Heimaverkefni

Töluleg Greining

Þorsteinn Jón Gautason,
Garðar Árni Skarphéðinsson,
Emil Gauti Friðriksson

22. febrúar 2019

Fræðin

GPS staðsetningakerfið byggist á því að fjöldi gervitungla á sporbaug um jörðina senda samtímis út merki sem lenda öll á viðtakanda á jörðu niðri. Tíminn sem það tekur merkið að komast til viðtakandans og staðsetning gervitunglana við sendingu merkisins, er notað til þess að reikna út staðsetningu viðtakandans á yfirborði jarðar, í þrívíðum hnitum (x, y, z), með mikilli nákvæmni. Hin minnsta skekkja í mælingum getur valdið stórri skekkju í niðurstöðum, jafnvel upp á nokkra kílómetra, og þar með gert kerfið alveg gagnslaust. Sem betur fer eru atómklukkurnar í gervitunglunum sjálfum nákvæmar upp á nokkrar nanósekúndur, en það sama má ekki segja um klukkurnar í viðtakandanum í jörðu niðri. Vegna þessa bætist ein óþekkt stærð í reikninginn, þ.e. tímaskekkjan d. Til þess að fá niðurstöður fyrir óþekktu stærðirnar okkar fjórar, (x, y, z, d), viljum við því miða við fjarlægðir frá að minnsta kosti fjórum gervitunglum. Ef staðsetning gervitungls númer i er gefið með (A_i, B_i, C_i) þá getum við skrifað verkefnið upp sem jöfnuhneppið:

$$
\begin{aligned}
r_1(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_1)^2+(y-B_1)^2+(z-C_1)^2} - c(t_1-d) = 0\\
r_2(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_2)^2+(y-B_2)^2+(z-C_2)^2} - c(t_2-d) = 0\\
r_3(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_3)^2+(y-B_3)^2+(z-C_3)^2} - c(t_3-d) = 0\\
r_4(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_4)^2+(y-B_4)^2+(z-C_4)^2} - c(t_4-d) = 0
\end{aligned}
$$

þar sem hraði merkjanna frá gervitunglunum er ljóshraði: $c \approx 299792.458$ km/sek.
Þetta má umrita sem:

$$
\begin{aligned}
(x-A_1)^2+(y-B_1)^2+(z-C_1)^2 &= c^2(t_1-d)^2\\
(x-A_2)^2+(y-B_2)^2+(z-C_2)^2 &= c^2(t_2-d)^2\\
(x-A_3)^2+(y-B_3)^2+(z-C_3)^2 &= c^2(t_3-d)^2\\
(x-A_1)^2+(y-B_1)^2+(z-C_1)^2 &= c^2(t_1-d)^2
\end{aligned}
$$

Við munum nú framkvæma nokkrar útfærslur á lausnum fyrir þetta jöfnuhneppi.

Dæmi 1

Leysum jöfnuhneppið hér að ofan með fjölbreytu Newton aðferðinni. Finnið staðsetningu viðtakandans á jörðinni (x, y, z) og tímaskekkjuna d fyrir þekktar staðsetningar gervitunglanna í $(15600, 7540, 20140)$, $(18760, 2750, 18610)$, $(17610, 14630, 13480)$, $(19170, 610, 18390)$ í km, og tilsvarandi mæld tímagildi 0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242 í sekúndum. Látum upphafsvigurinn vera $(x_0, y_0, z_0, d_0) = (0, 0, 6370, 0)$. Lausnirnar eru um það bil $(x, y, z) = (-41.77271, -16.78919, 6370.0596)$ og $d = -3.201566 \cdot 10^{-3}$ sek.

Lausn

Við skrifuðum og notuðum eftirfarandi forrit:

```
function [r, d] = tolvu2_1(r0,r1, r2, r3, r4, n)
%tolvu2_1 tekur inn upphafsvigurinn r0 og vigrana r1, r2, r3 og r4 sem innihalda x, y og z hnit
%gervitungla ásamt mældun tímabilum d. Heiltalan n tilgreinir fjölda ítrana. Fallið skilar staðsetningu móttakara
%og tímaskekkju d.

%Skilgreinum breytur
syms x y z d
%Skilgreinum fasta og vigra
f = cell(4,1);
Df = cell(4);
f1 = zeros(4,1);
Df1 = zeros(4,4);
c = 299792.458;
vars = [x,y,z,d];
%Röðum föllum inn í vigurinn f
f{1} = sqrt((x - r1(1))^2 + (y - r1(2))^2 + (z - r1(3))^2) - c*(r1(4) - d);
f{2} = sqrt((x - r2(1))^2 + (y - r2(2))^2 + (z - r2(3))^2) - c*(r2(4) - d);
f{3} = sqrt((x - r3(1))^2 + (y - r3(2))^2 + (z - r3(3))^2) - c*(r3(4) - d);
f{4} = sqrt((x - r4(1))^2 + (y - r4(2))^2 + (z - r4(3))^2) - c*(r4(4) - d);
%Diffrum föllin og setjum niðurstöðurnar í fylkið Df
for i = 1:4
    for j = 1:4
        Df{i,j} = diff(f{i}, vars(j));
    end
end
%Breytum föllunum í fallshandföng
for i = 1:4
    f{i} = matlabFunction(f{i}, 'Vars', [x,y,z,d]);
    for j = 1:4
        Df{i,j} = matlabFunction(Df{i,j}, 'Vars', [x,y,z,d]);
    end
end
%Framkvæmum reikninga
for k = 1:n
    for i = 1:4
        h = f{i};
        f1(i) = h(r0(1), r0(2), r0(3), r0(4));
```

```
        for j = 1:4
            g = Df{i,j};
            Df1(i,j) = g(r0(1), r0(2), r0(3), r0(4));
        end
    end
    r0 = r0 - Df1\f1;
end
%Skilum niðurstöðum
r = [r0(1), r0(2), r0(3)];
d = r0(4);
end
```

Sem gefur niðurstöðurnar

```
>> [s1, d1] = tolvu2_1(r0,r1, r2, r3, r4, n)
s1 =
    -4.177270957072398e+01    -1.678919410647429e+01     6.370059559223409e+03
d1 =
    -3.201565829593686e-03
```

Niðurstöðurnar eru í samræmi við gefin gildi.

Dæmi 2

Skrifið `MATLAB` forrit sem leysir verkefnið með annars stigs jöfnu.

Lausn

Til þess að setja verkefnið okkar á form annars stigs jöfnu viljum við finna leið til þess að skipta út breytunum x, y, z fyrir jafngildar jöfnur háðar d, og enda þannig með jöfnu sem er aðeins háð d. Við getum gert þetta með því að draga neðri þrjár línur jöfnuhneppisins okkar frá þeirri fyrstu, og umrita jöfnuna sem það gefur okkar sem:

$$x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z + d \cdot \vec{u}_d + \vec{w} = 0$$

Þar sem að vigrarnir verða:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_x &= 2 \cdot (A_2 - A_1, A_3 - A_1, A_4 - A_1) \\
\vec{u}_y &= 2 \cdot (B_2 - B_1, B_3 - B_1, B_4 - B_1) \\
\vec{u}_z &= 2 \cdot (C_2 - C_1, C_3 - C_1, C_4 - C_1) \\
\vec{u}_d &= 2c^2 \cdot (t_1 - t_2, t_1 - t_3, t_1 - t_4)
\end{aligned}$$

og stök vikursins $\vec{w}$ eru:

$$w_j = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - A_{j+1}^2 - B_{j+1}^2 - C_{j+1}^2 + c^2(t_{j+1}^2 - t_1^2)), \quad j = 1, 2, 3.$$

Nú getum við notað þetta til þess að finna leið til þess að rita x sem fall af d með því að reikna ákveðuna:

$$det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z + d \cdot \vec{u}_d + \vec{w}) = 0$$

En vegna línulegra eiginleika þessara vigra getum við umritað þetta sem:

$$x \cdot det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x) + d \cdot det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_d) + det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{w}) = 0$$

Þ.a. við fáum:

$$x = -\frac{d \cdot \det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_d) + \det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{w})}{\det(\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x)}$$

og fáum á sama hátt fyrir y og z:

$$y = -\frac{d \cdot \det(\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_d) + \det(\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{w})}{\det(\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_y)}$$

$$z = -\frac{d \cdot \det(\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_d) + \det(\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{w})}{\det(\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z)}$$

Búum nú til `MATLAB` forrit sem reiknar þessar ákveður og stingum þessum útreiknuðu gildum inn í fyrstu jöfnuna í jöfnuhneppinu okkar. Jafnan verður þá annars stigs jafna í d sem við látum forritið leysa eins og hverja aðra annars stigs jöfnu. Sjá má forritið í `Skipanaskrá`.
Þegar kóðinn er keyrður fást lausnirnar $d = -3.2 \cdot 10^{-3}$ sek. og $d = 1.8 \cdot 10^{-1}$ sek. Fyrri lausnin er sú rétta sem við bjuggumst við að fá, en hin lausnin er aðeins afleiðing þess að við notuðum annars stigs lausn til þess að finna d, og fengum því aðra lausn með að auki.

Dæmi 3

Með Symbolic Toolbox í `MATLAB` má leysa Dæmi 2 á annan hátt. Skilgreinið breyturnar með `syms` og leysið síðan verkefnið með `solve` skipuninni. Notið `subs` til að meta niðurstöðurnar sem fleyti-tölur.

Lausn

Við skrifuðum og notuðum forritið

```
function [r, d] = tolvu2_3(r1, r2, r3, r4)
%Fallið reiknar út staðsetingu móttakara út frá upplýsingum frá
%gervitunglum. Það tekur inn 4 vigra sem innihalda x, y og z hnit fjögurra
%gervitungla ásamt sendingartímum.

%Skilgreinum breytur
syms x y z d
c = 299792.458;  %ljóshraði
%Skilgreinum föllin okkar
f = sqrt((x - r1(1))^2 + (y - r1(2))^2 + (z - r1(3))^2) - c*(r1(4) - d);
g = sqrt((x - r2(1))^2 + (y - r2(2))^2 + (z - r2(3))^2) - c*(r2(4) - d);
h = sqrt((x - r3(1))^2 + (y - r3(2))^2 + (z - r3(3))^2) - c*(r3(4) - d);
j = sqrt((x - r4(1))^2 + (y - r4(2))^2 + (z - r4(3))^2) - c*(r4(4) - d);

%Leysum með solve skipuninni
S = solve(f,g,h,j,x,y,z,d);

%Skilum niðurstöðum
r  = [double(S.x), double(S.y), double(S.z)];
d = double(S.d);
end
```

Sem gefur niðurstöðurnar

```
>> [s2, d2] = tolvu2_3(r1, r2, r3, r4)
s2 =
    -4.177270957081724e+01    -1.678919410651845e+01     6.370059559223352e+03
d2 =
    -3.201565829594065e-03
```

Niðurstöður eru í samræmi við gefin gildi.

Dæmi 4

Setjið nú upp próf fyrir skilyrðin á GPS verkefninu. Skilgreinum staðsetningu gervitunglanna (A_i, B_i, C_i) í kúluhnitum með (ρ, ϕ_i, θ_i) þ.a.

$$\begin{aligned} A_i &= \rho\cos(\phi_i)\cos(\theta_i) \\ B_i &= \rho\cos(\phi_i)\sin(\theta_i) \\ C_i &= \rho\sin(\phi_i) \end{aligned}$$

þar sem $\rho = 26570$ km er fast gildi, en $0 \leq \phi_i \leq \pi/2$ og $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$ fyrir $i = 1, ..., 4$ sem valið er af handahófi. ϕ hnitin eru takmörkuð þannig að gervitunglin fjögur séu í efra hálfhveli jarðar. Veljum $x = 0, y = 0, z = 6370, d = 0.0001$, og reiknið tilsvarandi fjarlægð frá gervitunglunum $R_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + (C_i - 6370)^2}$ og sendingatímann $t_i = d + R_i/c0$.
Við sérsníðum skilgreininu á skekkjumögnunarstuðli fyrir þetta verkefni. Atóm klukkurnar hafa skekkju upp á aðeins 10 nanósekúndur, eða 10^{-8} sekúndur. Því er mikilvægt að skoða áhrif breytinga í sendingartíma af þessari stærðargráðu. Við ljóshraða svara $\Delta t_i = 10^{-8}$ sekúndur til $10^{-8}c \approx 3$ metra. Látum úttaksskekkjuna vera breytingu í staðsetningu $||(\Delta x, \Delta y, \Delta z)||_\infty$, sem kemur til vegna breytinga í t_i, einnig í metrum. Þá getum við skilgreint einingalaust:

$$\text{skekkjumögnunarstuðull} = \frac{||(\Delta x, \Delta y, \Delta z)||_\infty}{c||(\Delta t_1, ..., \Delta t_m)||_\infty}$$

og við getum einnig skilgreint ástandtölu verkefnisins sem hámarks skekkjumögnunarstuðul fyrir öll lítil Δt_i.
Látum öll t_i vera þannig að $\Delta t_i = +10^{-8}$ eða -10^{-8}, en þannig að ekki öll hafi sama gildi. Ritum nýju lausnina á jöfnuhneppinu sem $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{d})$ og reiknið breytinguna í staðsetningu $||(\Delta x, \Delta y, \Delta z)||_\infty$ og skekkjumögnunarstuðulinn. Prófið mismunandi tilfelli fyrir valda tíma Δt_i. Hver er hámarksskekkja fyrir staðsetningu í metrum? Metið ástandstöluna fyrir verkefnið út frá skekkjumögnunarstuðlunum sem þið hafið reiknað.

Lausn

Við skrifuðum reikniritið

```
%Stillum slembitölugjafann
rng(2908)
%Keyrum fyrir mismunandi tímaskekkjur
for n = 1:3
    %Núllstillum tímabundna vigra
    tmean4 = zeros(1,10);
    terror4 = zeros(1,10);
    %Keyrum 10 sinnum og tökum svo meðaltal
    for j = 1:10
        %Reiknum staðsetningar í kartesískum hnitum
        for i = 1:4
            phi = rand*pi/2;
            theta = rand*2*pi;
            ABC1(i,:) = ABC(rho,phi,theta);
        end
        %Reiknum radíal fjarlægð og sendingartíma
        for i = 1:4
            R4(i) = norm(ABC1(i,:) - pos);
            t4(i) = dd + R4(i)/c + delta(n,i);
```

```
        end
        %Búum til nýjan staðsetningarvigur sem inniheldur sendingartíma
        for i = 1:4
            stad4(i,:) = [ABC1(i,:), t4(i)];
        end
        %Fáum reiknaða niðurstöðu með forriti úr 3. lið
        [r_n4, d_n4] = tolvu2_1(r0, stad4(1,:), stad4(2,:), stad4(3,:),
         ↪  stad4(4,:), n);
        %Tökum meðaltal af áhugaverðum stærðum
        tmean4(j) = norm(r_n4 - pos, inf);
        terror4(j) = norm(r_n4 - pos, inf)/(c*1e-8);
    end
    %Reiknum áhugaverðar stærðir
    error4(n) = mean(tmean4)*1e3;
    emf4(n) = mean(terror4);
end
```

Þetta gefur niðurstöðurnar

```
emf4 =
     4.401193309866455e+00     9.120733409101074e+00     1.437247040686717e+01
error4 =
     1.319444560498020e+01     2.734327087477130e+01     4.308758230806968e+01
```

Þar sem fyrsta gildið er reiknað með einu gervitungli sem hefur neikvæða tímaskekkju, seinna gildið er reiknað með tveimur sem hafa neikvæða tímaskekkju og það þriðja með þremur. Við sjáum að skekkjumögnunarstuðullinn og skekkjan er minnst þegar flest tunglin eru með jákvæða tímaskekkju.

Dæmi 5

Endurtakið Dæmi 4 fyrir hóp af gervitunglum sem öll eru nokkuð nálægt hvoru öðru. Veljið öll ϕ_i innan við 5% frá hvoru öðru, og öll θ_i innan við 5% af hvoru öðru. Leysið með og án sömu inntaksskekkju og í Dæmi 4. Finnið hámarkskekkjuna fyrir staðsetningu og skekkjumögnunarstuðulinn. Berið saman niðurstöðurnar sem fást þegar gervitunglin eru þétt saman og þegar þau eru dreifð.

Lausn

Við skrifuðum reikniritið

```
%Upphafsstillum slembitölugjafa
rng(2908);
%Keyrum fyrir mismunandi tímaskekkjur í gervitunglum
for n = 1:3
    %Núllstillum tímabundna vigra
    tmean5 = zeros(1,10);
    terror5 = tmean5;
    tcond5 = tmean5;
    %Byrjum með slembin horn
    phi1 = rand*pi/2;
    theta1 = rand*2*pi;
    %Keyrum 10 sinnum og tökum svo meðaltal
    for j = 1:10
        %Reiknum staðsetningu gervitungla í kartesískum hnitum
        ABC1(1,:) = ABC(rho, phi1, theta1);
        for i = 2:4
            phi = phi1 - 0.025*2*pi + rand*0.05*2*pi;
            theta = theta1 - 0.025*2*pi + rand*0.05*2*pi;
            ABC1(i, :) = ABC(rho,phi,theta);
        end
        %Reiknum radíal fjarlægð og sendingartíma
        for i = 1:4
            R5(i) = norm(ABC1(i,:) - pos);
            t5(i) = dd + R5(i)/c + delta(n,i);
        end
        %Búum til nýjan staðsetningarvigur sem inniheldur tímaskekkju
        for i = 1:4
            stad5(i,:) = [ABC1(i,:), t5(i)];
        end
        %Fáum reiknaða niðurstöðu með forriti úr 3. lið
        [r_n5, d_n5] = tolvu2_1(r0, stad5(1,:), stad5(2,:), stad5(3,:),
         ↪ stad5(4,:), n);
        %Tökum meðaltal af áhugaverðum stærðum
        tmean5(j) = norm(r_n5 - pos, inf);
        terror5(j) = norm(r_n5 - pos, inf)/(c*1e-8);
    end
    %Reiknum áhugaverðar stærðir
    error5(n) = mean(tmean5)*1e3;
    emf5(n) = mean(terror5);
end
```

Þetta gefur niðurstöðurnar

```
emf5 =
     2.125043673231399e+06     2.844268864468118e+05     4.010540072344265e+04
error5 =
     6.370720661553898e+06     8.526903540917658e+05     1.202329666195585e+05
```

Þar sem gildin eru með sama fyrirkomulagi og í lið 4. Nú er uppröðunin þar sem flest tunglin hafa neikvæða skekkju með minnsta skekkjumögnunarstuðulinn og skekkju. Tökum einnig eftir því að mesta skekkjan er upp á 6.37 Mm, eða 6370 km, sem er um 16% af ummáli jarðar, svo skynsamlegt væri að reyna að hafa sporbrautir tunglanna þannig að oftast sé hægt að taka mælingar frá vel dreifðum gervitunglum.

Dæmi 6

Ákvarðið hvort lækka megi skekkjuna og ástandstöluna fyrir gervitunglamælingarnar með því að bæta við fleiri gervitunglun. Skoðið aftur dreifðu gervitunglin úr Dæmi 4 og bætið við fjórum í viðbót. Hannið Gauss-Newton ítrun til þess að leysa lágmörks kvaðrata verkefnið fyrir átta jöfnur með fjórum breytum, (x, y, z, d). Hvað er góður upphafsvigur? Finnið hámarksskekkju í GPS staðsetningu, og metið ástandstöluna. Takið saman niðurstöðurnar ykkar frá fjórum dreifðum, fjórum þéttum og átta dreifðum gervitunglum. Hvaða tilfelli er best og hver er hámarks GPS skekkjan, í metrum, sem búast mætti við út aðeins vegna merkjanna frá gervitunglunum?

Lausn

Við skrifuðum reikniritið

```
%Upphafsstillum slembitölugjafa
rng(2508)
%Keyrum fyrir mismunandi tímaskekkjur
for n = 1:7
    %Núllstillum tímabundna vigra
    tmean6 = zeros(1,10);
    terror6 = zeros(1,10);
    %Keyrum 10 sinnum og tökum meðaltal
    for j = 1:10
        %Veljum slembnar staðsetningar fyrir gervitunglin
        for i = 1:8
            phi = rand*pi/2;
            theta = rand*2*pi;
            ABC16(i,:) = ABC(rho,phi,theta);
        end
        %Reiknum sendingartíma og radíal fjarlægð
        for i = 1:8
            R6(i) = norm(ABC16(i,:) - pos);
            t6(i) = dd + R6(i)/c + delta6(n,i);
        end
        %Búum til fylki til notkunar í reikningum
        for i = 1:8
            r6(i,:) = [ABC16(i,:), t6(i)];
        end
        %Framkvæmum reikninga
        rx = tolvu2_61(r0,r6,n);
        tmean6(j) = norm(rx(1:3) - pos, inf);
        terror6(j) = norm(rx(1:3) - pos, inf)/(c*1e-8);
    end
    %Skilum niðurstöðum
    error6(n) = mean(tmean6)*1e3;
    emf6(n) = mean(terror6);
end
```

Þetta gefur niðurstöðurnar

```
emf6 =
  Columns 1 through 5
```

```
      7.030969215666395e-04     7.734678589138995e-04     2.091662954281205e-03
        ↪  6.079705378636498e+00     1.568872717635756e-03
  Columns 6 through 7
      9.800616451295710e-04     2.205703913983312e-03
error6 =
  Columns 1 through 5
      2.107831543286961e-03     2.318798306077952e-03     6.270647783715039e-03
        ↪  1.822649819377256e+01     4.703362083091633e-03
  Columns 6 through 7
      2.938150895849178e-03     6.612533979932778e-03
```

Við sjáum að við fáum mestu skekkju og skekkjumögnunarstuðul þegar um hlemingur gervitunglanna er með neikvæða tímaskekkju og helmingur með jákvæða tímaskekkju. Athugum einnig að öll gildin eru hér minni en í lið 4 þar sem við vorum einungis með fjögur gervitungl.
Tökum öll gildin saman í töflu:

Tafla 1: Tafla sem sýnir emf-gildi

4 gervitungl	4 hópuð gervitungl	8 gervitungl	Tímaskekkjur
4.401	2125043.673	0.000703	(++++)+++ -
9.120	284426.886	0.000773	(++++)++ - -
14.372	40105.400	0.00209	(++++)+ - - -
		6.07	++++ - - - -
		0.00156	+++ - - - - -
		0.000980	++ - - - - - -
		0.00220	+ - - - - - - -

Tafla 2: Tafla sem sýnir skekkju í metrum

4 gervitungl	4 hópuð gervitungl	8 gervitungl	Tímaskekkjur
13.194m	6370720.661m	0.00210m	(++++)+++ -
27.343m	852690.354m	0.00231m	(++++)++ - -
43.087m	120232.966m	0.00627m	(++++)+ - - -
		18.226m	++++ - - - -
		0.00470m	+++ - - - - -
		0.00293m	++ - - - - - -
		0.00661m	+ - - - - - - -

Af þessum gögnum sjáum við að mælingarnar verða talsvert ónákvæmari þegar gervitunglin eru hópuð saman frekar en dreifð. Við sjáum einnig að nákvæmnin eykst þegar við bætum við fleiri gervitunglum, eins og búast mátti við. Athyglisvert er að sjá að skekkjumögnunarstuðullinn virðist ná hámarki þegar við höfum jafnan fjölda gervitungla með jákvæða tímaskekkju annars vegar og neikvæða hins vegar. Ef við gerum ráð fyrir að hverju sinni séu að minnsta kosti 5 gervitungl að senda á okkur merki þá getum við ályktað að mesta mögulega skekkjan sem við gætum fengið sé af stærðargráðunni 10^2, en það er þó afar ólíklegt.

Forrit

Skipanaskrá

```
%% Skilgreinum fasta og stærðir
%%Fyrsti og annar liður
r1 = [15600, 7540, 20140, 0.07074];
r2 = [18760, 2750, 18610, 0.07220];
r3 = [17610, 14630, 13480, 0.07690];
r4 = [19170, 610, 18390, 0.07242];
r0 = [0, 0, 6370, 0];
n = 100;
%%Fjórði og fimmti liður
c = 299792.458;
dd = 0.0001;
pos = [0, 0, 6370];
rho = 26570;
ABC1 = zeros(4, 3);
R4 = zeros(1,4);
R5 = R4;
t4 = R4;
t5 = R4;
stad4 = zeros(4);
stad5 = stad4;
emf4 = zeros(1,3);
error4 = emf4;
emf5 = emf4;
error5 = emf4;
delta = [1,1,1,-1;1,1,-1,-1;1,-1,-1,-1].*1e-8;
ABC = @(rho, phi, theta) [rho*cos(phi)*cos(theta), rho*cos(phi)*sin(theta),
 ↪  rho*sin(phi)];
%%Sjötti liður
delta6 = zeros(7,8);
for i = 1:7
    delta6(i,:) = [ones(1, 8-i), ones(1, i)*(-1)];
end
ABC16 = zeros(8, 3);
R6 = zeros(1,8);
t6 = zeros(1,8);
r6 = zeros(8,4);
emf6 = zeros(1,7);
error6 = emf6;
%% Liður 1
[s1, d1] = tolvu2_1(r0,r1, r2, r3, r4, n);
%% Liður 2
syms d x y z

A1 = 15600;
A2 = 18760;
A3 = 17610;
A4 = 19170;
B1 = 7540;
```

```
B2 = 2750;
B3 = 14630;
B4 = 610;
C1 = 20140;
C2 = 18610;
C3 = 13480;
C4 = 18390;
t21 = 0.07074;
t22 = 0.07220;
t23 = 0.07690;
t24 = 0.07242;


M1x = [2*(B2-B1), 2*(C2-C1), 2*(A2-A1); 2*(B3-B1), 2*(C3-C1), 2*(A3-A1);
 ↪  2*(B4-B1), 2*(C4-C1), 2*(A4-A1)];
M2x = [2*(B2-B1), 2*(C2-C1), 2*c^2*(t21-t22); 2*(B3-B1), 2*(C3-C1),
 ↪  2*c^2*(t21-t23); 2*(B4-B1), 2*(C4-C1), 2*c^2*(t21-t24)];
M3x = [2*(B2-B1), 2*(C2-C1),
 ↪  (A1^2+B1^2+C1^2)-(A2^2+B2^2+C2^2)+c^2*(t22^2-t21^2); 2*(B3-B1), 2*(C3-C1),
 ↪  (A1^2+B1^2+C1^2)-(A3^2+B3^2+C3^2)+c^2*(t23^2-t21^2); 2*(B4-B1),
 ↪  2*(C4-C1),(A1^2+B1^2+C1^2)-(A4^2+B4^2+C4^2)+c^2*(t24^2-t21^2)];
m21x = det(M2x)/det(M1x);
m31x = det(M3x)/det(M1x);


M1y = [2*(A2-A1), 2*(C2-C1), 2*(B2-B1); 2*(A3-A1), 2*(C3-C1), 2*(B3-B1);
 ↪  2*(A4-A1), 2*(C4-C1), 2*(B4-B1)];
M2y = [2*(A2-A1), 2*(C2-C1), 2*c^2*(t21-t22); 2*(A3-A1), 2*(C3-C1),
 ↪  2*c^2*(t21-t23); 2*(A4-A1), 2*(C4-C1), 2*c^2*(t21-t24)];
M3y = [2*(A2-A1), 2*(C2-C1),
 ↪  (A1^2+B1^2+C1^2)-(A2^2+B2^2+C2^2)+c^2*(t22^2-t21^2); 2*(A3-A1), 2*(C3-C1),
 ↪  (A1^2+B1^2+C1^2)-(A3^2+B3^2+C3^2)+c^2*(t23^2-t21^2); 2*(A4-A1),
 ↪  2*(C4-C1),(A1^2+B1^2+C1^2)-(A4^2+B4^2+C4^2)+c^2*(t24^2-t21^2)];
m21y = det(M2y)/det(M1y);
m31y = det(M3y)/det(M1y);


M1z = [2*(A2-A1), 2*(B2-B1), 2*(C2-C1); 2*(A3-A1), 2*(B3-B1), 2*(C3-C1);
 ↪  2*(A4-A1), 2*(B4-B1), 2*(C4-C1)];
M2z = [2*(A2-A1), 2*(B2-B1), 2*c^2*(t21-t22); 2*(A3-A1), 2*(B3-B1),
 ↪  2*c^2*(t21-t23); 2*(A4-A1), 2*(B4-B1), 2*c^2*(t21-t24)];
M3z = [2*(A2-A1), 2*(B2-B1),
 ↪  (A1^2+B1^2+C1^2)-(A2^2+B2^2+C2^2)+c^2*(t22^2-t21^2); 2*(A3-A1), 2*(B3-B1),
 ↪  (A1^2+B1^2+C1^2)-(A3^2+B3^2+C3^2)+c^2*(t23^2-t21^2); 2*(A4-A1),
 ↪  2*(B4-B1),(A1^2+B1^2+C1^2)-(A4^2+B4^2+C4^2)+c^2*(t24^2-t21^2)];
m21z = det(M2z)/det(M1z);
m31z = det(M3z)/det(M1z);


a = m21x^2+m21y^2+m21z^2-c^2;
```

```
b = 2*m21x*m31x + 2*m21x*A1 + 2*m21y*m31y + 2*m21y*B1 + 2*m21z*m31z + 2*m21z*C1
 ↪  + 2*c^2*t21;
cc = m31x^2 + 2*m31x*A1 +A1^2 + m31y^2 + 2*m31y*B1 + B1^2 + m31z^2 + 2*m31z*C1
 ↪  + C1^2 - c^2*t21^2;
lausn1 = (-b+sqrt(b^2-4*a*cc))/(2*a);
lausn2 = (-b-sqrt(b^2-4*a*cc))/(2*a);
%% Liður 3
[s2, d2] = tolvu2_3(r1, r2, r3, r4);
%% Liður 4
%Keyrum fyrir mismunandi tímaskekkjur
rng(2908)
for n = 1:3
    %Núllstillum tímabundna vigra
    tmean4 = zeros(1,10);
    terror4 = zeros(1,10);
    tcond4 = zeros(1,10);
    %Keyrum 10 sinnum og tökum svo meðaltal
    for j = 1:10
        %Reiknum staðsetningar í kartesískum hnitum
        for i = 1:4
            phi = rand*pi/2;
            theta = rand*2*pi;
            ABC1(i,:) = ABC(rho,phi,theta);
        end
        %Reiknum radíal fjarlægð og sendingartíma
        for i = 1:4
            R4(i) = norm(ABC1(i,:) - pos);
            t4(i) = dd + R4(i)/c + delta(n,i);
        end
        %Búum til nýjan staðsetningarvigur sem inniheldur sendingartíma
        for i = 1:4
            stad4(i,:) = [ABC1(i,:), t4(i)];
        end
        %Fáum reiknaða niðurstöðu með forriti úr 3. lið
        [r_n4, d_n4] = tolvu2_1(r0, stad4(1,:), stad4(2,:), stad4(3,:),
         ↪  stad4(4,:), 10);
        %Tökum meðaltal af áhugaverðum stærðum
        tmean4(j) = norm(r_n4 - pos, inf);
        terror4(j) = norm(r_n4 - pos, inf)/(c*1e-8);
    end
    %Reiknum áhugaverðar stærðir
    error4(n) = mean(tmean4)*1e3;
    emf4(n) = mean(terror4);
end
%% Liður 5
%Keyrum fyrir mismunandi tímaskekkjur í gervitunglum
rng(2908);
for n = 1:3
    %Núllstillum tímabundna vigra
    tmean5 = zeros(1,10);
    terror5 = tmean5;
```

```
    tcond5 = tmean5;
    %Byrjum með slembin horn
    phi1 = rand*pi/2;
    theta1 = rand*2*pi;
    %Keyrum 10 sinnum og tökum svo meðaltal
    for j = 1:10
        %Reiknum staðsetningu gervitungla í kartesískum hnitum
        ABC1(1,:) = ABC(rho, phi1, theta1);
        for i = 2:4
            phi = phi1 - 0.025*2*pi + rand*0.05*2*pi;
            theta = theta1 - 0.025*2*pi + rand*0.05*2*pi;
            ABC1(i, :) = ABC(rho,phi,theta);
        end
        %Reiknum radíal fjarlægð og sendingartíma
        for i = 1:4
            R5(i) = norm(ABC1(i,:) - pos);
            t5(i) = dd + R5(i)/c + delta(n,i);
        end
        %Búum til nýjan staðsetningarvigur sem inniheldur tímaskekkju
        for i = 1:4
            stad5(i,:) = [ABC1(i,:), t5(i)];
        end
        %Fáum reiknaða niðurstöðu með forriti úr 3. lið
        [r_n5, d_n5] = tolvu2_1(r0, stad5(1,:), stad5(2,:), stad5(3,:),
        ↪ stad5(4,:), n);
        %Tökum meðaltal af áhugaverðum stærðum
        tmean5(j) = norm(r_n5 - pos, inf);
        terror5(j) = norm(r_n5 - pos, inf)/(c*1e-8);
    end
    %Reiknum áhugaverðar stærðir
    error5(n) = mean(tmean5)*1e3;
    emf5(n) = mean(terror5);
end
%% Liður 6
%Keyrum fyrir mismunandi tímaskekkjur
rng(2508)
for n = 1:7
    %Núllstillum tímabundna vigra
    tmean6 = zeros(1,10);
    terror6 = zeros(1,10);
    %Keyrum 10 sinnum og tökum meðaltal
    for j = 1:10
        %Veljum slembnar staðsetningar fyrir gervitunglin
        for i = 1:8
            phi = rand*pi/2;
            theta = rand*2*pi;
            ABC16(i,:) = ABC(rho,phi,theta);
        end
        %Reiknum sendingartíma og radíal fjarlægð
        for i = 1:8
            R6(i) = norm(ABC16(i,:) - pos);
```

```
            t6(i) = dd + R6(i)/c + delta6(n,i);
        end
        %Búum til fylki til notkunar í reikningum
        for i = 1:8
            r6(i,:) = [ABC16(i,:), t6(i)];
        end
        %Framkvæmum reikninga
        rx = tolvu2_61(r0,r6,n);
        tmean6(j) = norm(rx(1:3) - pos, inf);
        terror6(j) = norm(rx(1:3) - pos, inf)/(c*1e-8);
    end
    error6(n) = mean(tmean6)*1e3;
    emf6(n) = mean(terror6);
end
```

forrit1

```
function [r, d] = tolvu2_1(r0,r1, r2, r3, r4, n)
%tolvu2_1 tekur inn upphafsvigurinn r0 og vigrana r1, r2, r3 og r4 sem
 ↪  innihalda x, y og z hnit
%gervitungla ásamt mældun tímabilum d. Heiltalan n tilgreinir fjölda ítrana.
 ↪  Fallið skilar staðsetningu móttakara
%og tímaskekkju d.

%Skilgreinum breytur
syms x y z d
%Skilgreinum fasta og vigra
f = cell(4,1);
Df = cell(4);
f1 = zeros(4,1);
Df1 = zeros(4,4);
c = 299792.458;
vars = [x,y,z,d];

%Röðum föllum inn í vigurinn f
f{1} = sqrt((x - r1(1))^2 + (y - r1(2))^2 + (z - r1(3))^2) - c*(r1(4) - d);
f{2} = sqrt((x - r2(1))^2 + (y - r2(2))^2 + (z - r2(3))^2) - c*(r2(4) - d);
f{3} = sqrt((x - r3(1))^2 + (y - r3(2))^2 + (z - r3(3))^2) - c*(r3(4) - d);
f{4} = sqrt((x - r4(1))^2 + (y - r4(2))^2 + (z - r4(3))^2) - c*(r4(4) - d);
%Diffrum föllin og setjum niðurstöðurnar í fylkið Df
for i = 1:4
    for j = 1:4
        Df{i,j} = diff(f{i}, vars(j));
    end
end
%Breytum föllunum í fallshandföng
for i = 1:4
    f{i} = matlabFunction(f{i}, 'Vars', [x,y,z,d]);
    for j = 1:4
        Df{i,j} = matlabFunction(Df{i,j}, 'Vars', [x,y,z,d]);
    end
end
```

```
%Framkvæmum reikninga
for k = 1:n
    for i = 1:4
        h = f{i};
        f1(i) = h(r0(1), r0(2), r0(3), r0(4));
        for j = 1:4
            g = Df{i,j};
            Df1(i,j) = g(r0(1), r0(2), r0(3), r0(4));
        end
    end
    r0 = r0 - Df1\f1;
end
%Skilum niðurstöðum
r = [r0(1), r0(2), r0(3)];
d = r0(4);
end
```

forrit2

```
function [r, d] = tolvu2_3(r1, r2, r3, r4)
%Fallið reiknar út staðsetingu móttakara út frá upplýsingum frá
%gervitunglum. Það tekur inn 4 vigra sem innihalda x, y og z hnit fjögurra
%gervitungla ásamt sendingartímum.

%Skilgreinum breytur
syms x y z d
c = 299792.458;  %ljóshraði
%Skilgreinum föllin okkar
f = sqrt((x - r1(1))^2 + (y - r1(2))^2 + (z - r1(3))^2) - c*(r1(4) - d);
g = sqrt((x - r2(1))^2 + (y - r2(2))^2 + (z - r2(3))^2) - c*(r2(4) - d);
h = sqrt((x - r3(1))^2 + (y - r3(2))^2 + (z - r3(3))^2) - c*(r3(4) - d);
j = sqrt((x - r4(1))^2 + (y - r4(2))^2 + (z - r4(3))^2) - c*(r4(4) - d);

%Leysum með solve skipuninni
S = solve(f,g,h,j,x,y,z,d);

%Skilum niðurstöðum
r  = [double(S.x), double(S.y), double(S.z)];
d = double(S.d);
end
```

forrit3

```
function [r0, d] = tolvu2_61(init,s,n)
%Fallið reiknar út staðsetningu móttakara með Gauss-Newton aðferð.
%init: Vigur sem inniheldur upphafsgisk fyrir x, y, z og d.
%s:    Staðsetningarfylki, dálkar innihalda x, y og z hnit gervitungla ásamt
%      mældum tíma t. Línur eru gervitungl.
%n:    Heiltala sem tilgreinir fjölda ítrana.

%Skilgreinum symbólískar breytur
syms x y z d
```

```
%Skilgreinum fasta og upphafsstillum fylki
c = 299792.458;  %ljóshraði
r = cell(8,1);   %Fylki fyrir formúlur
Dr = cell(8,4);  %Fylki fyrir diffraðar formúlur
A = zeros(8,4);  %Fylki fyrir útreikninga
B = zeros(8,1);  %Fylki fyrir útreikninga
vars = [x,y,z,d];%Fylki af breytum
%Röðum jöfnunum inn í fylkið r
r{1} = sqrt((x - s(1,1))^2 + (y - s(1,2))^2 + (z - s(1,3))^2) - c*(s(1,4) - d);
r{2} = sqrt((x - s(2,1))^2 + (y - s(2,2))^2 + (z - s(2,3))^2) - c*(s(2,4) - d);
r{3} = sqrt((x - s(3,1))^2 + (y - s(3,2))^2 + (z - s(3,3))^2) - c*(s(3,4) - d);
r{4} = sqrt((x - s(4,1))^2 + (y - s(4,2))^2 + (z - s(4,3))^2) - c*(s(4,4) - d);
r{5} = sqrt((x - s(5,1))^2 + (y - s(5,2))^2 + (z - s(5,3))^2) - c*(s(5,4) - d);
r{6} = sqrt((x - s(6,1))^2 + (y - s(6,2))^2 + (z - s(6,3))^2) - c*(s(6,4) - d);
r{7} = sqrt((x - s(7,1))^2 + (y - s(7,2))^2 + (z - s(7,3))^2) - c*(s(7,4) - d);
r{8} = sqrt((x - s(8,1))^2 + (y - s(8,2))^2 + (z - s(8,3))^2) - c*(s(8,4) - d);
%Diffrum jöfnurnar í r m.t.t. veiðeigandi breyta og röðum í fylkið Dr.
for i = 1:8
    for j = 1:4
        Dr{i,j} = diff(r{i}, vars(j));
    end
end
%Breytum symbólísku stæðunum í fallshandföng
for i = 1:8
    r{i} = matlabFunction(r{i}, 'Vars', [x,y,z,d]);
    for j = 1:4
        Dr{i,j} = matlabFunction(Dr{i,j}, 'Vars', [x,y,z,d]);
    end
end
%Framkvæmum reikningana n sinnum
for k = 1:n
    for i = 1:8
        tempr = r{i};
        B(i) = tempr(init(1),init(2),init(3),init(4));
        for j = 1:4
            tempd = Dr{i,j};
            A(i,j) = tempd(init(1),init(2),init(3),init(4));
        end
    end
    v = (-A'*B)\(A'*A);
    init = init + v;
end
%Skilum niðurstöðum
r0 = init(1:3);
d = init(4);
end
```

Þorsteinn Jón	Emil Gauti	Garðar Árni