Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2021-05-27**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att talet
$$c_n = 3^{2n} - 1$$
är delbart med 8. *Ledning: ett heltal c är delbart med ett annat heltal d om det finns ett heltal k så att $c = kd$.* (5p)

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
   $$\lim_{x \to 1} e^{\cos \ln x}$$
   (1p)

   (b) Visa att
   $$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$
   Ledning: instängningssatsen. (2p)

   (c)
   $$\lim_{x \to 0+} x^{\ln x}$$
   (2p)

3. Låt
$$f(x) = xe^x, \quad -1 \leq x < \infty,$$
och definiera *Lamberts W-funktion* W som inversen till f, dvs $W(x) = f^{-1}(x)$.

   (a) Visa att f är inverterbar. Vad är definitionsmängden för W? (2p)

   (b) Visa att derivatan $W'(x)$ uppfyller
   $$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$
   om $x \neq 0$. (2p)

   (c) Finn tangenten till kurvan $y = W(x)$ i punkten $x = e$. *Tips: formeln i uppgift (b) kan vara användbar.* (2p)

4. En partikel med vilomassa m_0 rör sig med hastigheten v (där $|v| < c$) relativt ett visst koordinatsystem. Einstein visade under sitt *annus mirabilis* 1905 att partikelns totala energi E är

$$E = mc^2,$$

där partikelns relativistiska massa m ges av

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Partikelns kinetiska energi T ges därmed av differensen mellan totala energin och viloenergin enligt formeln

$$T = T(v) = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

där c är ljusets hastighet i vakuum.

(a) Beräkna förstaderivatan $T'(v)$ och andraderivatan $T''(v)$. (2p)

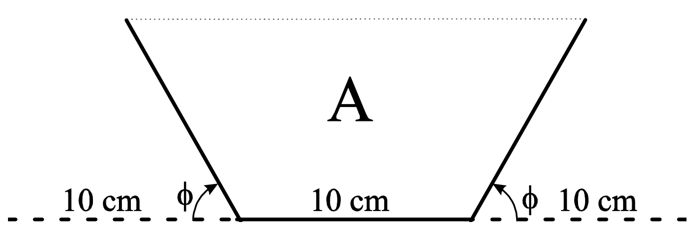
(b) Approximera $T(v)$ med ett andra ordningens Taylorpolynom till $T(v)$ kring $v = 0$. Restterm behöver ej beräknas. (2p)

5. Definiera funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x - 2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp detaljerade teckenscheman. Skissera kurvan. (5p)

6. En öppen ränna för vatten skall konstrueras ur en 30 cm bred plåt genom att bocka upp en tredjedel av plåten vinkeln ϕ på varje sida, se rännans tvärsnitt i figuren under.



Hur skall vinkeln ϕ väljas för att rännan skall rymma så mycket vatten som möjligt och hur stor är tvärsnittsarean A då? (5p)