

Variables Uniformes Discretas

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan, Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *4 de noviembre del 2020*

Experimento que origina a la variable uniforme discreta

Es la distribución de probabilidad se asocia a variables cuyos posibles valores tienen todos la misma probabilidad. Si una variable aleatoria X cuyos posibles valores son (x_1, \dots, x_n) tiene distribución uniforme discreta entonces

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \dots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de n números $\{x_1, \dots, x_n\}$ si la probabilidad de que X tome cualquiera de estos valores es constante $\frac{1}{n}$. Esta distribución surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos n resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Los juegos de lotería son un ejemplo donde puede aplicarse esta distribución de probabilidad. Se denota cómo $X \sim \text{unif}\{x_1, \dots, x_n\}$, en donde el símbolo \sim se lee "se distribuye como." "tiene una distribución".

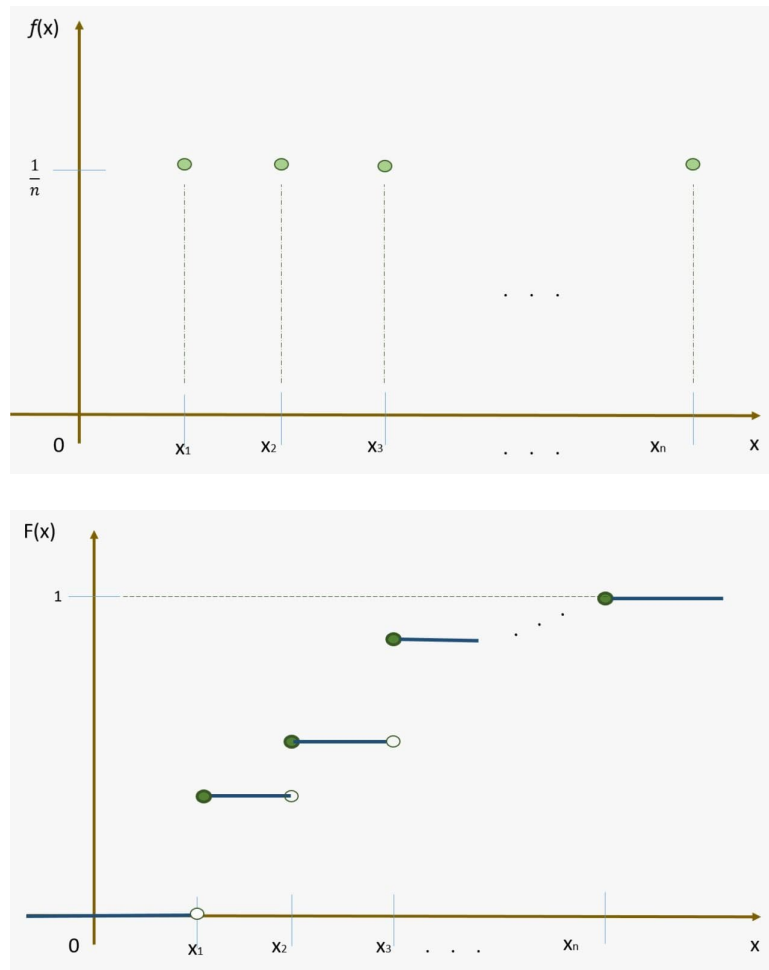
Función masa de probabilidad de la variable

La función de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = x_1, \dots, x_n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La gráfica de la función de probabilidad de la distribución uniforme en el conjunto $(1, 2, 3, 4, 5)$ aparece en la figura siguiente, junto con la correspondiente función de distribución. Cada salto en la función de distribución es de tamaño $\frac{1}{5}$. La expresión completa de $F_X(x)$ es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.20 & 1 \leq x < 2 \\ 0.40 & 2 \leq x < 3 \\ 0.60 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$



Calcular la esperanza matemática

La esperanza de esta distribución puede ser obtenida como una media aritmética de los valores que toma la variable $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu$$

De la misma manera si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, \dots, n\}$. La esperanza cuenta con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{a) } E(X) &= \frac{n+1}{2} \\ \text{b) } E(X^2) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Demostración de la propiedad a). Sabemos que:

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de $\{1, \dots, n\}$ puede ser vista como $\frac{n(n+1)}{2}$.

Así que:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Demostración de la propiedad b). Sabemos que:

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de los cuadrados de $\{1, \dots, n\}$ puede ser vista como $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Así que:

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\mu)^2 = \sigma^2$$

De igual forma si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, \dots, n\}$. La varianza se puede resumir a:

$$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Demostración. Sabemos que:

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\mu)^2$$

Recordando un poco de la ley distributiva de la sumatoria, esto se podría ver cómo:

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu)^2$$

Y estose puede ver de la siguiente manera:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Por demostraciones anteriores que realizamos en subtemas atrás, sabemos que:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{8n^2 + 12n + 1 - 6n^2 - 12n - 6}{24} \\ &= \frac{2n^2 - 2}{24} \\ &= \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1) Supongamos que se lanza una vez un dado. Si el dado está equilibrado:

- a) Defina la función masa de probabilidad.
- b) Calcule la esperanza.

Solución a). Observemos que X es discreta pues $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego las posibilidades son:

$$\begin{aligned}f_X(1) &= P(x = 1) = \frac{1}{6} \\f_X(2) &= P(x = 2) = \frac{1}{6} \\f_X(3) &= P(x = 3) = \frac{1}{6} \\f_X(4) &= P(x = 4) = \frac{1}{6} \\f_X(5) &= P(x = 5) = \frac{1}{6} \\f_X(6) &= P(x = 6) = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

En conclusion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1 \\ \frac{1}{6} & x = 2 \\ \frac{1}{6} & x = 3 \\ \frac{1}{6} & x = 4 \\ \frac{1}{6} & x = 5 \\ \frac{1}{6} & x = 6 \end{cases}$$

Solución b). Como la variable aleatoria X tiene distribución uniforme discreta, por definición tenemos que:

$$\begin{aligned}E(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\end{aligned}$$

$$= 3.5$$

- 2) En la fabricación de un cierto producto se produce con fallas, suponiendo que el numero de fallas sigue la siguiente distribucion uniforme:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Determine la probabilidad de que en cierto producto se encuentren:

- a) 2 fallas.
- b) 3 fallas.
- c) Mas de 3 fallas.

Solución a). Esto lo podemos ver como:

$$P(x = 2) = f(2) = \frac{1}{5}$$

Solución b). Esto lo podemos ver como:

$$P(x = 3) = f(3) = \frac{1}{5}$$

Solución c). Esto lo podemos ver como:

$$\begin{aligned} P(x > 3) &= f(4) + f(5) + f(6) + \dots + f(n) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 0 + \dots + 0 \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$