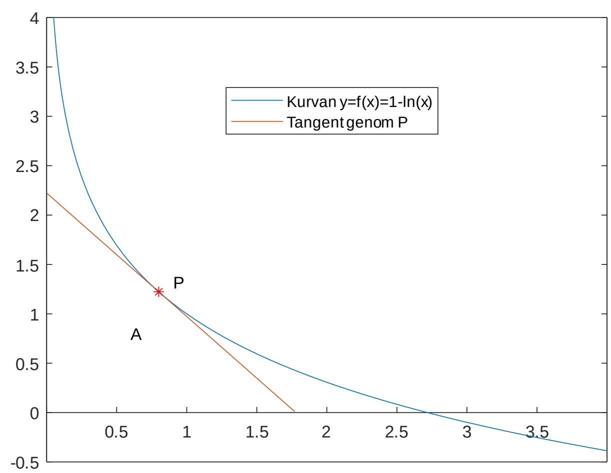
$$y = f(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right) e^{x/2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

6. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = 1 - \ln x, \ 0 < x \leq e.$$

(a) Låt $P = (a, f(a))$ vara en punkt på kurvan ovan. Ställ upp ett uttryck för arean A av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten till kurvan f genom punkten P. (2p)



(b) Finn det värde $a \in (0, e]$ för vilket arean av triangeln ovan är maximal. (3p)

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n\left(a_1+a_n\right)}{2},\ a_k = a_{k-1}+d.\\ \sum_{k=0}^{n-1} r^k &= \begin{cases} n,\ r=1, \\ \frac{r^n-1}{r-1},\ r\neq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

2. Binomialsatsen

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^{n-k}b^k,\\ \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.\end{aligned}$$

3. Trigonometri

$$\begin{aligned}\cos\left(s+t\right) &= \cos s\cos t-\sin s\sin t,\\ \sin\left(s+t\right) &= \sin s\cos t+\cos s\sin t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},\\ a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

$$\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

4. Formell definition av gränsvärde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f\left(x\right) &= L \Leftrightarrow \left(\forall\epsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right)\left[0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f\left(x\right)-L|<\varepsilon\right],\\ \lim_{x\to\infty} f\left(x\right) &= L \Leftrightarrow \left(\forall\epsilon>0\right)\left(\exists R\right)\left[x>R\Rightarrow|f\left(x\right)-L|<\varepsilon\right].\end{aligned}$$

5. Derivata

$$\frac{df}{dx}=f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

6. Invers funktion

$$\begin{aligned}(f \text{ är } 1-1) &\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \ x_1, x_2 \in D(f), \\ y &= f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \text{ om } f \text{ är } 1-1.\end{aligned}$$

7. Användbar identitet

$$y = f(x) = e^{\ln f(x)}, \ f(x) > 0.$$

8. Exponentiell tillväxt

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

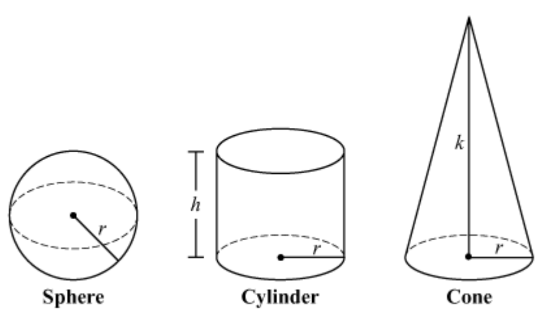
9. Hyperboliska funktioner

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \\ E_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = (x-a)^{n+1} B(x), \ s \text{ mellan } x \text{ och } a. \\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| &\leq M, \ \forall x \in I \Rightarrow |B(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \text{ begränsad för } x \in I.\end{aligned}$$

11. Några enkla solider



Volym:	$V_{sph} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$V_{cyl} = \pi r^2 h$	$V_{con} = \frac{\pi r^2 k}{3}$
Mantelarea:	$A_{sph} = 4\pi r^2$	$A_{cyl} = 2\pi r h$	$A_{con} = \pi r\sqrt{k^2 + r^2}$