Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Variable exponencial

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *8 de noviembre del 2020*

Función de densidad

Características de la función de densidad

Calcular la función de distribución

Calcular la esperanza matemática

La esperanza para esta variable exponencial es la siguiente:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Demostración. Sabemos que la función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De igual forma sabemos que la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Esta integración se resuelve por partes, donde:

- $u = x$
- $v = -e^{-\lambda x}$
- $du = 1$
- $dv = \lambda e^{-\lambda x}$

Así que la integral nos quedaría de la siguiente manera:

$$E(X) = x(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x}dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Sea X una variable aleatoria con distribución expλ, sabemos que la esperanza cuenta con las siguientes propiedades:
a) $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$
b) $E(X^n) = \frac{n!}{x^n}$

Demostración de la propiedad a). La función de densidad se encuentra dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así como la esperanza para una variable continua, se calcula mediante:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

Así que la esperanza nos quedaría de la siguiente forma:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$E(X) = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Esta integración se resuelve por partes, donde:

- $u = x^2$
- $v = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$
- $du = 2x$
- $dv = \lambda e^{-\lambda x}$

Así que la integral nos quedaría de la siguiente manera:

$$E(X) = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{-2xe^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Big|_0^\infty = \frac{2}{\lambda^2}$$

Demostración de la propiedad b).

Calcular la varianza

La varianza se obtiene de la forma ya conocida; es decir, como la varianza de esos mismos valores. Expresada en términos de momentos, la varianza será:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Demostración. Por información previa sabemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Y por las propiedades de la esperanza, sabemos que esto es igual a:

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

Ejercicios propuestos