Практикум 9. Многочлен Тейлора.

Цель работы – научиться в среде MatLab производить операции над полиномами, представленными векторами коэффициентов, вычислять значения полиномов, производить действия с полиномами (складывать, вычитать, умножать, делить, дифференцировать), производить вычисления с использованием цикла for; раскладывать многочлены по степеням $x - x_0$, используя средства среды MatLab.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты М-сценариев и М-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

1. Полиномы. Действия с полиномами. Полином в MatLab задаётся вектором его коэффициентов, начиная со старшей. Число элементов вектора на один больше степени полинома. Функция ***polyval*** предназначена для вычисления значений полинома от некоторого аргумента. Аргумент может быть матрицей или вектором.

Пример 1. Вычислим значение полинома

$p(x) = x^5 + 5x^3 + 7x^2 + 8x + 3$ в точке $x = -2.$

```
>> p=[1 0 5 7 8 3];
>> polyval(p,-2)
ans =
 -57
```

Упражнение 1. Вычислить значения полинома

$p(x) = x^7 - 3.2x^4 + 3x^2 + 3$ в точках $-1; 4; 2,2; \pi.$ Значения аргументов задать в виде вектора. Сохранить значения полинома.

Нахождение всех корней полинома производится с помощью функции ***roots***.

Пример 2.

```
>> p=[1 0 5 7 8 3];
>> roots(p)
ans =
 0.7592 + 2.2827i
 0.7592 - 2.2827i
 -0.5000 + 0.8660i
 -0.5000 - 0.8660i
 -0.5184
```

Обратная функция к roots – poly – вычисляет коэффициенты многочлена с данными корнями.

Пример 3.

```
>> p=[1 0 5 7 8 3];
>> poly(roots(p))
ans =
```

1.0000 -0.0000 5.0000 7.0000 8.0000 3.0000

<u>Вопрос.</u> *Как вы думаете, получится ли тот же результат при выполнении команды*

>> poly([0.7592 + 2.2827i, 0.7592 - 2.2827i, -0.5000 + 0.8660i, -0.5000 - 0.8660i, -0.5184])

? Почему?

Упражнение 2. Вычислить корни полинома $p(x) = 2x^8 - 3x^5 + 7x^2 - 2,$ сохранить их, сделать проверку.

Для умножения полиномов используется функция ***conv.*** Для деления полиномов с остатком используется функция ***deconv,*** имеющая два выходных аргумента – частное и остаток.

Упражнение 3. Вычислить произведение полиномов

$$p(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^2 + 4 \text{ и } q(x) = x^3 - 3x + 1,$$

а также частное и остаток от деления p на q.

Для сложения и вычитания полиномов нет специальной функции. Использование знака + приведёт к ошибке при сложении полиномов разной степени.

Упражнение 4. Написать файл-функцию с двумя аргументами, осуществляющую сложение полиномов разной степени. Алгоритм:

1) Найти большую из длин входных аргументов (обозначим её m).

2) Создать вспомогательные векторы длины m, представляющие те же самые полиномы, что и аргументы. Для заполнения части элементов нулями можно использовать функцию zeros.

3) Вычислить сумму.

Протестировать файл-функцию, используя полиномы $p(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^2 + 4$ и $q(x) = x^3 - 3x + 1,$

2. Формула Тейлора для многочленов.

Производная многочлена. Встроенная функция ***polyder*** предназначена для вычисления не только производной полинома, но и для вычисления производной произведения и частного полиномов.

q = polyder(p) – выходной аргумент q равен производной полинома p;

n = polyder(p,q) – выходной аргумент n равен производной произведения многочленов p и q.

[n d] = polyder(p,q) – выходной аргумент n равен числителю производной частного полиномов p и q, выходной аргумент d равен знаменателю.

Упражнение 5. Для многочленов $p(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 - 2$ и $q(x) = x^6 - 3x + 1$ найти их производные, производную произведения и частного.

Нахождение производных высших порядков. Цикл for. Цикл ***for*** предназначен для выполнения заданного числа повторяющихся действий. Самое простое использование цикла ***for*** выполняется следующим образом:

```
for count = start:step:final
   команды MatLab
end
```

Здесь count - *переменная цикла*, start – её начальное значение, final – конечное значение, step – шаг, на который увеличивается count при каждом следующем заходе в цикл. Цикл заканчивается, как только значение count становится больше final. Значения start и step (а значит, и count) не обязательно целые.

Вспомнив, что выражение start:step:final само по себе возвращает вектор, можно заключить, что в цикле

```
for count = vector
   …
end
```

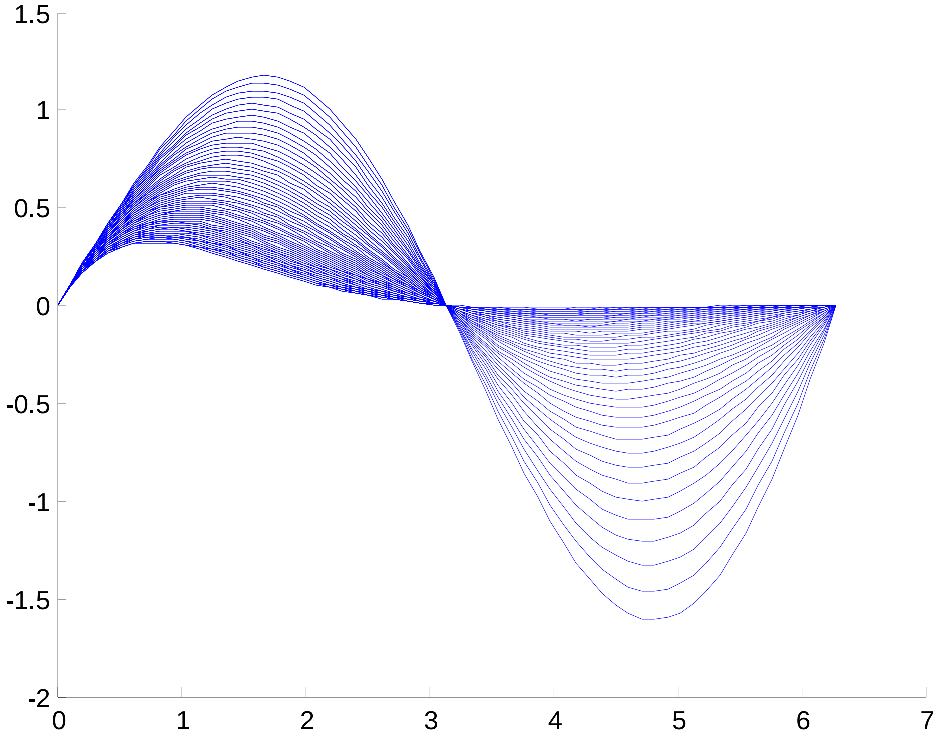
где vector – какой-либо вектор, переменная count принимает поочерёдно все значения элементов vector. Это действительно так.

Пример 4. Пусть требуется вывести семейство кривых, которое задано функцией, зависящей от параметра: $y(x,a) = e^{-ax}\sin x$ для $x \in [0; 2\pi]$ и значений параметра от –0,1 до 0,1 с шагом 0,2. Создадим М-файл

```
x = 0:pi/30:2*pi;
hold on
for a = -0.1:0.02:01
   y = exp(-a*x).*sin(x);
   plot(x,y)
```

end

и запустим его на выполнение.



Упражнение 6. Создать файл-функцию, вычисляющую производную порядка n полинома $p(x)$, заданного вектором коэффициентов. Производную задать вектором коэффициентов. С помощью созданной файл-функции найти 5-ую производную полинома $p(x) = x^{10} - x^7 + 3x^2 - 2$ и вычислить её значение в точке 0,2.

Разложение полинома по степеням $x - x_0$**.** Полином $P(x)$ степени n раскладывается по степеням $x - x_0$

$$P(x) = b_n (x - x_0)^n + b_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \ldots + b_0,$$

где $b_k = \dfrac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$. Разложение называется n-м *многочленом Тейлора* по степеням $x - x_0$.

Упражнение 7. Создать М-файл, вычисляющий значения коэффициентов b_k (в виде вектора) в многочлене Тейлора для полинома произвольной степени в произвольной точке. С помощью созданной функции вычислить коэффициенты b_k для разложений полинома $p(x) = x^6 + 2x^4 - 3x - 2$ в многочлен Тейлора по степеням $x-1$ и $x+2$.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Выполнить упражнения:

Упражнение С1. Вычислить корни полинома $p(x) = x^6 - 1$ сохранить их, сделать проверку.

Упражнение С2. Вычислить произведение полиномов $p(x)$ и $q(x)$, частное и остаток от деления $p(x)$ на $q(x)$, сумму полиномов, если

$$p(x) = x^2 + x + 1 \text{ и } q(x) = x - 1.$$

Упражнение С3. Для многочлена $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ записать многочлен Тейлора по степеням $x-2$.

3. Ответить на контрольные вопросы:

1) Рассмотрим многочлен $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + .. + a_{n-1} x + a_n$. Как расположены относительно друг друга графики его многочленов Тейлора порядка n, выписанные по степеням $x - x_1$ и $x - x_2$, если $x_1 \neq x_2$?

2) Рассмотрим многочлен $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + .. + a_{n-1} x + a_n$. Как расположен его график относительно графика его многочлена Тейлора порядка n, выписанного по степеням $x - x_0$, если $x_0 \neq 0$?

Список рекомендуемой литературы

1. В.Г.Потемкин "Введение в Matlab" (v 5.3), http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php .

2. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002.

3. А. Кривелёв. Основы компьютерной математики с использованием системы MatLab. М, 2005.