Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Variables Uniformes Discretas

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *4 de noviembre del 2020*

Experimento que origina a la variable uniforme discreta

Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de n números $\{x_1, ..., x_n\}$ si la probabilidad de que X tome cualquiera de estos valores es constante $\frac{1}{n}$, entonces:

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = ... = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Esta distribución surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos n resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Los juegos de lotería son un ejemplo donde puede aplicarse esta distribución de probabilidad. Se denota cómo $X \sim \text{unif}\{x_1, ..., x_n\}$, en donde el símbolo $\sim$ se lee "se distribuye como.º "tiene una distribución".

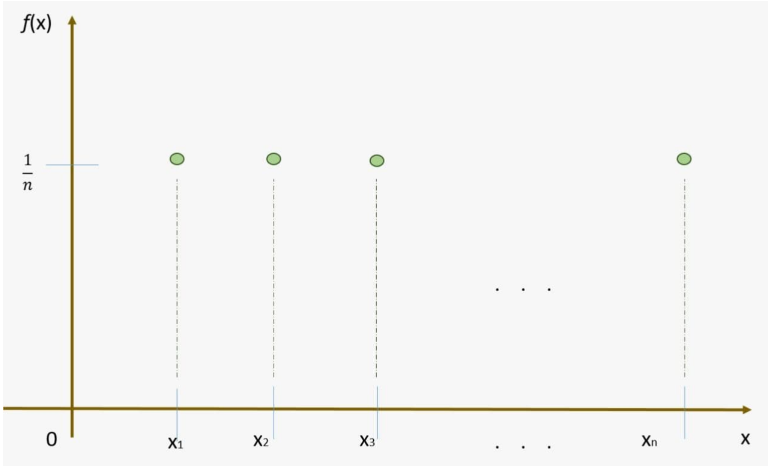
Función masa de probabilidad de la variable

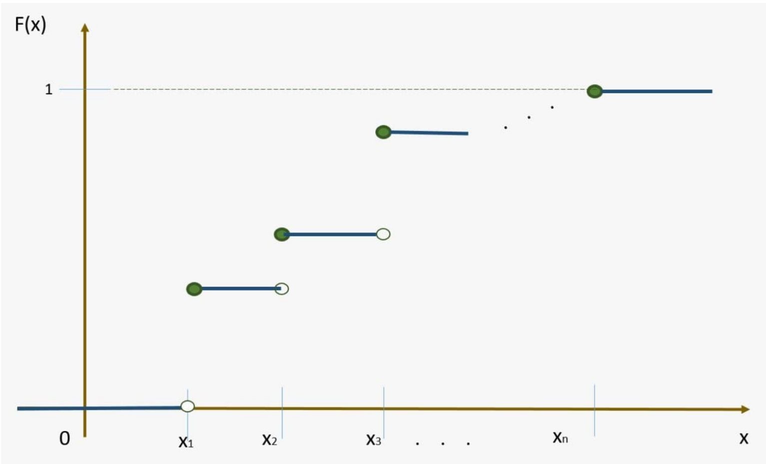
La función de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ x = x_1, ..., x_n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La gráfica de la función de probabilidad de la distribución uniforme en el conjunto (1,2,3,4,5) aparece en la figura siguiente, junto con la correspondiente función de distribución. Cada salto en la función de distribución es de tamaño $\frac{1}{5}$. La expresión completa de $F_X(x)$ es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.20 & 1 \leq x < 2 \\ 0.40 & 2 \leq x < 3 \\ 0.60 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$





Calcular la esperanza matemática

La esperanza de esta distribución puede ser obtenida como una media aritmética de los valores que toma la variable $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu$$

De la misma manera si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, ..., n\}$. La esperanza cuenta con las siguientes propiedades:

a) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

b) $E(X^2) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración de la propiedad a). Sabemos que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de $\{1, ..., n\}$ puede ser vista como $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Así que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Demostración de la propiedad b). Sabemos que:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conocemos por información previa que la sumatoria de los cuadrados de $\{1, ..., n\}$ puede ser vista como $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Así que:

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sigma^2$$

Además

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - (\mu)^2$$

Recordemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - E^2(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - (\mu)^2$$

De igual forma si X es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, ..., n\}$. La varianza se puede resumir a:

$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Demostración. Por información previa sabemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{8n^2 + 12n + 1 - 6n^2 - 12n - 6}{24}$$

$$= \frac{2n^2 - 2}{24}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

Ejercicios propuestos

1) Supongamos que se lanza una vez un dado. Si el dado está equilibrado:

a) Defina la función masa de probabilidad.
b) Calcule la esperanza.
c) Calcula la varianza.

Solución a). Observemos que X es discreta puesto que $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego las posibilidades son:

$$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(3) = P(x = 3) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(4) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(5) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$$
$$f_X(6) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

En conclusion:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & si\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Solución b). Como la variable aleatoria X tiene distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por propiedades de la esperanza sabemos que esto es igual a:

$$E(x) = \frac{n+1}{2}$$

En este caso nuestra $n = 6$, así que:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{6+1}{2} \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

Solución c). Como la variable aleatoria X tiene distribucion uniforme discreta en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por la propiedad de la varianza sabemos que esto es igual a:

$$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

En nuestro caso $n = 6$, así que:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{36 - 1}{12} \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

2) En un juego de Monopoly con sólo un dado, Emilio está en una zona de alto peligro y no tiene dinero; las primeras 3 casillas están llenas de hoteles, la cuarta es la salida y la quinta y la sexta también están llenas de hoteles. Calcula lo siguiente:

a) La probabilidad de que quiebre.
b) Si ahora la casilla 1 y 5 quitaron sus hoteles y están hipotecadas, calcula la nueva probabilidad de que Emilio quiebre.
c) Asigna el número promedio de la casilla en la que caería Emilio si hiciera muchas veces ese mismo tiro en la misma situación dada.
d) Asigna un número que cuantifique el grado de dispersión de los los valores que pueden tomar las casillas alrededor del número obtenido en el inciso c.

Solución a). La probabilidad de que quiebre es equivalente a:

$$1 - P(X = 4)$$

Ya que están pidiendo la probabilidad de que quiebre, es decir, el complemento de la proobabilidad de que no quiebre, es decir que caiga en la casilla 4. luego

$$1 - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Solución b). La probabilidad de que quiebre es equivalente a:

$$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 6)$$

Ya que es la suma de todas las probabilidades de que caiga en una casilla donde quiebra, Nótese que en este ejemplo, es necesario evaluar los saltos individualmente y no se puede hacer de otro modo. Luego la probabilidad está dada por:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Solución c). Simplemente están pidiendo la esperanza de la variable aleatoria, análogo al ejemplo 1.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{7}{2} \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

Luego su valor es 3.5

Solución d). En este inciso, están pidiendo la varianza de la variable aleatoria, la cual está dada por:

$$\begin{aligned} Var(x) &= \frac{n^2-1}{12} \\ &= \frac{36-1}{2} \\ & \frac{35}{12} \end{aligned}$$