Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2022-10-27**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: JOHAN BYSTRÖM, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

> *Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.*

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter.* Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor.*

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Låt oss undersöka derivator av funktionen

$$f(x) = xe^{2x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(xe^{2x}\right) = 2^{n-1}(n+2x)e^{2x}.$$

(4p).

Bevis: Vi börjar med basfallet $n=1$. Vi har då att

$$VL = \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}\right) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (1+2x)e^{2x} = 2^{1-1}(1+2x)e^{2x} = HL.$$

Låt oss sedan visa induktionssteget. Antag att formeln är sann för $n = p$, dvs att

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(xe^{2x}\right) = 2^{p-1}(p+2x)e^{2x} \, (\text{induktionsantagande}).$$

Vi vill visa att detta medför att formeln då också är sann för $n = p+1$, dvs att

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(xe^{2x}\right) = 2^p((p+1)+2x)e^{2x}.$$

Detta är sant, ty vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(xe^{2x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p}{dx^p}\left(xe^{2x}\right)\right) \underset{\text{ind.ant.}}{=} \frac{d}{dx}\left(2^{p-1}(p+2x)e^{2x}\right) = 2^{p-1}\frac{d}{dx}\left((p+2x)e^{2x}\right) \\
&= 2^{p-1}\left[\left(\frac{d}{dx}(p+2x)\right)e^{2x} + (p+2x)\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)\right] \\
&= 2^{p-1}\left(2e^{2x} + (p+2x)\cdot 2e^{2x}\right) = 2^p(1+(p+2x))e^{2x} \\
&= 2^p((p+1)+2x)e^{2x}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är formeln ovan därför sann för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Använd formeln i uppgift 1(a) för att finna en *primitiv funktion (Adams: antiderivata)* till $f(x) = xe^{2x}$, dvs utnyttja formeln för att gissa en funktion $F(x)$ som har derivata $f(x)$ och visa sedan att $F'(x) = f(x)$. **Ledning:** vilket n borde i så fall primitiva funktionen motsvaras av? (1p).

Lösning: Om förstaderivatan motsvaras av $n = 1$ borde rimligtvis primitiva funktionen motsvaras av $n = -1$. Det ger i detta fall

$$\int f(x)\,dx = F(x) = 2^{n-1}(n+2x)e^{2x}\Big|_{n=-1} = 2^{-2}(-1+2x)e^{2x} = \frac{2x-1}{4}e^{2x}.$$

Låt oss slutligen derivera denna funktion $F(x)$ för att visa att den verkligen är primitiv funktion till $f(x)$. Vi har

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(2e^{2x} + (2x-1)\cdot 2e^{2x}\right) = \frac{2+4x-2}{4}e^{2x} = xe^{2x} = f(x).$$

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 7x}{\ln 3x}.$$

(1p)

Lösning: Vi har att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 7x}{\ln 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 7 + \ln x}{\ln 3 + \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{\ln 7}{\ln x}}^{\to 0} + 1}{\underbrace{\frac{\ln 3}{\ln x}}_{\to 0} + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

eftersom $\ln x$ växer mot oändligheten när x går mot oändligheten.

(b)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4}.$$

(2p)

Lösning: Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eftersom $x = -2$ är ett nollställe till täljaren så kan den enligt faktorsatsen faktoriseras som

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x+2)\, p(x).$$

För att finna $p(x)$ utför vi polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \quad = p(x) \text{ kvot} \\
\hline
x+2 & x^4 - 8x^2 + 16 \\
- & (x^4 + 2x^3) \\
\hline
 & -2x^3 - 8x^2 + 16 \\
- & (-2x^3 - 4x^2) \\
\hline
 & -4x^2 + 16 \\
- & (-4x^2 - 8x) \\
\hline
 & 8x + 16 \\
- & (8x + 16) \\
\hline
 & 0 \quad \text{rest}
\end{array}$$

Därmed blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x - 2} = \\
&= \frac{(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 8}{-2-2} = \frac{-8 - 8 + 8 + 8}{-4} = 0.
\end{aligned}$$

Alternativ lösning: Observera att

$$(t-4)^2 = t^2 - 8t + 16.$$

Därmed ger variabelbytet $t = x^2$ att

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2\right)^2 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ (x \to -2) \Longrightarrow (t \to 4) \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{t\to 4} \frac{t^2 - 8t + 16}{t - 4} = \lim_{t\to 4} \frac{(t-4)^2}{t-4} = \lim_{t\to 4} (t-4) = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}.$$

(2p)

Lösning: Förlängning av täljare och nämnare med rotkonjugatet ger

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\sin x} - 1\right)\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x) - 1^2}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\sin x}}_{\to 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Visa att kurvorna

$$x^2 + y^2 = 9$$

och

$$x^2 - 10x + y^2 = -9$$

skär varandra under räta vinklar. **Ledning:** *visa först att kurvorna skär varandra och visa sedan att tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra.* (5p)

Lösning: Först visar vi att kurvorna skär varandra. Kalla skärningspunkten (a, b). För skärning måste vi ha lika y-värde för lika x-värde, dvs vi får ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 9, \\ a^2 - 10a + b^2 = -9. \end{array} \right.$$

Om vi subtraherar den andra ekvationen från den första får vi

$$\left(a^2 + b^2\right) - \left(a^2 - 10a + b^2\right) = 9 - (-9) \Leftrightarrow 10a = 18 \Longleftrightarrow a = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}.$$

Alternativt kan vi erhålla detta genom att ur den andra ekvationen lösa ut

$$b^2 = 10a - a^2 - 9$$

som insatt i den första ekvationen ger:

$$a^2 + \left(10a - a^2 - 9\right) = 9 \Leftrightarrow 10a = 9 + 9 \Longleftrightarrow a = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}.$$

Därmed blir

$$b^2 = 9 - a^2 = 9 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9 \cdot 5^2 - 9^2}{5^2} = 9\frac{5^2 - 9}{5^2} = 9 \cdot \frac{16}{25}$$

som ger

$$b = \pm\sqrt{9 \cdot \frac{16}{25}} = \pm 3 \cdot \frac{4}{5} = \pm\frac{12}{5}$$

Därmed skär kurvorna varandra i två punkter

$$(a, b) = \left(\frac{9}{5}, \pm\frac{12}{5}\right).$$

Låt oss sedan visa att i dessa punkter så skär kurvorna varandra under räta vinklar. Det innebär att tangenterna till kurvorna i skärningspunkten är vinkelräta (ortogonala) mot varandra. Implicit derivering av ekvationerna med avseende på x (under förutsättning att $y = y(x)$) ger då

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(9) \Longrightarrow 2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

respektive

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 10x + y^2\right) = \frac{d}{dx}(-9) \Longrightarrow 2x - 10 + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{5-x}{y}$$

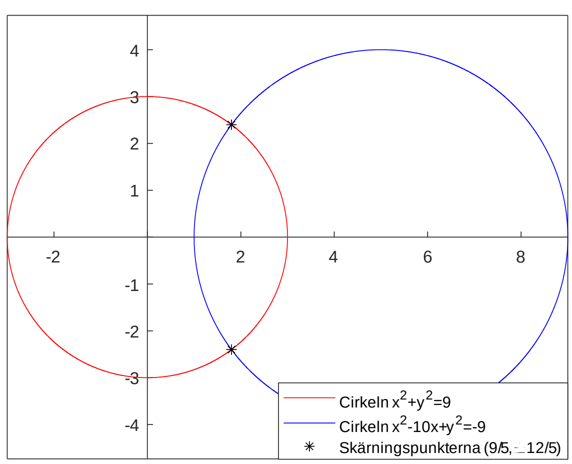
när $y \neq 0$. Därmed har tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna lutningar

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{a}{b}, \\ k_2 &= \frac{5-a}{b}. \end{aligned}$$

Det medför att

$$k_1 k_2 = -\frac{a}{b} \cdot \frac{5-a}{b} = -\frac{a(5-a)}{b^2} = -\frac{\frac{9}{5} \cdot \frac{25-9}{5}}{\frac{9 \cdot 16}{5^2}} = -\frac{9 \cdot 16}{9 \cdot 16} = -1,$$

dvs kurvorna skär varandra under räta vinklar.



Anmärkning: Kurvan

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

är en cirkel med centrum i origo och radie 3. Kvadratkomplettering av

$$x^2 - 10x + y^2 = -9$$

ger

$$x^2 - 10x + y^2 = -9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = -9 + 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-0)^2 = 4^2,$$

dvs det är en cirkel med centrum i $(5, 0)$ och radie 4.

4. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{3x-1}{x+2}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

(a) Bestäm funktionens värdemängd. Motivera! (2p)

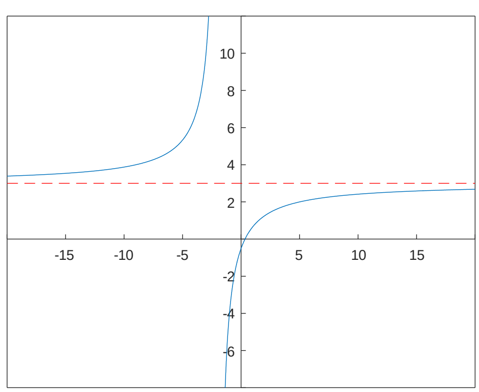
Lösning: Funktionen är definierad för alla x förutom -2. Om vi deriverar f får vi

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0.$$

Således är f strängt växande på bägge delintervallen $(-\infty, -2)$ och $(-2, \infty)$. Nu är

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2+} f(x) &= \lim_{x \to -2+} \frac{\overbrace{3x-1}^{\to -7}}{\underbrace{x+2}_{\to 0+}} = -\infty, \\
\lim_{x \to -2-} f(x) &= \lim_{x \to -2-} \frac{\overbrace{3x-1}^{\to -7}}{\underbrace{x+2}_{\to 0-}} = +\infty, \\
\lim_{x \to \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x-1}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 3.
\end{aligned}$$

När x går från $-\infty$ mot vänster om -2 kommer därmed $f(x)$ att växa från 3 till $+\infty$. När sedan x går från höger om -2 mot $+\infty$ kommer $f(x)$ att växa från $-\infty$ till 3. Däremot antas aldrig värdet 3 för något x. Vi konstaterar därför att värdemängden är $R(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.



(b) Finn inversen f^{-1} till f. (2p)

Lösning: Ur resonemanget i uppgift (a) ovan ser vi att f är injektiv då f är strängt växande på bägge intervallen $(-\infty,-2)$ och $(-2,\infty)$ samt att värdemängderna för dessa två intervall är disjunkta,

$$(3,\infty)\cap(-\infty,3)=\emptyset.$$

Alternativt ser vi att $f(x_1)=f(x_2)$ medför

$$\begin{aligned}
\frac{3x_1-1}{x_1+2} &= \frac{3x_2-1}{x_2+2}\\
&\Updownarrow\\
(3x_1-1)(x_2+2) &= (x_1+2)(3x_2-1)\\
&\Updownarrow\\
3x_1x_2-x_2+6x_1-2 &= 3x_1x_2+6x_2-x_1-2\\
&\Updownarrow\\
7x_1 &= 7x_2,
\end{aligned}$$

dvs $x_1=x_2$. Vi söker inversen

$$y=f^{-1}(x).$$

Det innebär att

$$x=f(y)=\frac{3y-1}{y+2}.$$

Därmed är

$$x(y+2)=3y-1\Leftrightarrow 2x+1=(3-x)y\Leftrightarrow y=\frac{2x+1}{3-x}$$

så att inversen är

$$y=f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3-x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}.$$

(c) Bestäm funktionen g om

$$f(g(x))=7x-4.$$

(1p)

Lösning: Eftersom f är inverterbar får vi

$$g(x)=f^{-1}(f(g(x)))=f^{-1}(7x-4)=\frac{2(7x-4)+1}{3-(7x-4)}=\frac{14x-7}{7-7x}=\frac{2x-1}{1-x}.$$

Därmed är

$$g(x)=\frac{2x-1}{1-x}.$$

Anmärkning: identiteten

$$f(g(x))=7x-4$$

håller för $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ då g ej är definierad för $x=1$.

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = \left(x^2 - 9\right) e^{-x/4}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema. Konvexitet behöver ej beaktas. Skissera kurvan. (4p)

Lösning: Vi observerar först att funktionen varken är udda eller jämn eftersom

$$f(-x) = \left((-x)^2 - 9\right) e^{x/4} = \left(x^2 - 9\right) e^{x/4} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}.$$

Vi observerar även att

$$f(x) = \left(x^2 - 9\right) e^{-x/4} = (x+3)(x-3)\, e^{-x/4}.$$

Därmed skär funktionen x-axeln i punkterna $x = -3$ respektive $x = 3$, samt y-axeln i $f(0) = -9$. Sedan undersöker vi vad som händer när x går mot $\pm\infty$. Vi har att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - 9\right) e^{-x/4} \underset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} \overbrace{\left(t^2 - 9\right)}^{\to\infty} \overbrace{e^{t/4}}^{\to\infty} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 - 9\right) e^{-x/4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x/4}} - \frac{9}{e^{x/4}} \underset{\text{STD}}{=} 0 - 0 = 0,$$

där det sista gränsvärdet följer av att en potensfunktion domineras av en exponentialfunktion. Därmed har funktionen en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ åt höger. Det kan därför möjligen finnas en sned asymptot åt vänster. Vi undersöker således gränsvärdet

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2 - 9\right) e^{-x/4}}{x} \underset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} \overbrace{\left(-t + \frac{9}{t}\right)}^{\to-\infty} \overbrace{e^{t/4}}^{\to\infty} = -\infty$$

och konstaterar att så inte är fallet. För övrigt är funktionen väldefinierad på hela $\mathbb{R}$, så inga vertikala asymptoter kan finnas. Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned} y' &= 2xe^{-x/4} - \left(x^2 - 9\right) \frac{1}{4} e^{-x/4} = \frac{8x - x^2 + 9}{4} e^{-x/4} = -\frac{(x+1)(x-9)\, e^{-x/4}}{4}, \\ y'' &= \frac{8 - 2x}{4} e^{-x/4} - \frac{8x - x^2 + 9}{4} \cdot \frac{1}{4} e^{-x/4} = \frac{32 - 8x - 8x + x^2 - 9}{16} e^{-x/4} = \\ &= \frac{x^2 - 16x + 23}{16} e^{-x/4} = \frac{(x - r_1)(x - r_2)}{16} e^{-x/4}. \end{aligned}$$

Alltså har vi två kritiska punkter $x = -1$ och $x = 9$ där $y' = 0$ samt två möjliga inflexionspunkter

$$x = r_{1,2} = 8 \pm \sqrt{8^2 - 23} = 8 \pm \sqrt{41}$$

där $y'' = 0$. Teckenstudium ger

		-1		9	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-9$	$-$		$-$	0	$+$
$-\frac{e^{-x/4}}{4}$	$-$		$-$		$-$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

		$r_1 = 8 - \sqrt{41}$		$r_2 = 8 + \sqrt{41}$	
$x - r_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - r_2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{e^{-x/4}}{16}$	$+$		$+$		$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

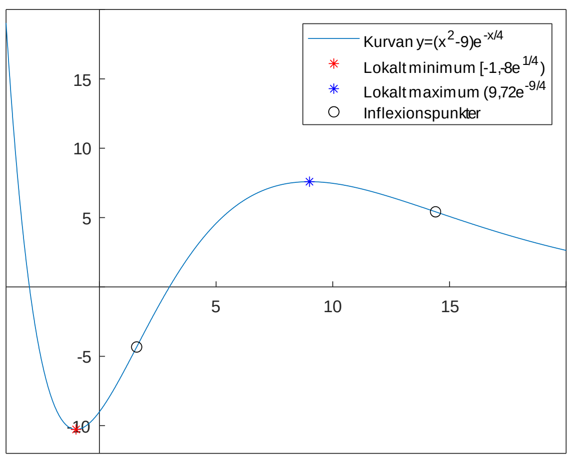
Vi ser därför att bägge punkterna $x = r_{1,2} = 8 \pm \sqrt{41}$ är inflexionspunkter. Funktionen har då ett lokalt maximum i $x = 9$ som är

$$f(9) = \left(9^2 - 9\right) e^{-9/4} = 72e^{-9/4}$$

och ett (lokalt och globalt) minimum i $x = -1$ som är

$$f(-1) = \left(1^2 - 9\right) e^{1/4} = -8e^{1/4}.$$

Däremot saknas globalt maximum. Vi kan slutligen skissera grafen som



Anmärkning:

$$\sqrt{41} = \sqrt{\frac{4100}{100}} \approx \sqrt{\frac{4096}{100}} = \sqrt{\frac{2^{12}}{10^2}} = \frac{2^6}{10^1} = \frac{64}{10} = 6.4.$$

(b) Bestäm funktionens värdemängd. Motivera! (1p)

Lösning: Funktionens värdemängd är

$$R(f) = \left[-8e^{1/4}, \infty\right)$$

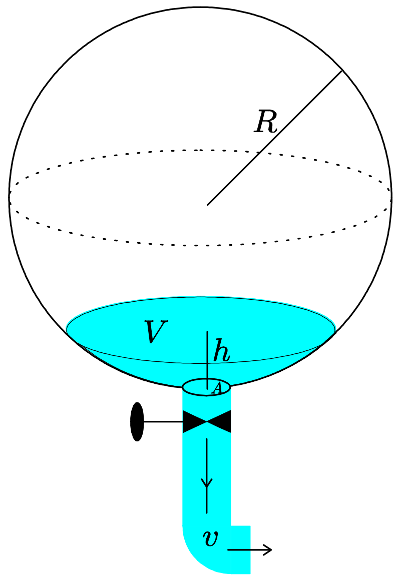
då f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och globalt minimum är

$$f(-1) = -8e^{1/4}$$

samt globalt maximum ej existerar, ty

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

6. En tank har sfärisk form med radie $R = 6$ m. I botten av tanken sitter det en kran som vi kan tappa vatten ur tanken med, se figur.



När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen i tanken V av

$$V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3} \ \left[\mathrm{m}^3\right], \ 0 \leq h \leq 2R,$$

och när kranen öppnas flödar vatten ut genom tanken med en hastighet v som är proportionell mot kvadratroten av vattenpelarens höjd, vilket ger att volymen ändras med en hastighet av

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{10}\sqrt{h} \ \left[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\right].$$

Vi öppnar kranen och låter vattnet flöda ut.

(a) Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är 2 m? (3p)

Lösning: Här är volymen $V = V(t)$ en funktion av tiden. Därmed kommer också höjden att bli en funktion av tiden, $h = h(t)$. Derivering av uttrycket med avseende på tiden t ger då

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6hR - 3h^2\right) \cdot \frac{dh}{dt} = \pi\left(2hR - h^2\right) h'(t).$$

Nu vet vi att

$$V'(t) = -\frac{\pi}{10}\sqrt{h}$$

(negativ, ty vattnet flödar ut). Således ändras djupet med hastigheten

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi\left(2hR - h^2\right)} = \frac{-\frac{\pi}{10}\sqrt{h}}{\pi\left(2hR - h^2\right)} = -\frac{1}{10}\frac{\sqrt{h}}{2hR - h^2}.$$

I synnerhet, vid den tidpunkt $t = t_0$ då

$$h(t_0) = 2 \text{ m},$$

så ändras djupet med hastigheten

$$h'(t_0) = -\frac{1}{10}\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot 6 - 2^2} = -\frac{\sqrt{2}}{10(24-4)} = -\frac{\sqrt{2}}{200}\text{m/s}.$$

Svar: Djupet minskar med $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm/s vid denna tidpunkt.

(b) Vid vilket djup h förändras djupet som långsammast? (2p)

Lösning: Låt oss undersöka beloppet av djupets ändringshastighet, kalla den u, dvs

$$u = |h'(t)| = \frac{1}{10}\frac{\sqrt{h}}{2hR - h^2}.$$

Då är u en funktion av djupet, $u = u(h)$. När tanken är nästan full eller nästan tom, dvs när h går mot $2R$ eller 0, kommer djupet att ändras oändligt snabbt ty

$$\lim_{h\to 2R-} u(h) = \lim_{h\to 2R-}\left(\frac{1}{10}\frac{\sqrt{h}}{2hR-h^2}\right) = \frac{1}{10}\lim_{h\to 2R-}\frac{\overbrace{\sqrt{h}}^{\to\sqrt{2R}}}{\underbrace{h(2R-h)}_{\to 0+}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0+} u(h) = \lim_{h\to 0+}\left(\frac{1}{10}\frac{\sqrt{h}}{2hR-h^2}\right) = \frac{1}{10}\lim_{h\to 0+}\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)}^{\to\infty}}{\underbrace{2R-h}_{\to 2R}} = +\infty.$$

Således måste det finnas någon inre punkt i intervallet $[0, 2R]$ där $u(h)$ antar minimum. Vi deriverar $u(h)$ med avseende på h och får

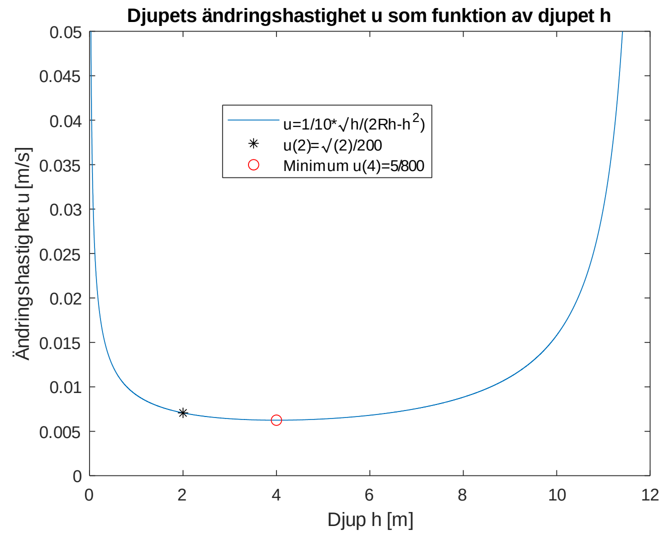
$$\begin{aligned} u'(h) &= \frac{d}{dh}\left(\frac{1}{10}\frac{\sqrt{h}}{2hR-h^2}\right) = \frac{1}{10}\frac{\frac{1}{2\sqrt{h}}(2hR-h^2) - \sqrt{h}\cdot(2R-2h)}{(2hR-h^2)^2} = \\ &= \frac{1}{10}\frac{(2hR-h^2) - 2h(2R-2h)}{2\sqrt{h}(2hR-h^2)^2} = \frac{3h^2-2hR}{20\sqrt{h}(2hR-h^2)^2} = \frac{(3h-2R)\sqrt{h}}{20(2hR-h^2)^2}. \end{aligned}$$

För $0 < h < 2R$ är nämnaren positiv och således saknas singulära punkter i $(0, 2R)$. Därmed måste minimum antas i en kritisk punkt där $u'(h) = 0$. Det finns enbart en kritisk punkt i $(0, 2R)$, nämligen när

$$3h - 2R = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{3} = \frac{2\cdot 6}{3}\text{m} = 4 \text{ m}.$$

Då är beloppet av djupets ändringshastighet

$$u(4) = \frac{1}{10}\cdot\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4\cdot 6 - 4^2} = \frac{2}{10(48-16)} = \frac{2}{320}\text{m/s} = \frac{100}{160}\text{ cm/s} = \frac{5}{8}\text{ cm/s}.$$



Anmärkning: Tankens cirkulära utloppsrör har diameter $d = 0.3$ m. Utströmningshastigheten v följer från Torricellis lag som säger att

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Det ger då att volymen kommer att ändras med hastigheten

$$\frac{dV}{dt} = -Av = -\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g}\sqrt{h} \approx -\frac{\pi}{10}\sqrt{h}$$

för $g \approx 10$ m/s^2.