Heimadæmi 4

Töluleg Greining

Emil Gauti Friðriksson

22. febrúar 2019

Dæmi 1

Eftir að gefna forritinu hefur verið breytt þá fékkst eftirfarandi:

```
function x_new=mymatitr(A,b,s)
[n,m]=size(A);
w=1.1;
assert(n == m && n == length(b));
x_old=zeros(n,1);
x_new=x_old;
for k=1:s
    for i=1:n
        x_new(i)=b(i);
        for j=1:n
            if j~=i
                %x_new(i)=x_new(i)-A(i,j)*x_old(j); % Jacobi
                 x_new(i)=x_new(i)-A(i,j)*x_new(j); % Gauss-Seidel
            end
        end
        x_new(i)=x_new(i)/A(i,i);
        x_new(i)=(1-w)*x_old(i) + w*x_new(i);%sleppa þessari fyrir Gauss-Seidel
    end
    x_old=x_new;
end
end
```

Niðurstöður forrits með gefnum gildum í dæminu skilaði sömu niðurstöðum og bókin hefur.

Dæmi 2

Dæmi 8(b) úr 2.6 Exercises

Solve the system of equations by finding the Cholesky factorization of A followed by two back substitutions.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Svar

Fyrsta stakið í R er $R_{11} = \sqrt{4} = 2$ og síðan eru $R_{1,2} = \frac{-2}{R_{11}} = -1$ og $R_{1,3} = \frac{0}{R_{11}} = 0$ og fáum þá að $uu^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Sem við drögum frá $A_{2:3,2:3}$ og fáum $R_{2,2} = \sqrt{A_{2,2} - 1} = 1$ og $R_{2,3} = (A_{2,3} - 0)/1 = -1$. Nú er $R_{33} = \sqrt{5 - (-1)(-1)} = 2$
Því fáum við

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Athugum nú hvort þetta sé rétt

$$R^T R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Mergjað!
Við skulum nú finna gildin á $[x_1, x_2, x_3]$. Athugum því $R^T c = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Fáum úr þessu gildin $[c_1, c_2, c_3] = [0, 3, -2]$ Athugum þá $Rx = c$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

úr þessu fæ ég gildin: $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, -1]$

Dæmi 13(a) úr 2.6 Exercises

Solve the problems by carrying out the Conjugate Gradient Method by hand.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar

Athugum að rétt svar(fundið með hefðbundum fylkjaruðning) er $[u, v] = [3, -1]$ Áður en við hefjum reikninga, ákveðum að velja upphafsgildin okkar $x_0 = [0, 0]$ og þá $r_0 = b = [1, 1]$.

Hefjum leikana:

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{d_0^T A d_0} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{5}$$

$$x_1 = x_0 + d_0 + \alpha d_0 = 1/5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = r_0 - \alpha_0 A d_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1/5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} = \frac{2 \cdot (2/5)^2}{2} = \frac{4}{25}$$

$$d_1 = r_1 + \beta_0 d_0 = 1/5 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} (4/25) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (2/25) \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1^T r_1}{d^T A d_1} = \frac{(1/25) * 2^3}{(2/25)^2 \begin{bmatrix} 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}} = \frac{8}{\frac{4}{25} \cdot 10} = 5$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = (1/5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \frac{2}{25} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Þetta er sama svar og við fengum í upphafi dæmisins.

Dæmi 3

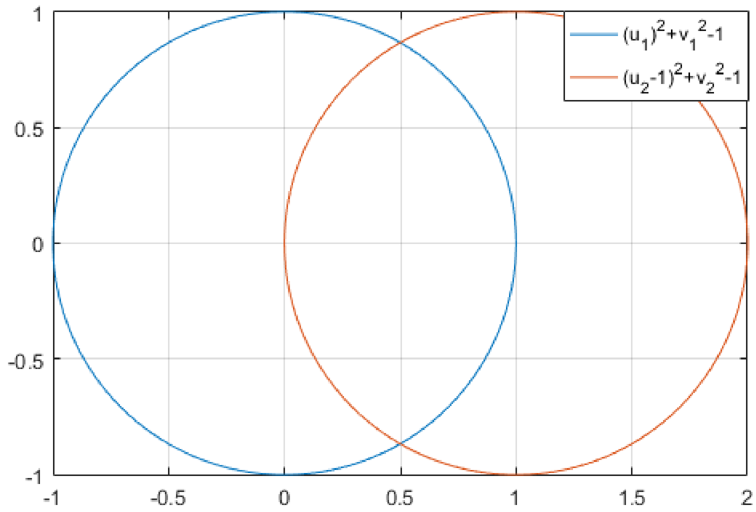
Dæmi 3(a) úr 2.7 Exercises

Sketch the two curves in the uv-plane, and find all solutions exactly by simple algebra.

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ (u-1)^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Svar

Teiknum mynd af þessum tveim ferlum:



Byrjum á að draga línu 1 frá línu 2 og fáum þá

$$\begin{aligned} (u-1)^2 - u^2 &= 0 \\ -2u + 1 &= 0 \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{2} \quad \text{Stingum inn í efri jöfnuna} \\ \frac{1}{4} + v^2 &= 1 \\ \Rightarrow v &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Sjáum að niðurstöðurnar okkar fyrir skurðpunkta hringjanna tveggja er $[u_1, v_1] = [\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}]$ og $[u_2, v_2] = [\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}]$ sem er í samræmi við mynd.

Dæmi 4 úr 2.7 Exercises

Apply two steps of Newton's Method to the systems in Exercise 3, with starting point (1,1).

Svar

Höfum $DF(x) = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ 2(u-1) & 2v \end{bmatrix}$.
Við viljum leysa þegar búið er að stinga x_0 inn í $DF(x)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sem hefur lausnina $s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ því fáum við að $x_1 = x_0 + s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
Byrjum ferlið aftur en nú notum við x_1
Viljum því leysa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

sem hefur lausnina $s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$
Því fáum við $x_2 = x_1 + s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$ Sjáum að þetta er ekki alveg rétt, $\frac{7}{8} \neq \sqrt{\frac{3}{4}}$ en er þó ágætis nálgun.

Dæmi 5 úr 2.7 Exercises

Apply two steps of Broyden I to the systems in Exercise 3, with starting point (1,1), using A0 = I .

Svar