Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M och M0031M

Tentamensdatum: **2023-05-26**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel.: 0920-493330.
Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28. Skrivtid: 5 timmar.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^5 + i = 0$. Ge svaret på polär form.

b) Bestäm samtliga tredjegradspolynom $P(z)$ så att

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z = 2 \text{ eller } z = -1).$$

(4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & -5 & 2 \\ -5 & 10 & -8 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för Col$A$, en bas för Row$A$ och en bas för Nul$A$.

b) Vektorn

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ligger i kolonnrummet för A. Bestäm koordinaterna för vektorn relativt basen för kolonnrummet som du bestämt i a) uppgiften. (4 p)

3. Låt $Q(x, y) = -3x^2 + 12xy + 13y^2$. Bestäm det största och minsta värde $Q(x, y)$ kan få då $x^2+y^2 = 1$. Ge även exempel på punkter där det maximala respektive minimala värdet antas. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q\rangle = 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Finn en ortogonal bas för $H = \text{span}\{1 - t, t^2\}$.

b) Bestäm $\text{proj}_H t$. (4 p)

5.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + 2xy = x^3$, $y(0) = -1$.

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $e^x y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$. (4 p)

6.

a) Visa att $\sin x$ är en lösning till $y^{(4)} + y''' - y'' + y' - 2y = 0$.

b) Bestäm samtliga lösningar till $y^{(4)} + y''' - y'' + y' - 2y = 10e^{3x}$. (4 p)

7. En Euler-ekvation av ordning n är en differentialekvation på formen

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x),\ x > 0.$$

En lösningsmetod för dessa är baserat på ett variabelbyte för den oberoende variabeln x, $x = e^t$ och $z(t) = y(e^t) = y(x)$.

a) Härled att transformationen leder till $x^2 y'' = z'' - z'$.

b) Hur transformeras $x^3 y'''$?

c) Bestäm samtliga lösningar till

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = 0,\ x > 0.$$

(4 p)

Lösningsförslag m0049m 230526

1 a) $z^5 + i = 0 \iff z^5 = -i = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

ANSÄTT $z = re^{i\varphi} \overset{D-M}{\Longrightarrow} z^5 = r^5 e^{i5\varphi}$

$\therefore \quad r^5 e^{i5\varphi} = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff$

$$\begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} r = 1 \\ \varphi_k = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \quad k = 0,1,2,3,4 \end{array}$$

$\therefore \quad z_k = e^{\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right)i} \qquad k = 0,1,2,3,4.$

b) TREDJEGRADSPOLYNOM HAR TRE NOLLSTÄLLEN OM MAN RÄKNAR MED MULTIPLICITET. SÅ TVÅ FALL:

I 2 MULT. 2
-1 MULT. 1
$P(z) = a(z-2)^2(z+1)$

II 2 MULT. 1
-1 MULT. 2
$P(z) = a(z-2)(z+1)^2$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & -5 & 2 \\ -5 & 10 & -8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) EN BAS FÖR Col A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{B}$

" Row A " $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

NUL A: x_1, x_3, x_4 BUNDNA, x_2 FRI $x_2 = t$

$x_3 = x_4 = 0 \quad x_1 = 2t$

$\therefore$ EN BAS FÖR NUL A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

GAUSSELIMINERA:

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -4 & -5 & 2 & 1 \\ -5 & -8 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$c_3 = 0, c_2 = -1, c_1 = 1$ (BORDE MAN KUNNA SE DIREKT)

$\therefore \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. PÅ MATRISFORM

$$Q(x,y) = [x\ y]\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 6 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

EGENVÄRDEN/VEKTORER FÖR A:

EGENVÄRDEN: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 6\\ 6 & 13-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-3-\lambda)(13-\lambda)-36=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-10\lambda-75=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5\pm\sqrt{25+75} = 5\pm 10 = -5;\ 15$$

[KOLL: $-5+15=10$; $\operatorname{tr}A=-3+13=10$
$-5\cdot 15=-75$; $\det A=-39-36=-75$ ok]

EGENVEKTORER

$\lambda=-5$: $A\bar{v}=-5\bar{v} \Leftrightarrow (A+5I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}2 & 6 & 0\\ 6 & 18 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$
x_1 BUNDEN x_2 FRI
$x_2=t$, $x_1=-3t$

$$\bar{v} = t\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \begin{bmatrix}-3/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$
(NORMERAD)

$\lambda=15$: $A\bar{v}=15\bar{v} \Leftrightarrow (A-15I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-18 & 6 & 0\\ 6 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$
x_1 BUNDEN
x_2 FRI $x_2=t$
$x_1=\frac{1}{3}t$

$$\therefore\ \bar{v} = t\begin{bmatrix}1/3\\ 1\end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} \text{ VÄLJ } \begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\ 3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ STÖRSTA VÄRDE: 15, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

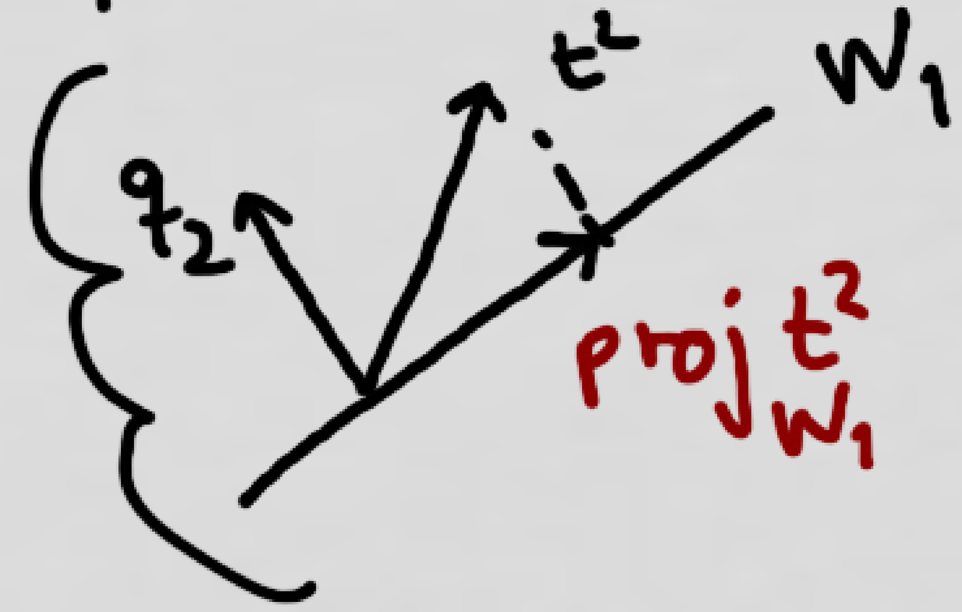
MINSTA VÄRDE: -5, $\pm\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

4. a) EN BAS FÖR H ÄR $\{1-t, t^2\}$

ORTOGONALISERA DENNA MHA G-S:

1) $q_1(t) = 1-t \qquad W_1 = \text{Span}\{1-t\}$

2) $q_2(t) = t^2 - \text{proj}_{W_1} t^2$



$$= t^2 - \frac{\langle t^2, 1-t\rangle}{\langle 1-t, 1-t\rangle}(1-t)$$

$$= t^2 + \frac{4}{3}(1-t) = t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{3}$$

$\tilde{2})$ VÄLJ $\tilde{q}_2 = 3q_2 = 3t^2 - 4t + 4$

$$\therefore \{1-t, 3t^2-4t+4\} \quad //$$

b) $$\text{proj}_H t = \frac{\langle t, 1-t\rangle}{\langle 1-t, 1-t\rangle}(1-t) + \frac{\langle t, 3t^2-4t+4\rangle}{\langle 3t^2-4t+4, 3t^2-4t+4\rangle}(3t^2-4t+4)$$

$$= \frac{-2}{3}(1-t) + \frac{19}{105}(3t^2-4t+4)$$

$$= \frac{19}{35}t^2 - \frac{2}{35}t + \frac{2}{35} \quad //$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4\cdot 19}{105} = \frac{70-76}{105} = \frac{-6}{105} = \frac{-2}{35}$$

$\langle t^2, 1-t\rangle = 2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot(-1) = -4$

$\langle 1-t, 1-t\rangle = 2(-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 3$

$\langle t, 1-t\rangle = 0 + 0 + 2(-1) = -2$

$\langle t, 3t^2-4t+4\rangle = 0 + 3 + 16 = 19$

$\langle 3t^2-4t+4, 3t^2-4t+4\rangle = 32 + 9 + 64 = 105$

5. a) $y' + 2xy = x^3$ $\quad$ $\left\ulcorner \text{IF}: \int 2x\,dx = x^2 + c \quad \therefore \text{IF} = e^{x^2} \right\lrcorner$

$\Leftrightarrow y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = x^3e^{x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(ye^{x^2}) = x^3e^{x^2}$

$\Leftrightarrow ye^{x^2} = \int x^3 e^{x^2}\,dx = \left[\begin{matrix} u = x^2 \\ \frac{du}{dx} = 2x \end{matrix}\right] = \int \frac{1}{2} u e^u\,du =$

$= \frac{1}{2}ue^u - \int \frac{1}{2}e^u\,du = \frac{1}{2}ue^u - \frac{1}{2}e^u + c$

$= \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$

MEN, $y(0) = -1$: $-1 = -\frac{1}{2} + c \quad \therefore c = -\frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$ //

b) $e^x y' = 1 + y^2 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^{-x}\,dx$

$\Leftrightarrow \arctan y = -e^{-x} + C \Leftrightarrow$

$y = \tan(C - e^{-x})$ & $|C - e^{-x}| < \frac{\pi}{2}$

MEN, $y(0) = 1 \quad \therefore \quad 1 = \tan(C - 1) \quad \therefore C = \frac{\pi}{4} + 1$

$\therefore y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 1 - e^{-x}\right)$ //

6. a) $y^{(4)}+y'''-y''+y'-2y$ INSATT $y=\sin x$

$\sin x-\cos x+\sin x+\cos x-2\sin x=0$ för alla x, ok

b) "HOMOGEN + PARTIKULÄR"

HOM.: KAR.EKV.: $r^4+r^3-r^2+r-2=0$

SOM EN LÖSNING TILL DIFF. GER $r=\pm i$ RÖTTER,

DVS r^2+1 EN FAKTOR (F-S)

$$\begin{array}{r|l} & r^2+r-2 \\ r^2+1 & r^4+r^3-r^2+r-2 \\ & r^4+r^2 \\ \hline & r^3-2r^2+r-2 \\ & r^3+r \\ \hline & -2r^2-2 \\ & -2r^2-2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore$ KAR.EKV.: $(r^2+1)(r^2+r-2)=0$

KVAR ATT LÖSA: $r^2+r-2=0 \iff$

$r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=-2;1$

$\therefore$ RÖTTERNA ÄR $-2, 1, i, -i$ SÅ DE HOMOGENA

LÖSNINGARNA: $y_h=Ae^{-2x}+Be^{x}+C\sin x+D\cos x$

PART. ANSATS: $y_p=ae^{3x}$

$y_p'=3ae^{3x}$, $y_p''=9ae^{3x}$, $y_p'''=27ae^{3x}$, $y_p^{(4)}=81ae^{3x}$

INI EKV.:

$81ae^{3x}+27ae^{3x}-9ae^{3x}+3ae^{3x}-2ae^{3x}=10e^{3x}$

$\iff$

$81a+27a-9a+3a-2a=10 \iff$

$100a=10 \iff a=\frac{1}{10}$

$\therefore y_p=\frac{1}{10}e^{3x}$

$\therefore y=y_h+y_p=$

$=Ae^{-2x}+Be^{x}+C\sin x+D\cos x+\frac{1}{10}e^{3x}$

7. a) $y(x) = z(t)$ GÖR:

$$z'(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} y(e^t) = e^t y'(e^t) = x y'(x)$$

$$z''(t) = \frac{d}{dt} z'(t) = \frac{d}{dt} e^t y'(e^t) = e^t y'(e^t) + e^t e^t y''(e^t)$$

$$= x y'(x) + x^2 y''(x)$$

$$\therefore \quad x^2 y'' = z'' - x y' = z'' - z \quad \text{ok}$$

b) $$z''' = \frac{d}{dt} z''(t) = \frac{d}{dt}\left(e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) \right) =$$

$$= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + 2e^{2t} y''(e^t) + e^{3t} y'''(e^t)$$

$$= xy' + x^2 y'' + 2x^2 y'' + x^3 y'''$$

$$\therefore \quad x^3 y''' = z''' - 3x^2 y'' - xy' = z''' - 3(z'' - z') - z'$$

$$= z''' - 3z'' + 2z'$$

c) $$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = 0$$

SÄTT $x = e^t$, $z(t) = y(x)$ OCH, ENLIGT OVAN, FÅR:

$$z''' - 3z'' + 2z' + 3(z'' - z') + z' - z = 0 \iff z''' - z = 0$$

KAR. EKV.: $r^3 - 1 = 0 \iff r = 1;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

(BINOMISK)   (POLÄR, D-M, ...)

$$\therefore \quad z(t) = Ae^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(B \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\therefore \quad y(x) = Ax + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(B \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln x) + C \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\log(x)\right)$$