Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas - UADY

Actividad de Aprendizaje 11

Nombre del/los estudiante/s: *Emilio Balan,Amilcar Campos, Elian Carrasco, Citlali Gutiérrez, Héctor Rodríguez*

Curso: *Probabilidad 1 (Grupo B)* – Docente: *Lic. Ernesto Guerrero Lara*
Fecha de entrega: *20 de noviembre del 2020*

Ejercicio 1

De un grupo de 40 personas de edad 70, 20 de ellos fallecieron antes de cumplir 72 y de los cuales 15 antes de cumplir 71. Sea X_y la variable que indica si una persona de edad 70 fallece antes de edad y. Calcula:

a) $P(X_{71} = 1)$

Solución. Para una variable Bernoulli decimos que $X = 1$ cuando el resultado es "éxito", por lo que estamos buscando la probabilidad de que la persona fallezca antes de los 71. Por lo que:

$$P(X_{71} = 1) = p = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

b) $P(X_{72} = 0)$

Solución. Para una variable Bernoulli decimos que $X = 0$ cuando el resultado es "no éxito", por lo que estamos buscando la probabilidad de que la persona no fallezca antes de los 72. Por lo que:

$$P(X_{72} = 0) = 1 - p = 1 - \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

c) $E[X_{71}]$ y $Var(X_{71})$

Solución. Por información previa de varible Bernoulli, sabemos que la esperanza de esta, es igual a:

$$E[X] = p$$

Y por el inciso a, ya conocemos el valor de p, por lo que:

$$E[X_{71}] = \frac{3}{8}$$

De igual forma sabemos que la varianza se calcula:

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Así que la varianza nos queda:

$$Var(X_{71}) = (\frac{3}{8}) \cdot (1 - \frac{3}{8}) = \frac{15}{64}$$

Ejercicio 4

El 40 % de una población apoya al candidato A. Se seleccionan al azar 5 electores. Calcula:

a) La probabilidad de que la mayoría vote por el candidato A.

Solución. El problema nos piden la probabilidad de que los 5 electores seleccionados al azar, 3 o más de ellos voten por el candidato A, es decir $P(X \geq 3)$, esto es igual a:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Para sacar esta probabilidad vamos a recurrir a las variables binomiales, y sabemos que la probabilidad de estas variables se calcula mediante:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Ahora bien definimos nuestras variables para este experimento:
$n = 5$ (es el total de la muestra que tenemos.)
$x = 3, 4, 5$ (Número de electores que voten por el candidato A.)
$p = 0.40$ (Probabilidad de que los electores voten por el candidato A.)
$q = 0.60$ (Probabilidad de que los electores no voten por el candidato A.)
Tras definir nuestras variables, ahora lo que hacemos es simplemente sustituir en nuestra formula:

$$P(X \geq 3) = \binom{5}{3}(0.4)^3(0.6)^2 + \binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1 + \binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0 = \frac{992}{3125}$$

b) La probabilidad de que la mayoría no vote por el candidato A.

Solución. Esto lo podríamos ver como la probabilidad de que los 5 electores seleccionados al azar, 2 o menos de ellos voten por el candidato A, es decir $P(X \leq 2)$, y esto es igual a:

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2)$$

Esto lo podríamos ver cómo:

$$P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)]$$

Como ya conocemos la probabilidad de $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$, esto nos quedaría:

$$P(X \leq 2) = 1 - \frac{992}{3125} = \frac{2133}{3125}$$

c) El número esperado de votos que recibirá el candidato A

Solución. Sabemos que la esperanza para la variable aleatoria binomial es:

$$E[X] = np$$

Donde:
$n = 5$
$p = 0.40$
Por lo que la esperanza nos queda:

$$E[X] = 5(0.4) = 2$$

d) La varianza del número esperado de votos que recibirá el candidato A.

Solución. Sabemos que la varianza para la variable aleatoria binomial es:

$$Var(X) = npq$$

Donde:
$n = 5$
$p = 0.40$
$q = 0.60$
Por lo que la esperanza nos queda:

$$Var(X) = 5(0.4)(0.6) = \frac{6}{5} = 1.2$$

Ejercicio 8

El 30 % de los solicitantes de empleo están capacitados para el empleo. Calcula:

a) La probabilidad de que el trabajo sea cubierto con el tercer solicitante.

Solución. Para sacar esta probabilidad, vamos a recurrir a la variable geométrica, y la probabilidad de esta se calcula:

$$P(X = x) = p(1 - p)^x$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.30$ (Probabilidad de que un solicitante este capacitado para el empleo.)
$x = 2$ (Número de solicitantes que no estaban capacitados para el empleo.)
Por lo que nuestra probabilidad nos quedaría como:

$$P(X = 2) = (0.30)(0.70)^2 = \frac{147}{1000}$$

b) La probabilidad de que se requiera más de dos entrevistas para cubrir el puesto.

Solución. La probabilidad que nos pide el inciso es $P(X > 1)$, esto lo podríamos ver como:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.30$ (Probabilidad de que un solicitante este capacitado para el empleo.)
$x = 0, 1$ (Número de solicitantes que no estaban capacitados para el empleo.)
Así que la probabilidad sería igual a:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [(0.3)(0.7)^1 + (0.3)(0.7)^0] = \frac{49}{100}$$

c) El número esperado de entrevistas para ocupar el puesto.

Solución. Sabemos que la esperanza para una variable geométrica es:

$$E[X] = \frac{1-p}{p}$$

En nuestro caso $P = 0.30$, así que la esperanza es:

$$E[X] = \frac{1-0.30}{0.30} = \frac{7}{3}$$

d) La varianza del número esperado de entrevistas realizadas.

Solución. Sabemos que la varianza para una variable geométrica es:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

En nuestro caso $P = 0.30$, así que la varianza es:

$$E[X] = \frac{1-0.30}{(0.30)^2} = \frac{70}{9}$$

Ejercicio 11

Se somete a los empleados de una empresa que fabrica material aislante a un análisis para detectar indicios de asbesto en los pulmones. Cuando se han detectado tres trabajadores con indicios de asbesto se envían al hospital. Si el 40 % de los trabajadores muestran indicios asbesto en los pulmones, calcula:

a) La probabilidad de que se tengan que examinar a diez trabajadores para enviar al primer grupo al hospital.

Solución. Para sacar esta probabilidad vamos a recurrir a la variable binomial negativa, y la probabilidad de esta se calcula:

$$P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$ (Probabilidad de que un trabajador sea detectado con indicios de asbesto en los pulmones.)
$r = 3$ (Número de trabajadoreres con indicios de asbesto en los pulmones)
$x = 7$ (Número de trabajadores que no mostraron indicios de asbesto en los pulmones antes de encontrar al tercer trabajador con asbesto en los pulmones.)
Por lo que nuestra probabilidad nos queda cómo:

$$P(X = 7) = \binom{9}{7}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.0644972544$$

b) La probabilidad de que se tenga que examinar más de cuatro trabajadores para enviar al grupo al hospital.

Solución. La probabilidad que nos piden es $P(X > 1)$, esta probabilidad la pudieramos ver cómo:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$
$r = 3$
$x = 0, 1$
Así que nuestra probabilidad nos queda:

$$P(X > 1) = 1 - [\binom{3}{1}(0.4)^3(0.6)^1 + \binom{2}{0}(0.4)^3(0.6)^0] = \frac{513}{625}$$

c) El número esperado y la varianza del número de trabajadores a examinar para enviar al primer grupo al hospital.

Solución. Sabemos que la esperanza para una variable binomial negativa se calcula:

$$E[X] = r(\frac{1-p}{p})$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$
$r = 3$
Así que nuestra esperanza es:

$$E[X] = 3(\frac{0.6}{0.4}) = \frac{9}{2}$$

Sabemos que la varianza para una variable binomial negativa se calcula:

$$Var(X) = r(\frac{1-p}{p^2})$$

Ahora definimos nuestras variables:
$p = 0.40$
$r = 3$
Así que nuestra varianza es:

$$Var(X) = 3(\frac{0.6}{0.4^2}) = \frac{45}{4}$$

Ejercicio 13

Un producto industrial se envía en lotes de 20 artículos. Un plan de muestreo requiere que se muestreen 5 artículos de cada lote. El lote es rechazado si se encuentra más de un artículo defectuoso. Se sabe que en cada lote se tienen en promedio cuatro artículos defectuosos. Calcula:

a) La probabilidad de que el lote sea rechazado.

Solución. El inciso nos pide la probabilidad de que la muestra de cinco artículos haya más de un artículo defectuoso, para calcular esta probabilidad vamos a recurrir a las variables hipergeométricas, y su probabilidad de esta son:

$$P(X=x)\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Así que la probabilidad de que estamos buscando la podríamos ver cómo:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

Ahora definimos nuestras variables:
$N = 20$ (Número total de artículos.)
$K = 4$ (Número de artículos defectuosos)
$n = 5$ (Tamaño del muestreo)
$x = 2, 3, 4$ (Número de artículos defectuosos de la muestra.)
Así que nuestra probabilidad nos quedaría:

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{16}{2}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{16}{1}}{\binom{20}{5}} = \frac{241}{969}$$

b) El número esperado y la varianza del número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 5.

Solución. Sabemos que el número esperado se refiere a la esperanza, y para calcular la esperanza de una variable hipergeométrica es mediante:

$$E[X] = n\frac{K}{N}$$

Ahora definimos nuestras variables:
$N = 20$
$K = 4$
$n = 5$
Así que nuestro número esperado de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 5 es:

$$E[X] = 5\frac{4}{20} = 1$$

De igual forma, para calcular la varianza sabemos que es mediante:

$$Var(X) = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

Ahora definimos nuestras variables:
$N = 20$
$K = 4$
$n = 5$
Así que nuestro varianza del número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 5 es:

$$Var(X) = 5\frac{4}{20}\frac{16}{20}\frac{15}{19} = \frac{12}{19}$$

c) La probabilidad de que el lote sea rechazado si la muestra es de tamaño 6.

Solución. Este problema se soluciona como en el primer caso, pero aquí cambia nuestro valor de n. De igual forma la probabilidad de que estamos buscando es:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Definimos nuestras variables:
$N = 20$
$K = 4$
$n = 6$
$x = 2, 3, 4$
Así que nuestra probabilidad nos quedaría:

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{4}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{16}{3}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{16}{2}}{\binom{20}{6}} = \frac{332}{969}$$

Ejercicio 16

Una empresario desea modelar con una variable Poisson al número de clientes que visita su tienda. Se sabe que la probabilidad de que no hayan visitas en una hora es 0.08. Calcula:

a) El valor de λ.

Solución. Definimos $x = 0$ como el número de clientes que visita la tienda en una hora. Así que:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = 0.08$$

Cómo sabemos que $0! = 1$ y que cualquier número elevado a la 0 es 1, nos queda que:

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} = 0.08$$

De aquí podemos calcular el logaritmo natural, para buscar el valor de λ, así que:

$$-\lambda = ln(0.08) \Rightarrow \lambda = -ln(0.08)$$

b) La probabilidad de que se tengan cuando mucho dos visitas en una hora.

Solución. La probabilidad que nos piden es la siguiente:

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

Esto lo podemos ver:

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{ln(0.08)} \cdot (-ln(0.08))^2}{2!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot (-ln(0.08))^1}{1!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot (-ln(0.08))^0}{0!} \approx 0.593$$

c) La probabilidad de que en cinco horas hayan visitado más de tres personas.

Solución.

$$X \sim Poisson(-5ln(0.08))$$

La probabilidad que nos piden es $P(X > 3)$, esto lo podríamos ver cómo:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

Esto lo podríamos ver cómo:

$$P(X > 3) = 1 - [P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)]$$

Y como sabemos que la probabilidad de una variable Poisson se calcula mediante:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Así que nuestra probabilidad nos quedaría:

$$P(X > 3) = 1 - [\frac{e^{ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^3}{3!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^2}{2!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^1}{1!} + \frac{e^{ln(0.08)} \cdot -5ln(0.08)^0}{0!}]$$

Esto es igual a:

$$P(X > 3) \approx 0.9999832642$$

d)El número esperado y la varianza del número de visitas en una jornada de 8 horas.

Solución. Sabemos que la esperanza de una variable de Poisson se calcula mediante:

$$E[X] = \lambda$$

Para una hora sería:

$$E[X] = -ln(0.08)$$

Pero para 8 horas sería:

$$E[X] = -8ln(0.08)$$

En el caso de la varianza de una variable de Poisson se calcula mediante:

$$Var(X) = \lambda$$

Para una hora sería:

$$Var(X) = -ln(0.08)$$

Pero para 8 horas sería:

$$Var(X) = -8ln(0.08)$$