

Variable exponencial

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan, Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *8 de noviembre del 2020*

Función de densidad

Características de la función de densidad

Calcular la función de distribución

Calcular la esperanza matemática

La esperanza para esta variable uniforme continua es la siguiente:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Demostración. Sabemos que la función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De igual forma sabemos que la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Esta integración se resuelve por partes, donde:

- $u = x$
- $v = -e^{-\lambda x}$
- $du = 1$
- $dv = \lambda e^{-\lambda x}$

Así que la integral nos quedaría de la siguiente manera:

$$E(X) = x(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Sea X una variable aleatoria con distribución $\exp \lambda$, sabemos que la esperanza cuenta con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{a) } E(X^2) &= \frac{2}{\lambda^2} \\ \text{b) } E(X^n) &= \frac{n!}{\lambda^n} \end{aligned}$$

Demostración de la propiedad a). La función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así como la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Esta integración se resuelve por partes, donde:

- $u = x^2$
- $v = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$
- $du = 2x$
- $dv = \lambda e^{-\lambda x}$

Así que la integral nos quedaría de la siguiente manera:

$$E(X) = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{-2x e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Demostración de la propiedad b).

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Demostración. Por información previa sabemos que:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos