

# Notes NMDE

## Def. 1 | Производната на функцията

Производната на функцията и в точката  $t$  се дефинира чрез

$$u'(t) \equiv \frac{du}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

ако посредството на този определение съществува.

С други думи, как се изменя дадена величина.

От практическа гледна точка, производната описва моментната скорост на изменение на величината и за едрия изменение на величината  $t$ .

## Формули за гладко диференциране

• Формула с разница напред и времета  $O(h)$ :

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

• Формула с разница назад и времета  $O(h)$ :

$$u'(t) \approx \frac{u(t) - u(t-h)}{h}$$

• Формула с централна разница и времета  $O(h^2)$ :

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}$$

## N.B.G | $u(t+h) \approx u(t) + u'(t)h$

Идеята на линеаризацията е, че приближаваме (в достатъчно малка околност) на точката  $t$  линейния обект (с който по принцип се работи трудно) с нещо линейно. Геометрично графиката е допирателната към графиката на функцията  $y = t$ , а производната е наклонът

## N.B. 7. | Формула на Тейлър

Формулата на Тейлър е обобщение, кое то ни позволява да направим по-добро приближение на функцията в околност на дадена точка, която използваме производни от по-високи ред:

$$u(t+h) = u(t) + \frac{u'(t)}{1!} h + \frac{u''(t)}{2!} h^2 + \dots + \frac{u^n(t)}{n!} h^n + O(h^{n+1})$$

За да бъде горното в сила, функцията и трябва да е достатъчно гладка.

## Обикновени диференциални уравнения (ОДУ)

Това са уравнения, в които участва неизвестна ф-я на една променлива и нейните производни.

## Частни диференциални уравнения (ЧДУ)

Това са уравнения, при които функциите са на няколко променливи и участват техните частни производни.

- **Стационарни задачи:** (в които не участва времето)

Дивоят 2-мерен ~~таб~~ с неизвестна ф-я  $u(x, y)$  и 3 мерен -  $u(x, y, z)$ . Те описват равновесното състояние на даден процес.

- **Нестационарни задачи** описват времевата зависимост на даден процес. Те могат да са 1, 2 и 3 мерни с неизвестни ф-ции -  $u(x, t)$ ,  $u(y, t)$ ,  $u(x, y, t)$

## Def.2 | Абсолютна грешка

Абсолютна грешка изразява разликата между точната и приближителната стойност при дадена апроксимация:

$$\varepsilon_a := \text{exact value} - \text{approximation}$$

## Def.3 | Относителна грешка

Относителна грешка дефинираме така:

$$\varepsilon_r := \frac{\text{exact value} - \text{approximation}}{\text{exact value}} = \frac{\varepsilon_a}{\text{exact value}}$$

## Задача на Коши:

Задачата на Коши представлява обикновен диференциален уравнение от първи ред. Тя има вида:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in [t_0, +\infty)$$

$$u_0(t) = u_0$$

Решението на задачата на Коши картираше метода на Рундфелд

диференциалното уравнение  $\dot{u} = f(t, u)$  и  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , което удовлетворява

установленото и началното условие

уравнението

## N.B. 8. | Мрежа при ОДУ

Въвеждаме мрежата

$$\overline{W_h} = \{t_i = t_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}, \quad n = (\bar{T} - t_0) / h\}$$

Мне търсим приближените стойности на решението именно в тези

мрежи. Стойността на приближеното решението в точката  $t_i$

ще бъде записан с  $u_i$ :  $u_i \approx u(t_i) = u_i$

## Alg 1 | Явният метод на Ойлер

Явният метод на Ойлер е най-простият метод за числено решаване на ~~диф.~~ одиг. Използвайки формулата за числено диференциране с разлика напред в точката  $t_i$ :

$$u(t_i) \approx \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{h}$$

диференциалната задача на Коши се приближава върху прехота  $t_n$  с явнодрижката задача:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1} \quad \boxed{O(h)}$$

$$y_0 = u_0$$

Точка за пресмятане на приближеното решение може да използваме схемата:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}$$

$$y_0 = u_0$$

## Alg 2 | Неявен метод на Ойлер

Неявният метод на Ойлер се основава на формулата за числено диференциране ~~назад~~ с разлика назад. Числената схема на задачата на Коши има вида:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(t_i, y_i) \quad i = \overline{1, n} \quad \boxed{O(h)}$$

$$y_0 = u_0$$

Точка за пресмятане на приближеното решение ще ѝ да използваме схемата  $y_{i+1} = y_i + h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad i = \overline{0, n-1}$

$$y_0 = u_0$$

## Def. 4 | Невърен метод

На всяка стапка от алгоритма, за да получим стойността на приближеното решение в  $t_{i+1}$ , трябва да решим едно (в общия случай нелинейно) уравнение, относно  $y_{i+1}$ . Ако  $y_{i+1}$  участва в дясната страна, то този метод е невърен.

## Def. 5 | Доказана гранична стойност на приближението

МПА за един диференциален метод

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \Theta(\bar{t}, \bar{y})$$

Наричаме разликата между лявата и дясната страна, пресметнати за тозиот ред:

$$\Psi_{i,h} := \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \Theta(\bar{t}, \bar{y}), \text{ когато}$$

$$\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n), \bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \bar{\Omega} = (u_0, u_1, \dots, u_n).$$

Нарича се доказана защото с наричавме искано, за една стапка от алгоритъма.

## Alg 3 | Подобрен метод на Ойлер

Методът който се нарича с едноото същото също  $\delta = 1/2$

$$\left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \delta f(t_i, y_i) + (1-\delta) f(t_{i+1}, y_{i+1}) \right] \begin{matrix} \text{същото} \\ \text{същото} \end{matrix}$$

е известен като подобрен метод на Ойлер.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})}{2}$$

- Той има 2 ред  
на приближение

## Def.6 | Устойчивост на решението

Назвавме, че решението на задачата  $y_0$  е устойчиво (по лапунов / по навални данни), ако малки промени в началните условия НЕ водят до големи промени в решението.

## Def.7 | A-устойчивост

Назвавме, че даден итеративен метод е A-устойчив (A-устойчив) ако при всеки бързув задачата за моделно уравнение за изследване на устойчивостта на метода

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \text{ решението } y_i \text{ е устойчиво}$$

$$|y_{i+1}| \leq |y_i|$$

С други думи, ако в даден момент от време е текущата времена  $y_0$ , искаме итеративният метод да не я движител с времето и да всеки следващ момент  $y_i$  га остава не повече и не по-малко от  $\alpha \cdot c \cdot t$ . от  $y_0$ .

## Def.8 | Монотонност на метод

Назвавме, че даден итеративен метод е монотонен, ако при всеки бързув задачата моделно уравнение за изследване на устойчивостта на метода, решението му не сменя знака си.

$$\operatorname{sgn}(y_i) = \operatorname{sgn}(y_0)$$

С други думи искаме времето да не усушава около нула.

## Alg. 4 | Методи на Рунд Кута.

Даден е с етапни метод на Рунд-Кута или същността  
от този вид:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{h} (p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_s k_s),$$

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f(t_i + d_2 h, y_i + \beta_{21} k_1)$$

$$k_3 = h \cdot f(t_i + d_3 h, y_i + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)$$

...

$$k_j = h \cdot f(t_i + d_j h, y_i + \beta_{j1} k_1 + \dots + \beta_{j,j-1} k_{j-1}), \quad j=4, \dots, s$$

Това е едностъпков метод, т.е. при намиране на  $y_{i+1}$   
използваме само стойността на  $y_i$ .

Кофициентите може да се записват в таблица на Butcher:

0				
$d_2$	$\beta_{21}$			
:	:			
$d_s$	$\beta_{s1}$	$\dots$	$\beta_{s,s-1}$	
	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{s-1} \quad p_s$

! Всички явни методи на Рунд Кута са устойчиви към устойчиви

Адаптивен Избор на Стенката | Р.К

При използване на равномерна линка, ако нерави добри (точки) резултати, стопката трябва да се съобрази с нов-домаша ситуация. Това обаче не винаги е членувано.

Идеята на методите с адаптивна стъпка е да се използва  
стъпка стъпка там където е необходимо (обикновено  
където ръмжето (в. възела Йерзо) и тама там  
където поддържато на ръмжето в нозете.

## Aulopeltidae

Из бирале первоначална стойност за  $h_0$ ; инициализираме  $y_0 = h_0$ ,  $t_0 = 0$ , tol - никакъв tolerance на граниката.

DOKATO  $t_i < T$ :

1. Опускаваме логичната премка  $\text{ETT}_i$ , като съхме допускане че стъпка  $b_i$ .
  2. Докато  $\text{ETT}_i > t_0$  напомняване стъпката  $b_i$  и отново опускане  $\text{ETT}_i$ .
  3. Преприготвяме  $y_{i+1}, t_{i+1}$ , като и първокогалката стойност за  $b_{i+1}$ ; увеличаваме  $i \leftarrow L$ .

Такъв вид обучение на грекската се нарича аностериорно обучение. Използват се изкуствени от метода резултати. ЧМДЧ върху организъм и сърдечни се базират на аностериорни обучени на грекската

## Многостъпкови методи

При единствените методи за приближеното решение  $y_{i+1}$ , използвани са само стойността на  $y_i$ . Идеята на многостъпковите методи е да използваме информацията, която има нануждата за решението по някои предходни точки, като на този начин се даде до нануждата по-висока точност.

Идейки засега на Римни (но скоро диференциалното уравнение)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

може да се сведе до еквивалентна на него интегрално уравнение  
Интегриране от двете страни в границите от  $t_i$  до  $t_{i+1}$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

За да получим диференциално уравнение, приближаването на интегралната форма на външните производни. Трябва да приближим интеграла в лявата страна. За този цел се използва <sup>апроксимиране</sup> интерполяционна квадратурна формула. Т.е. <sup>апроксимиране</sup> на интегралната функция с интерполяционни и полиноми на Лагранж.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [L_n(f; x) + O(h^{n+1})] dt$$

Пренебрежвайки остатъчната член е ясно че  $\hat{f}$ -лотът който ще се получи при приближение със  $M$  е  $O(h^{n+1})$

Интерполяционният полином на Лагранж носи название като за интерполяционни <sup>въздушни</sup> вземани  $t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-n}$  точки от дясната

## Alg. 5 | Методи на Адомс - Банфорт

Общия вид на  $m$ -стъпковия метод на Адомс - Банфорт, който има

МТ =  $O(h^m)$  е

$$y_{i+1} = y_i + h(c_1 f_i + c_2 f_{i-1} + \dots + c_m f_{i-m+1})$$

N.B. 19

Методите на Адомс - Банфорт са по-бързи от тези на Руне - Кута  
оглед още раз ка точност, но обикновено методите на  
Руне - Кута имат по-добро поведение от шестка точка на  
устойчивостта на метода.

## Alg 6 | Метод на Адомс - Мултон

Общия вид на  $m$ -стъпковия метод на Адомс - Мултон,  
който има МТ =  $O(h^m)$  е

$$y_{i+1} = y_i + h(c_0 f_{i+1} + c_1 f_i + \dots + c_m f_{i+2-m})$$

N.B. 20

За да могат да се правят изчисления с помощта на даден  
 $m$  стъпков метод е необходимо до са известни  
стойностите на крилниковото решение в първите  $m$   
точки от иската. Тези стойности тр. да бъдат на даден  
е единстъпков метод, който има пакетна раз ка точност като използвания метод на Адомс.

За да е имплементирана по метод на Адъмс ефективно, е необходимо да се гарантира не само стойността на кривулкето редоме, но и на дясната страна в този от интеграта, за да избегнате много честното пресичане на дясните страни в един и същи този. Ако не използвате този факт, метода ще изпитвате много по-лека страна.

### Адъмс vs Руне-Кута

- Преуимущества на Адъмс

- по-бързи
- удобни за използване като предиктор-коректор.

- Предимства на Руне-Кута:

- по-дълги свойства от лека тозка на устойчивост
- по-добри са за работа с адаптивна страна

### Предикторно-коректорни методи

Методи при които първоначално приближната се преви с явен метод - предиктор и после се правят няколко итерации с неявен метод - коректор

### Основни предимства и недостатъци

1. Явни методи

- a) Ойлер

- + Бързи и лесни за имплементиране
- Голямо сходство.

### a) Руне - Кута

- + Съществуващ метод с висок ред на сходимост
- + Погодни свойства от мярка точка на сходимост спрямо методите на Адамс - Банфорт.
- + Удобни за използване с адаптивен избор на стъпката
- Погодни от методите на Адамс - Банфорт

### b) Адамс - Банфорд.

- + Съществуващ метод с висок ред на сходимост
- + Погодни от методите на Руне - Кута
- + Подходящи за използване като предикторно-коректорски метод, когато са в комбинация с Адамс - Мултан.
- Погодни от мярка точка но установяват спрямо Р.К.

### 2. Автоматични.

- Автоматичните методи са значително по-дълги.
- За търди задачи автоматичните методи са практически неприложими
- Често автоматичните методи се използват заедно с явките в двойка предиктор-коректор.

### 3. Адаптивен избор на стъпката VS равномерна ирека.

- Равномерната ирека позволява да се контролира времето, т.к. броя операции е предварително известен.
- Адаптивният избор позволява да се контролира автоматично точността на приближеното решение.
- В задачи в които решението се инициира броя итерации и броя на останалата част адаптивният избор ще предизвика затруднения в принципиален смисъл

В зависимост от това даде времевата кривина на участка, която не говори за стационарни и нестационарни задачи.

- **Стационарните задачи** са задачи в които не е участък времето. Те са 2 мерки или 3 мерки, а са неизвестни функционални обекти  $u(x, y)$ ,  $u(x, y, z)$ . Те описват равновесното състояние на даден процес.
- **Нестационарните задачи** описват времевата еволюция на даден процес. Те могат да бъдат 1, 2 или 3 мерки, съответно с неизвестни функции:  $u(x, t)$ ,  ~~$u(x, y, t)$~~ ,  $u(x, y, z, t)$

### Уравнение на непрекъснатостта

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x} + f \quad \left( \text{където } j(x, t) \text{ е потока на веществата в точката } x \text{ в момент от време } t \right)$$

$f$  е функция, която описва източници / конвекции

### Закон на Фик (в топлопроводността закон на Фурье)

$$j_{diff}(x, t) = -D \frac{\partial u}{\partial x} \quad \cdot \text{Дифузионният поток е}$$

пропорционален на разликата в концентрациите

### Уравнение на дифузията

Ако в Закона за запазване (уравнението на непрекъснатостта) за мястото закон на Фик използваме уравнението на дифузията

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

## Равномерна мрежа със стойки<sup>по</sup> пространството и по времето

$$\bar{W}_{h,T} := \{x_i, t_j\} : x_i = ih, t_j = jT, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, n = l/h, m = T/T$$

Стойността на приближеното решение в  $\tau \cdot (x_i, t_j)$  ще бъдем с  $y_i^j$ . Моментът от времето за който  $t = t_j$  ще нарекаме  $j$ -ти слой по времето.

## Извеждане на явна разностна схема при гранични условия на Дирихле.

- Извеждане на уравнение на теплопроводността:
 

и гранични  
условия

$$* \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

със следните начини

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(0, t) = U_L(t) \quad u(l, t) = U_R(t)$$
- Въвеждаме равномерна мрежа  $\bar{W}_{h,T}$
- От начинното условие има известна стойност на решението в 0-вия слой по времето.  
 $y_i^0 = u_0(x_i) \quad i = \overline{0, n}$
- На базата на информацията от 0 слой може да сметнем стойността за 1 вляво и т.н. В общия случай може да намерим стойностите за  $j+1$  и така тези за  $j$ -тия
- Апроксимираме уравнението  $*$  в  $\tau \cdot (x_i, t_j)$ 
  - Апроксимираме производната по времето с  $\phi$ -ка с разлика напред.
  - Апроксимираме производната по пространството с  $\phi$ -ка с централна разлика от втори ред.
  - Получаваме диференциално уравнение  $O(h^2 + t)$
- ~~•~~ 
$$\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - D \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_j \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$$

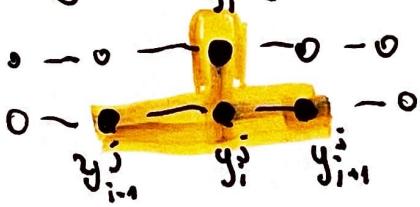
$\beta$  Него участват стойностите на приближеното решение в тозките с индекси  $(i-1, j)$ ,  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $\underbrace{(i, j+1)}$  като само последната стойност е ненужна.

Това значи, че получената схема е авто.

### Моделон

Тозките които не участват в пресмятането на текущата (търсена) тозка, те могат да бъдат както от своята същност, така и от други причини.

Пример:  
от автата  
увесилка  
схема



Моделонът може да постави така, че да изпари всички външни тозки.

За граничните тозки ние използваме граничните условия.

$$y_0^{j+1} = u_L(t_{j+1}) \quad y_n^{j+1} = u_R(t_{j+1}) \quad j = \overline{0, m-1}$$

Така използваме каноничният вид на диференчната схема:

$$y_i^{j+1} = \left(1 - 2 \frac{D\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{D\tau}{h^2} (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + T f_i^j \quad i = \overline{1, n-1} \quad j = \overline{0, m-1}$$

$$y_0^0 = u_0(x_0) \quad \bar{\tau} = \overline{0, n}$$

$$y_n^{j+1} = u_L(t_{j+1}) ; \quad y_0^{j+1} = u_R(t_{j+1}) \quad j = \overline{0, m-1}$$

### Alg.7 / Реализиране на явна диференчна схема

- Използвайки на галото условие копирайте стойностите на първия слой по времето
- Итерираме по  $j = \overline{0, m-1}$ . На всяка итерация от стойностите на  $j$ -тия слой копираме тези на  $j+1$  слой

- От априклизицата на основното диференциално уравнение напираме стойностите във вътрешните точки от иската
- От граничните условия приемаме стойностите на приближното решение в граничните точки.

N.B.26.

Ако коефициентите пред иди "u" са в каквато лице  
са положителни и при това разликата в  
кофициентите в лявата и тези в дясната страна е  
негричлива, то методът е икономичен

Note: За да бъде явноста двусъдържане със стойности и  
що точка ТР. да бъде изпълнено

$$J \leq \frac{h^2}{20}$$

Def. 9 | Гранични условия на Дирихле, Нойман, Робин

• Дирихле / първи ред  
 $u(0,t) = u_L(t)$

• Нойман / втори ред (за потока)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u_L(t)$$

• Робин / смесени / трети ред

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) + \lambda u(0,t) = u_L(t)$$

## Апроксимиране на граничните условия на Нойман

Имене

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u_L(t), \quad u(l, t) = u_R(t)$$

Лявото гранично условие е на Нойман. Зададено е ляво и не разполагаме с не-върхушки точки, тихи могат да го апроксимират единствено с формулата разлика например. Получаваме

$$\frac{u_i^j - u_0^j}{h} = u_L(t_j)$$

Това обаче има  $O(h)$ . Това е граника за ко-  
ничен ред от реда който получаваме в останалите точки.  
Нека новият ред да е апроксимация за пр. усл. на Ной-

Михаил може да замени

$$\frac{u_i^j - u_0^j}{h} = u_L(t_j) + O(h). \text{ Ако разделим оста-}$$

+ грешката ще получим

$$\frac{u_i^j - u_0^j}{h} = u_L(t_j) + \dots + O(h^2)$$

$$\frac{u_i^j - u_0^j}{h} - \frac{u_0^j - u_{-1}^j}{h} = u_L(t_j) + O(h^2)$$

$$\frac{u_i^j - u_0^j}{h} - \frac{u_0^j - u_{-1}^j}{h} = u_L(t_j)$$

Остатъчната грешка  $O(h)$  може да бъде представена като  $\epsilon + O(h^3)$   
 е близкостта  $1\Gamma A$ . Нека се разгледа како разбиране на  
 погрешка Тайлър около  $x=0$

$$\begin{aligned} \Psi_{h,j} &= \frac{1}{h} \left( u_0^j + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{h^2}{2} + O(h^3) \cdot u_0^j \right) - u_L(t_j) \\ &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0 + O(h^2) \end{aligned}$$

Заметка:  ~~$\Delta$~~   $\subset \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Не може да се априксимира с  
 унгарна разлика.

Допусканието за  $x=0$  основното стъференциално уравнение е  
 изпълнено и изразяване втората производна по времето  
 пространството с тази по времето

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - f \right). \text{ със заместване } \Leftrightarrow u$$

наложени:

$$\frac{y_i^j - y_0^j}{h} - \frac{1}{2D} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - f \right) = u_L(t_i)$$

$$\frac{y_i^j - y_0^j}{h} - \frac{1}{2D} \left( \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{J} - f_0^j \right) = u_L(t_j)$$

B како нареди B чуя

$$y_0^{j+1} = \left( 1 - \frac{2JD}{h^2} \right) y_0^j + \frac{2DJ}{h^2} y_i^j + J f_0^j - \frac{2DJ}{h^2} u_L(t_j)$$

и това може да послужи за линеарно уравнение.

## Чисто Невърна Схема

Известна задачата

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

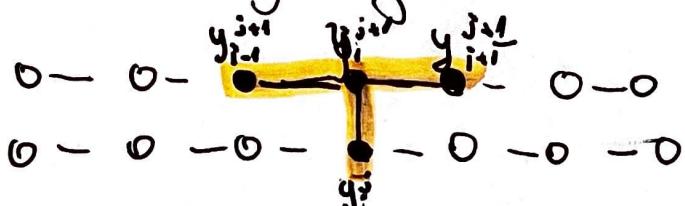
$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(0, t) = u_L(t), u(L, t) = u_R(t)$$

Ме под ходили аналогично, като с авансова схема, то  
нека този път направим приближението на  $j+1$  слоя.  
За времето ме използваме  $\phi$ -да с разлика назад.  
Написване:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} - D \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1} \quad \begin{matrix} i = 1, n-1 \\ j = 0, m-1 \end{matrix}$$

Тук наближението изглежда така:



Одночестна приближението приближената е невърна, защото  
има 3 неизвестни в уравнението  $y_{i-1}^{j+1}$ ,  $y_i^{j+1}$ ,  $y_{i+1}^{j+1}$

За да намерим стойностите на приближеното решение  
на  $j+1$  слоя по времето тр. да решиме системата от  $n+1$   
уравнения и  $n+1$  неизвестни

Векторна матрична форма:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & & & & \\ -D \frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2D}{h^2} & -D \frac{1}{h^2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -D \frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2D}{h^2} & -D \frac{1}{h^2} \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} y_0^{j+1} \\ y_1^{j+1} \\ \vdots \\ y_{n-1}^{j+1} \\ y_n^{j+1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} u_L(t_{j+1}) \\ \frac{y_0^j + f_0^{j+1}}{\tau} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1}^j + f_{n-1}^{j+1}}{\tau} \\ u_R(t_{j+1}) \end{array} \right]$$

## Alg 8 | Реализиране на неявки с фундаментални схеми

- Използват се начинното условие, която дава стойностите на първия слой по времето
- Итериране по  $j=0, m-1$ . На всяка итерация от стойностите на  $j$ -тият слой изпирате тези на  $j+1$  слой като редовен системуравнение

Чисто неявката схема е монотона за всичко  $\tau$

### N.B. 28

Диференцното уравнение (Схема на Кранк - Николсон) допълнено с подходящи приближения за начинното и граничните условия дава клас диференциални схеми за приближното решаване на уравнението дифузия/конвекция/адиабатика.

- При  $\beta = 1$  схемата е явна.

Има LГА  $O(h^2 + \tau)$  и е устойчива монотона при  $\tau < \frac{h^2}{2D}$ .

- При  $\beta \neq 1$  схемата е неявна

Има LГА  $O(h^2 + \tau)$  и на всеки слой по времето тр. да се решава нестационарно с тридиизионален матрица.

В частност

- Ако  $\beta = 0$  се получава чисто неявна схема, която е монотона за всички избори на  $\tau$

- Ако  $\beta = 1/2$  се получава схема на Кранк - Николсон, която има LГА  $O(h^2 + \tau^2)$  и е монотона при  $\tau < \frac{h^2}{D}$ . Тя е устойчива за  $H \tau$

## Схема с Тено

От явната и неявната схема може да получим клас схеми с Тено. Ако умножим явната схема с  $\beta$ , а неявната с  $1-\beta$  и изброявши константа се получава

Явна схема:

$$\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - D \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j \quad | \cdot \beta$$

Неявна схема:

$$\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - D \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1} \quad | \cdot (1-\beta)$$

Получение

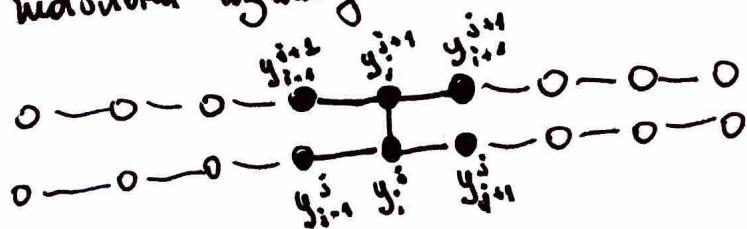
$$\beta \cdot \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - \beta D \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = \beta f_i^j +$$

$$(1-\beta) \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - (1-\beta) D \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} = (1-\beta) f_i^{j+1}$$

$$(\beta + 1 - \beta) \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - \beta D \left( \frac{y_{i+1}^j + 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} \right) - (1-\beta) D \left( \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right) = \beta f_i^j + (1-\beta) f_i^{j+1}$$

$$\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\tau} - \beta D \left( \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} \right) - (1-\beta) D \left( \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right) = \beta f_i^j + (1-\beta) f_i^{j+1}$$

Тук наричана известна точка:



Най-убедителен избор за  $\beta$  от неявната точка на точност на метода е при  $\beta = 1/2$ . Тогава време  $O(h^2 + \tau^2)$

# Устойчивост на диференчните схеми за решаване на ЧДГ

Нека е дадена диференчна задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f, \quad 0 < x < X, \quad 0 < t \leq T$$

$$l_{init} u = u_0, \quad t=0 \quad (\star)$$

$$l_{bound} u = g \quad x=0, x=X$$

По този начин задачата може да бъде сведена към диференчна задача.

- Въвеждане на мрежа:

$$W_{h,T} := \{(x_i, t_j) : x_i = i h, \quad t_j = j T, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \quad n = l/h, \quad m = T/J\}$$

- Нека означим  $y_h(x_i, t_j) := y_i$  за всяка точка от мрежата. С други думи  $y_h$  е **мрежова функция**.

- Описване на диференчна схема, на базата на отговорния задача

$$\frac{\partial y_h}{\partial t} = f, \quad 0 < x_i < X, \quad 0 < t_j \leq T$$

$$l_{init} y_h = u_0, \quad t_j = 0 \quad (\star\star)$$

$$l_{bound} y_h = g \quad x_i = 0, \quad x_i = X$$

$L_h, l_{init} h, l_{bound} h$  са **мрежови / диференчни оператори**.  
Те определят приближението на левите страни в основното уравнение.

Def. 10 | Устойчивост на диференчната схема в  $\| \cdot \|_h$ -норма

Нека в пространството от мрежови функции  $y_h$  е въведена норма  $\| \cdot \|_h$ . Казваме, че диференчната схема  $(\star\star)$  е устойчива в  $\| \cdot \|_h$ , ако приближеното решение  $y_h$  изпълнява неравността:

$$\| y_h \|_h \leq C_1 \| u_0 \|_h + C_2 \| f \|_h + C_3 \| g \|_h \quad \text{за някакви } C_1, C_2, C_3$$

Малко изменението във въздушните данни водят до малки изменения  
в разпределение

Нека разгледаме малко променени данни отрано, наложено условие и гра нично условие. Нека им езиками с  $\bar{f}$ ,  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{\mu}$ . Тозава временното  $y_h$  ще задава изследа така:  
с променяните данни

$$\Delta_h \bar{y}_h = \bar{f} \quad 0 < x < X, 0 < t \leq T'$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{y}_h = \bar{u}_0 \quad t=0 \quad (\because)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{y}_h = \bar{\mu} \quad x=0, x=X$$

Тозава, ако извадим ( $\bar{f} - \bar{f}$ ) от ( $\because$ ) получаваме

$$\Delta_h (y_h - \bar{y}_h) = \bar{f} - \bar{f} \quad 0 < x < X, 0 < t \leq T'$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (y_h - \bar{y}_h) = \bar{u}_0 - \bar{u}_0 \quad t=0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (y_h - \bar{y}_h) = \bar{\mu} - \bar{\mu} \quad x=0, x=X . \quad \text{T. e.}$$

уравнението на изследа задава с дясна страна  $\bar{f} - \bar{f}$ , наложено условие  $\bar{u}_0 - \bar{u}_0$  и гранично условие  $\bar{\mu} - \bar{\mu}$ . Следователно ако диференцната схема е устойчива, тога ще биде в сила оценката

$$\| y_h - \bar{y}_h \|_h \leq C_1 \| \bar{u}_0 - \bar{u}_0 \|_h + C_2 \| \bar{\mu} - \bar{\mu} \|_h + C_3 \| \bar{f} - \bar{f} \|_h$$

T. e. ако изменението на дясната страна, наложено и граничните условия е малко, то и премината ще биде малка.

## Устойчивост на начинни данни, по гранични условия, на дясната страна

### Числен диференциална схема

$$\begin{cases} \Delta_h y_h = f(t_i, x), \quad 0 < t \leq T \\ \text{initial } y_h = u_0, \quad t_i = 0 \\ \text{boundary } y_h = h \quad x_i = 0, \quad x_i = X \end{cases}$$

Можем да запишем  $y_h = y_{h,1} + y_{h,2} + y_{h,3}$ , когато

$$\begin{aligned} \Delta_h y_{h,1} &= 0, \quad (1) & \Delta_h y_{h,2} &= 0, \quad (2) & \Delta_h y_{h,3} &= f, \quad (3) \\ \text{initial } y_{h,1} &= u_0, & \text{initial } y_{h,2} &= 0, & \text{initial } y_{h,3} &= 0, \\ \text{boundary } y_{h,1} &= 0, & \text{boundary } y_{h,2} &= h & \text{boundary } y_{h,3} &= 0. \end{aligned}$$

Така може да изследваме устойчивостта на дясната диференциална схема, като поотделно изследваме как въливат различните входни данни.

### Def. 11

Казвамо, че диференциална схема  $\star\star$  е:

- устойчива по начинни данни ако решението на (1) изпълнява

$$\|y_{h,1}\|_h \leq C_1 \|u_0\|_h;$$

- устойчива по гранични условия, ако решението на (2) изпълнява

$$\|y_{h,2}\|_h \leq C_2 \|h\|_h;$$

- устойчива на дясна страна, ако решението на (3) изпълнява

$$\|y_{h,3}\|_h \leq C_3 \|f\|_h$$

## Метода максимум - норма

$$\|y_h\|_{L_\infty} := \max_{(x_i, t_j) \in \mathcal{M}_{h,j}} |y_h(x_i, t_j)|$$

### Def. 12 | Принцип на максимума за диференциални задачи

Когато се даде диференциална задача изпълнява принципа на максимума, то решението на хомогенната задача (при  $f=0$ ) може да достига своята max неподвижна/min оприличена стойност или в негативен момент от време. Или на граничната област по пространството, в която решаваме задачата.

Това е свойство на решението на диференциална задача (не на граничната схема), което е в сила например за уравнението на употреблена, уравнението на кръгса, на струята и др.

### Принцип за неподвижност на кофициентите

Ако кофициентите пред "у"-член във всяка единична единица на диференциалната схема са неподвижни тихи, то ~~единият~~ метода е устойчив. Ако разликата между кофициентите в лявата и тези в дясната страна е неоприличена, то методът е илюзорен. То гарантира че приближеното решение ще изпълни напр. за максимума С други думи се гарантира, че е в сила очакваната

$$\|y_h\|_{L_\infty} \leq \|u_0\|_{L_\infty} + \|f\|_{L_\infty}$$

Торка, ако е изпълнено условието за неподвижност на кофициентите и следващо принципът на максимума е в сила и за приближеното решение, то диференциалната схема е устойчива (но негативни данни и гранични условия |  $\|u_0\|_{L_\infty}$  норма)

## Доказателство на принципа на кофициентите

Пример:

Нека  $y_i^{j+1}$  се изразява явно от  $y_{i+1}^j, y_i^j, y_{i-1}^j$ .

Извънко

$$y_i^{j+1} = A y_{i+1}^j + B y_i^j + C y_{i-1}^j, \text{ където кофициентите}$$

удовлетворяват условието за постойност на кофициентите:

$$A > 0, B > 0, C \geq 0, A + B + C \leq 1.$$

Трябва е ясно, че  $y_i^{j+1} \leq \max \{y_i^j, y_{i+1}^j, y_{i-1}^j\}$ , като равенството се достига, само ако  $y_i^j = y_{i+1}^j = y_{i-1}^j$  и  $A + B + C = 1$ . С други думи нриймското решение за  $j+1$  същ не може да е по-голямо от отকоято максимума на  $j$ -та. Развивайки по индукция за всички предишни стъпки, настъпва, че  $\max$  постойността стойност се достига или на 0 или на граничата им на прелицата на областта

Обобщено, нека допускнем, че принципа на постойност на кофициентите е в сила, но максимума се достига във всички точки Точка.  $y_i^{j+1}$ . Точка от каквито вид има

$$y_i^{j+1} = \sum_{(x,t) \in S} A_{(x,t)} y_h^{(x,t)}, \text{ където } S \text{ е малока върху}$$

които е построена схемата, без  $T(x_i, t_{j+1})$ .

От условието за постойност на кофициентите и факта, че  $y_i^{j+1}$  е  $\max$  стойност, следва, че стойностите във всички точки на малока са равни. Поставяйки на място последователно върху всяка точка и ще получим, че Решението е константа т.е.  $\max$ , която е равен на тази константа се достига във всички, в частност по прелицата.

## Мрежката $\ell_2$ -норма

$$\|y_n\|_{\ell_2} := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{(x_i, t_i) \in W_{h,T}} |y_n(x_i, t_i)|^2}$$

Където  $N$  е броя на токите в схемата

Мрежката  $\ell_2$ -норма е показваща за "средната стойност" на  $y_n$  в токите от мрежата и издавателност честотността в този норма ще означава, че "средната граника" върху токите от мрежата ще е "малка". Това е по-силният резултат от честотността в максимална норма, т.к. е възможно да има токи в които граниката да има по-големи стойности, но все пак резултата получена чрез диференчната схема ще бъде "стиснати"

## Метод на Хармоничните приложения.

### За явна схема

$$-\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} - \frac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2} = 0$$

$$-\text{Нека } y_k^j = e^{ik\pi x_j} \quad \text{точка} \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$\|y_n(x, t_j)\|_{\ell_2} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |e^{ik\pi x_j}|^2}$$

- прилагаме ф. на на Ойлер  $e^{ik\pi t} = \cos(k\pi t) + i \sin(k\pi t)$  и получаваме

$$\|y_n(x, t_j)\|_{\ell_2} = 1. \quad (\text{може да имам, че това е нулевият ток от разпределението})$$

- Нека  $y_k^{j+1} = q y_k^j$ . Да изразим  $q$

(искаме да съзвъните човека, нормата да намалее)

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = \frac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2}$$

$$\frac{qe^{ikh\epsilon} - e^{-ikh\epsilon}}{\tau} = \frac{e^{i(k+1)h\epsilon} - 2e^{ikh\epsilon} + e^{i(k-1)h\epsilon}}{h^2} \quad ; \quad e^{ikh\epsilon}$$

$$\frac{q \cdot 1}{\tau} = \frac{e^{ikh\epsilon} - 2 + e^{-ikh\epsilon}}{h^2}$$

$$\frac{q \cdot 1}{\tau} = \frac{\cos(h\epsilon) + i \sin(h\epsilon) - 2 + \cos(-h\epsilon) - i \sin(-h\epsilon)}{h^2}$$

$$\frac{q \cdot 1}{\tau} = \frac{2(\cos(h\epsilon) - 1)}{h^2}$$

$$\frac{q \cdot 1}{\tau} = -4 \frac{\sin^2 \frac{h\epsilon}{2}}{h^2}$$

$$q = 1 - \frac{4J}{h^2} \sin^2 \frac{h\epsilon}{2}$$

Укажем  $|q| < 1$ .

$$\left| 1 - \frac{4J}{h^2} \sin^2 \frac{h\epsilon}{2} \right| < 1 \quad \text{или} \quad -1 < 1 - \frac{4J}{h^2} \sin^2 \frac{h\epsilon}{2} < 1, \quad \text{когда } \epsilon \neq 0$$

$$-2 \leq -\frac{4J}{h^2} \sin^2 \frac{h\epsilon}{2}$$

$$\tau \leq \frac{h^2}{2 \sin^2 \frac{h\epsilon}{2}}$$

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}$$

- Задачка схема - Кратк-Некаленд.

$$y_k^j = q^j \cdot e^{ik\hbar c}$$

Используя  $\frac{y_{k+1}^{j+1} - y_k^j}{\hbar} - \frac{y_{k-1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + y_{k+1}^j}{2\hbar} - \frac{y_{k+1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}}{2\hbar} = 0$

$$\frac{q^{j+1} \cdot e^{ik\hbar c} - q^j e^{ik\hbar c}}{\hbar} - \frac{q^j e^{ik\hbar c} - 2q^j e^{ik\hbar c} + q^j e^{ik\hbar c}}{2\hbar} - \frac{q^{j+1} e^{i(k+1)\hbar c} - 2q^{j+1} e^{ik\hbar c} + q^{j+1} e^{i(k+1)\hbar c}}{2\hbar} / :q^j$$

$$\frac{q e^{ik\hbar c} - e^{ik\hbar c}}{\hbar} - \frac{q^{i(k+1)\hbar c} - 2e^{ik\hbar c} + e^{i(k+1)\hbar c}}{2\hbar} - \frac{q(e^{i(k+1)\hbar c} - 2\dots)}{2\hbar}$$

$$\frac{q-1}{\hbar} \neq \frac{e^{ik\hbar c} - 2 + e^{-ik\hbar c}}{2\hbar} + \frac{q(e^{ik\hbar c} - 2 + e^{-ik\hbar c})}{2\hbar}$$

$$\frac{q-1}{\hbar} - \frac{\cos(\hbar c) + i \sin(\hbar c) - 2 + (\cos(\hbar c) - i \sin(\hbar c))}{2\hbar} + \frac{qz}{2\hbar}$$

$$\frac{q-1}{\hbar} - \frac{2 \sin^2 \frac{\hbar c}{2}}{\hbar^2} - \frac{2q \sin^2 \frac{\hbar c}{2}}{\hbar^2}$$

$$q = \frac{1 - \frac{2 \sin^2 \frac{\hbar c}{2}}{\hbar^2}}{1 + \frac{2q \sin^2 \frac{\hbar c}{2}}{\hbar^2}}$$