LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0049M/M0031M

Tentamensdatum: **2020-12-19**
Skrivtid: **09.00 - 14.30**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel: 0920-493330.

Antalet uppgifter: 7, totalpoäng: 28.
Betygsgränser: 0-12 **U**, 13-17 **3**, 18-23 **4**, 24-28 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter.

1.

a) Lös ekvationen $z^2 - (3+3i)z - 2 + 3i = 0$.

b) Bevisa

$$\arctan \frac{4}{3} = 2 \arctan \frac{1}{2}.$$

Ledning: Låt $z = 3 + 4i$ och $w = 2 + i$ och resonera kring argumenten för z/w. (4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för kolonnrummet till A (Col$A$) och en bas för nollrummet till A (Nul$A$).

b) Låt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det gäller att $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}A$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ relativt basen för kolonnrummet som bestämdes i a) uppgiften. (4 p)

3. Vilket är det minsta respektive största värde

$$Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - 6yz$$

kan få då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$? Ge exempel på punkter där minimat och maximat antas. (4 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt.$$

a) Finn en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$.

b) Bestäm $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_1} t^2$.

c) För vilka värde på a och b blir värdet av

$$\int_0^1 (t^2 + at + b)^2\, dt,$$

minimalt? (4 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till

$$y'' + 4y' + 4y = 13\sin(3x).$$

(4 p)

6. Bestäm samtliga lösningar till

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x,\ x > 0,$$

genom att söka lösningar på formen $y(x) = v(x)e^x$. (4 p)

7.

a) Vad menas med att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ är en bas för ett vektorrum V? Ge en definition.

b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av samtliga polynom av gradtal maximalt två och låt $\mathcal{B} = \{1 + t, 1 + t^2\}$.

i. Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för det den spänner upp.

ii. Bestäm ett polynom $p(t)$ så att $\{1 + t, 1 + t^2, p(t)\}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$. Beskriv samtliga sådana polynom som fungerar. (4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG M0049M / M0031M

19/12-20

1. a) $z^2-(3+3i)z-2+3i=0 \iff$

$$\left(z-\frac{3+3i}{2}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{3+3i}{2}\right)^2}_{\frac{9+18i-9}{4}=\frac{9}{2}i}-2+3i=0$$

LÅT $\boxed{w=z-\frac{3+3i}{2}}$ OCH VI HAR:

$w^2=2+\frac{3}{2}i$ LÅT $\boxed{w=a+bi}$ OCH VI FÅR:

$a^2+2abi-b^2=2+\frac{3}{2}i \iff$

Re: $a^2-b^2=2$ (1) | UR (2): $\boxed{b=\frac{3}{4a}}$ IN I (1) OCH VI FÅR:

Im: $2ab=\frac{3}{2}$ (2)

$$a^2-\frac{9}{16a^2}=2 \iff a^4-2a^2-\frac{9}{16}=0 \iff$$

$$a^2=1(\pm)\sqrt{1+\frac{9}{16}}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4} \quad \therefore a=\pm\frac{3}{2}$$

$a=\frac{3}{2}$: $b=\frac{3}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$; $w=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; $z=\underline{\underline{3+2i}}$

$a=-\frac{3}{2}$: $b=-\frac{1}{2}$; $w=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$; $\underline{\underline{z=i}}$

b) ENLIGT LÖSNINGEN:

$$\frac{z}{w}=\frac{3+4i}{2+i}=\frac{(3+4i)(2-i)}{5}=2+i$$

$\therefore$ $\arg(3+4i)-\arg(2+i)=\arg(2+i)$

MEN, $3+4i$ & $2+i$ LIGGER I FÖRSTA KVADRANT

SÅ $\arctan\frac{4}{3}-\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{1}{2}+2\pi k$

MEN, DÅ VÄNSTERLEDET ÄR ETT TAL MELLAN NOLL OCH $\pi/2$ MÅSTE k VARA 0.

$\therefore$ $\arctan\frac{4}{3}=2\arctan\frac{1}{2}$ //

2. $A = \begin{array}{r} \\ -3 \\ -2 \\ -5 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ -1 \\ -2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) EN BAS FÖR KOLONNRUMMET ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{B}$ //

(FÖRST, TREDJE OCH FEMTE KOLUMN UR A TY PIVOTKOLUMNER)

Nul A : LÖS $A\bar{x} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1, x_3, x_5 BUNDNA
x_2, x_4 FRIA.
SÄTT $x_2 = s$, $x_4 = t$

OCH $x_5 = 0$, $x_3 = t$, $x_1 = -4s - 2t$

$\therefore \bar{x} = \begin{bmatrix} -4s-2t \\ s \\ t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ EN BAS FÖR Nul A ÄR $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ //

b) BESTÄM c_1, c_2, c_3 SÅ ATT

$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 13 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$c_3 = 0$; $c_2 = -2$; $c_1 = 1$

$\therefore [\bar{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ //

KOLL: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ OK

3. $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - 6yz =$

$$= [x\ y\ z]\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -3 & -1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

EGENVÄRDEN FÖR A:

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & -3\\ 0 & -3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3\\ -3 & -1-\lambda\end{vmatrix}}_{\substack{=(-1-\lambda)^2-9=\\ 1+2\lambda+\lambda^2-9=\lambda^2+2\lambda-8}} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8)=0$$

KVAR ATT LÖSA: $\lambda^2+2\lambda-8=0 \Leftrightarrow \lambda = -1\pm\sqrt{1+8}$
$= -1\pm 3 = -4\,;\,2$

EGENVÄRDENA ÄR 2 MULT. 2 OCH -4

[KOLL: $2+2+(-4)=0$; $\operatorname{tr}A = 2-1-1=0$ OK]

STÖRSTA VÄRDE: 2

MINSTA VÄRDE: -4 DÅ $x^2+y^2+z^2=1$

VAR? BESTÄM MOTSVARANDE EGENVEKTORER

$\lambda=2$: $A\bar{v}=2\bar{v} \Leftrightarrow (A-2I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

x_2 BUNDEN
x_1, x_3 FRIA
$x_1=s, x_3=t$

$$\therefore\ \bar{v} = \begin{bmatrix}s\\ -t\\ t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

VEKTORER PÅ DENNA FORM NORMERADE TILL NORM 1 GER PUNKTER DÄR MAXIMAT ANTAS. EX. $(1,0,0), \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ETC.

$\lambda=-4$: $A\bar{v}=-4\bar{v} \Leftrightarrow (A+4I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \bar{v} = t\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ PUNKTERNA DÄR MINIMAT ANTAS ÄR

$$\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

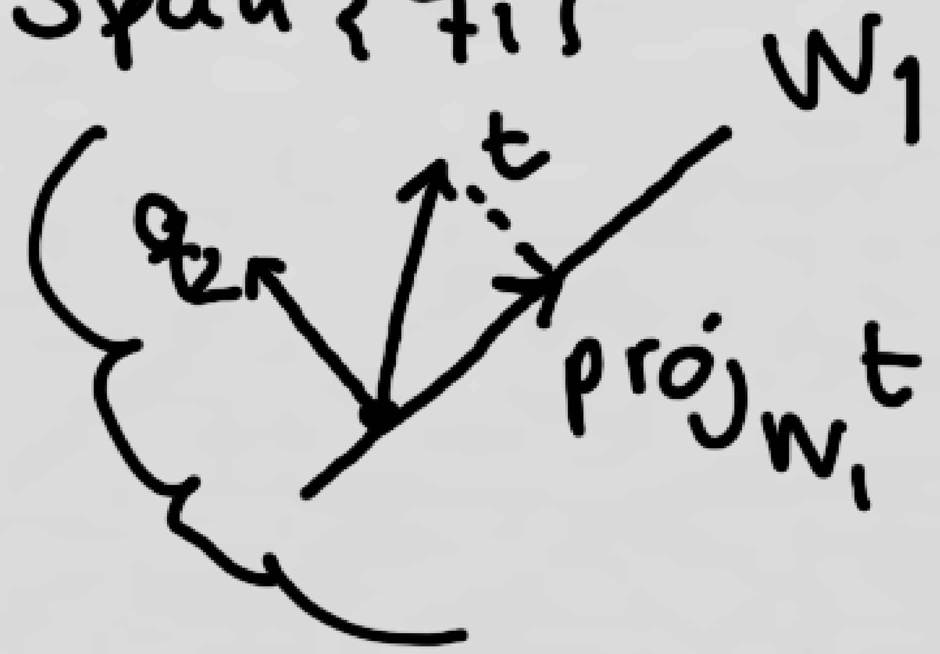
4. $\mathbb{P}_2$, $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$

a) EN BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1,t\}$

G-S:

1) $q_1(t)=1$; $W_1=\text{Span}\{q_1\}$

2) $q_2(t) = t - \text{proj}_{W_1} t$



$= t - \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\,1$

$\ulcorner \langle t,1\rangle = \int_0^1 t\cdot 1\,dt = 1/2$; $\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\,dt = 1 \lrcorner$

$= t - \frac{1}{2}$ VÄLJ $q_2'(t) = 2t-1$

$\therefore \{1, 2t-1\}$

b) $\text{proj}_{\mathbb{P}_1} t^2 = \frac{\langle t^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\,1 + \frac{\langle t^2,2t-1\rangle}{\langle 2t-1,2t-1\rangle}(2t-1) =$

$\ulcorner \langle t^2,1\rangle = \int_0^1 t^2\,dt = 1/3$; $\langle t^2,2t-1\rangle = \int_0^1 2t^3 - t^2\,dt =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $\langle 2t-1,2t-1\rangle = \int_0^1 4t^2-4t+1\,dt =$

$= \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$ $\lrcorner$

$= \frac{1/3}{1}\cdot 1 + \frac{1/6}{1/3}(2t-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(2t-1) =$

$= \frac{1}{3} + t - \frac{1}{2} = t - \frac{1}{6}$

c) $\int_0^1 (t^2+at+b)^2\,dt = \|t^2+at+b\|^2$

$= \|t^2 - (-at-b)\|^2$

MINIMUM FÅS DÅ $-a = 1$; $-b = -\frac{1}{6}$

$\therefore a = -1$; $b = \frac{1}{6}$

TY PROJEKTIONEN ÄR DET POLYNOM SOM MINIMERAR FELET.

5. $y'' + 4y' + 4y = 13\sin 3x$

EN LINJÄR EKVATION SÅ "HOM. + PART."

HOM.: KAR. EKV.: $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$r = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2$ MULT. 2

$\therefore y_h = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$

PART.: ANSATS: $y_p = a\cos 3x + b\sin 3x$

VILKET GER: $y_p' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x$

OCH: $y_p'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$

IN I EKV.:

$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x + 4(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x)$

$+4a\cos 3x + 4b\sin 3x = 13\sin 3x$

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} \cos 3x&: -9a + 12b + 4a = 0 \\ \sin 3x&: -9b - 12a + 4b = 13 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5a + 12b = 0 \\ -12a - 5b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -60a + 144b = 0 & (1) \\ -60a - 25b = 65 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1): -169b = 65 \Leftrightarrow b = -\frac{5 \cdot 13}{13^2} = -\frac{5}{13}$

IN I (1): $-5a - \frac{12 \cdot 5}{13} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{12}{13}$

$\therefore y_p = -\frac{12}{13}\cos 3x - \frac{5}{13}\sin 3x$

SAMTLIGA LÖSNINGAR GES AV:

$y = y_h + y_p =$

$= Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} - \frac{12}{13}\cos 3x - \frac{5}{13}\sin 3x$

6. $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x, \quad x > 0.$

LÅT $y = v(x)e^x$ OCH MAN FÅR:

$$y' = v'e^x + ve^x$$
$$y'' = v''e^x + v'e^x + v'e^x + ve^x$$
$$= v''e^x + 2v'e^x + ve^x$$

IN I EKV.:

$$v''e^x + \cancel{2v'e^x} + \cancel{ve^x} - 2(\cancel{v'e^x} + \cancel{ve^x}) + \cancel{ve^x} = \frac{1}{x}e^x \iff$$

$$v''e^x = \frac{1}{x}e^x \iff v'' = \frac{1}{x} \iff$$

$$v' = \ln|x| + A = \ln x + A \quad (x>0)$$

$\iff$

$$v = x\ln x - x + Ax + B \iff$$

$$v = x\ln x + Cx + B \quad (C = A-1)$$

SAMTLIGA LÖSNINGAR GES AV

$$y = v \cdot e^x = (x\ln x + Cx + B)e^x \iff$$

$$y = Be^x + Cxe^x + e^x x \ln x$$

7.

a) $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ SKA VARA

- LINJÄRT OBEROENDE
  DVS: $c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + \dots + c_n\bar{u}_n = 0 \Rightarrow c_i = 0$ ALLA i

- SPÄNNA UPP V
  DVS: FÖR VARJE $\bar{v} \in V$ FINNS c_i SÅ ATT
  $$c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + \dots + c_n\bar{u}_n = \bar{v}$$

b) $H = \text{Span}\,\mathcal{B} = \text{Span}\{1+t, 1+t^2\}$

EFTERSOM VI VET ATT DE SPÄNNER UPP ÅTERSTÅR ENDAST ATT VISA LINJÄRT OBEROENDE.

ANTAG $c_1(1+t) + c_2(1+t^2) = \bar{0}$

OCH VISA $c_1 = c_2 = 0$

MEN $\bar{0}$ BETYDER 0 ALLA t

IDENT.:

$$\left.\begin{aligned} t^0&: c_1 + c_2 = 0 \\ t^1&: c_1 = 0 \\ t^2&: c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \therefore c_1 = c_2 = 0 \therefore \text{L.O.}$$

c) OM VI LÄGGER TILL ETT ELEMENT SOM LIGGER I $\mathbb{P}_2$ MEN INTE H FÅR VI ENLIGT TEOREM EN BAS (OBS: $\dim \mathbb{P}_2 = 3$)

$$c_1(1+t) + c_2(1+t^2) = a + bt + ct^2$$

IDENT.:

$$\begin{aligned} t^0&: c_1 + c_2 = a \\ t^1&: c_1 = b \\ t^2&: c_2 = c \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & c+b-a \end{array}\right]$$

LÖSNING SAKNAS DÅ $c+b-a \neq 0$

ETT SÅDANT POLYNOM SOM FUNKAR ÄR $p(t) = t^2$

$c = 1, a = b = 0$

SAMTLIGA LÖS AV $p(t) = a + bt + ct^2$ DÄR $c+b-a \neq 0$