Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

# Actividad de Aprendizaje 6

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *26 de octubre del 2020*

## Ejercicio 1

Se lanzan dos dados y sea X el valor absoluto de la diferencia entre los números que aparecen. Calcula:

a) La función masa de probabilidad de X.

**Solución.** Observemos primero que X es discreta pues $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Vemos que nuestra $\#\Omega = 6 \cdot 6 = 36$, luego las probabilidades son:

1.$f_X(0) = P(X = 0) = P(\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{4, 4\}, \{5, 5\}, \{6, 6\}) = \dfrac{6}{36}$

2.$f_X(1) = P(X = 1) = P(\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{3, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 5\}) = \dfrac{10}{36}$

3.$f_X(2) = P(X = 2) = P(\{1, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}, \{4, 6\}, \{6, 4\}) = \dfrac{8}{36}$

4.$f_X(3) = P(X = 3) = P(\{1, 4\}, \{4, 1\}, \{2, 5\}, \{5, 2\}, \{3, 6\}, \{6, 3\}) = \dfrac{6}{36}$

5.$f_X(4) = P(X = 4) = P(\{1, 5\}, \{5, 1\}, \{2, 6\}, \{6, 2\}) = \dfrac{4}{36}$

6.$f_X(5) = P(X = 5) = P(\{1, 6\}, \{6, 1\}) = \dfrac{2}{36}$

En conclusión

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{36} & x = 0. \\ \\ \dfrac{10}{36} & x = 1. \\ \\ \dfrac{8}{36} & x = 2. \\ \\ \dfrac{6}{36} & x = 3. \\ \\ \dfrac{4}{36} & x = 4. \\ \\ \dfrac{2}{36} & x = 5. \end{cases}$$

b) La función de distribución X

**Solución.** (Cómo obtuvimos la función masa de probabilidad en el anterior problema, podemos sacar nuestra función distributiva a partir de ahí.)
Observemos que $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces X es una variable discreta así que para calcular la función de distribucción utilizaremos la identidad de

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y)$$

:

1. Para $x < 0$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$
Pues no hay alguna x en $R_X$ que sea menor que 0.

2. Para $0 \leq x < 1$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(0) \\ &= \frac{6}{36} \end{aligned}$$

3. Para $1 \leq x < 2$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(0) + f_X(1) \\ &= \frac{16}{36} \end{aligned}$$

4. Para $2 \leq x < 3$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) \\ &= \frac{24}{36} \end{aligned}$$

5. Para $3 \leq x < 4$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) \\ &= \frac{30}{36} \end{aligned}$$

6. Para $4 \leq x < 5$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) \\ &= \frac{34}{36} \end{aligned}$$

7. Para $x \geq 5$ se tiene:
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) + f_X(5) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{6}{36} & 0 \leq x < 1. \\ \frac{16}{36} & 1 \leq x < 2. \\ \frac{24}{36} & 2 \leq x < 3. \\ \frac{30}{36} & 3 \leq x < 4. \\ \frac{34}{36} & 4 \leq x < 5. \\ 1 & x \geq 5. \end{cases}$$

**Ejercicio 2**

Una urna contiene 7 bolas rojas y tres azules, se seleccionan cinco bolas en forma aleatoria y sea X el número de bolas rojas que se obtienen. Calcula:

| a) La función masa de probabilidad de X |
|---|

**Solución.** Observemos primero que X es discreta pues $R_X = \{2, 3, 4, 5\}$.
Nuestra $\#\Omega = \binom{10}{5} = 252$, luego las probabilidades son:

1. $f_X(2) = P(X = 2) = \dfrac{\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{3}}{252} = \dfrac{21}{252}$
2. $f_X(3) = P(X = 3) = \dfrac{\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2}}{252} = \dfrac{105}{252}$
3. $f_X(4) = P(X = 4) = \dfrac{\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{1}}{252} = \dfrac{105}{252}$
4. $f_X(5) = P(X = 5) = \dfrac{\binom{7}{5} \cdot \binom{3}{0}}{252} = \dfrac{21}{252}$

En conclusión

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{21}{252} & x = 2. \\[2ex] \dfrac{105}{252} & x = 3. \\[2ex] \dfrac{105}{252} & x = 4. \\[2ex] \dfrac{21}{252} & x = 5. \end{cases}$$

| b)La función de distribución X. |
|---|

**Solución.** (Cómo obtuvimos la función masa de probabilidad en el anterior problema, podemos sacar nuestra función distributiva a partir de ahí.)
Observemos que $R_X = \{2, 3, 4, 5\}$ entonces X es una variable discreta así que para calcular la función de distribucción utilizaremos la identidad de

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y)$$

:

1. Para $x < 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pues no hay alguna x en $R_x$ que sea menor que 2.

2. Para $2 \leq x < 3$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(2) \\ &= \frac{21}{252} \end{aligned}$$

3. Para $3 \leq x < 4$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(2) + f_X(3) \\ &= \frac{126}{252} \end{aligned}$$

4. Para $4 \leq x < 5$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) \\ &= \frac{231}{36} \end{aligned}$$

5. Para $x \geq 5$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y \leq x} f_X(y) \\ &= f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) + f_X(5) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2, \\ \dfrac{21}{252} & 2 \leq x < 3. \\ \\ \dfrac{126}{252} & 3 \leq x < 4. \\ \\ \dfrac{231}{252} & 4 \leq x < 5. \\ 1 & x \geq 5. \end{cases}$$

## Ejercicio 3

Una variable aleatorias discreta X tiene la siguiente función masa de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2} & x = 1, 2, ..., \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcula:

a) $P(X < 4)$

**Solución.** Por conocimiento previo sabemos que $P(X < x) = \lim_{h \to 0^-} F_x(x+h)$, y también sabemos que $P(X = x) = F_x(x) - \lim_{h \to 0^-} F_x(x+h)$, y de igual forma sabemos que $f_X(x) = P(X = x)$.
Así que

$$P(X < 4) = \lim_{h \to 0^-} F_x(4+h)$$

Y

$$\lim_{h \to 0^-} F_x(4+h) = F_x(4) - P(X = x) = F_x(4) - f_x(4)$$

Por lo que podemos ver que:

$$P(X < 4) = F_x(4) - f_x(4)$$

Y sabemos que

$$F_X(4) = \sum_{y \leq x} f_X(y)$$

$$= f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4)$$

$$= c + \frac{c}{4} + \frac{c}{9} + \frac{c}{16}$$

$$\frac{205c}{144}$$

Y $f_x(4) = \dfrac{c}{16}$, así que:

$$P(X < 4) = F_x(4) - f_x(4) = \frac{205c}{144} - \frac{c}{16} = \frac{49c}{36}$$

donde $c \leq \dfrac{36}{49}$.

b) $P(X > 2)$

**Solución.** Sabemos que $P(X > x) = 1 - F_X(x)$, de igual forma conocemos la función masa de probabilidad entonces la función de dsitribucción se calcula a través de la identidad:

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y)$$

Así que $P(X > 2)$ puede ser visto cómo:

$$P(X > 2) = 1 - \sum_{y \leq x} f_X(y)$$

Así que para $2 \leq x < 3$ se tiene

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y)$$

$$\begin{aligned} &= f_X(1) + f_X(2) \\ &= c + \frac{c}{4} \\ &= \frac{5c}{4} \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que nuestra $P(X > 2)$ es:

$$1 - \frac{5c}{4} = \frac{4 - 5c}{4}$$

## Ejercicio 4

Sea X una variable aleatoria tal que $P(a < X < b) = 0$. Demuestra que $F_X(x)$ es constante en el intervalo (a, b).

**Solución.** Podemos ver a $P(a < X < b)$ como

$$= P(X < b) - P(X \leq a) = \lim_{h \to 0^-} F_x(b + h) - F_X(a) = 0$$

De aquí podemos llegar a que:

$$\lim_{h \to 0^-} F_x(b + h) = F_X(a)$$

Como $F_X(a)$ tomara un valor real, y este valor permanente constante, por conocimiento de limites sabemos que el el límite de una constante es una constante, así que:

$$F_x(b + h) = F_X(a)$$

Así que $F_X(x)$ es constante en el intervalo de (a,b).

## Ejercicio 5

Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de distribución.
Calcula:

| a) La función masa de probabilidad |
|---|

**Solución.** Como la gráfica de la función de distribución es escalonada estamos frente a una variable aleatoria discreta por lo que utilizaremos la identidad $f_x(x) = F_X(x) - \lim_{h\to 0^+} F_X(x-h)$ para calcular la función masa de probabilidad. De esta identidad se deduce que $R_X = \{-2, 0, 2, 4, 8, 10\}$

1. Para $x = -2$
$$\begin{aligned} f_x(-2) &= F_X(-2) - \lim_{h\to 0^+} F_X(-2-h) \\ &= 0.15 - 0 \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

2. Para $x = 0$
$$\begin{aligned} f_x(0) &= F_X(0) - \lim_{h\to 0^+} F_X(0-h) \\ &= 0.28 - 0.15 \\ &= 0.13 \end{aligned}$$

3. Para $x = 2$
$$\begin{aligned} f_x(2) &= F_X(2) - \lim_{h\to 0^+} F_X(2-h) \\ &= 0.40 - 0.28 \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

4. Para $x = 4$
$$\begin{aligned} f_x(4) &= F_X(4) - \lim_{h\to 0^+} F_X(4-h) \\ &= 0.50 - 0.40 \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

5. Para $x = 8$
$$\begin{aligned} f_x(8) &= F_X(8) - \lim_{h\to 0^+} F_X(8-h) \\ &= 0.70 - 0.50 \\ &= 0.20 \end{aligned}$$

6. Para $x = 10$
$$\begin{aligned} f_x(10) &= F_X(10) - \lim_{h\to 0^+} F_X(10-h) \\ &= 1 - 0.70 \\ &= 0.30 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función masa de probabilidad para la variable aleatoria X es

$$f_x(x) = \begin{cases} 0.15 & x = -2. \\ 0.13 & x = 0. \\ 0.12 & x = 2. \\ 0.10 & x = 4. \\ 0.20 & x = 8. \\ 0.30 & x = 10. \end{cases}$$

b) $P(-1.2 < X \leq 6)$

**Solución.** Sabemos que $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$, para cualquier $x_1 < x_2$, de igual forma conocemos la función de distribucción X.
Así que $P(-1.2 < X \leq 6) = F_X(6) - F_X(-1.2)$, y por lo que podemos ver en la función que $F_X(-1.2) = 0.15$ y que $F_X(6) = 0.50$.
Por lo que concluimos que nuestra $P(-1.2 < X \leq 6)$ es:

$$0.50 - 0.15 = 0.35$$

c) $P(X > 4)$

**Solución.** Sabemos que $P(X > x) = 1 - F_X(x)$, de igual forma conocemos la función de distribucción X.
Así que $P(X > 4) = 1 - F_X(4)$, y por lo que podemos ver en la función $F_X(4) = 0.50$.
Por lo que concluimos que nuestra $P(X > 2)$ es:

$$1 - 0.50 = 0.50$$

## Ejercicio 6

Calcula $P(X > 2)$ si X una variable aleatoria con función masa de probabilidad
$$f_x(x) = c\frac{2^x}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, ...$$

**Solución.** Sabemos que $P(X > x) = 1 - F_X(x)$, de igual forma conocemos la función masa de probabilidad entonces la función de distribucción se calcula a través de la identidad:
$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_x(y)$$

Así que $P(X > 2)$ puede ser visto cómo:

$$P(X > 2) = 1 - \sum_{y \leq x} f_x(y)$$

Así que para $2 \leq x < 3$ se tiene

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_x(y)$$

$$= f_x(0) + f_x(1) + f_x(2)$$
$$= c + 2c + 2c$$
$$= 5c$$

Por lo que concluimos que nuestra $P(X > 2)$ es:

$$1 - 5c$$