Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M, M0031M och M0059M

Tentamensdatum: **2022-12-19**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 125, antal sidor: 2.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Bestäm samtliga rötter till $z^2 + (-5 + 4i)z + 1 - 13i = 0$.

b) Bestäm det reella talet a så att $(3 + i)/(1 - ai)$ blir rent reellt. (4 p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{t^3 + t^2 + 1, t^2 + t, t^3 + 1\}$ vara en mängd i vektorrummet $\mathbb{P}_3$.

a) Visa att $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende.

b) Bestäm ett polynom $p(t)$ så att $\mathcal{C} = \{t^3 + t^2 + 1, t^2 + t, t^3 + 1, p(t)\}$ är en bas för $\mathbb{P}_3$.

c) Bestäm $[t^3]_{\mathcal{C}}$. (4 p)

3. Diagonalisera

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix},$$

det vill säga finn matriser P och D, D diagonal, så att $A = PDP^{-1}$. (4 p)

4. För givet n låt $\mathbb{P}_n$ beteckna vektorrummet av samtliga polynom av gradtal mindre än eller lika med n och utrusta det med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt.$$

a) Bestäm den ortogonala projektionen av t^2 på $\mathbb{P}_1$, det vill säga bestäm $\text{proj}_{\mathbb{P}_1}(t^2)$.

b) Bestäm a och b så

$$\int_0^1 (t^2 + at + b)^2\, dt$$

minimeras. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{-2x}$ (4 p)

6.

a) Visa att $e^{-x}\cos(2x)$ är en lösning till $y^{(4)} + 2y''' + 14y'' + 18y' + 45y = 0$.

b) Bestäm samtliga lösningar till $y^{(4)} + 2y''' + 14y'' + 18y' + 45y = 3x - 15$. (4 p)

7.

a) Låt $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, vara element i ett vektorrum V. Vad betyder det att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är en bas för V? Ge en definition.

b) Låt V vara ett vektorrum. Vad menas med att H är ett underrum till V? Ge en definition.

c) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vara en bas för V. Vad betyder $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$? Ge en definition.

d) Låt V och W vara vektorrum. Vad menas med att T är en linjär avbildning från V till W? Ge en definition. (4 p)

Lösningsförslag M0049M/M0031M, 221219

1. a) $z^2+(-5+4i)z+1-13i=0 \Leftrightarrow$

$\left(z+\frac{-5+4i}{2}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{-5+4i}{2}\right)^2}_{\frac{25-40i-16}{4}=\frac{9}{4}-10i}+1-13i=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{\text{LÅT } w=z+\frac{-5+4i}{2}}$ $\quad w^2=\frac{5}{4}+3i$

ANSÄTT $\boxed{w=a+bi}$ OCH MAN FÅR

$a^2+2abi-b^2=\frac{5}{4}+3i \Leftrightarrow$

Re: $a^2-b^2=\frac{5}{4}$ (1)

Im: $2ab=3$ (2)

UR (2): $\boxed{b=\frac{3}{2a}}$ IN I (1)

$a^2-\frac{9}{4a^2}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow a^4-\frac{5}{4}a^2-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow$

$a^2=\frac{5}{8}\underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{25}{64}+\underbrace{\frac{144}{64}}_{=\frac{9\cdot 16}{4\cdot 16}}}=\frac{5}{8}+\frac{13}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow a=\pm\frac{3}{2}$ /

$a=\frac{3}{2}$: $b=\frac{3}{2\cdot\frac{3}{2}}=1$, $w=\frac{3}{2}+i$, $z=\frac{3}{2}+i+\frac{5}{2}-2i=4-i$ /

$a=-\frac{3}{2}$: $b=-1$, $w=-\frac{3}{2}-i$, $z=-\frac{3}{2}-i+\frac{5}{2}-2i=1-3i$ /

LÖSNINGARNA ÄR: $4-i$; $1-3i$ //

b) $\frac{3+i}{1-ai}=\frac{(3+i)(1+ai)}{1+a^2}=\frac{3+3ai+i-a}{1+a^2}=\frac{3-a+i(3a+1)}{1+a^2}$

RENT REELLT $\Leftrightarrow$ IMAGINÄRDELEN $=0 \Leftrightarrow$

$3a+1=0 \Leftrightarrow a=-1/3$ //

2. $\mathcal{B} = \{t^3+t^2+1,\ t^2+t,\ t^3+1\}$

a) VISA $\mathcal{B}$ L.O.

0 FÖR ALLA t

ANTAG: $c_1(t^3+t^2+1)+c_2(t^2+t)+c_3(t^3+1) = \bar{0} = 0$

VISA $c_1=c_2=c_3=0$.

IDENTIFIERA:

$$\left.\begin{array}{ll} t^3: & c_1+c_3=0 \\ t^2: & c_1+c_2=0 \\ t: & c_2=0 \\ t^0: & c_1+c_3=0 \end{array}\right\} \iff c_1=c_2=c_3=0$$

∴ LINJÄRT OBEROENDE

b) VAD SPÄNNER $\mathcal{B}$ UPP?

ALLA t

$$c_1(t^3+t^2+1)+c_2(t^2+t)+c_3(t^3+1) = a+bt+ct^2+dt^3$$

IDENT.:

$$\begin{array}{ll} t^3: & c_1+c_3=d \\ t^2: & c_1+c_2=c \\ t^1: & c_2=b \\ t^0: & c_1+c_3=a \end{array} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & -1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & -1 & c-d \\ 0 & 0 & 1 & b-c+d \\ 0 & 0 & 0 & a-d \end{array}\right]$$

∴ SYSTEM HAR LÖSNING OM OCH ENDAST OM $a=d$ DVS OMM DEN KONSTANTA OCH LEDANDE KOEFF. ÄR LIKA.

VÄLJ ETT POLYNOM, VILKET SOM HELST, SOM INTE LIGGER I HÖLJET, EX. $p(t)=1$ (LEDANDE 0, KONST. 1)

∴ $\mathcal{C} = \{t^3+t^2+1,\ t^2+t,\ t^3+1,\ 1\}$ ÄR EN BAS FÖR $\mathbb{P}_3$

(4 L.O. ELEMENT I ETT 4-DIM. VEKTORRUM)

c) LÖS c_1, c_2, c_3, c_4 UR:

$$c_1(t^3+t^2+1)+c_2(t^2+t)+c_3(t^3+1)+c_4\cdot 1 = t^3$$

ALLA t

IDENT.:

$$\left.\begin{array}{ll} t^3: & c_1+c_3=1 \\ t^2: & c_1+c_2=0 \\ t^1: & c_2=0 \\ t^0: & c_1+c_3+c_4=0 \end{array}\right\} \quad c_2=0,\ c_1=0,\ c_3=1,\ c_4=-1$$

$$\therefore\ [t^3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm i$$

⌈KOLL: $3+i+3-i=6$; $\operatorname{tr} A = 3+3=6$
$(3+i)(3-i)=9+1=10$; $\det(A)=9+1=10$ OK ⌋

EGENVEKTORER: $\lambda = 3+i$: $A\bar{v} = (3+i)\bar{v} \Leftrightarrow$

$$(A-(3+i)I)\bar{v} = \bar{0}$$

(FUSKGAUSSA)

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

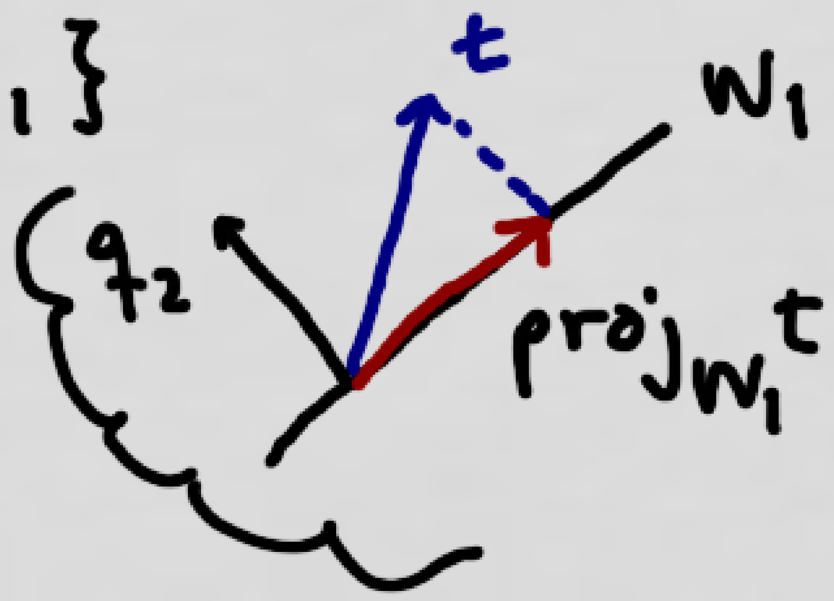
VÄLJ: $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$

ENLIGT SATS BLIR $\begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$ EN EGENVEKTOR FÖR EGENVÄRDET $3-i$ (KOMPLEXKONJUGERADE PAR)

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{bmatrix}$ GER $A = PDP^{-1}$.

4. a) BESTÄM FÖRST EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{P}_1$. EN BAS ÄR $\{1, t\}$. ORTOGONALISERA DENNA MED GRAM-SCHMIDT.

- $q_1(t) = 1$, $W_1 = \text{Span}\{q_1\}$
- $q_2(t) = t - \text{proj}_{W_1} t =$



$$= t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = t - \frac{1}{2}$$

VÄLJ $\tilde{q}_2(t) = 2t - 1$.

EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, 2t-1\}$

MAN FÅR NU:

$$\text{proj}_{\mathbb{P}_1}(t^2) = \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 + \frac{\langle t^2, 2t-1\rangle}{\langle 2t-1, 2t-1\rangle}(2t-1) =$$

$$= \frac{1/3}{1} \cdot 1 + \frac{1/6}{1/3}(2t-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(2t-1) =$$

$$= t - \frac{1}{6}$$

b) DET GÄLLER ATT

$$\int_0^1 (t^2 + at + b)^2 \, dt = \| t^2 + at + b \|^2$$

$$= \| t^2 - (-at - b) \|^2 = \text{dist}(t^2, -at - b)^2$$

DETTA MINIMERAS, ENLIGT SATS, DÅ

$$-at - b = \text{proj}_{\mathbb{P}_1} t^2 \quad \text{DVS}$$

$a = -1$ OCH $b = \frac{1}{6}$

(DET MINIMALA VÄRDET ÄR $\frac{1}{180}$)

SKALÄRPRODUKTER

$$\langle t, 1\rangle = \int_0^1 t \cdot 1 \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dt = 1$$

$$\langle t^2, 1\rangle = \int_0^1 t^2 \cdot 1 \, dt = \frac{1}{3}$$

$$\langle t^2, 2t-1\rangle = \int_0^1 t^2(2t-1) \, dt$$

$$= \int_0^1 2t^3 - t^2 \, dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\langle 2t-1, 2t-1\rangle = \int_0^1 (2t-1)(2t-1) \, dt$$

$$= \int_0^1 4t^2 - 4t + 1 \, dt$$

$$= \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$$

5. $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{-2x}$

"HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOMOGEN: KAR. EKV.: $r^2 - 4r + 4 = 0 \iff$

$r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$ MULT. 2

$\therefore y_h = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

PARTIKULÄR: ANSATS $y_p = z(x)e^{-2x}$

$y_p' = z'e^{-2x} - 2z'e^{-2x}$

$y_p'' = z''e^{-2x} - 4z'e^{-2x} + 4ze^{-2x}$

IN I EKV.:

$z''\cancel{e^{-2x}} - 4z'\cancel{e^{-2x}} + 4z\cancel{e^{-2x}} - 4(z'\cancel{e^{-2x}} - 2z\cancel{e^{-2x}})$

$+ 4z\cancel{e^{-2x}} = (x+1)\cancel{e^{-2x}} \iff$

$z'' - 8z' + 16z = x+1$

ANSATS (I ANSATSEN): $z(x) = ax + b$

$z' = a,\ z'' = 0$ IN I EKV.:

$0 - 8a + 16(ax+b) = x+1$

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} x^1&: 16a = 1 \\ x^0&: -8a + 16b = 1 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} a &= 1/16 \\ b &= 3/32 \end{aligned}$$

$\therefore z(x) = \frac{1}{16}x + \frac{3}{32}$

$\therefore y_p = \frac{1}{32}(2x+3)e^{-2x}$

$\therefore y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \frac{1}{32}(2x+3)e^{-2x}$

6. a) $y = e^{-x}\cos 2x$, $y' = -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x$

$$y'' = e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\sin 2x - 4e^{-x}\cos 2x$$
$$= -3e^{-x}\cos 2x + 4e^{-x}\sin 2x$$
$$y''' = 3e^{-x}\cos 2x + 6e^{-x}\sin 2x - 4e^{-x}\sin 2x + 8e^{-x}\cos 2x$$
$$= 11e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x$$
$$y^{(4)} = -11e^{-x}\cos 2x - 22e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\sin 2x + 4e^{-x}\cos 2x$$
$$= -7e^{-x}\cos 2x - 24e^{-x}\sin 2x$$

IN I EKV.:

$$-7e^{-x}\cos 2x - 24e^{-x}\sin 2x + 2(11e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x)$$
$$+ 14(-3e^{-x}\cos 2x + 4e^{-x}\sin 2x) + 18(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x)$$
$$+ 45e^{-x}\cos 2x = \underbrace{(-7+22-42-18+45)}_{=0}e^{-x}\cos 2x + \underbrace{(-24+4+56-36)}_{=0}e^{-x}\sin 2x = 0$$

b) EFTERSOM $e^{-x}\cos 2x$ ÄR EN LÖSNING FÖR EN ROT TILL DEN KARAKTÄRISTISKA EKVATIONEN $-1\pm 2i$. $e^{-x}\sin 2x$ ÄR OCKSÅ EN LÖSNING.

KAR.EKV.: $r^4+2r^3+14r^2+18r+45=0$, DET GÅR SÅLEDES ATT BRYTA UT $(r+1-2i)(r+1+2i)$ $= r^2-2r+5$

UTFÖR DIVISIONEN

$$\begin{array}{r|l} & r^2+9 \\ \hline r^2+2r+5 & r^4+2r^3+14r^2+18r+45 \\ & r^4+2r^3+5r^2 \\ \hline & 9r^2+18r+45 \\ & 9r^2+18r+45 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore$ $r^4+2r^3+14r^2+18r+45 = (r^2+2r+5)(r^2+9)$

ÖVRIGA RÖTTER ÄR SÅLEDES $\pm 3i$.

LÖSNINGAR TILL KAR.EKV.: $-1\pm 2i, \pm 3i$

$\therefore$ $y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\cos 3x + D\sin 3x$

PARTIKULÄR:

ANSATS: $y_p = ax+b$

$y_p' = a$, $y_p'' = y_p''' = y_p^{(4)} = 0$

IN I EKV.:

$$0+0+0+18a+45(ax+b)=3x-15$$

IDENT.:

$$\left.\begin{array}{l} x^1:\ 45a=3 \\ x^0:\ 18a+45b=-15 \end{array}\right\}$$

$$a=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$$

$$b=\frac{1}{45}\left(-15-\frac{18}{15}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{2}{75}=\frac{-27}{75}=\frac{-9}{25}$$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{15}x-\frac{9}{25}$$

$$\therefore\ y=y_h+y_p=$$

$$=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+C\cos 3x+D\sin 3x+\frac{1}{15}x-\frac{9}{25}$$

7. a) $\mathcal{B}$ SKA VARA LINJÄRT OBEROENDE OCH SPÄNNA UPP V.

b) $H \subseteq V$ SÅDAN ATT $\bar{0} \in H$; $\bar{u}, \bar{v} \in H \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in H$; $\bar{u} \in H \Rightarrow c\bar{u} \in H$

c) $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$ ÄR KOORDINATERNA FÖR $\bar{x}$ RELATIVT BASEN $\mathcal{B}$, DVS OM

$$[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{x} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n .$$

d) $T: V \to W$ EN FUNKTION FRÅN V TILL W SÅDAN ATT

$T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ OCH $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$