Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Variable normal

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *8 de noviembre del 2020*

Función de densidad

Características de la función de densidad

Calcular la función de distribución

Calcular la esperanza matemática

La esperanza para esta variable normal es la siguiente:

$$E(X) = \mu$$

Demostración. Sabemos que la función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

De igual forma sabemos que la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Realizamos un cambio de variable tal que $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ y observamos que $dx = \sigma dz$, obtenemos:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu + z\sigma)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\dfrac{-z^2}{2}} \sigma dz$$

Y esto a la vez es igual a:

$$E(X) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\dfrac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{\dfrac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

La primera integral (sin el factor μ) representa el área total bajo la la distribución normal estandarizada donde X tiene una distribución N(0,1) y, por lo tanto, es igual a 1, la segunda integral es igual a cero puesto que el integrando, llamémoslo g(z), tiene la propiedad de que $g(z) = -g(-z)$ y por lo tanto g es una función impar.

$$\therefore E(X) = \mu$$

Sea X una variable aleatoria con distribución N(μ, σ^2), sabemos que la esperanza cuenta con la siguiente propiedad:
$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

Demostración . Haciendo nuevamente, $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, obtenemos:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu + z\sigma)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma dz$$

Y esto a la vez es igual a:

$$E(X^2) = \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + \sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ze^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

La primera integral (sin el factor μ^2) representa el área total bajo la la distribución normal estandarizada donde X tiene una distribución N(0,1) y, por lo tanto, es igual a 1, la segunda integral es igual a cero puesto que el integrando, llamémoslo g(z), tiene la propiedad de que $g(z) = -g(-z)$ y por lo tanto g es una función impar y por último el tercero sucede el mismo caso que el primero e igual es 1.

$$\therefore E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \sigma^2$$

Demostración. Por información previa sabemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$= (\mu^2 + \sigma^2) - (\mu^2)$$
$$= \sigma^2$$

Ejercicios propuestos