Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Actividad de Aprendizaje 11

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *20 de noviembre del 2020*

Ejercicio 1

De un grupo de 40 personas de edad 70, 20 de ellos fallecieron antes de cumplir 72 y de los cuales 15 antes de cumplir 71. Sea X_y la variable que indica si una persona de edad 70 fallece antes de edad y. Calcula:

a) $P(X_{71} = 1)$

Solución. Para este problema existe dos sucesos que pueden suceder, que la persona haya fallecido antes de cumplir 71 o que hubiese fallecido despues de cumplir 71, como en este caso buscamos la probabailidad de que la persona haya fallecido antes de los 71, podemos decir que si $X = 1$ será nuestro "éxito", por lo que estaríamos buscando la probabilidad de una variable Bernoulli.
Para una variable Bernoulli decimos que $X = 1$ cuando el resultado es nuestro "éxito", por lo como hemos mencionado anteriormente, estamos buscando la probabilidad de que la persona haya fallecido antes de los 71. Por lo que:

$$P(X_{71} = 1) = p = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

b) $P(X_{72} = 0)$

Solución. Para este problema existe dos sucesos que pueden suceder, que la persona haya fallecido antes de cumplir 72 o que hubiese fallecido despues de cumplir 72, como en este caso buscamos la probabailidad de que la persona no haya fallecido antes de los 72, podemos decir que si $X = 0$ será nuestro "no éxito", por lo que estaríamos buscando la probabilidad de una variable Bernoulli.
Para una variable Bernoulli decimos que $X = 0$ cuando el resultado es "no éxito", por lo que estamos buscando la probabilidad de que la persona no fallezca antes de los 72. Por lo que:

$$P(X_{72} = 0) = 1 - p = 1 - \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

c) $E[X_{71}]$ y $Var(X_{71})$

Solución. Por información previa de varible Bernoulli, sabemos que la esperanza de esta, es igual a:

$$E[X] = p$$

Y por el inciso a, ya conocemos el valor de p, por lo que:

$$E[X_{71}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

De igual forma sabemos que la varianza se calcula:

$$Var(X) = p(1-p)$$

Así que la varianza nos queda:

$$Var(X_{71}) = (\frac{3}{8}) \cdot (1 - \frac{3}{8}) = \frac{15}{64}$$

Ejercicio 4

El 40 % de una población apoya al candidato A. Se seleccionan al azar 5 electores. Calcula:

a) La probabilidad de que la mayoría vote por el candidato A.

Solución. Podemos definir en este problema dos sucesos, que el elector vote por el candidato A, que para este caso sera nuestro "éxito", o que el elector no vote por el candidato A, nuestro "no éxito",como el problema nos piden la probabilidad de que los 5 electores seleccionados al azar la mayoría vote por el candidato A, es decir que 3 o más de ellos voten por el candidato A, podemos ver que nuestra distribución de probabilidad se ajustaría a una distribución binomial, ya que tenemos un número finito de pruebas (nuestro 5 electores) y en cada experimento solo es posible dos resultados.
La probabilidad que nos pide el problema es $P(X \geq 3)$, esto es igual a:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Para sacar esta probabilidad vamos a recurrir a las variables binomiales, y sabemos que la probabilidad de estas variables se calcula mediante:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Ahora bien definimos nuestras variables para este experimento:
$n = 5$ (es el total de la muestra que tenemos.)
$x = 3, 4, 5$ (Número de electores que voten por el candidato A.)
$p = 0.40$ (Probabilidad de que los electores voten por el candidato A.)
$q = 0.60$ (Probabilidad de que los electores no voten por el candidato A.)
Tras definir nuestras variables, ahora lo que hacemos es simplemente sustituir en nuestra formula:

$$P(X \geq 3) = \binom{5}{3}(0.4)^3(0.6)^2 + \binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1 + \binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0 = \frac{992}{3125}$$

b) La probabilidad de que la mayoría no vote por el candidato A.

Solución. Podemos definir en este problema dos sucesos, que el elector vote por el candidato A, que para este caso sera nuestro "éxito", o que el elector no vote por el candidato A, nuestro "no éxito",como el problema nos piden la probabilidad de que los 5 electores seleccionados al azar la mayoría no vote por el candidato A, es decir que 2 o menos de ellos voten por el candidato A, podemos ver que nuestra distribución de probabilidad se ajustaría a una distribución binomial, ya que tenemos un número finito de pruebas (nuestro 5 electores) y en cada experimento solo es posible dos resultados.
Cómo estamos buscando laprobabilidad de que 2 o menos electores voten por el candidato A,es decir lo podríamos ver como $P(X \leq 2)$, y esto a la vez es igual a:

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2)$$

Esto lo podríamos ver cómo:

$$P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)]$$

Como ya conocemos la probabilidad de $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$, esto nos quedaría:

$$P(X \leq 2) = 1 - \frac{992}{3125} = \frac{2133}{3125}$$

c) El número esperado de votos que recibirá el candidato A

Solución. Sabemos que la esperanza para la variable binomial es:

$$E[X] = np$$

Donde:
$n = 5$
$p = 0.40$
Por lo que la esperanza nos queda:

$$E[X] = 5(0.4) = 2$$

d) La varianza del número esperado de votos que recibirá el candidato A.

Solución. Sabemos que la varianza para la variable binomial es:

$$Var(X) = npq$$

Donde:
$n = 5$
$p = 0.40$
$q = 0.60$
Por lo que la esperanza nos queda:

$$Var(X) = 5(0.4)(0.6) = \frac{6}{5} = 1.2$$

Ejercicio 8

El 30 % de los solicitantes de empleo están capacitados para el empleo. Calcula:

a) La probabilidad de que el trabajo sea cubierto con el tercer solicitante.

Solución. En este problema podemos ver que nos piden la probabilidad de que el trabajo sea cubierto con el tercer solicitante, es decir nos piden la probabilidad de que el proceso se repita 3 veces hasta obtener nuestro resultado deseado, en este caso nuestro "éxito", es que el tercer solicitante este capacitado para el empleo, y un modelo adecuado para este problema sería la distribución geométrica, ya que en nuestro caso el proceso se va repetir hasta la obtención del resultado deseado. Y la probabilidad de esta distribución se calcula:

$$P(X = x) = p(1 - p)^x$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.30$ (Probabilidad de que un solicitante este capacitado para el empleo.)
$x = 2$ (Número de solicitantes que no estaban capacitados para el empleo.)
Por lo que nuestra probabilidad nos quedaría como:

$$P(X = 2) = (0.30)(0.70)^2 = \frac{147}{1000}$$

b) La probabilidad de que se requiera más de dos entrevistas para cubrir el puesto.

Solución. En este problema podemos ver que nos piden la probabilidad de que el trabajo sea cubierto con más de dos entrevistas, es decir nos piden la probabilidad de que el proceso se repita más de dos veces hasta obtener nuestro resultado deseado, en este caso nuestro "éxito", es que el solicitante este capacitado para el empleo, y un modelo adecuado para este problema sería la distribución geométrica, ya que en nuestro caso el proceso se va repetir hasta la obtención del resultado deseado. Y la probabilidad de esta distribución se calcula:

$$P(X = x) = p(1 - p)^x$$

Ahora bien, la probabilidad que nos pide el inciso es $P(X > 1)$, esto lo podríamos ver como:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.30$ (Probabilidad de que un solicitante este capacitado para el empleo.)
$x = 0, 1$ (Número de solicitantes que no estaban capacitados para el empleo.)
Así que la probabilidad sería igual a:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [(0.3)(0.7)^1 + (0.3)(0.7)^0] = \frac{49}{100}$$

c) El número esperado de entrevistas para ocupar el puesto.

Solución. Sabemos que la esperanza para una variable geométrica es:

$$E[X] = \frac{1-p}{p}$$

En nuestro caso $P = 0.30$, así que la esperanza es:

$$E[X] = \frac{1-0.30}{0.30} = \frac{7}{3}$$

d) La varianza del número esperado de entrevistas realizadas.

Solución. Sabemos que la varianza para una variable geométrica es:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

En nuestro caso $P = 0.30$, así que la varianza es:

$$Var(X) = \frac{1-0.30}{(0.30)^2} = \frac{70}{9}$$

Ejercicio 11

Se somete a los empleados de una empresa que fabrica material aislante a un análisis para detectar indicios de asbesto en los pulmones. Cuando se han detectado tres trabajadores con indicios de asbesto se envían al hospital. Si el 40 % de los trabajadores muestran indicios asbesto en los pulmones, calcula:

a) La probabilidad de que se tengan que examinar a diez trabajadores para enviar al primer grupo al hospital.

Solución. En este problema podemos ver que nos piden la probabilidad de que se tenga que examinar a 10 trabajadores para mandar al primer grupo al hospital es decir que se haya detectado 3 trabajadores con indicios de asbesto en sus pulmones, es decir que la prueba se va repetir 10 veces (número de trabajadores a examinar), hasta conseguir el número determinado de trabajadores con indicios de asbesto en los pulmones, este proceso es un modelo adecuado para la distribución binomial negativa, ya que cumple con todas las características de esta misma variable.
Y la probabilidad de esta distribución se calcula mediante:

$$P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$ (Probabilidad de que un trabajador sea detectado con indicios de asbesto en los pulmones.)
$r = 3$ (Número de trabajadoreres con indicios de asbesto en los pulmones)
$x = 7$ (Número de trabajadores que no mostraron indicios de asbesto en los pulmones antes de encontrar al tercer trabajador con asbesto en los pulmones.)
Por lo que nuestra probabilidad nos queda cómo:

$$P(X = 7) = \binom{9}{7} (0.4)^3 (0.6)^7 \approx 0.0644972544$$

b) La probabilidad de que se tenga que examinar más de cuatro trabajadores para enviar al grupo al hospital.

Solución. En este problema podemos ver que nos piden la probabilidad de que se tenga que examinar a más de 4 trabajadores para mandar al primer grupo al hospital es decir que se haya detectado 3 trabajadores con indicios de asbesto en sus pulmones, es decir que la prueba se va repetir más de 4 veces (número de trabajadores a examinar), hasta conseguir el número determinado de trabajadores con indicios de asbesto en los pulmones, este proceso es un modelo adecuado para la distribución binomial negativa, ya que cumple con todas las características de esta misma variable.
En pocas palabras la probabilidad que nos piden es $P(X > 1)$, esta probabilidad la pudieramos ver cómo:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$
$r = 3$
$x = 0, 1$
Así que nuestra probabilidad nos queda:

$$P(X > 1) = 1 - [\binom{3}{1}(0.4)^3(0.6)^1 + \binom{2}{0}(0.4)^3(0.6)^0] = \frac{513}{625}$$

c) El número esperado y la varianza del número de trabajadores a examinar para enviar al primer grupo al hospital.

Solución. Sabemos que la esperanza para una variable binomial negativa se calcula:

$$E[X] = r(\frac{1-p}{p})$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$
$r = 3$
Así que nuestra esperanza es:

$$E[X] = 3(\frac{0.6}{0.4}) = \frac{9}{2}$$

Sabemos que la varianza para una variable binomial negativa se calcula:

$$Var(X) = r(\frac{1-p}{p^2})$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$
$r = 3$
Así que nuestra varianza es:

$$Var(X) = 3(\frac{0.6}{0.4^2}) = \frac{45}{4}$$

Ejercicio 13

Un producto industrial se envía en lotes de 20 artículos. Un plan de muestreo requiere que se muestreen 5 artículos de cada lote. El lote es rechazado si se encuentra más de un artículo defectuoso. Se sabe que en cada lote se tienen en promedio cuatro artículos defectuosos. Calcula:

a) La probabilidad de que el lote sea rechazado.

Solución. En este problema podemos apreciar que se seleccionan de manera aleatoria 5 artículos para hacer muestreo de un lote de 20 artículos sin reemplazo, estos artículos pueden estar defectuosos que para el caso de este problema será nuestro "éxito", o que no estén defectuosos que será nuestro "no éxito", y como estamos buscando la probabilidad de que el lote sea rechazado estamos buscando cierto número de "éxitos"(en nuestra muestra), por lo que para calcular esta probabilidad podemos utilizar la distribución hipergeométrica, ya que cumple con todas las condiciones para que la variable tenga una distribución hipergeométrica.
Y su probabilidad de esta es:

$$P(X=x)\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Así que la probabilidad que estamos buscando es que la muestra tenga 2 o más artículos defectuosos y esto lo podríamos ver cómo:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

Ahora definimos nuestras variables:
$N=20$ (Número total de artículos.)
$K=4$ (Número de artículos defectuosos)
$n=5$ (Tamaño del muestreo)
$x=2,3,4$ (Número de artículos defectuosos de la muestra.)
Así que nuestra probabilidad nos quedaría:

$$P(X\geq 2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{4}{3}\binom{16}{2}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{4}{4}\binom{16}{1}}{\binom{20}{5}}=\frac{241}{969}$$

b) El número esperado y la varianza del número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 5.

Solución. Sabemos que el número esperado se refiere a la esperanza, y para calcular la esperanza de una variable hipergeométrica es mediante:

$$E[X]=n\frac{K}{N}$$

Ahora definimos nuestras variables:
$N = 20$
$K = 4$
$n = 5$
Así que nuestro número esperado de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 5 es:

$$E[X] = 5\frac{4}{20} = 1$$

De igual forma, para calcular la varianza sabemos que es mediante:

$$Var(X) = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

Ahora definimos nuestras variables:
$N = 20$
$K = 4$
$n = 5$
Así que nuestro varianza del número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 5 es:

$$Var(X) = 5\frac{4}{20}\frac{16}{20}\frac{15}{19} = \frac{12}{19}$$

c) La probabilidad de que el lote sea rechazado si la muestra es de tamaño 6.

Solución. En este problema podemos apreciar que se seleccionan de manera aleatoria 6 artículos para hacer muestreo de un lote de 20 artículos sin reemplazo, estos artículos pueden estar defectuosos que para el caso de este problema será nuestro "éxito", o que no estén defectuosos que será nuestro "no éxito", y como estamos buscando la probabilidad de que el lote sea rechazado estamos buscando cierto número de "éxitos", en nuestra muestra, por lo que para calcular esta probabilidad podemos utilizar la distribución hipergeométrica, ya que cumple con todas las condiciones para que la variable tenga una distribución hipergeométrica.
Este problema se soluciona como en el primer caso, pero aquí cambia nuestro valor de n.
De igual forma la probabilidad de que estamos buscando es:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Definimos nuestras variables:
$N = 20$ (Número total de artículos.)
$K = 4$ (Número de artículos defectuosos)
$n = 6$ (Tamaño del muestreo)
$x = 2, 3, 4$ (Número de artículos defectuosos de la muestra.)
Así que nuestra probabilidad nos quedaría:

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{4}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{16}{3}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{16}{2}}{\binom{20}{6}} = \frac{332}{969}$$

Ejercicio 16

Una empresario desea modelar con una variable Poisson al número de clientes que visita su tienda. Se sabe que la probabilidad de que no hayan visitas en una hora es 0.08. Calcula:

a) El valor de λ.

Solución. Definimos $x = 0$ como el número de clientes que visita la tienda en una hora. Así que:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = 0.08$$

Cómo sabemos que $0! = 1$ y que cualquier número elevado a la 0 es 1, nos queda que:

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} = 0.08$$

De aquí podemos calcular el logaritmo natural, para buscar el valor de λ, así que:

$$-\lambda = ln(0.08) \Rightarrow \lambda = -ln(0.08)$$

b) La probabilidad de que se tengan cuando mucho dos visitas en una hora.

Solución. La probabilidad que nos piden es la siguiente:

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

Esto lo podemos ver:

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{ln(0.08)} \cdot (-ln(0.08))^2}{2!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot (-ln(0.08))^1}{1!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot (-ln(0.08))^0}{0!} \approx 0.593$$

c) La probabilidad de que en cinco horas hayan visitado más de tres personas.

Solución. Lo podemos escribir como:

$$X \sim Poisson(-5ln(0.08))$$

Porque el intervalo es cinco veces mas grande y λ es directamente propocional.
La probabilidad que nos piden es $P(X > 3)$, esto lo podríamos ver cómo:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

Esto a la vez podríamos verlo cómo:

$$P(X > 3) = 1 - [P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)]$$

Y como sabemos que la probabilidad de una variable Poisson se calcula mediante:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Así que nuestra probabilidad nos quedaría:

$$P(X > 3) = 1 - [\frac{e^{5ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^3}{3!} + \frac{e^{5ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^2}{2!} + \frac{e^{5ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^1}{1!} + \frac{e^{5ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^0}{0!}]$$

Esto es igual a:

$$P(X > 3) \approx 0.9999636034$$

d)El número esperado y la varianza del número de visitas en una jornada de 8 horas.

Solución. Lo podemos escribir como:

$$X \sim Poisson(-8ln(0.08))$$

Porque el intervalo es ocho veces mas grande y λ es directamente propocional.
Sabemos que la esperanza de una variable de Poisson se calcula mediante:

$$E[X] = \lambda$$

Y como sabemos que nuestra $\lambda = -8ln(0.08)$. La esperanza para 8 horas sería:

$$E[X] = -8ln(0.08)$$

En el caso de la varianza de una variable de Poisson se calcula mediante:

$$Var(X) = \lambda$$

Y como sabemos que nuestra $\lambda = -8ln(0.08)$.
La varianza para 8 horas sería:

$$Var(X) = -8ln(0.08)$$