Heimadæmi 6

Töluleg Greining

Emil Gauti Friðriksson

22. febrúar 2019

Dæmi 1

Gerið dæmi 4 í Exercises 3.2 í bókinni. Notið svo forritið newtdd til þess að reikna stuðla brúunarmargliðunnar og skrið hana niður. Notið svo nest til þess að reikna gildi brúunarmargliðunnar í 1 og 5 og berið saman við matið á villunni. Metið að lokum hámarksvilluna á öllu bilinu [0, 10] þegar þið notið bestu 5-ta stigs brúunarmargliðuna.

Dæmi 4 í exercise 3.2

Consider the interpolating polynomial for $f(x) = 1/(x+5)$ with interpolation nodes $x = 0, 2, 4, 6, 8, 10$. Find an upper bound for the interpolation error at (a) $x = 1$ and (b) $x = 5$.

Svar

Byrjum á því að finna afleiður fallsins f:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+5)^{-1} \\
f^1(x) &= -(x+5)^{-2} \\
f^2(x) &= 2(x+5)^{-3} \\
f^3(x) &= -6(x+5)^{-4} \\
f^4(x) &= 24(x+5)^{-5} \\
f^5(x) &= -120(x+5)^{-6} \\
f^6(x) &= 720(x+5)^{-7}
\end{aligned}
$$

fyrir $x \in [0, 10]$ þá tekur sjötta afleiðan hágildi í $x = 0$ svo við fáum hámarksskekkju:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - P(x)| &= \left| \frac{1}{6!}(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)f^{(6)}(0) \right| \\
&= \left| \frac{720}{720(0+5)^7}(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)(x-10) \right|
\end{aligned}
$$

Athugum nú að ef við setjum $x = 1$ og $x = 5$ þá fáum við eftirfarandi skekkjur:

$$
\begin{aligned}
|f(1) - P(1)| &\leq \left| \frac{1}{5^7}(-1)(-3)(-5)(-7)(-9) \right| \approx 0.01210 \\
|f(1) - P(1)| &\leq \left| \frac{1}{5^7}(5)(3)(1)(-1)(-3)(-5) \right| = 0.00288
\end{aligned}
$$

Athugum þetta í Matlab:

```
X =[0,2,4,6,8,10];
f = 1./(X+5);
s = newtdd(X,f,6)
n1 = nest(5,s, 1)
n5 = nest(5,s,5)
```

sem skilar svo eftirfarandi:

```
>> verkefni61
s =
    0.2000   -0.0286    0.0032   -0.0003    0.0000   -0.0000
n1 =
    0.1743
n5 =
    0.1097
```

Sjáum núna að þegar $x = 1$ þá gildir að $|f(1) - P(1)| = |\frac{1}{6} - 0.1743| \approx \underline{0.0076}$ og að þegar $x = 5$ þá gildir $|f(5) - P(5)| = |0.1 - 0.1097| = \underline{0.0097}$
Athugum að bæði þessi gildi eru undir skekkjumörkum.

Dæmi 2

Dæmi 1 úr 3.3 exercise

List the Chebyshev interpolation nodes $x_1, ..., x_n$ in the given interval.(a)[-1,1], $n = 6$ (b)[-2,2], n=4 (c)[4,12], $n = 6$ (d) [-0.3,0.7], $n = 5$

Dæmi 2 úr 3.3 exercise

Find the upper bound for $|(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ on the intervals and Chebyshev nodes in Exercise 1.

Svar

Við höfum formúluna fyrir Checyshev skiptipunktum á bili a til b

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2n}(2i-1)\right)$$

með n fjölda skiptipunkta.
Mesta mögulega skekkja á bilinu frá a til b er

$$\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

skv. bók. Athugum nú fyrsta tilfellið:
Höfum $a = -1$, $b = 1$, $n = 6$

$$x_1 = 0 + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$x_2 = 0 + \cos\left(\frac{3\pi}{12}\right)$$
$$x_3 = 0 + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$x_4 = 0 + \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$x_5 = 0 + \cos\left(\frac{9\pi}{12}\right)$$
$$x_6 = 0 + \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Með mestu mögulegu skekkju: $\frac{2^6}{2^{11}} \approx 0.03125$
Athugum nú tilfelli 2:
Höfum $a = -2$, $b = 2$, $n = 4$

$$x_1 = 0 + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$x_2 = 0 + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$x_3 = 0 + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$
$$x_4 = 0 + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

með mestu mögulegu skekkju: $\frac{4^4}{2^7} = 2$
Athugum nú tilfelli 3: Höfum $a = 4$, $b = 12$, $n = 6$

$$x_1 = 8 + 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$x_2 = 8 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right)$$
$$x_3 = 8 + 4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$x_4 = 8 + 4\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$x_5 = 8 + 4\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right)$$
$$x_6 = 8 + 4\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Með mestu mögulega skekkju: $\frac{8^6}{2^11} = 128$
Athugum nú fjórða og síðasta tilfellið:

Höfum $a = -0.3$, $b = 0.7$, $n = 5$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.2 + 0.5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \\
x_2 &= 0.2 + 0.5\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \\
x_3 &= 0.2 + 0.5\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) \\
x_4 &= 0.2 + 0.5\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \\
x_5 &= 0.2 + 0.5\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)
\end{aligned}$$

með mestu mögulega skekkju $\frac{1^5}{2^9} \approx 1.953 \cdot 10^{-3}$

Dæmi 3

Find the equations and plot the natural cubic spline that interpolates the data points (a) (0,3), (1,5), (2,4), (3,1) (b) (-1,3), (0,5), (3,1), (4,1), (5,1).

Svar

Hér keyrum við `splinecoeff.m` úr bók með eftirfarandi gildum

```
X=[0,1,2,3];
Y=[3,5,4,1];
milta = splinecoeff(X,Y)
```

Sem skilar svo:

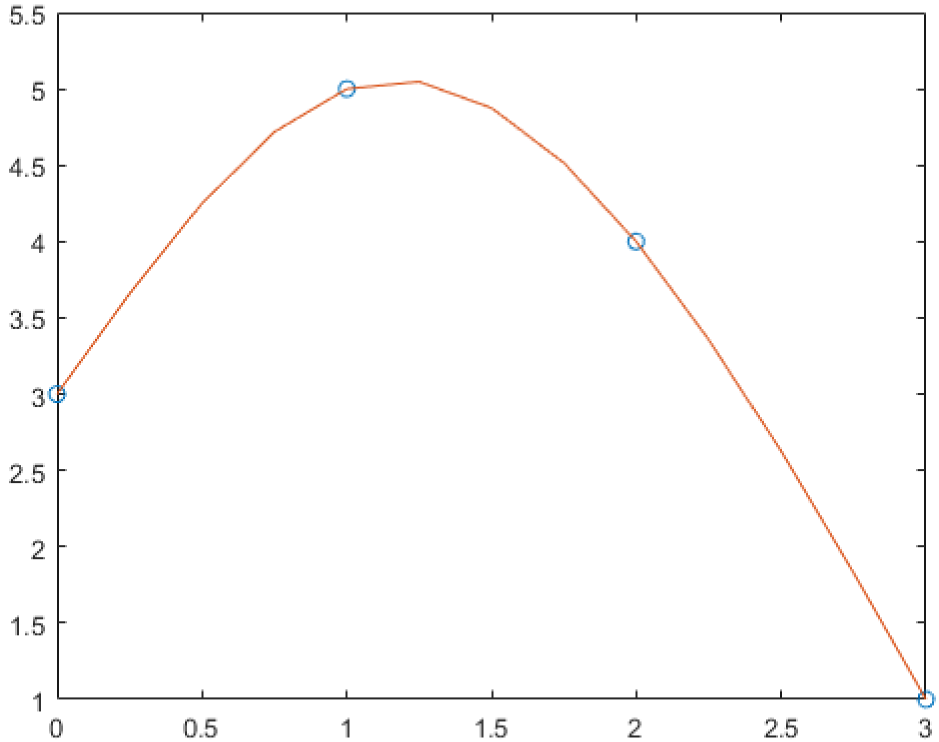
```
milta =

    2.6667         0   -0.6667
    0.6667   -2.0000    0.3333
   -2.3333   -1.0000    0.3333
```

höfum því eftirfarandi "spline interpolation":

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= 3 - 8/3(x-0) + 0 - 2/3(x-0)^3 \\
&= 3 - 8/3x - 2/3x^3 \\
S_2(x) &= 5 + 2/3(x-1) - 2(x-1)^2 + 1/3(x-1)^3 \\
&= 1/3(x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \\
S_3(x) &= 5 - 8/3(x-2) - (x-2)^2 + 1/3(x-2)^3 \\
&= 1/3(x^3 - 9x^2 + 16x + 11)
\end{aligned}$$

Notum fallið `splineplot.m` úr bók til að teikna mynd, keyrum eftirfarandi línu `splineplot(X,Y,4)` og fáum:



Framkvæmum nú nákvæmlega sömu skref fyrir (b) lið:
Hér keyrum við `splinecoeff.m` úr bók með eftirfarandi gildum

```
X=[-1,0, 3, 4, 5];
Y=[3,5,1,1,1];
milta2 = splinecoeff(X,Y)
```

Sem skilar svo:

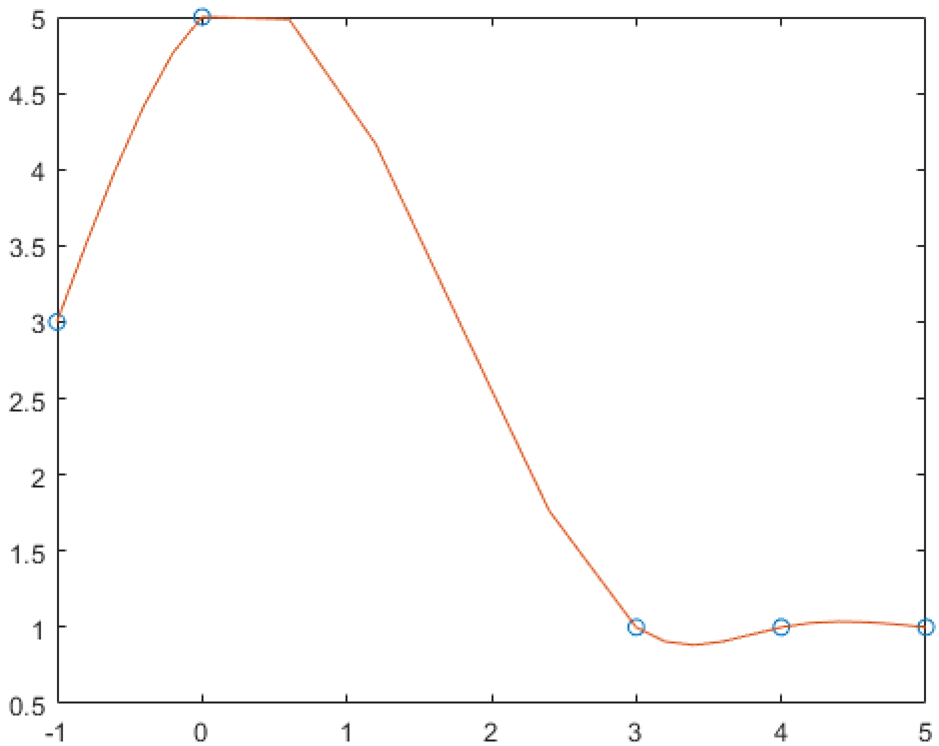
```
milta2 =

    2.5629         0   -0.5629
    0.8742   -1.6887    0.3176
   -0.6824    1.1698   -0.4874
    0.1950   -0.2925    0.0975
```

höfum því eftirfarandi "spline interpolation":

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 3 + 2.563(x+1) - 0.563(x+1)^3 \\
S_2 &= 5 + 0.874x - 1.689x^2 + 0.318x^3 \\
S_3 &= 1 - 0.682(x-3) + 1.170(x-3)^2 - 0.487(x-3)^3 \\
S_4 &= 1 + 0.195(x-3) - 0.293(x-3)^2 + 0.098(x-3)^3
\end{aligned}
$$

fáum því næst myndina


5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-1
0
1
2
3
4
5