Integralrechnung - Zusammenfassung

Petra Grell, WS 2004/05

Integration und Stammfunktion

Gegeben ist eine Funktion $f: \; y = f(x)$ auf einem gewissen Definitionsintervall D. Durch eine geeignete Operation kann ich eine Funktion $F: \; y = F(x)$ finden, sodass $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in D$
Diese Operation ist die Umkehrung der Differentiation und wird **Integration** genannt, der Vorgang heißt **integrieren**.
Die Funktion F, die eben $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in D$ erfüllt, heißt **Stammfunktion** der Funktion f.
Integration ist also das Aufsuchen der Stammfunktion.

Stammfunktionen

Mit jeder Stammfunktion $F(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist auch jede Funktion $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

Umgekehrt:
Außer $F(x) + c$ gibt es keine weiteren Stammfunktionen von $f(x)$, das heißt 2 verschiedene Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Unbestimmtes Integral

Gegeben sei eine Funktion $f \; : y = f(x)$. Wenn $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ besitzt, bezeichnen wir die Menge aller Stammfunktionen $y = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R}$ als das **Unbestimmte Integral** der Funktion f.

Wir schreiben $\displaystyle\int f \; dx$ bzw. $\displaystyle\int f(x) \; dx$

sprich: „Integral von f dx“ bzw. „Integral von f von x dx“
$f(x)$ ... **Integrand**
c ... **Integrationskonstante**
Man sagt auch, dass die Funktion f **nach x integriert** wird.

Summeregel und Konstantenregel

$$\int (f(x) \pm g(x)) \; dx = \int f(x) \; dx \pm \int g(x) \; dx$$

$$\int k \cdot f(x) \; dx = k \cdot \int f(x) \; dx \; , \quad k \neq 0$$

Integrationsregeln

1. $\int dx = \int 1 \; dx = x + c \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = x + c$
2. $\int 0 \; dx = c$
3. $\int n \cdot x^{n-1} \; dx = x^n + c \; , \quad n \in \mathbb{N}^*$
4. $\int x^\alpha \; dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; , \quad \alpha \in \mathbb{R}, \;\; \alpha \neq -1$
5. $\int x^{-1} \; dx = \int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| + c$
6. $\int \sin x \; dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x \; dx = \sin x + c$
8. $\int e^x \; dx = e^x + c$
9. $\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
10. $\int \ln x \; dx = x \cdot \ln x - x + c$
11. $\int \log_a x \; dx = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln x - x) + c$

Substitutionsregel

Zuerst ersetzt man gewisse Teile des Integranden durch eine neue Variable, wendet dann die bekannten Regeln an und ersetzt dann wieder die Variable durch den ursprünglichen Term.

Dabei verwendet man, dass $z' = \dfrac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dz}{z'}$

Beispiel: $\displaystyle\int (3x+5)^{17} \; dx =$

$$= \int z^{17} \; \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \int z^{17} \; dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{18}}{18} + c = \frac{1}{54} \cdot (3x+5)^{18} + c$$

Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g(x) \; dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \; dx$$

Beispiel: $\displaystyle\int (x^n \cdot \ln x) \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \; dx =$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

Partialbruchzerlegung

Wir zerlegen den gegeben Bruch in „Teilbrüche“ (Partialbrüche). Die Zähler der Brüche sind dabei gewisse (zunächst unbekannte) Konstante, die Nenner sind die zu den Nullstellen des Nenners gehörigen Linearfaktoren. Diese unbekannten Konstanten rechnet man sich durch Koeffizientenvergleich aus. Nun muss man den entstandenen Term in einzelne Integrale trennen und diese berechnen. Die Summe dieser Integrale ist das Integral unseres Bruches.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$

Nullstellen des Nenners: $x_1 = 2,\ x_2 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Ansatz: $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$

$\Rightarrow x + 3 = x(A+B) + (-3A - 2B)$

Koeffizientenvergleich: $1 = A + B,\ 3 = -3A - 2B \Rightarrow A = -5,\ B = 6$

Integration: $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\ dx = -\int \frac{5}{x-2}\ dx + \int \frac{6}{x-3}\ dx$

$\displaystyle\Rightarrow \int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\ dx = -5 \cdot \ln|x-2| + 6 \cdot \ln|x-3| + c$

Bestimmtes Integral

Der Wert $F(b) - F(a)$ wird als das **Bestimmte Integral** der Funktion f mit Obergrenze b und Untergrenze a (kurz: „von a bis b“) bezeichnet.

Man schreibt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Flächeninhalt unter eine Kurve

Will man den Flächeninhalt als nicht-negative Maßzahl für die „Größe“ eines Flächenstückes berechnen, so muss man durch Ermittlung der Nullstellen feststellen, wo der Graph von f oberhalb und, wo er unterhalb der x-Achse verläuft. Denn unterhalb der x-Achse ist das Bestimmte Integral negativ (orientierte Fläche). Dann berechnet man die jeweiligen Bestimmten Integrale und addiert ihre Beträge (!!).