Heimadæmi 11

Töluleg Greining

Emil Gauti Friðriksson

22. febrúar 2019

Dæmi 1(i)

(a) ætlum að leysa verkefnið

$$y' = 2(t+1)y$$
$$y(0) = 1$$

höfum því eftirfarandi:

$$\frac{dy}{dt} = 2ty + 2y$$
$$\frac{1}{y}dy = 2t + 2dt$$
$$\ln(y) = t^2 + 2t$$
$$y = e^{t^2+2t} + C$$

Upphafsskilyrðið gefur okkur síðan að $C = 0$ svo við höfum að

$$y(t) = e^{t^2+2t}$$

(b) Við ætlum að leysa verkefnið

$$y' = t^3/y^2$$
$$y(0) = 1$$

höfum því eftirfarandi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^3}{y^2}$$
$$y^2dy = t^3dt$$
$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{4}t^4$$
$$y = \sqrt[3]{3/4t^4 + C}$$

Upphafsskilyrðið gefur okkur síðan að C=1 svo við höfum að

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + 1}$$

Dæmi 1(ii)

(a)

Nú ætlum við að meta villuna við nálgunarlausnina þegar við notum forritið `euler.m` úr bók(bls. 286), Ath! við breytum neðstu línunni `z=2*t*y+2*y;` í fyrrnefndi forriti. Keyrum síðan eftirfarandi skipun:

```
[t, nalgun] = euler([0 1],1,4);
rett = exp(t.^2).*exp(2.*t);
nalgun
villa = abs(nalgun - rett)
```

og fáum út eftirfarandi:

```
nalgun =
    1.0000     1.5000     2.4375     4.2656     7.9980
villa =
         0     0.2551     1.0528     3.6000    12.0875
```

(b)
Sambærilegur við liðinn hérna á undan nema núna breytum við neðstu línunni í forritinu í `z=t^3/y^2`. Við breytum einnig skipununm í eftirfarandi:

```
[t, nalgun] = euler([0 1],1,4);
rett = (3/4.*t.^4+1).^(1/3);
nalgun
villa = abs(nalgun - rett)
```

Fáum eftirfarandi niðurstöður:

```
nalgun =
    1.0000    1.0000    1.0039    1.0349    1.1334
villa =
         0    0.0010    0.0115    0.0386    0.0717
```

Dæmi 1(iii)

(a)
hérna ætlum við að nýta okkur forritið `predcorr.m`(bls. 342) úr bókinni, forritið notar trapízuheildun en við nýtum okkur reyndar bara hluta af forritinu
Við þurfum að breyta síðustu línum forritsins í eftirfarandi:

```
function z=ydot(t,y) % IVP
z=2*t*y+2*y;
```

og þegar við keyrum forritið fáum við:

```
>> [t,y]=predcorr([0 1],1,4,5)
t =
         0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
y =
    1.0000
    1.7188
    3.3032
    7.0710
   16.7935
```

sem hefur svo villuna í endapunktinum:

```
abs(16.7935 - exp(3)) = 3.2920
```

(b)
gerum sambærilega útreikninga fyrir seinni liðinn, núna verður síðasti hluti forritsins eftirfarandi:

```
function z=ydot(t,y) % IVP
z=t^3/y^2;
```

sem skilar svo þegar það er keyrt:

```
>> [t,y]=predcorr([0 1],1,4,5)

t =
         0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
y =
    1.0000
```

```
    1.0020
    1.0193
    1.0823
    1.2182
```

sem hefur svo villuna í endapunktinum:

```
abs(1.2182 - 1.75^(1/3)) = 0.0131
```

Dæmi 2(i)

Ætlum að breyta eftirfarandi diffurjöfnu í diffurjöfnu-hneppi af lægra stigi:

$$y'' - 2ty' + 2y = 0$$

nú umskrifum við þetta á viðráðanlegra form:

$$y'' = 2ty' - 2y$$

Skilgreinum svo $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ þá getum við ritað:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1' \\ y_2' &= 2ty_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

Dæmi 2(ii)

Nú ætlum við að nýta okkur forritið `pend.m`(bls. 307), sem nýtir sér trapísuheildun, við höfum áhuga á vigrinum y sem við látum forritið skila okkur. við þurfum samt að lagfæra neðstu línurnar svo við fáum réttar niðurstöður þær verða eftirfarandi:

```
function z=ydot(t,y)
z(1)=y(2);
z(2)=2*t*z(1)-2*y(1);
```

og þegar við keyrum þetta með upphafsgildunum okkar og skoðum bilið $[0, 1]$ fáum við eftirfarandi:

```
>> y=pend([0 1],[1 1],4)

y =
    1.0000    1.0000
    1.1875    0.4688
    1.2378   -0.1333
    1.1229   -0.9078
    0.7832   -2.0352
```

Hér er vinstri dálkurinn $y_1 = y$ og hægri dálkurinn $y_2 = y'$