Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-12-20**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt
$$f(x) = 2x - 3.$$

(a) Bestäm
$$f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)).$$
(1p)

Lösning: Vi har att
$$f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x-3) = 2(2x-3) - 3 = 4x - 6 - 3 = 4x - 9.$$

(b) Visa med induktion att den n:te itererade funktionen f_n till f är
$$f_n(x) = 2^n x - 3 \cdot 2^n + 3, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$
där
$$f_1 = f, \; f_2 = f \circ f, \; f_3 = f \circ f \circ f, \text{ osv.}$$
(4p).

Bevis: Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att
$$f_1(x) = f(x) = 2x - 3 = 2^1 x - 3 \cdot 2^1 + 3.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att
$$f_p(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{p \text{ st}}(x) = 2^p x - 3 \cdot 2^p + 3 \; \text{(induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p + 1$, dvs att
$$f_{p+1}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{p+1 \text{ st}}(x) = 2^{p+1} x - 3 \cdot 2^{p+1} + 3.$$

Detta är sant, ty vi har att
$$\begin{aligned} f_{p+1}(x) &= \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{p+1 \text{ st}}(x) = f \circ \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{p \text{ st}}(x) = f \circ f_p(x) = f(f_p(x)) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \\ &= f(2^p x - 3 \cdot 2^p + 3) = 2(2^p x - 3 \cdot 2^p + 3) - 3 = 2^{p+1} x - 3 \cdot 2^{p+1} + 3. \end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}}.$$
(1p)

Lösning: Vi har att
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\ln x} = +\infty$$
eftersom $\ln x$ växer mot oändligheten när x går mot oändligheten.

(b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 4x}$$

Ledning: *dubbla vinkeln.* (2p)

Lösning: Kom ihåg att

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Därmed har vi att

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}^{=\cos(2x)}\overbrace{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}^{=1}}{2\sin(2x)\cos(2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin 2x} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ lösning: Eftersom gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ så taylorutvecklar vi nämnare och täljare kring $x = \frac{\pi}{4}$. Om

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x, \\ g(x) &= \cos^4 x - \sin^4 x, \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos 4x, \\ g'(x) &= -4\cos^3 x\sin x - 4\sin^3 x\cos x, \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{4\pi}{4} = \sin\pi = 0, \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4\cos\frac{4\pi}{4} = 4\cos\pi = -4, \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos^4\frac{\pi}{4} - \sin^4\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 0, \\ g'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4\cos^3\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} - 4\sin^3\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -2. \end{aligned}$$

Därmed kan vi utveckla nämnaren och täljaren som

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_1(x) = \\ &= -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_1(x), \\ g(x) &= g\left(\frac{\pi}{4}\right) + g'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_2(x) = \\ &= -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 B_2(x), \end{aligned}$$

där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade funktioner i en omgivning av $\frac{\pi}{4}$ eftersom f och g är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara. Således blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 4x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 B_2(x)}{-4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 B_1(x)} = \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2+\left(x-\frac{\pi}{4}\right) B_2(x)}{-4+\left(x-\frac{\pi}{4}\right) B_1(x)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x\to 2+} \left(x^2-4\right)^{x-2}.$$

(2p)

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $\left[0^0\right]$. Låt

$$f(x) = \left(x^2-4\right)^{x-2}$$

för $x > 2$. Då är

$$\ln f(x) = \ln\left(x^2-4\right)^{x-2} = (x-2)\ln\left(x^2-4\right) = (x-2)\left(\ln(x-2)+\ln(x+2)\right).$$

Med variabelbytet

$$t = x-2 \Leftrightarrow x = t+2$$

får vi därför

$$\lim_{x\to 2+} \ln f(x) = \lim_{x\to 2+} (x-2)\left(\ln(x-2)+\ln(x+2)\right) \underset{t=x-2}{=} \lim_{t\to 0+} \underbrace{t\ln t}_{\to 0 \text{ STD}} + \lim_{t\to 0+} t\cdot\underbrace{\ln(t+4)}_{\to \ln 4} = 0$$

varför

$$\lim_{x\to 2+} \left(x^2-4\right)^{x-2} = \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} e^{\ln f(x)} \underset{e^{\cdot}\ \text{kont.}}{=} e^{\lim_{x\to 2+} \ln f(x)} = e^0 = 1.$$

3. Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 7$$

som går genom punkten $(2,-4)$. (5p)

Lösning: Punkten $(2,-4)$ ligger ej på kurvan $y = f(x) = x^2-3x+7$ eftersom $f(2) = 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 5 \neq -4$. Därmed måste någon annan punkt vara tangeringspunkt. Låt därför tangeringspunkten på kurvan ha koordinaterna $(a, f(a))$. Vi vet att tangenten då har lutning $f'(a) = 2a-3$. Enpunktsformeln ger att tangentens ekvation är

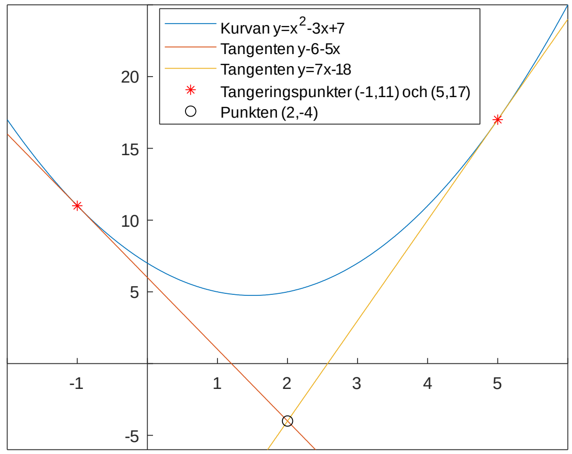
$$y - \left(a^2-3a+7\right) = (2a-3)(x-a) \Leftrightarrow y = (2a-3)x - a^2 + 7.$$

Vi vet också att denna tangent går genom punkten $(2,-4)$, det vill säga, tangentens ekvation måste vara uppfylld i punkten $(2,-4)$:

$$-4 = (2a-3)2 - a^2 + 7 \Leftrightarrow -4 = 4a - 6 - a^2 + 7 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-5) = 0$$

För de två tangeringspunkterna $a=-1$ och $a=5$ är därför motsvarande tangenter

$$\begin{aligned} y &= (2\cdot(-1)-3)x - (-1)^2 + 7 = 6 - 5x, \\ y &= (2\cdot 5 - 3)x - 5^2 + 7 = 7x - 18.\end{aligned}$$



4. Låt
$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

(a) Finn andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x)$ kring punkten 8. (3p)
Lösning: Taylorpolynomet $P_2(x)$ till $f(x)$ kring punkten 8 ges av
$$P_2(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2}(x-8)^2.$$
Med
$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$
får vi
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}. \end{aligned}$$
Därmed är
$$\begin{aligned} f(8) &= \sqrt[3]{8} = 2, \\ f'(8) &= \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot 2^2} = \frac{1}{12}, \\ f''(8) &= -\frac{2}{9\left(\sqrt[3]{8}\right)^5} = -\frac{2}{9\cdot 2^5} = -\frac{1}{144}, \end{aligned}$$
och således
$$P_2(x) = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288}$$

(b) Använd $P_2(x)$ för att finna en rationell approximation till $\sqrt[3]{10}$. (1p)
Lösning: Vi får
$$\sqrt[3]{10} = f(10) \approx P_2(10) = 2 + \frac{10-8}{12} - \frac{(10-8)^2}{288} = 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} = \frac{144+12-1}{72} = \frac{155}{72}.$$

(c) **(M0047M):** Beskriv med MATLAB-kod/kommandon hur vi kan rita upp kurvorna

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$

och

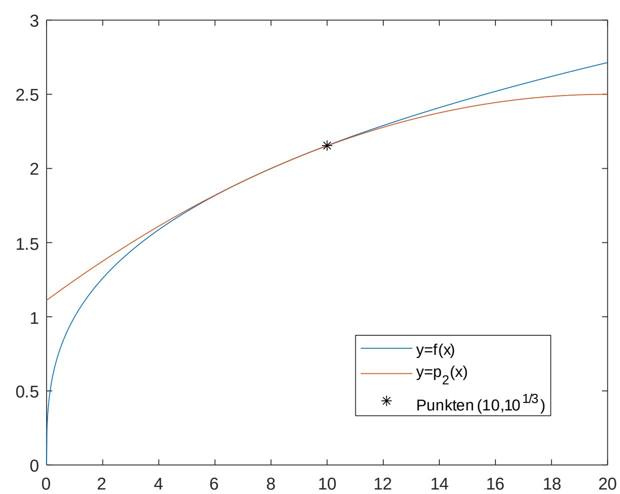
$$y = P_2(x)$$

i samma graf. Markera $\sqrt[3]{10}$. (1p)

Lösning: Till exempel ger koden

```
x=0:0.01:20;
f=@(x) x.^(1/3);
p2=@(x) 2+(x-8)/12-(x-8).^2/288;
y1=f(x);
y2=p2(x);
plot(x,y1,x,y2,10,10^(1/3),'k*');
legend('y=f(x)','y=p_2(x)','Punkten (10,10^{1/3})');
```

grafen



(c) **(M0029M/M0059M):** Finn en uppskattning på hur stort fel som görs i approximationen i uppgift 4. (b) med hjälp av Lagranges restterm. (1p)

Lösning: Felet $E_2(x)$ ges av

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-8)^3,$$

där s är någon punkt mellan 8 och x. I detta fall är $x = 10$ och

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\left(\sqrt[3]{x}\right)^8}.$$

Således är felet

$$E_2(10) = \frac{f'''(s)}{3!}(10-8)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{27\left(\sqrt[3]{s}\right)^8} \cdot 2^3 = \frac{40}{81\left(\sqrt[3]{s}\right)^8}$$

(OBS! positivt) för något $s \in (8, 10)$. Observera nu att funktionen

$$g(s) = \frac{40}{81 \left(\sqrt[3]{s}\right)^8}$$

är en avtagande funktion på intervallet $[8, 10]$ eftersom nämnaren är växande. Således får vi en övre begränsning till $E_2(10)$ som värdet av funktionen g i vänster ändpunkt $s = 8$, dvs

$$E_2(10) = g(s) < g(8) = \frac{40}{81 \left(\sqrt[3]{8}\right)^8} = \frac{5 \cdot 2^3}{3^4 \cdot 2^8} = \frac{5}{3^4 \cdot 2^5}.$$

Vi konkluderar därför att

$$\frac{155}{72} < \sqrt[3]{10} < \frac{155}{72} + \frac{5}{3^4 \cdot 2^5}.$$

5. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden, konvexitet och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Skissera kurvan. (5p)

Lösning: Vi noterar först att grafen skär x-axeln i 1 och -4, ty

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

Vi observerar sedan att den rationella funktionen f har gradtal 2 i täljaren och gradtal 1 i nämnaren. Därmed kommer funktionen inte att ha någon horisontell asymptot, men väl en sned asymptot $p(x)$. I själva verket gäller att

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x} = x + 3 - \frac{4}{x},$$

således kommer funktionen f att bete sig ungefär som den sneda asymptoten

$$p(x) = x + 3$$

långt från origo, ty då är termen $-4/x$ försumbar. När $x \to \pm\infty$ har vi således att

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \overbrace{x}^{\to \infty} + 3 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} = +\infty, \\
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \overbrace{x}^{\to -\infty} + 3 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} = -\infty.
\end{aligned}$$

Vi kan nu observera att funktionen varken är udda eller jämn, ty

$$f(-x) = (-x) + 3 - \frac{4}{-x} = -x + 3 + \frac{4}{x} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}.$$

Däremot är $f(x) - 3$ udda. Således är grafen symmetrisk kring punkten $(0, 3)$. Funktionen har dessutom en vertikal asymptot $x = 0$, ty

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0-} f(x) &= \lim_{x \to 0-} \frac{\overbrace{x^2 + 3x - 4}^{\to -4}}{\underbrace{x}_{\to 0-}} = +\infty, \\
\lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{x^2 + 3x - 4}^{\to -4}}{\underbrace{x}_{\to 0+}} = -\infty.
\end{aligned}$$

Derivering av funktionen ger

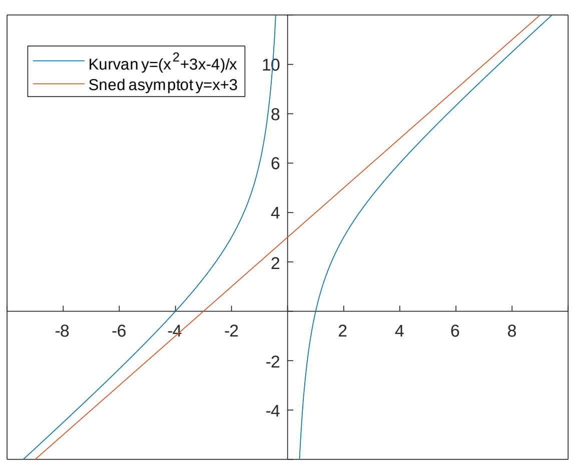
$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x}\right) = \frac{(2x + 3)\,x - (x^2 + 3x - 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 3x - x^2 - 3x + 4}{x^2} = \\
&= \frac{x^2 + 4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}, \\
y'' &= \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = -\frac{8}{x^3}.
\end{aligned}$$

Därmed saknar vi såväl kritiska punkter som möjliga inflexionspunkter. Teckenstudium ger

		0	
$x^2 + 4$	$+$		$+$
x^2	$+$	0	$+$
y'	$+$	odef.	$+$
y	$\nearrow$	asy.	$\nearrow$

		0	
-8	$-$		$-$
x^3	$-$	0	$+$
y''	$+$	odef.	$-$
y	$\smile$	asy.	$\frown$

Funktionen saknar således extrempunkter och är strängt växande på bägge intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Funktionen är konvex på intervallet $(-\infty, 0)$ och konkav på intervallet $(0, \infty)$. Vi kan slutligen skissera grafen som



(b) Är funktionen f injektiv $(1-1)$? Motivera!

Lösning: En funktion f är injektiv om olika värden x_1 och x_2 i definitionsmängden alltid avbildas på olika värden $f(x_1)$ och $f(x_2)$. Det innebär att grafen till $y = f(x)$ skärs av en horisontell linje $y = C$ i högst en punkt, dvs ekvationen

$$f(x) = C$$

har högst en lösning för varje val på C. I detta fall ser vi att grafen skärs av en horisontell linje $y = C$ i två punkter för varje val på C, således är f ej injektiv. Mer specifikt, ekvationen

$$f(x) = C$$

har alltid två olika lösningar, ty

$$\frac{x^2+3x-4}{x} = C \Longleftrightarrow x^2 + (3-C)x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = \frac{C-3 \pm \sqrt{(C-3)^2+16}}{2},$$

där vi får två olika reella lösningar $x_1 \neq x_2$ då uttrycket under rottecknet är åtminstone 16.

Alternativ lösning: En ekvivalent definition av att en funktion f är injektiv är att om funktionsvärdena i två punkter x_1 och x_2 är lika så måste $x_1 = x_2$, dvs

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

I detta fall,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2+3x_1-4}{x_1} &= \frac{x_2^2+3x_2-4}{x_2} \\
&\Updownarrow \\
x_1^2x_2 + 3x_1x_2 - 4x_2 &= x_1x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_1 \\
&\Updownarrow \\
x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 &= x_1x_2(x_1-x_2) + 4(x_1-x_2) = 0 \\
&\Updownarrow \\
(x_1x_2+4)(x_1-x_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Vi konstaterar att lika funktionsvärden inte nödvändigtvis medför att $x_1 = x_2$, t ex så har bägge punkterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -4$ samma funktionsvärde (i detta fall 0), något som gäller varje par av punkter x_1 och x_2 som uppfyller

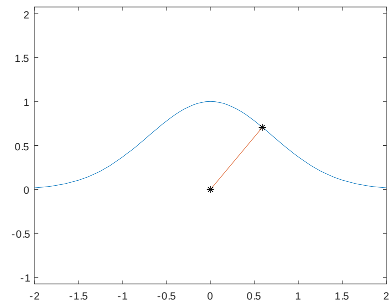
$$x_1x_2 = -4.$$

Anmärkning: Observera att trots att derivatan

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} > 1$$

är positiv på hela definitionsmängden så är det inte tillräckligt för att f ska vara injektiv. Det beror på att definitionsmängden i detta fall inte är ett sammanhängande intervall.

6. Vad är (kortaste) avståndet mellan origo och grafen till kurvan $y = f(x) = e^{-x^2}$?



Lösning: Avståndet mellan en punkt $P = \left(a, e^{-a^2}\right)$ på kurvan och origo är

$$d = \sqrt{(a-0)^2 + \left(e^{-a^2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + e^{-2a^2}}.$$

Det är detta uttryck vi vill minimera. Notera dock att detta problem är ekvivalent med att minimera avståndet i kvadrat, det vill säga, funktionen

$$d^2 = g(a) = a^2 + e^{-2a^2}.$$

Funktionen $g(a)$ är definierad på hela $\mathbb{R}$, dessutom är den symmetrisk kring y-axeln eftersom den är jämn ($g(-a) = g(a)$). När vi går i gräns mot intervallets ändpunkter får vi

$$\lim_{a \to \pm\infty} g(a) = \lim_{a \to \pm\infty} \underbrace{a^2}_{\to\infty} + \underbrace{e^{-2a^2}}_{\to 0} = +\infty,$$

varför minimum måste antas i en ändlig punkt. Den punkten måste vara en kritisk punkt, ty singulära punkter saknas. Derivering ger

$$g'(a) = 2a - 4ae^{-2a^2} = 2a\left(1 - 2e^{-2a^2}\right).$$

Det finns därför 3 kritiska punkter ($g'(a) = 0$), nämligen när

$$a = 0 \ \vee 1 - 2e^{-2a^2} = 0.$$

När $a = 0$ är avståndet

$$d = \sqrt{0 + e^0} = 1.$$

Det andra villkoret ger

$$e^{-2a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2a^2 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}.$$

I dessa två punkter är avståndet

$$d = \sqrt{a^2 + e^{-2a^2}} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Det är dessa två punkter som ger minimum, ty

$$\sqrt{\frac{1+\ln 2}{2}} < 1 \Leftrightarrow 1+\ln 2 < 2 \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < e.$$

Det sökta avståndet är därför

$$d = \sqrt{\frac{1+\ln 2}{2}}$$

och antas i punkterna

$$P = \left(\pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Anmärkning: Geometriskt inser vi att i den punkt P på kurvan som ger kortaste avstånd måste tangenten vara vinkelrät mot linjen som förbinder P med origo O. Kurvans tangent har lutning

$$k_1 = f'(a) = -2ae^{-a^2}$$

och linjen

$$y = \frac{e^{-a^2}}{a}x$$

som går genom origo och P har lutning

$$k_2 = \frac{e^{-a^2}}{a}.$$

Således ger villkoret att de skall vara vinkelräta att

$$-1 = k_1 k_2 = -2ae^{-a^2} \cdot \frac{e^{-a^2}}{a} \Longleftrightarrow 2e^{-2a^2} = 1$$

om $a \neq 0$. I fallet $a = 0$ ger villkoret att $f'(0) = 0$ (horisontell tangent).