LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Repetitionsuppgifter; M0049M

Komplexa tal och algebraiska ekvationer

1. Faktorisera $z^4 + 16$ med hjälp av reella polynom med så låga gradtal som möjligt.

2. Ekvationen
$$z^3 + z^2(1 - 5i) + z(-12 + 2i) + 6 + 6i = 0$$
har en rot $z = 1 + i$. Bestäm samtliga rötter.

3. Lös
$$(1 - i)^9 z^3 = \left(3 + i\sqrt{3}\right)^5.$$
Ge svaret på polär form.

4. Bestäm samtliga lösningar till $iz^2 + (-1 + i)z + 2 - 6i = 0$.

5. Ekvationen $z^4 - 6z^3 + 21z^2 - 18z + 54 = 0$ har en rot $3 - 3i$. Bestäm samtliga rötter.

6. Låt a vara en reell parameter och låt
$$z = \frac{(1 + 2i)^2}{1 - ai}.$$
   a) Bestäm a så att z blir rent imaginär.
   b) Bestäm $|z|$.
   c) Bestäm a så att $\arg(z) = 7\pi/6$.

7. Bestäm samtliga tredjegradspolynom som har nollställena 1 och -2 men inga andra.

8. Beskriv samtliga z som uppfyller $|(3 + i)z - 1| = 2$.

9. Låt z och w vara komplexa tal.
   a) Hur definieras $|z|$, $\arg(z)$ och (för reella x) e^{zx}?
   b) Vad betyder det att $z = w$?

Vektorrum och baser

10. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -8 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

 a) Bestäm baser för Col$A$, Row$A$ resp. Nul$A$. Bestäm också rank$A$.

 b) $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}^T$ ligger i Col$A$, bestäm dess koordinater relativt den bas för kolonnrummet du bestämde i a) uppgiften.

11. Låt $\mathcal{B} = \{1 + t^3, 1 + t^2, 1 + t, 1 + 2t\}$.

 a) Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{P}_3$.

 b) Bestäm $[t^3]_{\mathcal{B}}$.

12. Låt $M_{2\times 2}$ beteckna vektorrummet av samtliga 2×2 matriser.

 a) Visa att
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
 är en bas för $M_{2\times 2}$.

 b) Bestäm koordinaterna för
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
 relativt basen $\mathcal{B}$.

13. Låt
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

 a) Visa att $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende.

 b) Beskriv det linjära höljet för $\mathcal{B}$.

 c) Bestäm en matris A sådan att om man utvidgar $\mathcal{B}$ med A fås en bas för $M_{2\times 2}$.

14. Låt
$$H = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(-1) = p(1) = 0\}.$$

 a) Visa att H är ett underrum till $\mathbb{P}_3$.

 b) Bestäm en bas för H. Bestäm $\dim H$.

15. Låt
$$H = \left\{at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathbb{P}_3 : a = 2c + 3d\right\}.$$

a) Visa att H är ett underrum till $\mathbb{P}_3$.

b) Bestäm en bas för H.

16.

a) Låt $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, vara element i ett vektorrum V. Vad betyder det att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är en bas för V? Ge en definition.

b) Låt V vara ett vektorrum. Vad menas med att H är ett underrum till V? Ge en definition.

c) Låt $V \neq \{\mathbf{0}\}$ vara ett vektorrum som spänns upp av en ändlig mängd. Definiera $\dim V$.

d) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vara en bas för V. Vad betyder $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$? Ge en definition.

e) Låt V och W vara vektorrum. Vad menas med att T är en linjär avbildning från V till W? Ge en definition.

Egenvärden och egenvektorer, avbildningsmatris och kvadratiska former

17. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -24 & 7 \end{bmatrix}$.

18. Låt $A = \begin{bmatrix} 9 & -20 & 10 \\ 5 & -11 & 5 \\ 5 & -10 & 4 \end{bmatrix}$. Diagonalisera A om det går.

19. Är

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonaliserbar?

20. Låt $Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

a) Skissera, i ett x, y-koordinatsystem, $Q(x, y) = 1$.

b) Bestäm det minsta och största värdet $Q(x, y)$ kan ha då $x^2 + y^2 = 1$.

21. Diagonalisera

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ortogonalt. Vilket är det minsta värdet

$$Q(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz$$

kan få då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$? Ge exempel på några punkter där minimat antas.

22. Låt $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{1, t, t^2, t^3\}$. Dessa är baser för $\mathbb{P}_2$ respektive $\mathbb{P}_3$.

    a) Visa att $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, definierat via

    $$T(p(t)) = (1-t^2)p'(t) + 2p(-2),$$

    är en linjär avbildning.

    b) Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$. Verifiera svaret med hjälp av polynomet $p(t) = 2 + t^2$.

23. Betrakta avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -24 & 15 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas $\mathcal{B}$, för $\mathbb{R}^2$, i vilken $\mathcal{B}$-matrisen för T ges av en diagonalmatris. Verifiera svaret för vektorn $\mathbf{x} = [\ 3 \quad 4\ ]^T$.

24. Diagonalisera

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

25. Låt A vara en kvadratisk matris.

    a) Definiera begreppen egenvektor och egenvärde för A.

    b) Ge en geometrisk definition av begreppen egenvektor och egenvärde.

    c) Låt A beskriva en spegling i ett plan genom origo. Vad kan sägas om matrisens egenvärden och egenvektorer?

Ortogonalitet

26. Låt

$$H = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestäm en ortogonal bas för H.

27. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Bestäm $\langle 1+t, 1-t^2 \rangle$, $\|t+t^2\|$ och $\text{dist}(1-t, t^2-t)$.

b) Finn en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$.

28. Utrusta $\mathbb{P}$ med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt.$$

a) Finn en ortogonal bas för $H = \text{span}\{t, t^2, t^3\}$.

b) Bestäm $\text{proj}_H 1$.

29. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0) + 2p(1)q(1)$$

och låt H vara underrummet

$$H = \text{span}\left\{1+t, t^2\right\}.$$

Bestäm $\text{proj}_H t$.

30. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm minsta-kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Vilket är det minsta värde $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ kan få om man får välja $\mathbf{x}$ fritt?

31. Betrakta följande data $\begin{array}{c||c|c|c} x & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 4 \end{array}$. Bestäm den funktion på formen $y = \alpha x + \beta x^2$ som bäst anpassar till datapunkterna i minsta-kvadratmetodens mening.

Differentialekvationer

32. Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' = 1 + y^2$, $y(e) = 1$.

33. Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' - 2y = x^3 \sin x$, $y(\pi/2) = 1$.

34. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''e^{y'} = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

35. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 1 + 2xe^{2x} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

36. Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + 10y = 3\cos 3x + \sin 3x$.

37. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 16y = \sin 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

38. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - y = (10x - 5)\cos 2x$.

Mer om differentialekvationer

39. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = 11x + 8y \\ y' = -12x - 9y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $y(0) = 0$.

40. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 5x - 6y, \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 5$ och $y(0) = -2$.

41. Lös differentialekvationen $x^2y'' - 5xy' + 10y = 10x^4$, $x > 0$.

42. Lös differentialekvationen $x^3y'' - x^2y' + xy = 1$, $x > 0$.

43. Lös differentialekvationen $y''' + 8y = 3x^3 + 1$.

44. Lös differentialekvationen $y''' + 3y'' + 3y' + y = 4e^{-x} + x$. Ledning: binomialsatsen.

45. Bestäm samtliga lösningar till

$$y^{(4)} - 6y''' + 21y'' - 18y' + 54y = x + 1.$$

Ledning: $e^{3x}\sin 3x$ är en homogenlösning.

46. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = 3y + 3e^x y^{2/3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

genom att först transformera ekvationen, med variabelbytet $z = y^{1/3}$, till en linjär differentialekvation i z och därefter lösa denna.

47. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - 2y' + y = e^x/x$, $x > 0$ genom att transformera ekvationen, med $y(x) = z(x)e^x$, till en differentialekvation i z.

48. En lösning till $2xy' = 2y + y^2 - x^2$ är $y = x$. Finn en lösning som uppfyller $y(1) = 2$ genom att transformera ekvationen med variabelbytet $y(x) = x + 1/v(x)$.

49. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^{2x})$.
Ledning: För partikulärlösning: givet y_1 och y_2 två linjärt oberoende homogenlösningar så ansätt $y_p = v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)$ och sätt $v_1'y_1+v_2'y_2 = 0$ (variation av konstanterna).