Практикум 7. Непрерывность функции

Цель работы **–** изучение понятия непрерывности функции в точке, классификация точек разрыва, использование функции fzero для нахождения нулей функции и корней уравнения, символическое решение уравнений и систем

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты М-сценариев и М-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

1. Непрерывность функции в точке и точки разрыва функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция не является непрерывной в точке x_0 области определения функции или функция не определена в этой точке, но определена в некоторой её окрестности, то точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции.

Точки разрыва классифицируются следующим образом:

1) если оба предела $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ конечны и $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$, то такая точка x_0 является точкой устранимого разрыва, причем $f(x)$ может быть и определена, и не определена в точке x_0;

2) если оба предела $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ конечны и $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв первого рода;

3) если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ не существует или бесконечен, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода.

2. Нули непрерывной функции. Численное решение уравнений

Из курса математического анализа нам известно следующее свойство непрерывной функции:

если $f(a) \cdot f(b) < 0$*, то существует точка* $x_0 \in (a, b)$ *такая, что* $f(x_0) = 0$. *Это утверждение означает, что график функции* $y = f(x)$ *непрерывной на отрезке* $[a, b]$*, хотя бы в одной точке пересекает отрезок ось* Ox*, если точки* $(a, f(a))$ *и* $(b, f(b))$ *лежат по разные стороны от оси* Ox.

Найти приближенно точку x_0 можно с помощью функции **fzero**.

Базовый формат вызова этой функции включает два аргумента и имеет один из двух видов:

fzero (fun, [a b])

fzero (fun, x1)

Аргумент fun может быть задан так же как первый аргумент функции fplot (т.е. как указатель на функцию или строка функции).

Второй аргумент в форме [a b] представляет собой интервал, на концах которого функция fun меняет знак, что гарантирует нахождение, по крайней мере, одного корня на этом интервале. Второй аргумент в форме x1 представляет собой скалярное значение, в окрестности которого предполагается нахождение корня. В этом случае функция fzero сама пытается найти отрезок с центром в заданной точке x1, на концах которого функция меняет знак.

Пример 1.

Нули функции $f(x) = \cos x - \sin x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ можно найти с помощью команды

```
>>fzero(@(x) cos(x) - sin(x), [0, pi/2])
ans =
0.7854
```

Если мы хотим получить не только значение корня, но и узнать значение функции в найденной точке, то к функции fzero можно обратиться с двумя выходными параметрами

```
>> [x,f]=fzero(@(x) cos(x) - sin(x), [0, pi/2])
x =
    0.7854
f =
 -1.1102e-016
```

Судя по значению функции точность нахождения нуля функции достаточно высока.

Поскольку fzero не проверяет функцию fun на непрерывность, то применение fzero в некоторых случаях может привести к парадоксальным (на первый взгляд) результатам. Например, попытка найти нули функции $y = \operatorname{tg} x$ вблизи точки 1,5 приводит к следующему.

Пример 2.

```
>> [x,f]=fzero(@tan, 1.5)
x =
    1.5708
```

f =

  1.9789e+015

Полученное значение аргумента соответствует приближенному значению $\pi/2$ и на самом деле является не нулем функции $y = \mathrm{tg}\, x$, а ее точкой разрыва, при переходе через которую функция меняет знак. Выведенное значение функции в найденной точке показывает нам, что найден не корень.

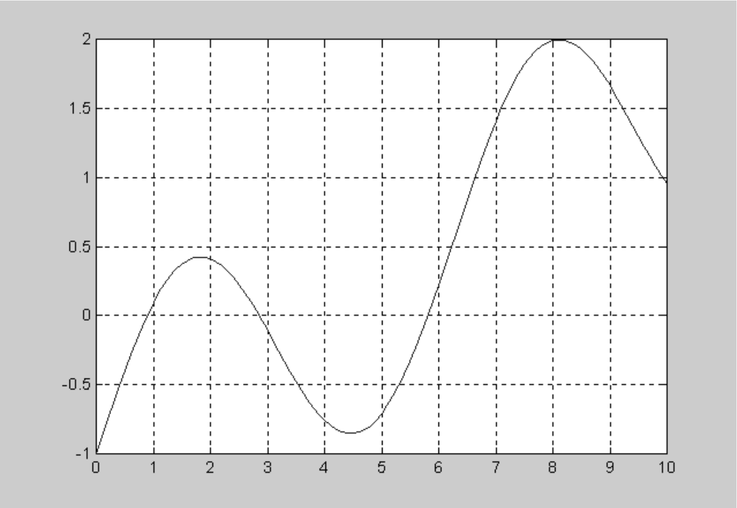
Условие обнаружение интервала, на концах которого функция принимает значения разных знаков, является принципиальным для алгоритма, использованного в функции fzero. Например, для такой тривиальной функции, как $y = x^2$, функция fzero найти нуля не может.

Логично задать вопрос: как мы можем получить начальное приближение или отрезок, на концах которого функция принимает значения с разными знаками? Часто это проще всего сделать, построив график функции.

Пример 3.

Хотим решить уравнение $x = 4(1-\sin x)$. Преобразуем его к виду $\sin x - 1 + x/4 = 0$ и воспользуемся тем, что корни уравнения $\sin x - 1 + x/4 = 0$ можно интерпретировать как нули функции $f(x) = \sin x - 1 + x/4$. Теперь задаём анонимную функцию и строим график:

```
>>f = @(x) sin(x) - 1 + 0.25*x;
>>fplot(f, [0 10]) % почему мы знаем, что все корни лежат в этом промежутке?
>>grid on
```



Из рисунка видно, что корни уравнения лежат на отрезках $[0,1]$, $[2,3]$ и $[5,6]$. (Можно было использовать другой подход: построить графики функций x и $4(1-\sin x)$ в одном окне и увидеть, в каких точках они пересекаются.)

```
>>x1 = fzero(f, [0 1])
x1 = 0.8905
>>x2 = fzero(f, [2 3])
x2 = 2.8500
>>x3 = fzero(f, [5 6])
x3 = 5.8128
```

Упражнение 1. Для следующих функций найти точки разрыва, исследовать их характер, сделать геометрическую иллюстрацию:

а) $y_1 = \dfrac{x^2-4}{\left|x^2-4\right|}$, б) $y_2 = e^{\frac{1}{x-2}}$.

Упражнение 2.

Найдите все корни уравнений:

а) $e^{\frac{x}{2}} = 3+\sqrt{x}$; б) $x^3-8x^2+17x+\sqrt{x}=10$.

3. Символическое решение уравнений.

Для решения уравнений можно использовать функцию **solve.** Применение функции **solve** более ограниченно: она позволяет решать уравнения, заданные символическими выражениями или строками. Символическое выражение или строка, которая не содержит уравнения, будут использованы как левая часть уравнения и приравнены к нулю.

Пример 4.

```
>> solve('x^4 + x^3 - x = 1')
ans =
1
-1
-1/2 + (3^(1/2)*i)/2
-1/2 - (3^(1/2)*i)/2
>> syms y;
>> solve(y^2 + y)
ans =
```

0

-1

Если у уравнения бесконечно много решений, будет найдено только одно из них.

Пример 5.

```
>> solve('cos(x) = 0')
ans =
pi/2
```

Из этого примера видно, что решения ищутся символически. Но конечно, точное решение не всегда возможно найти, и в таких случаях solve вернёт приближённое численное решение:

Пример 6.

```
>> solve('x^2 - sin(x) - 1')
ans =
        -0.63673265080528201088799090383828
```

Если в уравнении используются несколько переменных, то по умолчанию уравнение будет решено относительно той, которая ближе всего к x по алфавиту (точный способ выбора описан в >>help symvar). Решение относительно других переменных можно получить, передав их как второй аргумент solve:

Пример 7.

```
>> syms a b c x
>> eq = a*x^2+b*x+c
>> solve(eq)
ans =
 -(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
 -(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
>> solve(eq, b)
ans =
-(a*x^2 + c)/x
```

Упражнение 3.

Решите следующие уравнения:

а) $e^{3x} = (3x)^e$;   б) $\sin x = \frac{x}{3}$.

Попробуйте определить, являются ли полученные решения точными или приближёнными.

4. Символическое решение системы уравнений

Функция solve также может решать системы нескольких уравнений:

Пример 8.

```
>> [x,y] = solve('x^2 - y = 2', 'y - 2*x = 5')
 x =
  2*2^(1/2) + 1
 1 - 2*2^(1/2)
 y =
  4*2^(1/2) + 7
 7 - 4*2^(1/2)
```

Здесь мы присвоили возвращаемый результат вектору из двух переменных. Если присвоить результат просто переменной (в том числе ans), то будет получена ***структура***:

```
>> solutions = solve('x^2 - y = 2', 'y - 2*x = 5')
solutions =
x: [2x1 sym]
y: [2x1 sym]
```

и значения переменных можно получить как solutions.x и solutions.y (заметьте, что в этом случае вы не запутаетесь, какое решение относится к какой переменной).

Число переменных, относительно которых решается система, равно числу уравнений. Как и в случае с одним уравнением, эти переменные можно указать как аргументы после уравнений.

После уравнения/й и переменной/ых solve принимает ещё пары опций и значений, как line:

- 'IgnoreAnalyticConstraints' (false по умолчанию) позволяет применять алгебраические правила упрощения при решении уравнений (это может привести к ошибочным результатам);
- 'MaxDegree' (3 по умолчанию, от 1 до 4) указывает степень многочленов, для нахождения корней которых используются точные формулы;

- 'Real' (false по умолчанию) находит только действительные решения уравнений;
- 'PrincipalValue' находит только одно решение уравнения

Примеры их применения (и точный список правил, который используется при 'IgnoreAnalyticConstraints') можно посмотреть в help solve.

Упражнение 4.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} w+x+4y+3z=5 \\ 2w+3x+y-2z=1 \\ w+2x-5y+4z=3 \\ w-3z=9 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1. Для следующих функций найти точки разрыва, исследовать их характер, сделать геометрическую иллюстрацию:

а) $y_3 = \dfrac{\arcsin x}{x}$, б) $y_4 = \dfrac{2}{x^2-1}$.

Упражнение С2.

Найдите все корни уравнения $x^2 - 5x\sin 3x + 3 = 0$.

Упражнение С3.

Решите следующие уравнения:

а) $x + \dfrac{1}{x} = 2;$ б) $\ln(1+x) = -\ln(1-x^2)$.

Попробуйте определить, являются ли полученные решения точными или приближёнными.

3. Ответить на контрольные вопросы:

1) Когда функция является непрерывной в точке?
2) Дайте классификацию точек разрыва.
3) Назовите аргументы функции fzero.
4) К каким результатам может привести использование функции fzero?
5) Какие уравнения и системы можно решать с помощью функции **solve?**

Список рекомендуемой литературы

1. http://orioks.miet.ru/oroks-miet/scripts/login.pl?DBnum=9 - ОМА. Предел и непрерывность. Предел функции
2. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.4.
3. http://www.tehnauk.ru/mathlab/8?start=2 – Символьные вычисления