Variables uniformes discretas

Equipo A

Universidad Autónoma de Yucatan

4 de noviembre del 2020

Competencia de la unidad

Calcula probabilidades relacionadas con las distribuciones más comunes como la Exponencial, Normal, la t de Student, Chi-Cuadrada, F de Fisher, Binomial y Poisson, de manera adecuada.

Actividades que realizaremos

1. Resultado de aprendizajes
2. Experimento que origina a la variable uniforme discreta.
3. Deducir la función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta.
4. Calcular la esperanza matemática de la variable uniforme discreta.
5. Calcular la varianza de la variable variable uniforme discreta.
6. Ejercicios resuelto con la función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta.

Tema: Variables uniformes discretas

Resultados de aprendizaje:

Resuelve problemas que involucran el cálculo de probabilidades, utilizando la variable aleatoria discreta adecuada

Experimento que origina a la variable uniforme discreta II

Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de n números $\{x_1, ..., x_n\}$ si la probabilidad de que X tome cualquiera de estos valores es constante $\frac{1}{n}$, entonces:

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = ... = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Esta distribucion surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos n resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir.
Los juegos de lotería son un ejemplo donde puede aplicarse esta distribucion de probabilidad.

Experimento que origina a la variable uniforme discreta III

Se escribe:

$$X \sim unif(x_1, ..., x_n)$$

En donde el simbolo " $\sim$ " se lee "se distribuye como" o "tiene una distribución".

Función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta

La función masa de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & si\ x = x_1, ..., x_n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta II

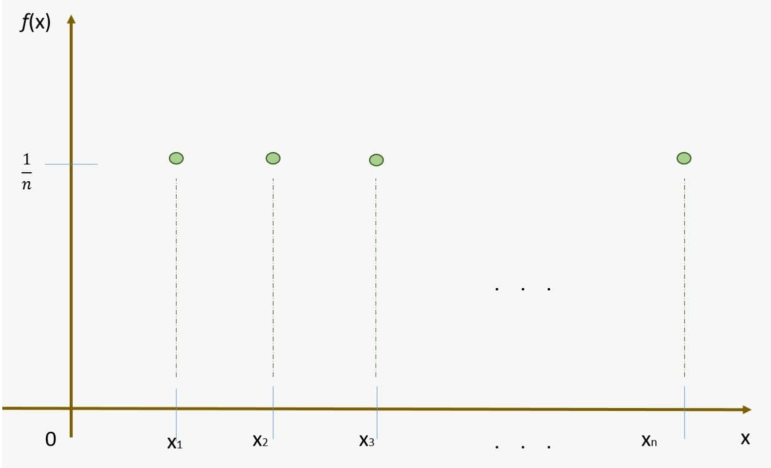
Ejemplo La gráfica de la función de probabilidad de la distribución uniforme en el conjunto (1,2,3,4,5) aparece en la figura siguiente, junto con la correspondiente función de distribución. Cada salto en la función de distribución es de tamaño $\frac{1}{5}$.

Función masa de probabilidad de la variable uniforme discreta III

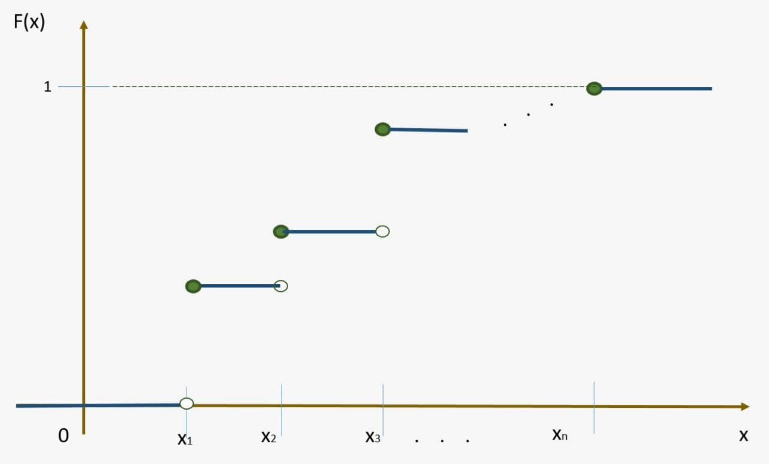
La expresión completa de $F_X(x)$ es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.20 & 1 \leq x < 2 \\ 0.40 & 2 \leq x < 3 \\ 0.60 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Gráfica de la función masa de probabilidad



Gráfica de la función de distribución



Calcular la esperanza matemática

La esperanza de esta distribución puede ser obtenida como una media aritmética de los valores que toma la variable $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y es denotada por E(X).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu$$

.

Propiedades de la esperanza matemática

De la misma manera si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, ..., n\}$. La esperanza cuenta con las siguientes propiedades:

Propiedades

a) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

b) $E(X^2) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración de la propiedad a)

Sabemos que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de $\{1, ..., n\}$ puede ser vista como $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Así que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Demostración de la propiedad b)

Sabemos que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de los cuadrados de $\{1, ..., n\}$ puede ser vista como $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Así que:

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sigma^2$$

Además

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - (\mu)^2$$

Recordemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - E^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - (\mu)^2$$

Propiedades de la varianza

De igual forma si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, ..., n\}$. La varianza se puede resumir a:

$$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Demostración

Por información previa sabemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{8n^2 + 12n + 1 - 6n^2 - 12n - 6}{24}$$

$$= \frac{2n^2 - 2}{24}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{12}$$

Ejercicios

Ejercicio 1

Supongamos que se lanza una vez un dado. Si el dado está equilibrado:
a) Defina la funcion masa de probabilidad.
b) Calcule la esperanza.
c) Calcula la varianza.

Solución de a)

Observemos que X es discreta puesto que $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Luego las posibilidades son:

$$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(3) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(4) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(5) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$$

$$f_X(6) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Solución de a) II

En conclusion:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & si \ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Solución de b)

Como la variable aleatoria X tiene distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por propiedades de la esperanza sabemos que esto es igual a:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

En este caso nuestra $n = 6$, así que:

$$E(X) = \frac{6+1}{2}$$

$$= 3.5$$

Solución de c)

Como la variable aleatoria X tiene distribucion uniforme discreta en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por la propiedad de la varianza sabemos que esto es igual a:

$$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

En nuestro caso $n = 6$, así que:

$$Var(X) = \frac{36 - 1}{12}$$

$$= \frac{35}{12}$$

Ejercicio 2

En un juego de Monopoly con sólo un dado, Emilio está en una zona de alto peligro y no tiene dinero; las primeras 3 casillas están llenas de hoteles, la cuarta es la salida y la quinta y la sexta también están llenas de hoteles.

Calcula lo siguiente:

a) La probabilidad de que quiebre.
b) Si ahora la casilla 1 y 5 quitaron sus hoteles y están hipotecadas, calcula la nueva probabilidad de que Emilio quiebre.
c) Asigna el número promedio de la casilla en la que caería Emilio si hiciera muchas veces ese mismo tiro en la misma situación dada.
d) Asigna un número que cuantifique el grado de dispersión de los los valores que pueden tomar las casillas alrededor del número obtenido en el inciso c.

Solución a)

La probabilidad de que quiebre es equivalente a: $1 - P(X = 4)$ ya que están pidiendo la probabilidad de que quiebre, es decir, el complemento de la proobabilidad de que no quiebre, es decir que caiga en la casilla 4. Luego:

$$1 - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Solución b)

La probabilidad de que quiebre es equivalente a:

$$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 6)$$

Ya que es la suma de todas las probabilidades de que caiga en una casilla donde quiebra, Nótese que en este ejemplo, es necesario evaluar los saltos individualmente y no se puede hacer de otro modo. Luego la probabilidad está dada por:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Solución c)

SSimplemente están pidiendo la esperanza de la variable aleatoria, análogo al ejemplo 1.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{7}{2} \\
&= 3.5
\end{aligned}
$$

Luego su valor es 3.5

Solución d)

En este inciso, están pidiendo la varianza de la variable aleatoria, la cual está dada por:

$$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$= \frac{36 - 1}{2}$$

$$= \frac{35}{12}$$