**Методы численного анализа**

**Отчёт по лабораторной работе**

**“Численное интегрирование”**

**Вариант 7**

**Студент**

Малиев Эмиль Енгибарович

**Преподаватель**

Будник Анатолий Михайлович

ФПМИ БГУ  
2022

**Постановка задачи**

Вычислить интеграл с точностью следующими способами:

1. Применяя правило Рунге, используя составную квадратурную формулу левых прямоугольников. Определить величину шага разбиения исходного отрезка интегрирования, достаточного для достижения точности .

2. Пользуясь выражением для погрешности интегрирования, определить шаги в двух нижеуказанных квадратурных формулах, которые обеспечат требуемую точность результата:

a. Составная квадратурная формула трапеций

b. Составная квадратурная формула Симпсона

3. Применяя квадратурную формулу НАСТ Гаусса при . Оценить погрешность интегрирования через формулу остаточного члена .

Провести сравнительный анализ полученных результатов.

**Алгоритм**

Пункт 1:

**Составная формула левых прямоугольников:**

Разобьем отрезок [a; b] на N частей длины:

**Правило Рунге:**

m = 1(Для формулы левых прямоугольников)

Тогда для достижения точности необходимо:

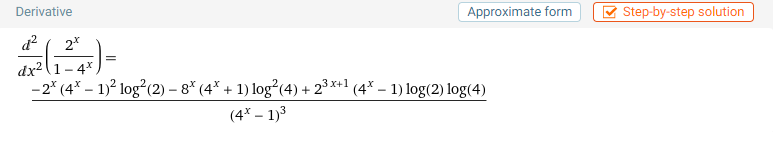
Изначально возьмём .

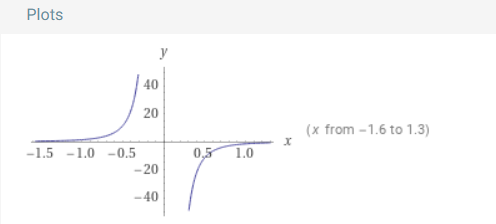
Пункт 2:

1. **Составная формула трапеций:**

Выражение для оценки погрешности:

Значит, шаг, дающий точность , определяется следующим образом:





По графику из Wolfram видно, что максимум во второй производной на отрезке [-2; -1] достигается в точке -1

Значит, для точности ,

Мы можем взять любую величину , удовлетворяющую условию. Возьмём . Тогда

**б) Составная квадратурная формула средних прямоугольников:**

Выражение для оценки погрешности:

Значит, шаг, дающий точность , определяется следующим образом:

Значит, для точности ,

Мы можем взять любую величину , удовлетворяющую условию. Возьмём . Тогда

Пункт 3

**Квадратурная формула НАСТ Гаусса:**

Приводим интеграл по отрезку к интегралу по отрезку :

В качестве узлов берём корни полинома Лежандра степени . Корни посчитаны с использованием библиотеки *Python scipy*).

Коэффициенты квадратуры:

Оценка погрешности:

**Листинг**

Точное значение интеграла:

from scipy import integrate

def f(x):

return (2\*\*x)/(1 - 4\*\*x)

v, err = integrate.quad(f, -2, -1)

print ('Точное вычичление интеграла = ', v)

СФЛП с правилом Рунге:

e = 0.00001

Q2 = 0

h = 1

Q1 = f(-2)

N = 1

while abs((Q1 - Q2) \* 2) > e:

h = h / 2

Q2 = Q1

N \*= 2

Q1 = 0

for i in range(N):

Q1 += f(-2 + h \* i)

Q1 \*= h

CФТ:

Q = (0.0085 \* (f(-2) + f(-1))) / 2

for i in range(1, 118):

Q += f(-2 + i \* 0.0085)

Q \*= 0.0085

print(Q, v - Q)

СФСП:

Q = 0

for i in range(100):

Q += f(-2 + i \* 0.01 + 0.005)

Q \*= 0.01

НАСТ Гаусса:

def gaussian\_quadrature(f, n = 5.0, a = -2.0, b = -1.0):

roots = sp.special.legendre(n).roots

summands = map(lambda x : (f((a + b) \* 0.5 + x \* (b - a) \* 0.5) /

((1.0 - x \*\* 2.0) \* np.polyval(sp.special.legendre(n).deriv(1), x) \*\* 2.0)), roots)

return (b - a) \* sum(summands)

def error(max\_deriviative = 29085, n = 5):

return (max\_deriviative \* 2 \*\* (2 \* n + 3) / ((2 \* n + 3) \* m.factorial(2 \* n + 2))) \* ((m.factorial(n + 1)) \*\* 2 / m.factorial(2 \* n + 2)) \*\* 2

**Результаты**

Точное значение интеграла

Правило Рунге

Составная квадратурная формула трапеций

Составная квадратурная формула средних прямоугольников

Квадратурная формула НАСТ Гаусса

**Анализ**

При вычислениях интеграла всеми указанными методами точность была достигнута. Её превышение связано с тем, что:

1) При использовании правила Рунге шаг был найден «с запасом», то есть при разбиении с шагом интеграл бы уже был вычислен с заданной точностью, а его деление на два увеличило точность ещё на порядок.

2) При использовании составных формул трапеций и средних прямоугольников ограничение на было найдено сверху, в реальности мы не можем заранее найти погрешность точно, так как не знаем точки , а только оцениваем её сверху через максимум производной. Также на влияет то, что выбранные по итогу шаги можно менять и в зависимости от этого погрешность будет меняться(чем дальше от найденного ограничения, тем лучше будет посчитан интеграл).

3) При использовании формулы НАСТ Гаусса с мы получили оценку погрешности , имеющую порядок . Но, как и в предыдущем пункте, мы оценивали погрешность сверху, поэтому реальная погрешность получилась ниже.

Также можно отметить, что использование формулы НАСТ Гаусса из-за более высокой АСТ позволяет считать интеграл с нужной точностью, используя меньшее количество узлов. Сложность представляют подсчёт -ой производной. Также трудности могут быть с подсчётом узлов, однако так как их не надо пересчитывать при изменении функции, которая интегрируется, узлы(корни полинома Лежандра) можно брать из готовых таблиц или используя существующие в разных пакетах функции.