Tentamen i Differentialkalkyl M0047M

Tentamensdatum: **2023-10-26**
Skrivtid: **09.00-14.00 (5 timmar)**

Jourhavande lärare: Johan Byström, tel: 0920-492880

Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5.**
Antal uppgifter: **6**. Maximal poäng: **30**.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, formelsamling (bifogad, p. 4-5).

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Allmänna anvisningar:
Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna och använd inte rödpenna.

Efter tentamen:
Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på *Mitt LTU – Ladok för studenter*. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på *Mitt LTU – Rättade tentor*.

Uppgifter till tryckeriet:
Projektnummer: **211 009** Antal exemplar: **580** Antal sidor: **5**

Övriga uppgifter: Kalkylator EJ tillåten. Inget av tentabladen behöver lämnas in med de övriga svaren.

1. (a) Bestäm koefficienten för x^8-termen i binomialutvecklingen av

$$\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^9.$$

(3p)

Lösning: Binomialsatsen ger att

$$\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(x^2\right)^{9-k} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (-2)^k \, x^{18-2k-3k}$$

Därmed kommer det att finnas nollskilda potenser av x med exponent $18-5k$ i denna summa. Till exempel innebär det att $k=0$ ger en x^{18}-term, $k=1$ en x^{13}-term, osv. För att få en term som innehåller potensen x^8 måste därför

$$18 - 5k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{18-8}{5} = 2.$$

Den termen är då

$$\binom{9}{2} (-2)^2 \, x^{18-5\cdot 2} = 36 \cdot 4 \cdot x^8 = 144x^8,$$

ty

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36.$$

Den sökta koefficienten är därför 144.

(b) Vid ett möte deltog nio personer. Innan mötet skakade alla personer hand med varandra en gång. Hur många handskakningar utfördes totalt innan mötet? (2p)

Lösning: Antag att vi kallar personerna $p_1, p_2, \ldots, p_9$. Person p_1 skakade då hand med 8 personer, person p_2 med 7 personer (handskakningen med p_1 är redan inräknad ovan), person p_3 med 6 personer (handskakningarna med person p_1 och person p_2 redan inräknade ovan), osv. Totalt utfördes därför

$$8+7+6+\ldots+2+1 = \sum_{k=1}^{8} k = \frac{8\cdot(8+1)}{2} = 36$$

handskakningar.

Alternativ lösning 1: Vi har en grupp med nio personer ur vilken två skall väljas för varje handslag. Det kan vi göra på

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 36$$

olika sätt.

Alternativ lösning 2: Det finns 9 personer som kan skaka hand med 8 andra personer. Dock, eftersom två personer enbart skakar hand med varandra en gång så kommer dessa handslag att räknas dubbelt så många gånger som de borde. Därmed kommer totalt

$$\frac{9\cdot 8}{2} = 36$$

handskakningar att ha utförts.

2. Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

   (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}.$$
(1p)

   Lösning: Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Här har vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \frac{\sin 4x}{\sin x} = \underbrace{\cos x}_{\to 1} \cdot \frac{4\,\overbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}^{\to 1 \text{ STD.}}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1 \text{ STD.}}} = 4.$$

   Alternativ lösning: Vi har att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin 4x}^{=2\sin 2x \cos 2x}}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ \overbrace{\sin 2x}^{=2\sin x\cos x}\ \cos 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin x \cdot \overbrace{\cos^2 x}^{\to 1^2} \cdot \overbrace{\cos 2x}^{\to 1}}{\sin x} = 4.$$

   (b)
$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}.$$
(2p)

   Lösning: Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Förlängning av täljare och nämnare med nämnarens rotkonjugat ger

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6)-9} \\ &= \lim_{x\to 3} \left(\sqrt{x+6}+3\right) = \sqrt{9}+3 = 6.\end{aligned}$$

   (c)
$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{4x^8+9x^6}-6x^3\sin x}{5x^7e^{-x}-2x^4}\right).$$
(2p)

   Lösning: Vi får först

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{4x^8+9x^6}-6x^3\sin x}{5x^7e^{-x}-2x^4}\right) \underset{\text{arctan kont.}}{=} \arctan\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^8+9x^6}-6x^3\sin x}{5x^7e^{-x}-2x^4}\right).$$

Låt oss sedan beräkna gränsvärdet i argumentet till arctan. Notera här att x^4 är dominant i nämnaren, ty $e^{-x} \to 0$ när $x \to \infty$. Därmed får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^8+9x^6}-6x^3\sin x}{5x^7e^{-x}-2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(\overbrace{\sqrt{4+\frac{9}{x^2}}}^{\to\sqrt{4}=2} - 6\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 0\ [sic!]}\right)}{x^4\left(5\underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\to 0 \text{ STD.}} - 2\right)} = \frac{2-6\cdot 0}{5\cdot 0-2} = -1.$$

Det sökta gränsvärdet är därför $-\frac{\pi}{4}$ eftersom

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

3. Finn alla normallinjer till kurvan

$$y = f(x) = x^2 - 2x$$

som går genom punkten $Q = \left(1, \frac{7}{2}\right)$. (5p)

Lösning: Vi kontrollerar först om punkten $Q = \left(1, \frac{7}{2}\right)$ ligger på kurvan $y = f(x)$. Nu är

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 = -1 \neq \frac{7}{2},$$

vi konstaterar därför att så inte är fallet. Låt därför $P = (a, f(a)) = (a, a^2-2a)$ vara en punkt på kurvan. Vi undersöker först fallet $a \neq 1$. Här är

$$f'(x) = 2x - 2,$$

varför tangentlinjen till kurvan genom P har lutning

$$k_t = 2a - 2$$

och normallinjen till kurvan genom P följaktligen har lutning

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2a-2},$$

om $a \neq 1$. Därmed har normallinjen genom P ekvation

$$y - \left(a^2-2a\right) = -\frac{1}{2a-2}(x-a) \Leftrightarrow y = -\frac{x-a}{2(a-1)} + a^2 - 2a.$$

Vi vet dessutom att denna normallinje går genom punkten Q, varför normallinjens ekvation måste vara uppfylld i denna punkt. Det betyder att

$$\frac{7}{2} = -\frac{1-a}{2(a-1)} + a^2 - 2a = \frac{1}{2} + a^2 - 2a,$$

dvs

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 2^2.$$

Därmed är

$$a = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

För $a \neq 1$ finns det därför två normallinjer till $y = f(x)$ som går genom punkten Q. Den ena (för $a = 3$) skär kurvan i punkten $P_1 = (3, 3)$ och har ekvation

$$y = -\frac{x-3}{2(3-1)} + 3^2 - 2 \cdot 3 = -\frac{x-3}{4} + 3 = \frac{15-x}{4},$$

den andra (för $a = -1$) skär kurvan i punkten $P_2 = (-1, 3)$ och har ekvation

$$y = -\frac{x-(-1)}{2((-1)-1)} + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = \frac{x+1}{4} + 3 = \frac{13+x}{4}.$$

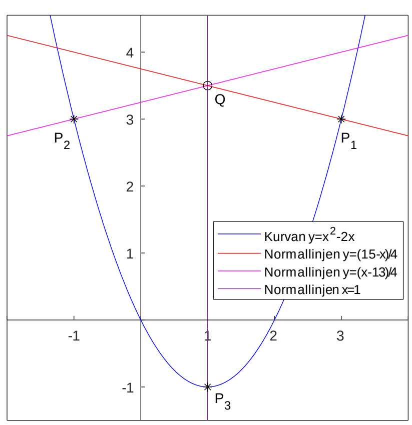
Låt oss slutligen undersöka fallet $a = 1$. Då har kurvan $y = x^2 - 2x$ horisontell tangent och därmed vertikal normallinje $x = 1$ i punkten $P_3 = (1, -1)$. Den normallinjen går också genom punkten Q, ty Q har x-koordinat 1. Sammanfattningsvis finns det därför tre normallinjer

$$\begin{aligned} y &= \frac{15-x}{4}, \\ y &= \frac{13+x}{4}, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

till kurvan $y = x^2 - 2x$ som går genom punkten $Q = \left(1, \frac{7}{2}\right)$.

Anmärkning: Notera att den vertikala linjen $x = 1$ är symmetrilinje till kurvan, ty

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1.$$



4. Låt

$$f\left(x\right)=\sqrt{3x+13}-\sqrt{3x-3},\ \ x\in\left[1,\infty\right).$$

(a) Visa att f är injektiv (dvs ett-till-ett). (2p)

Lösning: Derivering av f följt av förlängning av täljare och nämnare med rotkonjugatet

$$\sqrt{3x+13}+\sqrt{3x-3}$$

ger

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \frac{3}{2\sqrt{3x+13}}-\frac{3}{2\sqrt{3x-3}}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3x-3}-\sqrt{3x+13}}{\sqrt{3x+13}\sqrt{3x-3}}= \\ &= \frac{3}{2}\frac{\left(3x-3\right)-\left(3x+13\right)}{\left(\sqrt{3x-3}+\sqrt{3x+13}\right)\sqrt{\left(3x+13\right)\left(3x-3\right)}}= \\ &= -\frac{24}{(\underbrace{\sqrt{3x-3}}_{>0}+\underbrace{\sqrt{3x+13}}_{>0})\underbrace{\sqrt{\left(3x+13\right)\left(3x-3\right)}}_{>0}}<0 \end{aligned}$$

för $x>1$. Därmed är f strängt avtagande på $[1,\infty)$ och således injektiv.

Alternativ lösning: Vi sätter $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ och visar att det medför att $a=b$. Mer specifikt har vi att

$$\begin{gathered} f\left(a\right)=\sqrt{3a+13}-\sqrt{3a-3}=\sqrt{3b+13}-\sqrt{3b-3}=f\left(b\right) \\ \Updownarrow \\ \sqrt{3a+13}+\sqrt{3b-3}=\sqrt{3b+13}+\sqrt{3a-3} \\ \Downarrow \\ 3a+13+3b-3+2\sqrt{\left(3a+13\right)\left(3b-3\right)}=3b+13+3a-3+2\sqrt{\left(3b+13\right)\left(3a-3\right)} \\ \Updownarrow \\ \sqrt{9ab+39b-9a-39}=\sqrt{9ab+39a-9b-39} \\ \Downarrow \\ 9ab+39b-9a-39=9ab+39a-9b-39 \\ \Updownarrow \\ 48b=48a \\ \Updownarrow \\ a=b \end{gathered}$$

(b) Finn värdemängd $R\left(f\right)$ för f. (1p)

Lösning: Vi såg ovan att f är strängt avtagande på $\left[1,\infty\right)$. Därmed blir funktionens värdemängd

$$R\left(f\right)=\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right),f\left(1\right)\right]=(0,4]$$

ty

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \sqrt{3\cdot 1+13}-\sqrt{3\cdot 1-3}=\sqrt{16}-\sqrt{0}=4,\\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\sqrt{3x+13}-\sqrt{3x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+13)-(3x-3)}{\sqrt{3x+13}+\sqrt{3x-3}}=\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{16}{\sqrt{x}\underbrace{\left(\sqrt{3+\frac{13}{x}}+\sqrt{3-\frac{3}{x}}\right)}_{\to 2\sqrt{3}}}=0
\end{aligned}
$$

efter förlängning med rotkonjugatet.

(c) Finn invers funktion f^{-1} till f. (2p)

Lösning: Vi vet att $R(f)=(0,4]$. Vi söker därför inversen

$$y=f^{-1}(x)\,,\ x\in(0,4]\,.$$

Det innebär att

$$x=f(y)=\sqrt{3y+13}-\sqrt{3y-3}.$$

Om vi multiplicerar bägge sidor av denna ekvation med rotkonjugatet får vi

$$x\left(\sqrt{3y+13}+\sqrt{3y-3}\right)=(3y+13)-(3y-3)=16.$$

Det innebär att vi har ekvationssystemet

$$\begin{cases}\sqrt{3y+13}-\sqrt{3y-3}=x,\\[2ex] \sqrt{3y+13}+\sqrt{3y-3}=\dfrac{16}{x}.\end{cases}$$

Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra får vi således

$$2\sqrt{3y-3}=\frac{16}{x}-x$$

så att

$$\sqrt{3y-3}=\frac{16-x^2}{2x}\Rightarrow 3(y-1)=\left(\frac{16-x^2}{2x}\right)^2\Leftrightarrow y=1+\frac{\left(\frac{16-x^2}{2x}\right)^2}{3}.$$

Därmed är funktionen

$$y=f^{-1}(x)=1+\frac{\left(\frac{16-x^2}{2x}\right)^2}{3}=\frac{12x^2}{12x^2}+\frac{256-32x^2+x^4}{3\cdot 4x^2}=\frac{x^4-20x^2+256}{12x^2}$$

för $x\in(0,4]$ invers till f.

Alternativ lösning: Ekvationen

$$\sqrt{3y+13}-\sqrt{3y-3}=x\Leftrightarrow\sqrt{3y+13}=x+\sqrt{3y-3}$$

Kvadrering av bägge sidor medför då att

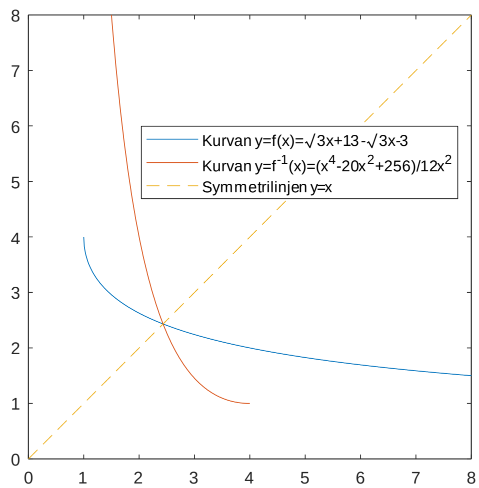
$$3y + 13 = x^2 + (3y - 3) + 2x\sqrt{3y - 3},$$

dvs

$$16 - x^2 = 2x\sqrt{3y - 3} \Leftrightarrow \frac{16 - x^2}{2x} = \sqrt{3y - 3}.$$

Med samma resonemang som ovan fås därför även här

$$y = f^{-1}(x) = 1 + \frac{\left(\frac{16-x^2}{2x}\right)^2}{3} = \frac{x^4 - 20x^2 + 256}{12x^2}.$$



5. Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4x + 4}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd $R(f)$. Skissera kurvan. (5p)

Lösning: Observera först att funktionen varken är jämn eller udda, ty

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 5(-x) + 4}{(-x)^2 + 4(-x) + 4} = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x + 4} \neq \begin{cases} f(x), \\ -f(x). \end{cases}$$

Sedan undersöker vi var funktionen skär koordinataxlarna. Vi har att

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)^2}$$

varför x-axeln skärs i $x = 1$ och $x = 4$. I tillägg ser vi att y-axeln skärs i

$$y = f(0) = \frac{0^2 - 5 \cdot 0 + 4}{0^2 + 4 \cdot 0 + 4} = 1.$$

Låt oss sedan undersöka asymptoter. Vi ser direkt att vi har en dubbelsidig horisontell asymptot $y = 1$, ty

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}} = 1.$$

Eftersom asymptoten är dubbelsidig kan vi ej ha någon sned asymptot. Däremot har vi en vertikal asymptot $x = -2$ eftersom

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2+} f(x) &= \lim_{x\to -2+} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\to -3}\overbrace{(x-4)}^{\to -6}}{\underbrace{(x+2)^2}_{\to 0+}} = +\infty, \\
\lim_{x\to -2-} f(x) &= \lim_{x\to -2-} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\to -3}\overbrace{(x-4)}^{\to -6}}{\underbrace{(x+2)^2}_{\to 0+}} = +\infty.
\end{aligned}$$

Derivering av

$$f(x) = \frac{x^2-5x+4}{(x+2)^2}$$

ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-5)(x+2)^2 - (x^2-5x+4)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x-5)(x+2) - 2(x^2-5x+4)}{(x+2)^3} \\
&= \frac{(2x^2-5x+4x-10) - (2x^2-10x+8)}{(x+2)^3} = \frac{9x-18}{(x+2)^3} = \frac{9(x-2)}{(x+2)^3} \\
f''(x) &= \frac{9(x+2)^3 - (9x-18)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{9(x+2) - 3(9x-18)}{(x+2)^4} = \frac{-18(x-4)}{(x+2)^4}.
\end{aligned}$$

Därmed har vi en kritisk punkt $x = 2$, en singulär punkt $x = -2$ samt en eventuell inflexionspunkt $x = 4$. Teckenscheman över f' och f'':

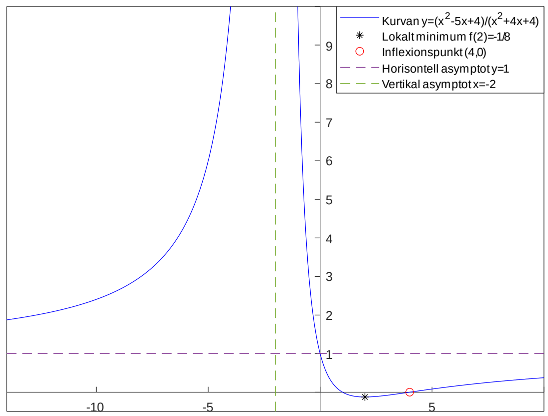
		-2		2	
$9(x-2)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	asy.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

		-2		4	
$-18(x-4)$	$+$		$+$	0	$-$
$(x+2)^4$	$+$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	odef.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	asy.	$\smile$	infl.	$\frown$

Vi har således ett lokalt minimum

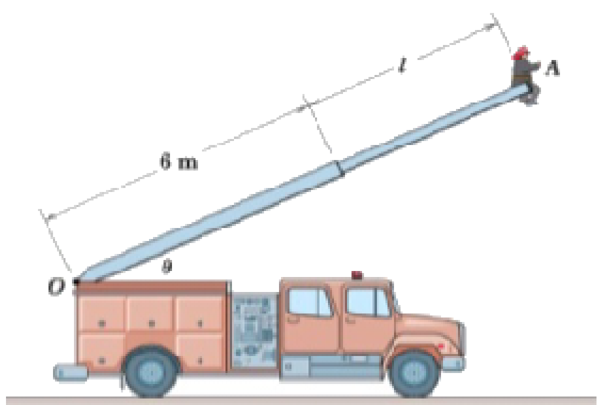
$$f(2) = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 4}{2^2 + 4 \cdot 2 + 4} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$

och en inflexionspunkt i $x = 4$. Funktionen är växande på intervallen $(-\infty, -2)$ och $[2, \infty)$ samt avtagande på intervallet $(-2, 2]$. Funktionen är konvex på intervallen $(-\infty, -2)$ och $(-2, 4)$ samt konkav på intervallet $(4, \infty)$. Vi kan slutligen rita grafen som



Vi ser att det lokala minimumet även är ett globalt minimum. Däremot saknas globalt maximum. Av grafen framkommer således att funktionens värdemängd är $R(f) = \left[-\frac{1}{8}, \infty\right)$.

6. Nederdelen av en stege på en brandbil är fäst på ovansidan av bilen på en höjd 3 meter över marken. Stegen reses genom att öka vinkeln θ samtidigt som man förlänger stegens längd från 6 m med l, se nedanstående figur.



Längst ut på stegen sitter en brandman. Hur fort ökar brandmannens höjd y över marken vid den tidpunkt när stegen förlängts med $l = 2$ m och längden ökar med en hastighet av $\frac{1}{5}$ m/s samtidigt som vinkeln är $\theta = \frac{\pi}{6}$ och ökar med vinkelhastigheten

$$\omega = \frac{1}{14} \text{ rad/s?}$$

(5p)

Lösning: Brandmannens höjd y över marken ges av

$$y = 3 + (6 + l)\sin\theta,$$

där $l = l(t)$ och $\theta = \theta(t)$ är funktioner av tiden t. Därmed blir även brandmannens höjd $y = y(t)$ över marken en funktion av tiden som ökar med hastigheten

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dl}{dt}\sin\theta + (6 + l)\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Vi söker $\frac{dy}{dt}$ vid den tidpunkt t_0 då

$$\begin{aligned} l &= 2 \text{ m}, \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{1}{5} \text{ m/s}, \\ \theta &= \frac{\pi}{6}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{14} \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Det ger oss att den sökta hastigheten är

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{14}\cdot(6+2)\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{14}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{7} \text{ m/s}.$$

Anmärkning: Då

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2 = \frac{12}{49} \approx \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

så är

$$\frac{2\sqrt{3}}{7} \approx \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Därmed är

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} \approx \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ m/s}.$$