Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Variables Uniformes Discretas

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *4 de noviembre del 2020*

Experimento que origina a la variable uniforme discreta

Es la distribución de probabilidad se asocia a variables cuyos posibles valores tienen todos la misma probabilidad. Si una variable aleatoria X cuyos posibles valores son $(x_1, ..., x_n)$ tiene distribución uniforme discreta entonces

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = ... = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de n números $\{x_1, ..., x_n\}$ si la probabilidad de que X tome cualquiera de estos valores es constante $\frac{1}{n}$. Esta distribución surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos n resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Los juegos de lotería son un ejemplo donde puede aplicarse esta distribuci´on de probabilidad. Se denota cómo $X \sim \text{unif}\{x_1, ..., x_n\}$, en donde el símbolo $\sim$ se lee "se distribuye como.º "tiene una distribución".

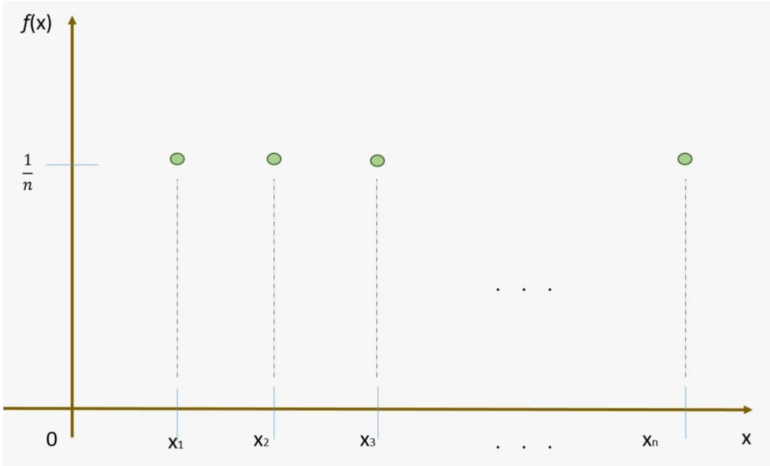
Función masa de probabilidad de la variable

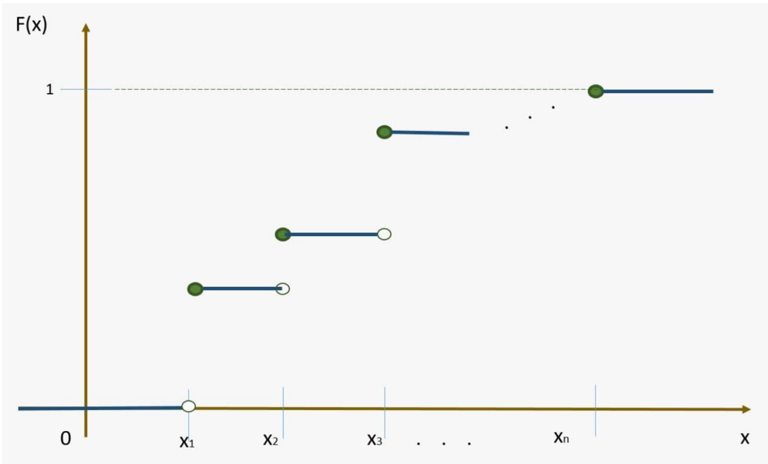
La función de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ x = x_1, ..., x_n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La gráfica de la función de probabilidad de la distribución uniforme en el conjunto (1,2,3,4,5) aparece en la figura siguiente, junto con la correspondiente función de distribución. Cada salto en la función de distribución es de tamaño $\frac{1}{5}$. La expresión completa de $F_X(x)$ es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.20 & 1 \leq x < 2 \\ 0.40 & 2 \leq x < 3 \\ 0.60 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$





Calcular la esperanza matemática

La esperanza de esta distribución puede ser obtenida como una media aritmética de los valores que toma la variable $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu$$

De la misma manera si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, ..., n\}$. La esperanza cuenta con las siguientes propiedades:

A) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

B) $E(X^2) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración de la propiedad a). Sabemos que:

$$E(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de $\{1, ..., n\}$ puede ser vista como $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Así que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Demostración de la propiedad b). Sabemos que:

$$E(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de los cuadrados de $\{1, ..., n\}$ puede ser vista como $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Así que:

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - (\mu)^2 = \sigma^2$$

De igual forma si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, ..., n\}$. La varianza se puede resumir a:

$$Var(X) = \frac{n^2+1}{12}$$

Demostración. Sabemos que:

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - (\mu)^2$$

Recordando un poco de la ley distributiva de la sumatoria, esto se podría ver cómo:

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu)^2$$

Y estose puede ver de la siguiente manera:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Por demostraciones anteriores que realizamos en subtemas atrás, sabemos que:

$$\begin{aligned} Var(X) = E(X^2) - E^2(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{8n^2+12n+1-6n^2-12n-6}{24} \\ &= \frac{2n^2-2}{24} \\ &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Supongamos que se lanza una vez un dado. Si el dado está equilibrado:

a) Defina la función masa de probabilidad.
b) Calcule la esperanza.

Solución a). Observemos que X es discreta pues $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego las posibilidades son:

$$f_X(1) = P(x = 1) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(2) = P(x = 2) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(3) = P(x = 3) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(4) = P(x = 4) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(5) = P(x = 5) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(6) = P(x = 6) = \frac{1}{6}$$

En conclusion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1 \\ \frac{1}{6} & x = 2 \\ \frac{1}{6} & x = 3 \\ \frac{1}{6} & x = 4 \\ \frac{1}{6} & x = 5 \\ \frac{1}{6} & x = 6 \end{cases}$$

Solución b). Como la variable aleatoria X tiene distribución uniforme discreta, por defición tenemos que:

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$

$$= 3.5$$