Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-08-17**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Det gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}, \; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(a) Bevisa formeln ovan, exempelvis med induktion. (4p)

Bevis: Vi börjar med basfallet $n = 1$. Vi har då att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} \frac{k^2}{2^k} = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2} = 6 - \frac{11}{2} = 6 - \frac{1^2+4\cdot 1+6}{2^1} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{p^2+4p+6}{2^p} \; \text{(induktionsantagande)}.$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p+1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{(p+1)^2+4(p+1)+6}{2^{p+1}} = 6 - \frac{p^2+6p+11}{2^{p+1}}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k^2}{2^k} &= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{k^2}{2^k}\right) + \frac{(p+1)^2}{2^{p+1}} \underset{\text{ind.ant.}}{=} \left(6 - \frac{p^2+4p+6}{2^p}\right) + \frac{(p+1)^2}{2^{p+1}} \\
&= 6 - \left(\frac{2(p^2+4p+6)}{2^{p+1}} - \frac{p^2+2p+1}{2^{p+1}}\right) = \\
&= 6 - \frac{2p^2+8p+12-(p^2+2p+1)}{2^{p+1}} = 6 - \frac{p^2+6p+11}{2^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Vad går summan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$$

mot när n går mot oändligheten? (1p)

Lösning: Summan går mot 6, ty

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \lim_{n\to\infty} 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 6 - \frac{n^2}{2^n} - 4\frac{n}{2^n} - \frac{6}{2^n} = 6,$$

då varje potens x^p, $p > 0$, domineras av en exponentialfunktion med bas $a > 1$, ty

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^{x\ln a}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^\alpha}{e^x}\right)^{\ln a} \underset{\text{STD}}{=} 0^{\ln a} = 0$$

för

$$\alpha = \frac{p}{\ln a} > 0.$$

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$$

(1p)

Lösning: Konjugatregeln ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\left(e^x\right)^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$$

(2p)

Lösning: Antag $0<t<\pi$. Då är $\sin x>0$. Förlängning av täljare och nämnare med $\sqrt{1+\cos t}$ ger därför

$$\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=\frac{t\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1-\cos^2 t}}=\frac{t\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{\sin^2 t}}=\frac{t\sqrt{1+\cos t}}{|\sin t|}=\frac{\sqrt{1+\cos t}}{\frac{\sin t}{t}},$$

dvs

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+\cos t}}{\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1}}=\frac{\sqrt{1+\cos 0}}{1}=\sqrt{2}.$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{3x}\right)}{e^{\ln(2x)+\ln(3x)}}$$

(2p)

Lösning: Förenkling ger

$$\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{3x}\right)}{e^{\ln(2x)+\ln(3x)}}=\frac{\ln\left(e^{3x}\left(e^{-x}+1\right)\right)}{e^{\ln 2x}\cdot e^{\ln 3x}}=\frac{\ln e^{3x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)}{2x\cdot 3x}=\frac{3x+\ln\left(e^{-x}+1\right)}{6x^2}$$

så att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{3x}\right)}{e^{\ln(2x)+\ln(3x)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\ln\left(e^{-x}+1\right)}{6x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{\ln\overbrace{\left(e^{-x}+1\right)}^{\to 1}}{x^2}}{6}=\frac{0}{6}=0.$$

3. Antag $x > 0$.

(a) Visa olikheten

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Ledning: Olikheten kan vara enklare att bevisa om man gör variabelbytet $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$. (2p)

Bevis: Variabelbytet

$$x = \frac{1}{t}$$

gör att olikheten ovan är ekvivalent med

$$\ln(1+t) > \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = \frac{t}{1+t}$$

för $t > 0$. Bilda därför funktionen

$$h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}, \ t \geq 0.$$

Om vi kan visa att $h(t) > 0$ för $t > 0$ är vi klara. Notera först att

$$h(0) = \ln 1 - \frac{0}{1} = 0.$$

Derivering ger

$$h'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1\cdot(1+t) - t\cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} > 0$$

för $t > 0$. Därmed är h en strängt växande funktion så att

$$h(t) > h(0) = 0.$$

(b) På liknande sätt kan man visa (behövs ej) olikheten

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

Utnyttja denna olikhet tillsammans med olikheten i uppgift 3.(a) för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

(2p)

Lösning: Olikheterna ovan säger att

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

för $x > 0$. Multiplikation med $x > 0$ ger då att

$$\frac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$$

Om vi låter $x \to \infty$ ger instängningssatsen att

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1,$$

ty vi måste ha att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \leq \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 1,$$

där

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1.$$

Anmärkning: Olikheten kan visas som ovan. Variabelbytet

$$x = \frac{1}{t}$$

gör att olikheten ovan är ekvivalent med

$$\ln(1+t) < t$$

för $t > 0$. Bilda därför funktionen

$$g(t) = t - \ln(1+t), \ t \geq 0.$$

Om vi kan visa att $g(t) > 0$ för $t > 0$ är vi klara. Notera först att

$$g(0) = 0 - \ln 1 = 0.$$

Derivering ger

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t)-1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0$$

när $t > 0$. Därmed är g en strängt växande funktion så att

$$g(t) > g(0) = 0.$$

Alternativt bevis: Låt $x > 0$. Medelvärdessatsen på funktionen $f(t) = \ln t$ över intervallet $[x, x+1]$ ger att

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{1} = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \underset{\text{MVS}}{=} f'(c) = \frac{1}{c},$$

där $0 < x < c < x+1$. Således är

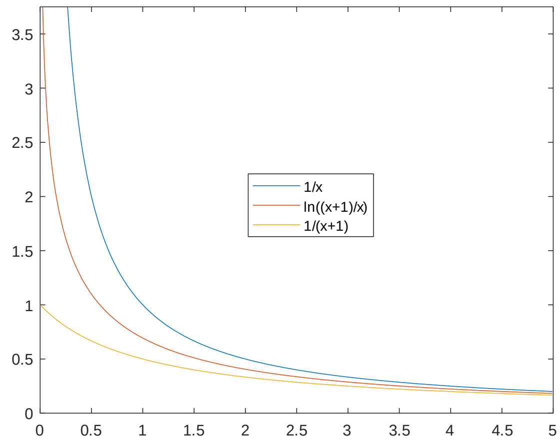
$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}.$$

Men

$$\frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\frac{x+1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

enligt medelvärdessatsen ovan, vilket ger oss den sökta olikheten

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$



(c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

(1p)

Lösning: Gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

ovan ger att

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \underset{e^{\cdot}\text{ kont.}}{=} e^{\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^1 = e.$$

Kuriosa (överkurs): Olikheten

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x,\ \ x>0,$$

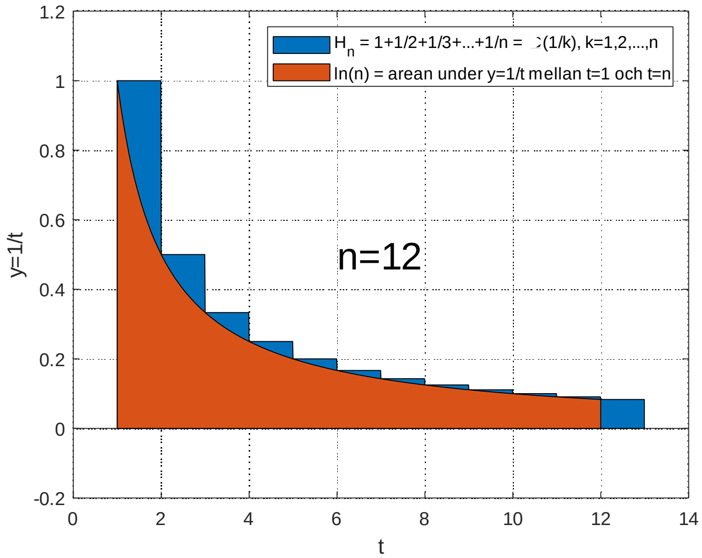
medför att termerna

$$a_m = \frac{1}{m+1} - (\ln(m+1) - \ln m) < 0$$

för $m = 1, 2, 3, \ldots$. Därmed är talföljden (γ_n), $n = 2, 3, 4, \ldots$, där γ_n ges av

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - \ln n = \\
&= 1 + \left[\frac{1}{2} - \left(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0}\right)\right] + \left[\frac{1}{3} - (\ln 3 - \ln 2)\right] + \ldots + \left[\frac{1}{n} - (\ln n - \ln(n-1))\right] \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m+1} - (\ln(m+1) - \ln m) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_m
\end{aligned}$$

avtagande eftersom varje term i sista summan är negativ. Samtidigt vet vi att $\ln n$ är arean under kurvan $y = \frac{1}{t}$ och över $t-$axeln från $t = 1$ till $t = n$. Notera i nedanstående figur



att vi måste ha att

$$\ln n < H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \gamma_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n > 0.$$

Därmed är (γ_n) nedåt begränsad av 0. Således är (γ_n) konvergent, gränsvärdet kallas för *Euler-Mascheronis konstant* och skrivs γ :

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n.$$

Värdet på γ är ungefär 0.5772. Denna konstant dyker upp i väldigt många formler som härrör från serier eller integraler, däremot är det fortfarande mycket man inte vet om den. Till exempel är det okänt om den är algebraisk eller transcendent, ja man vet faktiskt inte ens om den är irrationell.

4. Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

som går genom punkten $(1, -1)$. (5p)

Lösning: Punkten $(1, -1)$ ligger ej på kurvan $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ eftersom $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \neq -1$. Därmed måste någon annan punkt vara tangeringspunkt. Låt därför tangeringspunkten på kurvan ha koordinaterna $(a, f(a))$. Vi vet att tangenten då har lutning $f'(a) = 3a^2 - 3$. Enpunktsformeln ger att tangentens ekvation är

$$y - \left(a^3 - 3a + 2\right) = \left(3a^2 - 3\right)(x - a) \Leftrightarrow y = 3\left(a^2 - 1\right)x - 2a^3 + 2.$$

Vi vet också att denna tangent går genom punkten $(1, -1)$, det vill säga, följande ekvation måste vara uppfylld:

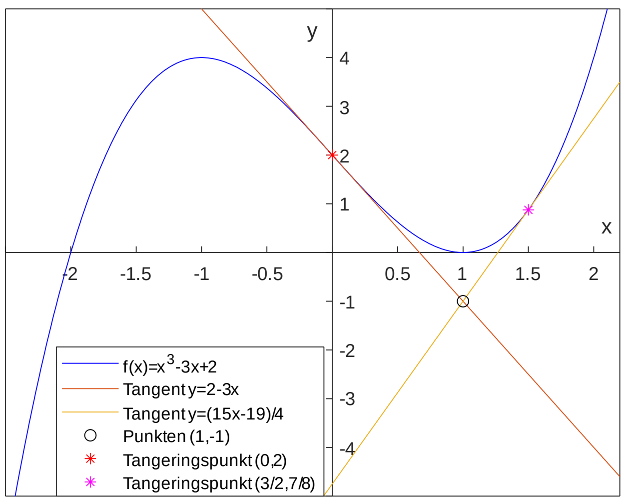
$$-1 = 3\left(a^2 - 1\right) \cdot 1 - 2a^3 + 2 \Leftrightarrow -1 = 3a^2 - 3 - 2a^3 + 2 \Leftrightarrow 3a^2 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 \left(\frac{3}{2} - a \right) = 0$$

För de två lösningarna $a = 0$ och $a = \frac{3}{2}$ är

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2, \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{27 - 36 + 16}{8} = \frac{7}{8}, \\ f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 3 = -3, \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{27 - 12}{4} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Därmed har vi två tangeringspunkter $(0, 2)$ respektive $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{8}\right)$ med motsvarande tangenter

$$\begin{aligned} y - 2 &= -3(x - 0) \Leftrightarrow y = 2 - 3x, \\ y - \frac{7}{8} &= \frac{15}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{15}{4}x - \frac{19}{4}. \end{aligned}$$



5. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = x^2 - 8|x| + 15, \quad -7 \le x \le 6.$$

(a) Hitta alla lokala extremvärden till funktionen ovan. (3p)

Lösning: Vi vet att lokala extremvärden kan antas i ändpunkter, singulära punkter samt kritiska punkter. I ändpunkterna på intervallet $[-7, 6]$ har vi funktionsvärdena

$$\begin{aligned} f(-7) &= (-7)^2 - 8 \cdot |-7| + 15 = 49 - 56 + 15 = 8, \\ f(6) &= 6^2 - 8 \cdot |6| + 15 = 36 - 48 + 15 = 3. \end{aligned}$$

Derivering ger

$$f'(x) = 2x - 8 \operatorname{sgn} x.$$

Då signumfunktionen är odefinierad i $x = 0$ är därför $x = 0$ en singulär punkt. I den punkten antas funktionsvärdet

$$f(0) = 0^2 - 8 \cdot |0| + 15 = 15.$$

Vi har slutligen två kritiska punkter, $x = \pm 4$, där $f'(x) = 0$, ty

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 \operatorname{sgn} x = 0 \Leftrightarrow x = 4 \operatorname{sgn} x = \pm 4.$$

I dessa punkter antas funktionsvärdena

$$\begin{aligned} f(-4) &= (-4)^2 - 8 \cdot |-4| + 15 = 16 - 32 + 15 = -1, \\ f(4) &= 4^2 - 8 \cdot |4| + 15 = 16 - 32 + 15 = -1. \end{aligned}$$

Anmärkning: Absolutbeloppet $|x| = \sqrt{x^2}$ ger att

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2}\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, \text{ om } x > 0, \\ -1, \text{ om } x < 0, \\ \text{odef. om } x = 0 \end{cases} = \operatorname{sgn} x.$$

Anmärkning 2: Funktionen går även att definiera styckvis som

$$y = f(x) = x^2 - 8|x| + 15 = \begin{cases} x^2 - 8x + 15, \ 0 \le x \le 6 \\ \\ x^2 + 8x + 15, \ -7 \le x < 0 \end{cases},$$

ty

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \ge 0, \\ \\ -x, \text{ om } x < 0. \end{cases}$$

Därmed kan man finna extremvärdena till f genom att studera $f_1(x) = x^2 - 8x + 15$ på $[0, 6]$ och $f_2(x) = x^2 + 8x + 15$ på $[-7, 0]$ (höger ändpunkt kan inluderas då f är kontinuerlig i 0) på vanligt vis.

(b) Ange funktionens värdemängd. (1p)

Lösning: Funktionen

$$y = f(x) = x^2 - 8|x| + 15, \ -7 \le x \le 6$$

är kontinuerlig och definierad på ett slutet och begränsat intervall. Således antas både maximum och minimum. Det måste vara något av de lokala extremvärdena ovan. Jämförelse mellan dessa ger att globalt maximum är

$$f(0) = 15$$

och globalt minimum är

$$f(-4) = f(4) = -1.$$

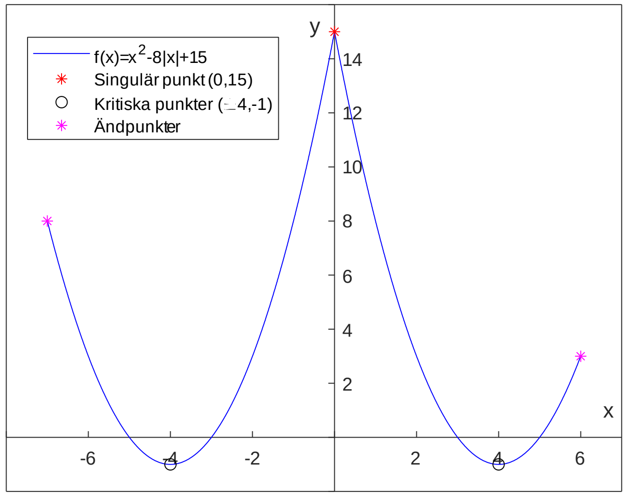
Därmed är funktionens värdemängd

$$R(f) = [-1, 15].$$

Anmärkning: Eftersom $|x|^2 = x^2$ kan vi skriva funktionen som

$$y = f(x) = x^2 - 8|x| + 15 = |x|^2 - 8|x| + 16 - 1 = (|x| - 4)^2 - 1.$$

Därmed faller det ut direkt att funktionen antar sitt minsta värde -1 när $|x| = 4$ (dvs när $x = \pm 4$) och sitt största värde 15 när $(|x| - 4)^2$ är så stort som möjligt (dvs när $x = 0$, då är $x \in [-7, 6]$ på maximalt avstånd från punkterna ± 4).

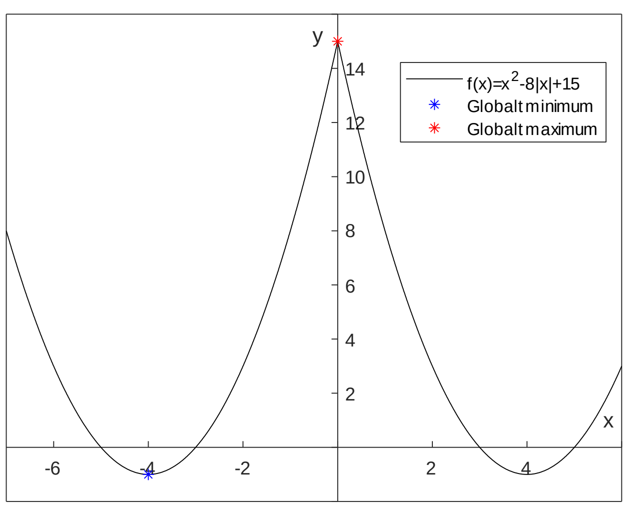


(c) **(M0047M)** Beskriv med MATLAB-kommandon/kod hur vi kan finna globala extremvärden av denna funktion på intervallet $[-7, 6]$. (1p)

Lösning: Exempelvis ger koden

```
xmax=6; xmin=-7;
x=xmin:0.01:xmax;
f=@(x) x.^2-8*abs(x)+15;
y=f(x);
xminp=fminbnd(f,xmin,xmax); yminp=f(xminp);
mf=@(x) -(x.^2-8*abs(x)+15);
xmaxp=-fminbnd(mf,xmin,xmax); ymaxp=f(xmaxp);
plot(x,y,'k',xminp,yminp,'b*',xmaxp,ymaxp,'r*')
axis([xmin,xmax,ymin,ymax]);
xlabel('x'); ylabel('y');
legend('f(x)=x^{2}-8|x|+15','Globalt minimum','Globalt maximum')
```

figuren nedan.



(c) **(M0029M/M0057M)**. Beräkna $f'(-2)$ med derivatans definition. (1p)

Lösning: Vi skall beräkna gränsvärdet

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2 - 8\left|-2+h\right| + 15 - \left((-2)^2 - 8\left|-2\right| + 15\right)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4-4h+h^2-8(2-h)+15-(4-16+15)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4h+h^2+8h}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att

$$\left|-2+h\right| = -(-2+h) = 2-h$$

för h nära noll ($h < 2$ räcker).

Anmärkning: Här går det givetvis lika bra att använda

$$f_2(x) = x^2 + 8x + 15$$

för att beräkna

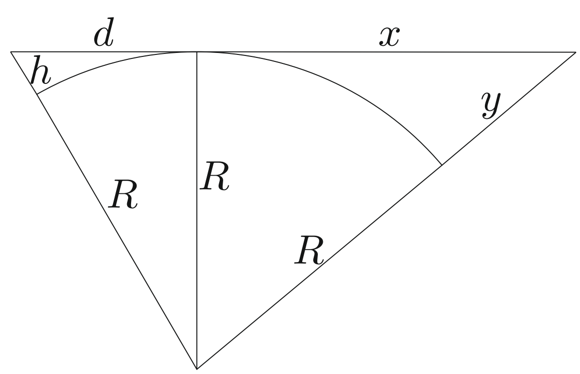
$$f'(-2) = f_2'(-2),$$

ty $-2 \in [-7, 0)$.

6. Horisonten är den linje i synfältet där markytan och himlen möts, dvs den mest avlägsna punkten på markytan som man kan se. Om betraktarens ögon befinner sig på höjden h ges sambandet med avståndet d till horisonten implicit av ekvationen

$$d^2 = 2Rh + h^2,$$

där R är jordens radie, se nedanstående figur.



Ett typiskt värde på d för en 2 m lång person som står vid havsnivå är $d = 5$ km. På motsvarande sätt kommer den personen att kunna se ett föremål som sticker upp y över havsytan på avståndet $d + x$, där

$$x^2 = 2Ry + y^2$$

(a) Antag $y = y(x)$. Beräkna $y(0)$, $y'(0)$ och $y''(0)$. (2p)

Lösning: Två implicita deriveringar med avseende på x ger

$$\begin{aligned} 2x &= 2Ry' + 2y \cdot y', \\ 2 &= 2Ry'' + 2(y')^2 + 2y \cdot y''. \end{aligned}$$

Med $x = 0$ insatt får vi i tur och ordning

$$\begin{aligned} 0^2 &= 2Ry(0) + (y(0))^2 \Longrightarrow y(0) = 0 \\ 0 &= 2Ry'(0) + 2y(0) \cdot y'(0) \Longrightarrow y'(0) = 0 \\ 2 &= 2Ry''(0) + 2(y'(0))^2 + 2y(0) \cdot y''(0) \Longrightarrow y''(0) = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Anmärkning: Formeln ovan erhålls ur Pythagoras sats. Det gäller att

$$x^2 + R^2 = (R+y)^2 \Leftrightarrow x^2 = 2Ry + y^2.$$

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(x)$ av ordning 2 kring $x = 0$ till funktionen $y = y(x)$. Felterm behöver ej beräknas. (2p)

Lösning: Taylorpolynomet av ordning 2 kring $x = 0$ till $y = y(x)$ ges av

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2 = 0 + 0x + \frac{x^2}{2 \cdot R} = \frac{x^2}{2R}.$$

(c) Antag att man skulle besluta sig för att sätta upp en skog av 330 meter höga vindkraftverk ute till havs, låt oss säga $x + d = 53$ km utanför Sandhamn i Stockholms skärgård. Använd $R = 6400$ km för jordradien, $d = 5$ km och Taylorpolynomet i uppgift (b) för att beräkna om vindkraftverken kommer att synas över horisonten när man tittar ut mot havet från Sandhamn. (1p)

Lösning: På avståndet

$$x + d = 53 \text{ km}$$

ligger horisonten $y \approx P_2(x)$ över havsytan. Med

$$\begin{aligned} x &= 48 \text{ km} \\ R &= 6400 \text{ km} \end{aligned}$$

fås

$$y \approx P_2(48) = \frac{48^2}{2 \cdot 6400} = \frac{(2 \cdot 8 \cdot 3)^2}{2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 100} = \frac{2 \cdot 3^2}{100} = 0.18 \text{ km} = 180 \text{ m}.$$

Då vindkraftverken är 330 m höga kommer de alltså tydligt att sticka upp över horisonten då man kommer att kunna se de översta 150 m av dem.

Anmärkning: Vi har i dessa beräkningar ignorerat atmosfärisk refraktion.