Heimadæmi 9

Töluleg Greining

Emil Gauti Friðriksson

22. febrúar 2019

Dæmi 1

Develop a second-order method for approximationg $f'(x)$ that uses the data $f(x-2h)$, $f(x)$ and $f(x+3h)$ only.

Svar

Byrjum á því að rita niður Taylor nálganirnar fyrir $f(x+3h)$ og $f(x-2h)$

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{(3h)^2}{2}f''(c)$$
$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(-2h)^2}{2}f''(c)$$

skilgreinum svo fallið $g(x) = af(x+3h) + bf(x-2h) + cf(x)$ þar sem a, b, c eru fastar sem ráðast af eftirfarandi:

$$g(x) = (a+b+c)f(x) + (3a-2b)hf'(x) + (9a+4b)\frac{h^2}{2}f''(x)$$

en við viljum gera nálgun á $f'(x)$ svo við viljum láta $a+b+c=0$, $3a-2b=1$ og $9a+4b=0$, fáum úr þessu einfalt jöfnuhneppi sem hefur lausnirnar $a=\frac{2}{15}$, $b=\frac{-3}{10}$ og $c=\frac{1}{6}$. Stingum þessu aftur inn í $f'(x) = g(x)/h = (af(x+3h) + bf(x-2h) + cf(x))/h$ og fáum:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2}{15}f(x+3h) - \frac{3}{10}f(x-2h) + \frac{1}{6}f(x)}{h} - h^2f'''(c) \\ &= \frac{4f(x+3h) - 5f(x) - 9f(x-2h)}{30h} - h^2f'''(c) \end{aligned}$$

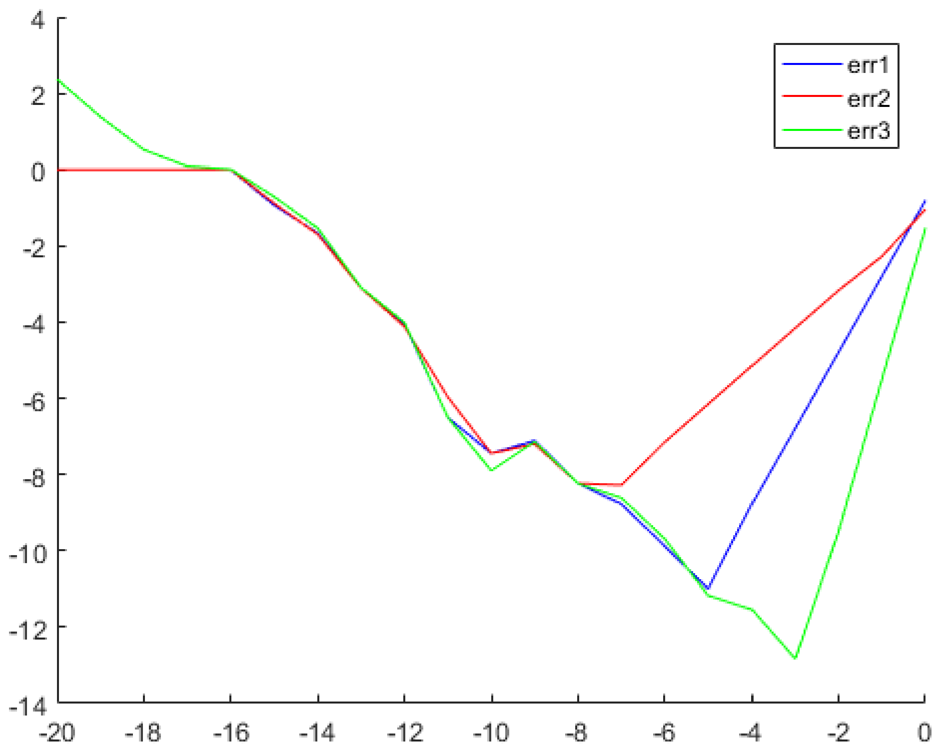
Dæmi 2

Hvað gerir eftirfarandi forrit? Keyrið það og túlkið niðurstöðuna. Gefið tvær ástæður fyrir því af hverju afleiðunálganir af lágu stigi eru einstaklega óheppilegar þegar nálga á afleiðu falls á heilu bili.

```
function daemi1(a)
p=-20:0;
f=@(x) sin(x);
df=@(x) cos(x);
for i=1:length(p)
h=10^p(i);
err1(i)=(f(a+h) - f(a-h))/(2*h)-df(a);
err2(i)=(f(a+h) - f(a))/h-df(a);
h=2*h;
```

```
err3(i)=(f(a-h)-8*f(a-h/2)+8*f(a+h/2) - f(a+h))/(6*h)-df(a);
end
hold on
plot(p,log10(abs(err1)),'b')
plot(p,log10(abs(err2)),'r')
plot(p,log10(abs(err3)),'g')
legend('err1', 'err2', 'err3')
end
```

Forritið skilar eftirfarandi mynd fyrir skipunina `daemi1(3)`



Hér sjáum við að ef við förum til hægri meðfram x-ás þá stækkar h, við erum að teikna upp logrann af skekkju þriggja nálganna fyrir afleiðu fallsins $\sin(x)$ með breytilegu h. Skekkjan er minnst þar sem grafið er sem lægst. Það sem er áhugavert við þetta er að skekkjan er furðulega há fyrir lítil gildi á h en það má útskýra á tvennan veg:

1. Þegar deiling á sér stað þar sem nefnarinn er mjög lítil tala þá getur komið fram umtalsverð skekkja. Tölvan gerir nálgun í útreikningunum sem skilar stórri skekkju í lokasvarinu.

2. Þegar frádrátturinn á sér stað milli nálgunargildisins og raungildis getur komið fram skekkja ef tölurnar eru nánast þær sömu.

Þess vegna fáum við minnstu skekkjuna þegar $h \approx 10^{-5}$

Dæmi 3

(a) Use the composite Trapezoid Rule with m = 16 and 32 panels to approximate the definite integral. Compare with the correct integral and report the two errors.

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

(b) Apply the composite Simpson's Rule to the integrals in previous problem. Use m = 16 and 32, and report errors.

Svar(a)

Áður en við hefjumst handa skulum við finna rétta gildið á heildinu:
það er $I = \sinh^{-1}(\sqrt{3}) \approx 1.316958$ Notast var eftirfarandi forrit:

```
f =@(x) 1/(x^2+4)^(0.5);
a = 0;
m=16;
b= 2*sqrt(3);
h = (b-a)/m;
sum = 0;
for i=1:m-1
    sum = sum + f(i*h);
end

heildi = h/2*(f(a)+f(b)+2*sum)
```

sem skilar fyrir $m = 16$:

```
heildi = 1.316746488192236
```

og hefur error: $|1.316746488192236 - I| = 2.114 \cdot 10^{-4}$
og ef við notum $m = 32$:

```
heildi = 1.316905040381116
```

og hefur error: $|1.316905040381116 - I| = 5.286 \cdot 10^{-5}$

Svar(b)

Notast var við eftirfarandi forrit:

```
f =@(x) 1/(x^2+4)^(0.5);
a = 0;
m=16;
b= 2*sqrt(3);
h = (b-a)/(2*m);
sum = 0;
sum2 = 0;
for i=1:m
    sum = sum + f(2*i*h-h);
end
for j=1:m-1
    sum2 = sum2 + f(2*j*h);
end

heildi = h/3*(f(a)+f(b)+4*sum+2*sum2)
```

sem skilar fyrir $m = 16$:

```
heildi = 1.316957891110743
```

og hefur error $|1.316957891110743 - I| \approx 5.814 \cdot 10^{-9}$
Athugum nú fyrir $m = 32$:

```
heildi = 1.316957896561761
```

og hefur error $|1.316957896561761 - I| \approx 3.6301 \cdot 10^{-10}$