

# Variables uniformes discretas

Equipo A

Universidad Autónoma de Yucatan

4 de noviembre del 2020



# Competencia de la unidad

Calcula probabilidades relacionadas con las distribuciones más comunes como la Exponencial, Normal, la t de Student, Chi-Cuadrada, F de Fisher, Binomial y Poisson, de manera adecuada.

# Actividades que realizaremos

- 1 Resultado de aprendizajes
- 2 Experimento que origina a la variable uniforme discreta.
- 3 Deducir la función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta.
- 4 Calcular la esperanza matemática de la variable uniforme discreta.
- 5 Calcular la varianza de la variable variable uniforme discreta.
- 6 Ejercicios resuelto con la función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta.

# Tema: Variables uniformes discretas

## **Resultados de aprendizaje:**

Resuelve problemas que involucran el cálculo de probabilidades, utilizando la variable aleatoria discreta adecuada

## Experimento que origina a la variable uniforme discreta II

Decimos que una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de  $n$  números  $\{x_1, \dots, x_n\}$  si la probabilidad de que  $X$  tome cualquiera de estos valores es constante  $\frac{1}{n}$ , entonces:

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \dots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Esta distribución surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos  $n$  resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Los juegos de lotería son un ejemplo donde puede aplicarse esta distribución de probabilidad.

# Experimento que origina a la variable uniforme discreta III

Se escribe:

$$X \sim \text{unif}(x_1, \dots, x_n)$$

En donde el simbolo "  $\sim$  " se lee "se distribuye como" o "tiene una distribución".

# Función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta

La función masa de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = x_1, \dots, x_n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

# Función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta II

**Ejemplo** La gráfica de la función de probabilidad de la distribución uniforme en el conjunto  $(1,2,3,4,5)$  aparece en la figura siguiente, junto con la correspondiente función de distribución. Cada salto en la función de distribución es de tamaño  $\frac{1}{5}$ .

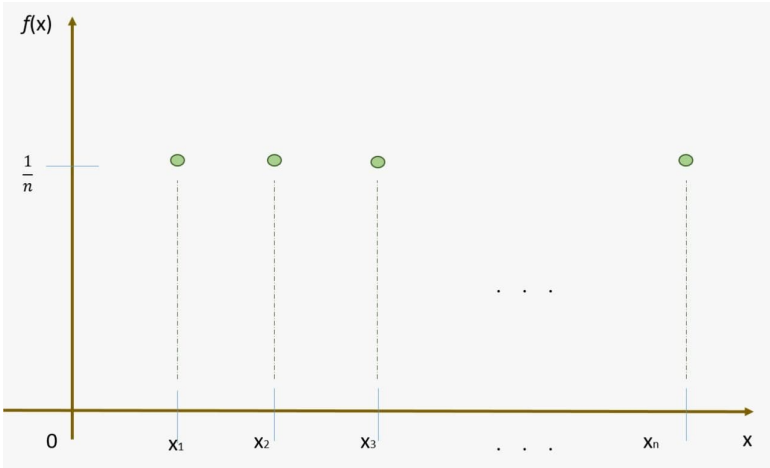


## Función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta III

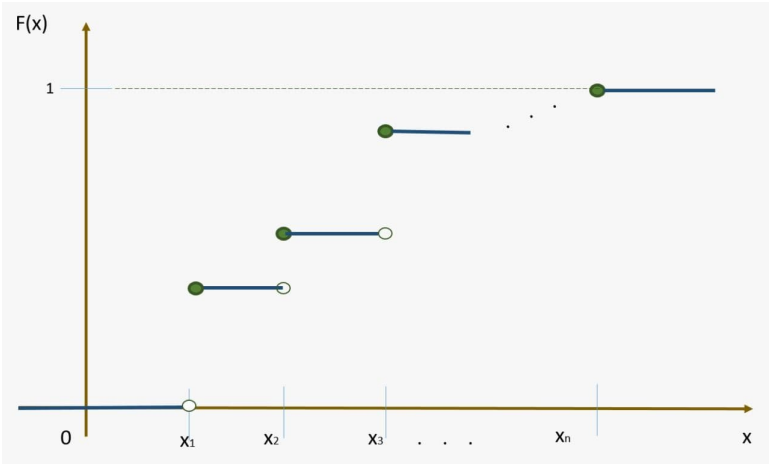
La expresión completa de  $F_X(x)$  es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.20 & 1 \leq x < 2 \\ 0.40 & 2 \leq x < 3 \\ 0.60 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

## Gráfica de la función masa de probabilidad



## Gráfica de la función de distribución



# Calcular la esperanza matemática

La esperanza de esta distribución puede ser obtenida como una media aritmética de los valores que toma la variable  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y es denotada por  $E(X)$ .

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu$$

# Propiedades de la esperanza matemática

De la misma manera si  $X$  es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . La esperanza cuenta con las siguientes propiedades:

## Propiedades

$$\text{a) } E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{b) } E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Demostración de la propiedad a)

Sabemos que:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de  $\{1, \dots, n\}$  puede ser vista como  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Así que:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

## Demostración de la propiedad b)

Sabemos que:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de los cuadrados de  $\{1, \dots, n\}$  puede ser vista como  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

Así que:

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sigma^2$$

Además

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\mu)^2$$

Recordemos que:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - E^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\mu)^2$$



# Propiedades de la varianza

De igual forma si  $X$  es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . La varianza se puede resumir a:

$$\text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

## Demostración

Por información previa sabemos que:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$\begin{aligned} &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{8n^2 + 12n + 1 - 6n^2 - 12n - 6}{24} \\ &= \frac{2n^2 - 2}{24} \\ &= \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

# Ejercicios

## Ejercicio 1

Supongamos que se lanza una vez un dado. Si el dado está equilibrado:

- a) Defina la función masa de probabilidad.
- b) Calcule la esperanza.
- c) Calcule la varianza.

## Solución de a)

Observemos que  $X$  es discreta puesto que  $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  
Luego las posibilidades son:

$$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(3) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(4) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(5) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(6) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

## Solución de a) II

En conclusion:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

## Solución de b)

Como la variable aleatoria  $X$  tiene distribución uniforme discreta en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , por propiedades de la esperanza sabemos que esto es igual a:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

En este caso nuestra  $n = 6$ , así que:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{6+1}{2} \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

## Solución de c)

Como la variable aleatoria  $X$  tiene distribución uniforme discreta en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , por la propiedad de la varianza sabemos que esto es igual a:

$$\text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

En nuestro caso  $n = 6$ , así que:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{36 - 1}{12} \\ &= \frac{35}{12}\end{aligned}$$

## Ejercicio 2

En un juego de Monopoly con sólo un dado, Emilio está en una zona de alto peligro y no tiene dinero; las primeras 3 casillas están llenas de hoteles, la cuarta es la salida y la quinta y la sexta también están llenas de hoteles.

Calcula lo siguiente:

- a) La probabilidad de que quiebre.
- b) Si ahora la casilla 1 y 5 quitaron sus hoteles y están hipotecadas, calcula la nueva probabilidad de que Emilio quiebre.
- c) Asigna el número promedio de la casilla en la que caería Emilio si hiciera muchas veces ese mismo tiro en la misma situación dada.
- d) Asigna un número que cuantifique el grado de dispersión de los los valores que pueden tomar las casillas alrededor del número obtenido en el inciso c.



## Solución a)

La probabilidad de que quiebre es equivalente a:  $1 - P(X = 4)$  ya que están pidiendo la probabilidad de que quiebre, es decir, el complemento de la probabilidad de que no quiebre, es decir que caiga en la casilla 4. Luego:

$$1 - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

## Solución b)

La probabilidad de que quiebre es equivalente a:

$$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 6)$$

Ya que es la suma de todas las probabilidades de que caiga en una casilla donde quiebra, Nótese que en este ejemplo, es necesario evaluar los saltos individualmente y no se puede hacer de otro modo. Luego la probabilidad está dada por:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## Solución c)

SSimplemente están pidiendo la esperanza de la variable aleatoria, análogo al ejemplo 1.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{7}{2} \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

Luego su valor es 3.5

## Solución d)

En este inciso, están pidiendo la varianza de la variable aleatoria, la cual está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{n^2 - 1}{12} \\ &= \frac{36 - 1}{2} \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$