Notes NMDE

Def. 1 | Производна на функция

Производната на функция u в точката t се дефинира чрез

$$u'(t) \equiv \frac{du}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

ако последната граница съществува.

С други думи, как се изменя дадена величина.

От практическа гледна точка, производната описва моментната скорост на изменение на величината u за единица изменение на величината t

Формули за числено диференциране

- Формула с разлика напред и грешка $O(h)$:

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

- Формула с разлика назад и грешка $O(h)$:

$$u'(t) \approx \frac{u(t) - u(t-h)}{h}$$

- Формула с централна разлика и грешка $O(h^2)$:

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}$$

N.B.G | $u(t+h) \approx u(t) + u'(t)h$

Идеята на линеаризацията е, че приближаваме (в достатъчно малка околност на точката) нелинейния обект (с който по принцип се работи трудно) с нещо линейно. Геометрично графиката е допирателната към графиката на функцията в t, а производната е наклона

№3.7. Формула на Тейлър.

Формулата на Тейлър е обобщение, което ни позволява да направим по-добро приближение на функцията в околност на дадена точка, като използваме производни от по-висок ред:

$$u(t+h) = u(t) + \frac{u'(t)}{1!}h + \frac{u''(t)}{2!}h^2 + \dots + \frac{u^n(t)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

За да бъде горното в сила, ф-ята и трябва да е достатъчно гладка.

Обикновени диференциални уравнения (ОДУ)

Това са уравнения, в които участва неизвестна ф-я на една променлива и нейните производни.

Частни диференциални уравнения (ЧДУ)

Това са уравнения, чиито функции са на няколко променливи и участват техните частни производни.

- **Стационарни задачи:** (в които не участва времето) биват 2-мерни ~~ЧДУ~~ с неизвестна ф-я $u(x,y)$ и 3 мерни - $u(x,y,z)$. Те описват равновесното състояние на даден процес.
- **Нестационарни задачи** описват времевата еволюция на даден процес. Те могат да са 1, 2 и 3 мерни с неизвестни ф-ции - $u(x,t)$, $u(x,y,t)$, $u(x,y,z,t)$

Def. 2 | Абсолютна грешка

Абсолютна грешка наричаме разликата м/у точната и приближената стойност при дадена апроксимация:

$$\mathcal{E}_a := \text{exact value} - \text{approximation}$$

Деф. 3 | Относителна грешка

Относителна грешка дефинираме така:

$$\mathcal{E}_r := \frac{\text{exact value} - \text{approximation}}{\text{exact value}} = \frac{\mathcal{E}_a}{\text{exact value}}$$

Задача на Коши:

Задачата на Коши представлява общ вид на ОДУ от първи ред. Тя има вида:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in (t_0, +\infty)$$

$$u_0(t) = u_0$$

Решението на задачата на Коши наричаме непрекъснато диференцуруема ф-я $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, която удовлетворява ~~условието~~ уравнението и началното условие

N.B. 8. | Мрежа при ОДУ

Въвеждаме мрежата

$$\overline{\omega}_h = \{ t_i = t_0 + ih, \ i = \overline{0, n}, \ n = (T - t_0)/h \}$$

Ще търсим приближените стойности на решението именно в тази мрежа. Стойността на приближеното решение в точката t_i ще бележим с y_i : $y_i \approx u(t_i) = u_i$

Alg 1 | Явен метод на Ойлер

Явният метод на Ойлер е най-простият метод за числено решаване на ОДУ. Използвайки формулата за числено диференциране с разлика напред в точката t_i

$$u'(t_i) \approx \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{h}$$

диференциалната задача на Коши се апроксимира върху мрежата $\bar{\omega}_h$ с алгебричната задача:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1} \qquad \boxed{O(h)}$$

$$y_0 = u_0$$

Тогава за пресмятане на приближеното решение може да използваме схемата:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}$$

$$y_0 = u_0$$

Alg 2 | Неявен Метод на Ойлер

Неявният метод на Ойлер се основава на формулата за числено диференциране с разлика назад. Апроксимацията на задачата на Коши има вида:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(t_i, y_i) \quad i = \overline{1, n} \qquad \boxed{O(h)}$$

$$y_0 = u_0$$

Тогава за пресмятане на приближеното решение може да използваме схемата

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad i = \overline{0, n-1}$$

$$y_0 = u_0.$$

Def.4 | Неявен метод

На всяка стъпка от алгоритъма, за да получим стойността на приближеното решение в t_{i+1}, трябва да решим едно (в общия случай нелинейно) уравнение, относно y_{i+1}. Ако y_{i+1} участва в дясната страна, то този метод е <u>неявен</u>.

Def.5 | Локална грешка на апроксимация ЛПА.

ЛПА за един диференчен метод

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \Theta(\bar{t}, \bar{y})$$

Наричаме разликата м/у лявата и дясната страна, пресметнати за точното решение т.е.:

$$\psi_{i,h} := \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \Theta(\bar{t}, \bar{y}),\ \text{където}$$

$\bar{t} = (t_0, t_1 \dots t_n)$, $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots y_n)$; $\bar{u} = (u_0, u_1 \dots u_n)$.

Нарича се <u>локална</u> защото я получаваме локално, за една стъпка от алгоритъма

Alg3 | Подобрен метод на Ойлер

Методът който се получава от схемата с тегло $\sigma = 1/2$

$$\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \sigma f(t_i, y_i) + (1-\sigma) f(t_{i+1}, y_{i+1})\right] \quad \text{схема с тегло}$$

е известен като подобрен метод на Ойлер.

$$\frac{y_{i+1}-y}{h} = \frac{f(t_i\, y_i) + f(t_{i+1}\, y_{i+1})}{2}$$

. Той ма 2 ред на апроксимация

Def.6 / Устойчивост по Ляпунов

Казваме, че решението на задачата на Коши е <u>устойчиво</u> (по Ляпунов / по начални данни), ако малки промени в началните условия НЕ водят до големи промени в решението

Def.7 | A-устойчивост

Казваме, че даден числен метод е <u>абсолютно устойчив</u> (<u>A-устойчив</u>) ако приложен върху задачата за моделно уравнение за изследване на устойчивостта на метода

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \lambda \bar{u}$$, решението му удовлетворява

$$|y_i| \leq |y_0|$$

С други думи, ако в даден момент от време е допусната грешка y_0, искаме численият метод да не я увеличава ~~в вре~~ с времето и във всеки следващ момент y_i да остава не по-голямо по абс. ст. от y_0

Def.8 / Монотонност на метод

Казваме, че даден числен метод е <u>монотонен</u>, ако приложен върху задачата моделно уравнение за изследване на устойчивостта на метода, решението му не сменя знака си.

$$sgn(y_i) = sgn(y_0)$$

С други думи искаме грешката да не осцилира около нулата.

Alg. 4 | Методи на Рунге Кута.

Даден s етапен метод на Рунге-Кута има следния общ вид:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{h}(p_1k_1 + p_2k_2 + \dots p_sk_s),$$

$$k_1 = h.f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h.f(t_i+\alpha_2 h,\ y_i + \beta_{21}k_1)$$

$$k_3 = h.f(t_i+\alpha_3 h,\ y_i + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2)$$

$$\dots$$

$$k_j = h.f(t_i+\alpha_j h,\ y_i + \beta_{j1}k_1 + \dots \beta_{jj-1}k_{j-1}),\quad j=4,\dots,s$$

Това е едностъпков метод, т.к. при намиране на y_{i+1} използваме само стойността на y_i

Коефициентите може да да се записват в таблица на Butcher:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
\alpha_s & \beta_{s1} & \dots & \beta_{s\,s-1} & \\
\hline
 & p_1 & p_2 \dots & p_{s-1} & p_s
\end{array}$$

! Всички явни методи на Рунге Кута са условно A устойчиви

Адаптивен избор на стъпката | Р.К

При използване на равномерна мрежа, ако искаме добри (точни) резултати, стъпката трябва да се съобрази с най-лошия случай. Това обаче не винаги е целесъобразно.
Идеята на методите с адаптивна стъпка е да се използва малка стъпка там където е необходимо (обикновено където решението се изменя бързо) и голяма там където поведението на решението го позволява.

Алгоритъм

Избираме първоначална стойност за h_0; инициализираме $y_0 = u_0$, $t_0 = 0$, tol - някакъв толеранс на грешката.
Докато $t_i < T$:

1. Оценяваме локалната грешка err_i, която бихме допуснали със стъпка h_i.
2. Докато $err_i > tol$ намаляваме стъпката h_i и отново оценяваме err_i
3. Пресмятаме y_{i+1}, t_{i+1}, както и първоначалната стойност за h_{i+1}; увеличаваме i с 1.

Такъв вид оценка на грешката се нарича апостериорна, защото използва получени от метода резултати. ЧМДУ върху адаптивни мрежи се базират на апостериорни оценки на грешката

Многостъпкови методи

При едностъпковите методи за приближеното решение y_{i+1} използваме само стойността на y_i. Идеята на многостъпковите методи е да използваме информацията, която сме получили за решението на няколко предходни точки, като по този начин целим да получим по-висока точност.

Имайки задачата на Коши (по скоро диференциалното у-ие)

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$$

може да я сведем до еквивалентна на нея интегрално у-ие
Интегрираме от двете страни в граници от t_i до t_{i+1}

$$u_{i+1} - u_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))\,dt$$

За да получим диференчно уравнение, апроксимираме горното интегрално уравнение. Трябва да апроксимираме интеграла в дясната страна. За тази цел ползваме интерполационна квадратурна формула. Т.е. ~~интегриране~~ апроксимираме под интегралната ф-ия с интерполационния полином на Лагранж.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[L_n(f;x) + O(h^{n+1})\right] dt$$

Пренебрегвайки остатъчния член е ясно че ф-лата която ще се получи при апроксимиране се ЛГА $O(h^{n+1})$

Интерполационният полином на Лагранж построяваме като за интерполационни възли вземаме $t_i, t_{i-1} \dots t_{i-n}$ - точките от мрежата

Alg. 5 | Методи на Адъмс - Башфорт

Общия вид на m-стъпковия метод на Адъмс-Башфорт, който има ЛГА $O(h^m)$ е

$$y_{i+1} = y_i + h(C_1 f_i + C_2 f_{i-1} + \dots + C_m f_{i-m+1})$$

N.B.19

Методите на Адамс-Башфорт са по-бързи от тези на Рунге-Кута със същия ред на точност, но обикновено методите на Рунге-Кута имат по-добро поведение от гледна точка на устойчивостта на метода.

Alg 6 | Метод на Адъмс-Мултон

Общия вид на m-стъпковия метод на Адъмс-Мултон, който има ЛГА $O(h^m)$ е

$$y_{i+1} = y_i + h(C_0 f_{i+1} + C_1 f_i + \dots + C_m f_{i+1-m})$$

N.B.20

За да могат да се правят изчисления с помощта на даден m стъпков метод е необходимо да са известни стойностите на приближеното решение в първите m точки от мрежата. Тези стойности тр. да бъдат намерени с едностъпков метод, който има поне същия ред на точност като използвания метод на Адъмс.

N.B.21

За да е имплементацията на метода на Адъмс ефективна, е необходимо да пазим не само стойността на приближеното решение, но и на дясната страна в точките от мрежата, за да избегнем многократното пресмятане на десните страни в едни и същи точки. Ако не използваме този факт, метода би изпълнил много повече стъпки

Адъмс vs Рунге-Кута

- Предимства на Адъмс
  - по-бързи
  - удобни за използване като двойки предиктор-коректор.
- Предимства на Рунге-Кута:
  - по-добри свойства от гледна точка на устойчивост
  - по-добри са за работа с адаптивна стъпка

Предикторно-Коректорни Методи

Методи при които първоначално апроксимацията се прави с явен метод - предиктор и после се правят няколко итерации с неявен метод - коректор

Основни предимства и недостатъци

1. Явни методи

а) Ойлер

+ Бързи и лесни за имплементиране
- Бавно сходящи.

b) Рунге-Кута

+ Съществуват методи с висок ред на сходимост
+ По-добри свойства от гледна точка на сходимост спрямо методите на Адамс-Башфорт.
+ Удобни за използване с адаптивен избор на стъпката
- По-бавни от методите на Адамс-Башфорт

c) Адамс-Башфорд.

+ Съществуват методи с висок ред на сходимост
+ По-бързи от методите на Рунге-Кута
+ Подходящи за използване като предикторно-коректорен метод, когато са в комбинация с Адамс-Мултон.
- По-лоши от гледна точка на устойчивост спрямо Р.К.

2. Явни vs Неявни.

- Явните методи са значително по-бързи.
- За твърди задачи явните методи са практически неприложими
- Често явните методи се използват заедно с неявните в двойка предиктор-коректор.

3. Адаптивен избор на стъпката vs равномерна мрежа.

- Равномерната мрежа позволява да се контролира времето, т.к. броя операции е предварително известен.
- Адаптивния избор позволява да се контролира автоматично точността на приближеното решение.
- В задачи в които решението се изменя бързо в малък интервал и бавно в останалата част адаптивния избор има предимство. ~~защото в противен случай~~

№3.22

В зависимост от това дали времевата променлива участва, или не, говорим за стационарни и нестационарни задачи.

- **Стационарните задачи** са задачи в които не участва времето. Те биват 2 мерни или 3 мерни, със неизвестни функция съответно $u(x,y)$, $u(x,y,z)$. Те описват равновесното състояние на даден процес.

- **Нестационарните задачи** описват времевата еволюция на даден процес. Те могат да бъдат 1, 2 или 3-мерни, съответно с неизвестни функции: $u(x,t)$, $u(x,y,t)$, $u(x,y,z,t)$

Уравнение на непрекъснатостта

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + f}$$, (където $j(x,t)$ би бил потока на веществото в точката x в момент от време t)

f е функция, която описва източници/поглъщатели

Закон на Фик (в топлопроводността закон на Фурие)

$$\boxed{j_{diff}(x,t) = -D\frac{\partial u}{\partial x}}$$. Дифузионният поток е пропорционален на разликата в концентрациите

Уравнение на дифузията:

Ако в Закона за запазване (уравнението на непрекъснатостта) заместим закона на Фик получаваме уравнението на дифузията

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f}$$

Равномерна мрежа със стъпки по пространството и по времето

$\overline{\omega}_{h,\tau} := \{(x_i, t_j) : x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ n = l/h,\ m = T/\tau\}$

Стойността на приближеното решение в т. (x_i, t_j) ще бележим с y_i^j. Множеството от възли за които $t = t_j$ ще наричаме j-ти слой по времето

Извеждане на явна двуслойна схема при гранични условия на Дирихле

- Имаме уравнение на топлопроводността: със следните начални и гранични условия

$$☆ \quad \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad \begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x) \\ &u(0,t) = u_L(t) \qquad u(l,t) = u_R(t) \end{aligned}$$

- Въвеждаме равномерна мрежа $\overline{\omega}_{h,\tau}$
- От началното условие ни е известна стойността на решението в 0-вия слой по времето.

$$y_i^0 = u_0(x_i) \qquad i = \overline{0,n}$$

- На базата на информацията от 0 слой може да сметнем стойностите за 1вия и т.н. В общия случай може да намерим стойностите за $j+1$ имайки тези за j-тия
- Апроксимираме уравнението ☆ в т. (x_i, t_i)
  - Апроксимираме производната по времето с ф-ла с разлика напред.
  - Апроксимираме производната по пространството с ф-ла с централна разлика от втори ред
  - Получаваме диференциално у-ние с ЛГА $O(h^2+\tau)$

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} - D\,\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j \qquad i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1}$$

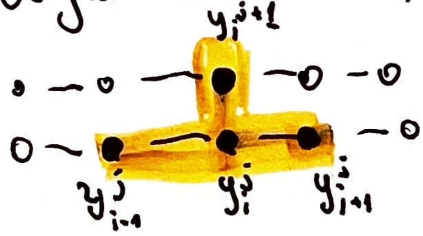
В него участват стойностите на приближеното решение в точките с индекси $(i-1,j)$ (i,j) $(i+1,j)$ $(i,j+1)$ като само последната стойност е неизвестна.

Това значи, че получената схема е явна

Шаблон

Точките които ~~пре~~ участват в пресмятането на текущата (търсената) точка. Те могат да бъдат както от същия слой по времето, така и от друг слой.

Пример: от явната двуслойна схема



Шаблонът може да поставим така, че да намерим всички вътрешни точки.

За граничните точки ние използваме граничните условия.

$$y_0^{j+1} = u_L(t_{j+1}) \qquad y_n^{j+1} = u_R(t_{j+1}) \qquad j=\overline{0,m-1}$$

Така получаваме каноничния вид на диференчната схема:

$$y_i^{j+1} = \left(1 - 2\frac{D\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{D\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau f_i^j \qquad i=\overline{1,n-1} \quad j=\overline{0,m-1}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i) \qquad i=\overline{0,n}$$

$$y_0^{j+1} = u_L(t_{j+1})\ ; \ y_n^{j+1} = u_R(t_{j+1}) \qquad j=\overline{0,m-1}$$

Alg.7 / Реализиране на явна двуслойна схема

1. Използвайки началното условие намираме стойностите на първия слой по времето

2. Итерираме по $j=\overline{0,m-1}$. На всяка итерация от стойностите на j-тия слой намираме тези на $j+1$ вия

• От апроксимацията на основното диференциално уравнение намираме стойностите във вътрешните точки от мрежата
• От граничните условия пресмятаме стойностите на приближеното решение в граничните точки.

N.B.26.

Ако коефициентите пред "у"-ите в каноничен вид са положителни числа и при това разликата в коефициентите в лявата и тези в дясната страна е неотрицателна, то методът е монотонен

Note: За да бъде явната двуслойна схема устойчива и монотонна тр. да бъде изпълнено

$$\sigma < \frac{h^2}{2D}$$

Def. 9 | Гранични условия на Дирихле, Нойман, Робин

• Дирихле / първи род

$$u(0,t) = u_L(t)$$

• Нойман / втори род (за потока)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u_L(t)$$

• Робин / смесени / трети род

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) + \alpha u(0,t) = u_L(t)$$

Апроксимиране на граничните условия на Нойман

Имаме

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad 0<x<l, \quad 0<t\leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad 0\leq x<l$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u_L(t), \quad u(l,t) = u_R(t)$$

Лявото гранично условие е на Нойман. Защото е ляво и не разполагаме с по-вътрешни точки, бихме могли да го апроксимираме единствено с формулата с разлика напред. Получаваме

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} = u_L(t_j)$$

Това обаче има ЛГА $O(h)$. Това е грешка ес по-нисък ред от реда който постигаме в останалите точки. Нека повишим реда на апроксимацията за гр. усл. на Нойм

Бихме могли да запишем

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = u_L(t_j) + O(h).$$ Ако развием остатъчния член бихме получили

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = u_L(t_j) + \diamond + O(h^2)$$

или

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{h} - \diamond = u_L(t_j) + O(h^2)$$

или

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \diamond = u_L(t_j)$$

Остатъчния член $O(h)$ искаме да представим като $\diamond + O(h^2)$ с валидност 1ГА. Нека я разпишем като развием в ред на Тейлър около $x=0$

$$\psi_{h,\tau} = \frac{1}{h}\left(u_0^j + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^j h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_0^j \frac{h^2}{2} + O(h^3) \cdot u_0^j\right) - u_L(t_j)$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_0^j + O(h^2)$$

Заместваме $\diamond$ с $\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Не може да апроксимираме с централна разлика.

Допускаме, че за $x=0$ основното диференциално уравнение е изпълнено и изразяваме втората производна по ~~времето~~ пространството с тази по времето

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - f\right).$$ сега заместваме $\diamond$ и

получаваме:

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \frac{h}{2}\frac{1}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - f\right) = u_L(t_j)$$

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \frac{h}{2D}\left(\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} - f_0^j\right) = u_L(t_j)$$

В каноничен вид

$$y_0^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau D}{h^2}\right) y_0^j + \frac{2D\tau}{h^2} y_1^j + \tau f_0^j - \frac{2D\tau}{h} u_L(t_j)$$

и това може да ползваме за ляво гранично условие.

Чисто неявна схема

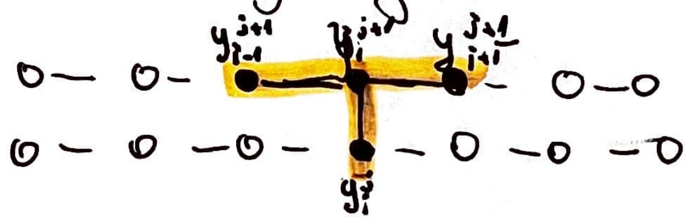
Имаме задачата

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad u(x,0)=u_0(x)$$
$$u(0,t)=u_L(t), \quad u(l,t)=u_R(t)$$

Ще подходим аналогично, като с явната схема, но сега този път направим апроксимация на $j+1$ слой. За времето ще използваме ф-ла с разлика назад.
Получаваме:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} - D\,\frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} = f_i^{j+1} \qquad i=\overline{1,n-1}, \quad j=\overline{0,m-1}$$

Тук шаблона изглежда така:



Очевидно получената апроксимация е неявна, защото имаме 3 неизвестни в уравнението y_{i-1}^{j+1}, y_i^{j+1}, y_{i+1}^{j+1}

За да намерим стойностите на приближеното решение на $j+1$ слой по времето тр. да решаваме система от $n+1$ уравнения и $n+1$ неизвестни

Векторно матрична форма:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ -\frac{D}{h^2} & \frac{1}{\tau}+\frac{2D}{h^2} & -\frac{D}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{D}{h^2} & \frac{1}{\tau}+\frac{2D}{h^2} & -\frac{D}{h^2} \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^{j+1} \\ y_1^{j+1} \\ \vdots \\ y_{n-1}^{j+1} \\ y_n^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_L(t_{j+1}) \\ \frac{y_1^j}{\tau} + f_1^{j+1} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1}^j}{\tau} + f_{n-1}^{j+1} \\ u_R \end{bmatrix}$$

Alg 8 | Реализиране на неявни двуслойни схеми

1. Използвайки началното условие, намираме стойностите на първия слой по времето

2. Итерираме по $j = \overline{0, m-1}$. На всяка итерация от стойностите на j-тия слой намираме тези на $j+1$ слой като решаваме система уравнения

Чисто неявната схема е монотонна за всяко τ

N.B. 28

Диференчното уравнение (Схема на Кранк-Никълсън) допълнено с подходящи апроксимации за началното и граничните условия дава клас диференчни схеми за приближеното решаване на уравнението на дифузията/топлопроводност

- При $\sigma = 1$ схемата е явна.
  Има ЛГА $O(h^2 + \tau)$ и е условно монотонна при $\tau < \frac{h^2}{2D}$.

- При $\sigma \neq 1$ схемата е неявна
  Има ЛГА $O(h^2 + \tau)$ и на всеки слой по времето тр. да се решава система с тридиагонална матрица.
  В частност
  - Ако $\sigma = 0$ се получава чисто неявна схема, която е монотонна за всяко избрано τ
  - Ако $\sigma = 1/2$ се получава схема на Кранк-Никълсън, която има ЛГА $O(h^2 + \tau^2)$ и е монотонна при $\tau < \frac{h^2}{D}$. Тя е устойчива за $\forall\, \tau$