LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Övningstentamen 1

M0049M

Tentamensdatum: **xx-xx-xx**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: xxx.
Antal uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $iz^2 + (-1+i)z + 2 - 6i = 0$.

b) Skriv $z = \dfrac{-(\sqrt{3} - 3i)^3}{i(-1+i)^5}$ på polär form. (4 p)

2. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -8 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm baser för Col$A$, Row$A$ resp. Nul$A$. Bestäm också rank$A$.

b) $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}^T$ ligger i Col$A$, bestäm dess koordinater relativt den bas för kolonnrummet du bestämde i a) uppgiften. (4 p)

3. Låt $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{1, t, t^2, t^3\}$. Dessa är baser för $\mathbb{P}_2$ respektive $\mathbb{P}_3$.

a) Visa att $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, definierat via
$$T(p(t)) = (1-t^2)p'(t) + 2p(-2),$$
är en linjär avbildning.

b) Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten
$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Bestäm $\langle 1+t, 1-t^2 \rangle$, $\|t+t^2\|$ och dist$(1-t, t^2-t)$.

b) Finn en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$. (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till $y'' - 2y' + 10y = 3\cos 3x + \sin 3x$. (4 p)

6. Lös följande system av differentialekvationer
$$\begin{cases} x' = 11x + 8y \\ y' = -12x - 9y, \end{cases}$$
med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $y(0) = 0$. (4 p)

7. Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vara vektorer i ett vektorrum V.

a) Vad menas med att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är en bas för V? Ge en definition.

b) Antag att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är en bas för V. Bevisa, utan att referera till begreppet dimension, att varken
$$\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\} \text{ eller } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$$
är baser för V. (4 p)