Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Variables Uniformes Continua

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *8 de noviembre del 2020*

Función de densidad

Características de la función de densidad

Calcular la función de distribución

Calcular la esperanza matemática

La esperanza para esta variable uniforme continua es la siguiente:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Demostración. Sabemos que la función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De igual forma sabemos que la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{b-a}dx$$

$$E(X) = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Sea X una variable aleatoria con distribución unif(a,b), sabemos que la esperanza cuenta con las siguientes propiedades:
a) $E(X^2) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$
b) $E(X^n) = \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$

Demostración de la propiedad a). La función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así como la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b-a} dx$$

$$E(X) = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Demostración de la propiedad b). La función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así como la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{b-a} dx$$

$$E(X) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} + a^{n+1}}{(n+1)(b+a)}$$

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Demostración. Por información previa sabemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejercicios propuestos