Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Actividad de Aprendizaje 7

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *28 de octubre del 2020*

Ejercicio 1

Verifica que la siguiente función puede ser utilizada como función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Solución. Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de densidad de probabilidad si:

1. $f(x) \geq 0$
   Y esto es verdadero ya que vemos que la función toma un valor real, cuando $x > 0$, y no existe ninguna restricción, ya que la única forma en que hubiese restricción sería si $x = -1$, y ese caso no se encuentra definido.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx = 0 - \frac{1}{x+1}\Big|_0^\infty = 0-0+1 = 1$$

$\therefore$ La función puede ser utilizada como función de densidad.

Ejercicio 2

Considera la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcula:

a) $P(-1 \leq X < 0)$

Solución. Usaremos la identidad:
$P(X \in A) = \int\limits_A f(x)dx$ para cualquier $A \subset \mathbb{R}$
La probabilidad pedida es

$$P(-1 \leq X < 0) = \int\limits_{-1}^{0} f_X(x)dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{5}dx$$
$$= \frac{x}{5}\Big|_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{5}$$

b)$P(X < 2)$

Solución. Usaremos la identidad:
$P(X \in A) = \int\limits_A f(x)dx$ para cualquier $A \subset \mathbb{R}$
La probabilidad pedida es

$$P(X < 2) = \int\limits_{-\infty}^{2} f_X(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} f_X(x)dx + \int\limits_{-1}^{2} f_X(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{5}dx + \int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{5}dx$$

$$= 0 + \frac{x}{5}\Big|_{-1}^{2}$$
$$= \frac{3}{5}$$

c)$P(X \geq 1)$

Solución. Usaremos la identidad:
$P(X \in A) = \int\limits_A f(x)dx$ para cualquier $A \subset \mathbb{R}$
La probabilidad pedida es

$$P(X \geq 1) = \int\limits_{1}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$= \int_{1}^{4} f_X(x)dx + \int_{4}^{\infty} f_X(x)dx$$
$$= \int_{1}^{4} \frac{1}{5}dx + \int_{4}^{\infty} \frac{1}{5}dx$$
$$= \left.\frac{x}{5}\right|_{1}^{4} + 0$$
$$= \frac{3}{5}$$

4)La función de distribucción

Solución. Sabemos que
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Por lo que tenemos los siguientes casos:

1. Para $x < -1$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{x} 0dt$$
$$= 0$$

2. Para $-1 \leq x \leq 4$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{-1} f_X(t)dt + \int_{-1}^{x} f_X(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{5}dt$$
$$= 0 + \left.\frac{x}{5}\right|_{-1}^{x}$$
$$= \frac{x+1}{5}$$

3. Para $x > 4$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f_X(t)dt + \int_{-1}^{4} f_X(t)dt + \int_{4}^{x} f_X(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{4} \frac{1}{5}dt + \int_{4}^{x} 0dt$$

$$= 0 + \frac{x}{5}\Big|_{-1}^{4} + 0$$

$$= 1$$

Se concluye que la función de distribucción acumulada es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{x+1}{5} & 1 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

Ejercicio 3

Considera la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcula:

a) El valor de c para que sea una función de densidad.

Solución. Por la propiedad 2 de la definición de función de densidad sabemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} cx^2dx + \int_{2}^{\infty} 0dx$$

$$= 0 + \frac{cx^3}{3}\Big|_{1}^{2} + 0$$

$$= \frac{7c}{3}$$

de donde se concluye que $c = \frac{3}{7}$. Por lo tanto la función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{7} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

b) $P(X > \frac{3}{2})$

Solución. Usaremos la identidad:
$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$ para cualquier $A \subset \mathbb{R}$
La probabilidad pedida es

$$P(X > \frac{3}{2}) = \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{3x2}{7}dx + \int_{2}^{\infty} 0dx$$

$$= [\frac{x^3}{7}\Big|_{\frac{3}{2}}^{2} + 0$$

$$= \frac{37}{56}$$

c) $P(X < \frac{7}{5})$

Solución. Usaremos la identidad:
$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$ para cualquier $A \subset \mathbb{R}$
La probabilidad pedida es

$$P(X < \frac{7}{5}) = \int_{-\infty}^{\frac{7}{5}} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{\frac{7}{5}} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{\frac{7}{5}} \frac{3x^2}{7}dx$$

$$= 0 + \frac{x^3}{7}\Big|_{1}^{\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{218}{875}$$

4)La función de distribucción

Solución. Sabemos que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Por lo que tenemos los siguientes casos:

1. Para $x < 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0dt$$

$$= 0$$

2. Para $1 \leq x \leq 2$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{x} f_X(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} \frac{3t^2}{7}dt$$

$$= 0 + \frac{t^3}{7}\Big|_{1}^{x}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{7}$$

3. Para $x > 2$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{2} f_X(t)dt + \int_{2}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{2} \frac{3t^2}{7}dt + \int_{2}^{x} 0dt \\
&= 0 + \frac{t^3}{7}\Big|_1^2 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Se concluye que la función de distribucción acumulada es:

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{x^3-1}{5} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}
$$

Ejercicio 4

Considera la siguiente función de distribución

$$
F_X(x) = \begin{cases} 1 - ce^{-2} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}
$$

Calcula:

a)El valor de c.

Solución.

b) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$

Solución.

c) $P(X < 2)$

Solución.

d) La función de densidad

Solución.

Ejercicio 5

Considera la siguiente función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{10} & 1 < x < 11 \\ 1 & x \geq 11 \end{cases}$$

Calcula:

a) $P(X > 5)$

Solución. Por propiedades de la función de distribucción tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - F_X(5) \\ &= 1 - (\frac{4}{10}) \\ &= \frac{6}{10} \end{aligned}$$

b) $P(X \leq 8)$

Solución. Sabemos que:

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= F_X(8) \\ &= \frac{8-1}{10} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

c) La función de densidad

Solución. Como $f_X(x) = F'_X(x)$

1. Para $x \leq 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= \frac{d}{dx} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Para $1 < x < 11$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{x-1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

3. Para $x \geq 11$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= F'_X(x) \\
&= \frac{d}{dx}0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la función de densidad es:

$$
f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 1 < x < 11 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}
$$