Heimadæmi 2

Töluleg Greining

Emil Gauti Friðriksson

22. febrúar 2019

Dæmi 1

1.1 Computer Problems, dæmi 7

Use the Bisection Method to find the two real numbers x, within six correct decimal places, that make the determinant of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 4 & 5 & x & 6 \\ 7 & x & 8 & 9 \\ x & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

equal to 1000. For each solution you find, test it by computing the corresponding determinant and reporting how many correct decimal places (after the decimal point) the determinant has when your solution x is used. You may use the Matlab command det to compute the determinants.

Svar

Notast er við `bisect.m` forritið úr bókinni, fundin voru tvö bil sem innuhéldu eina rót fyrir sig, aðferðin við að finna þessi bil var fremur frumstæð en notast var við ágiskun.

```
format long
syms x;
A = [1, 2, 3, x; 4, 5, x, 6; 7, x, 8, 9; x, 10, 11, 12 ];
f(x) = det(A)-1000;
a = [-20, 0];
b = [0, 20];
for i=1:2
    bisect(f,a(i),b(i),0.000000005)
end
```

fyrra bilið er [-20,0] og það seinna er [0,20], Þetta skilar eftirfarandi:

```
ans = -17.188498149625957

ans =   9.708299119956791
```

Þar sem `TOL = 0.000000005` þá getum við verið sannfærð um að svarið er a.m.k. nákvæmt upp að sex aukastöfum þ.e. $x_1 = -17.188498$ og $x_2 = 9.708299$
Látum nú $x = x_1$ og reiknum $\det(A(x_1)) - 1000 = -0.00180775$
Látum nú $x = x_2$ og reiknum $\det(A(x_2)) - 1000 = -1.40747 \cdot 10^{-4}$
Sjáum að raunverulegar rætur fallsins eru því ekki fjarri.

Dæmi 2

1.2 Exercises, dæmi 14

Which of the following three Fixed-Point Iterations converge to $\sqrt{2}$? Rank the ones that converge from fastest to slowest.

$$(A) \quad x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} \qquad (B) \quad x \to \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x} \qquad (C) \quad x \to \frac{3}{4}x + \frac{1}{2x}$$

Svar

Athugum hvert tilfelli með fallinu `fpi.m` sem gefið er í bókinni. Tökum 12 ítranir. skráum niður gildin og berum þau saman. Við drögum $\sqrt{2}$ frá því við höfum bara áhuga á hvort/hve hratt föllin nálgist $\sqrt{2}$.

```
a=@(x) (1/2)*x+(1/x);
b=@(x) (2/3)*x+2/(3*x);
c=@(x) (3/4)*x+1/(2*x);

for i=1:12
   gildi_a(i) = fpi(a,1,i)-sqrt(2);
   gildi_b(i) = fpi(b,1,i)-sqrt(2);
   gildi_c(i) = fpi(c,1,i)-sqrt(2);
end
```

Setjum gögnin fram í töflu, námundum upp að sjötta aukastaf:

i	(A)	(B)	(C)
1	0.085786	-0.080880	-0.164214
2	0.002453	-0.025324	-0.076714
3	0.000002	-0.008287	-0.037257
4	0.000000	-0.002746	-0.018376
5	0.000000	-0.000914	-0.009128
6	0.000000	-0.000304	-0.004549
7	0.000000	-0.000101	-0.002271
8	0.000000	-0.000034	-0.001135
9	0.000000	-0.000011	-0.000567
10	0.000000	-0.000004	-0.000283
11	0.000000	-0.000001	-0.000142
12	0.000000	0.000000	-0.000071

Nú sjáum við að jafna (A) er hröðust að nálgast $\sqrt{2}$, þar á eftir kemur (B) og loks (C), öll tilfellin nálgast $\sqrt{2}$.

Dæmi 3

1.5 Exercises

Dæmi 1.5.1

Apply two steps of the Secant Method to $e^x + \sin x = 4$ with initial guesses $x_0 = 1$ and $x_1 = 2$.

Svar

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

svo við fáum eftirfarandi:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &= 2 - \frac{(e^2 + \sin(2) - 4)(2-1)}{(e^2 + \sin(2) - 4) - (e^1 + \sin(1) - 4)} \\ &\approx 1.0929 \end{aligned}$$

Höldum áfram og reiknum x_3

$$\begin{aligned} x_3 &= 1.0929 - \frac{(e^{1.0929} + \sin(1.0929) - 4)(1.0929 - 2)}{(e^{1.0929} + \sin(1.0929) - 4) - (e^2 + \sin(2) - 4)} \\ &\approx \underline{1.1194} \end{aligned}$$

Dæmi 1.5.2

Apply two steps of the Method of False Position with initial bracket [1, 2] to the equations of Exercise 1.

Svar

skrifum $f(x) = e^x + \sin x - 4$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \\ &= \frac{2(e + \sin(1) - 4) - 1(e^2 + \sin(2) - 4)}{(e + \sin(1) - 4) - (e^2 + \sin(2) - 4)} \\ &\approx 1.0929 \end{aligned}$$

athugum síðan að $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$ því er rótin á bilinu $[x_1, x_2]$. Beitum því sömu útreikningum til að finna x_3.

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\ &= \frac{2(e^{1.0929} + \sin(1.0929) - 4) - 1.0929(e^2 + \sin(2) - 4)}{(e^{1.0929} + \sin(1.0929) - 4) - (e^2 + \sin(2) - 4)} \\ &\approx \underline{1.1194} \end{aligned}$$

Dæmi 1.5.3

Apply two steps of Inverse Quadratic Interpolation to the equations of Exercise 1. Use initial guesses $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, and $x_2 = 0$, and update by retaining the three most recent iterates.

Svar

látum $a = x_0$, $b = x_1$ og $c = x_2$
Þá höfum við eftirfarandi:
$f(a) = A = e + \sin(1) - 4$, $f(b) = B = e^2 + \sin(2) - 4$ og $f(c) = C = -3$
skilgreinum síðan eftirfarandi: $q = f(a)/f(b) \approx -0.1024$, $r = f(c)/f(b) \approx -0.6979$ og $s = f(c)/f(a) \approx -25.9752$
Inverse Quadratic Interpolation gefur síðan:

$$x_{i+3} = x_{i+2} - \frac{r(r-q)(x_{i+2} - x_{i+1}) + (1-r)s(x_{i+2} - x_i)}{(q-1)(r-1)(s-1)}$$

og því höfum við að x_3 er eftirfarandi:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 - \frac{-0.6979(-0.6979 - (-0.1024))(0-1) + (1 - (-0.1024))(-25.9752)(0-1)}{(-0.1024 - 1)(-0.6979 - 1)(-25.9752 - 1)} \\ &\approx 0.5589 \end{aligned}$$

nú er $a = 2$, $b = 0$ og $c = 0.5589$
$q = f(a)/f(b) = -1.4328$, $r = f(c)/f(b) \approx 0.5737$ og $s = f(c)/f(a) \approx -0.4004$
Nú getum við því fundið x_4:

$$\begin{aligned} x_4 &= 0.5589 - \frac{0.5737(0.5737 - (-1.4328))(0.5589 - 0) + (1 - 0.5737)(-0.4004)(0.5589 - 2)}{(-1.4328 - 1)(0.5737 - 1)(-0.4004 - 1)} \\ &\approx \underline{1.1712} \end{aligned}$$