Практикум 6. Предел функции

Цель работы – изучение предела функции в точке, односторонних пределов, пределов функции на бесконечности, графических моделей этих пределов, вычисление пределов, построение графиков с помощью функции fplot, символическое вычисление пределов.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты М-сценариев и М-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

1. Графические модели предела функции в точке и на бесконечности, одностороннего предела

Графики будем строить с помощью функции fplot. Напомним, что функция fplot является модификацией функции plot. Функция fplot строит график функции $y = f(x)$ без предварительного вычисления векторов $(x_1, x_2, ...)$ и $(y_1, y_2, ...)$. В отличие от plot функция fplot вычисляет таблицу значений функции самостоятельно.

Базовый формат вызова этой функции включает два аргумента и имеет один из двух видов:

fplot(handle, [limits])

fplot(str, [limits])

В первом случае первым аргументом является указатель (handle) на функцию, во втором случае – строка обрабатываемой функции. Аргумент limits может быть представлен либо двухкомпонентным вектором [xmin xmax], либо четырехкомпонентным вектором [xmin xmax ymin ymax]. Укороченный вариант задает пределы изменения аргумента x. Расширенный – дополнительно представляет пределы изменения функции.

Указатель на функцию создается одним из следующих способов:

handle = @function (здесь function – имя встроенной или созданной с помощью M-файла функции)

handle = @(arglist)anonymous_function (здесь arglist список аргументов функции, а anonymous_function – формула, которой задается функция)

Строка функции создается одним из следующих способов:

str = 'function' (здесь function – имя встроенной или созданной с помощью M-файла функции)

str ='anonymous_function' (здесь a anonymous_function – анонимная функция в виде формулы с неизвестным)

Пример 1.

График функции $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ можно построить, набрав в командном окне одну из команд (1) – (3):

(1) >> fplot(@cos, [0 2*pi]

(2) >> fplot('cos', [0 2*pi]))

(3)

>> y=@cos

>> fplot(y, [0 2*pi])

(4)

>> y='cos';

>> fplot(y, [0 2*pi])

График функции $y = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ на отрезке $[-20, 20]$ можно построить, набрав в командном окне одну из команд (5) – (8) (см. рис. ниже):

(5) >> fplot(@(x)sin(x)/(x^2+1), [-20 20 -1 1])

(6)

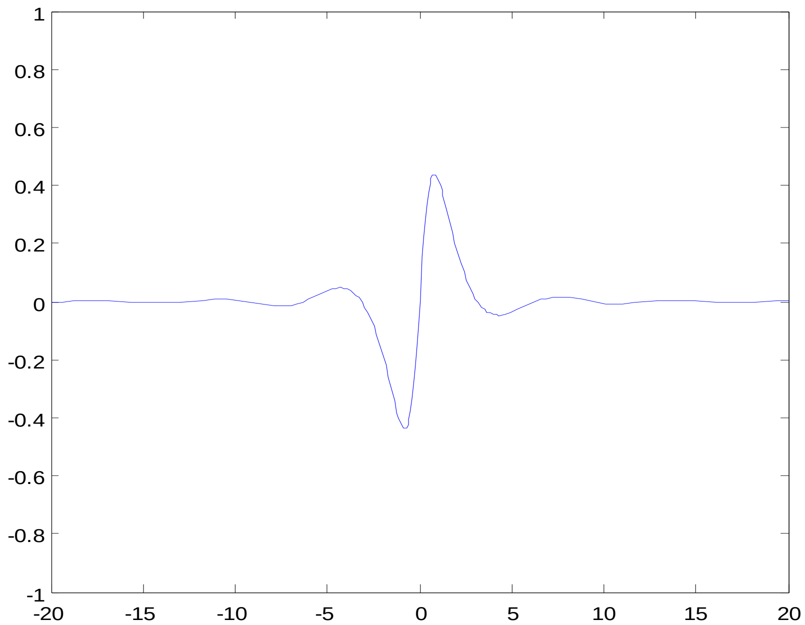
>> y=@(x)sin(x)/(x^2+1);

>> fplot(y, [-20 20 -1 1])

(7) >> fplot('sin(x)/(x^2+1)', [-20 20 -1 1])

(8) >> y='sin(x)/(x^2+1)';

>> fplot(y, [-20 20 -1 1])

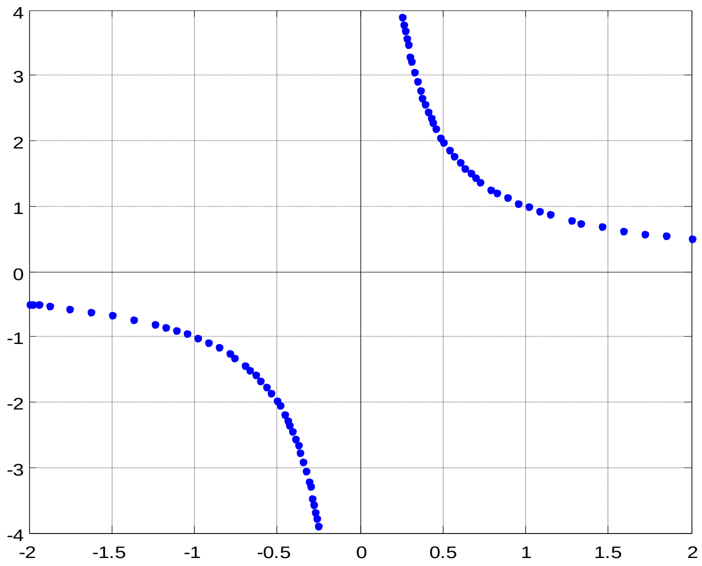


Среди дополнительных параметров функции fplot (также как и для функции plot) могут находиться строки, управляющие цветом и маркировкой графика.

При вычислении таблицы значений $(x_1, x_2, ...)$ и $(y_1, y_2, ...)$ функция fplot проявляет некоторый интеллект – в местах резкого изменения функции значения аргумента x выбираются с более мелким шагом. Это наглядно видно, если при построении графика табличные точки не соединять линией.

Пример 2

```
>> fplot(@(x)1/x,[-2 2 -4 4],'.')
>> grid on
>> line([-2 2],[0 0],'Color','black')
>> line([0 0],[-4 4],'Color','black')
```

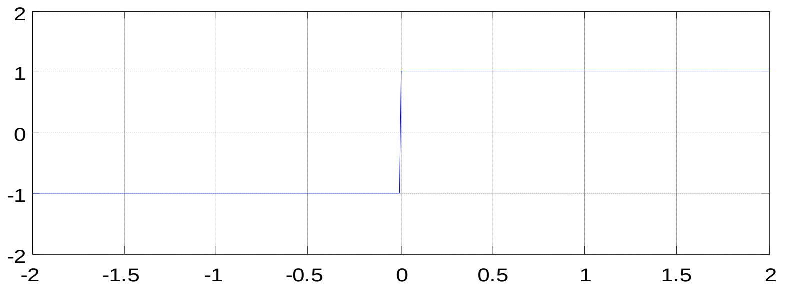


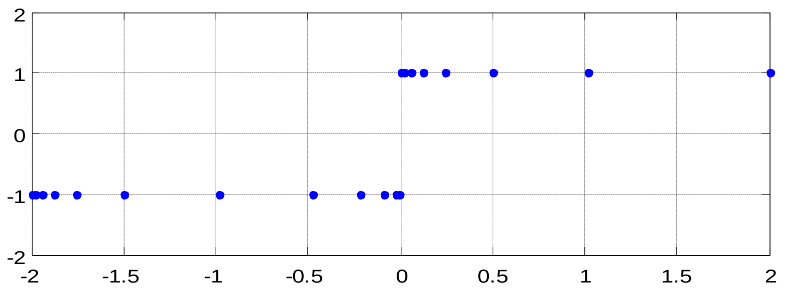
Если область изменения аргумента функции включает точки, в которых функция не определена, то для получения правдоподобного эскиза имеет смысл не соединять точки линией. Сравните «графики» функции $y = \frac{|x|}{x}$, построенные функцией fplot с использованием разных режимов.

Пример 3.

```
>> y=@(x)abs(x)/x;
>> subplot(2,1,1)
>> fplot(y,[-2 2 -2 2])
>> grid on
>> subplot(2,1,2)
>> fplot(y,[-2 2 -2 2],'.')
```

```
>> grid on
```





Функция fplot гарантирует, что относительное отклонение воспроизводимой функции отличается от ее идеального графика не более чем на 0,2%. Если вам нужен более точный или более грубый график, то после двух обязательных аргументов в функции fplot можно задать желаемую относительную погрешность – число, меньшее 1.

Например, по команде fplot('cos', [0 2*pi], 0,5) строится график cos(x) на отрезке [0, 2*pi], отличающийся от идеальной кривой не более чем на 5%.

Функция fplot умеет возвращать значения компонентов векторов x и y, если к ней обратиться следующим образом:

[x y] = fplot(@name_fun, [limits])

[x y] = fplot('name_fun', [limits])

Упражнение 1.

Построить графики функций $y_1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $y_2 = \dfrac{2x-1}{|x-1|}$, на таких промежутках, чтобы можно было судить о поведении этих функции на $+\infty$, $-\infty$, ∞, при $x \to 1+0$, $x \to 1-0$, $x \to 1$, $x \to 2+0$, $x \to 2-0$, $x \to 2$. В отчет вставить построенные графики. Под каждым графиком перечислить те из приведенных ниже утверждений, которые, насколько позволяет судить график, справедливы для рассматриваемой функции.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=2+0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=2+0,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2,$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1-0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1-0} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to2+0} f(x)=3,\quad \lim_{x\to2-0} f(x)=3,\quad \lim_{x\to2} f(x)=3,$$

$$\lim_{x\to2+0} f(x)=-3,\quad \lim_{x\to2-0} f(x)=-3,\quad \lim_{x\to2} f(x)=-3.$$

Построив график последовательности или функции, можно попытаться определить её предел.

Пример 4.

Первый замечательный предел.

Чтобы найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$, построим график этой функции:

```
>> f = @(x) sin(x)/x;
>> fplot(f, [-1 1 -2 2])
```

По полученному графику можно предположить, что предел равен 1.

Упражнение 2.

Используя графики функций, найдите приближенно пределы (или убедитесь, что они не существуют):

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}}{x\ln(1-x^3)}$.

2. Символическое вычисление пределов

Точное вычисление предела функции в Matlab производится с помощью функции

limit (expr, var, a),

где expr – символическое выражение, var – переменная, по которой берётся предел (можно опустить; тогда придел будет найден относительно переменной, которая ближе всего к x по алфавиту), a – то, к чему эта переменная стремится (допускаются значения Inf (бесконечность) и –Inf; значение по умолчанию 0).

Односторонние пределы вычисляются как **limit(expr, var, a, 'left')** (слева) и **limit(expr, var, a, 'right')** (справа).

Пример 5.

```
>> syms a x; lim = limit((1 + a/x)^x, x, Inf)
lim =
exp(a)
```

Если предел выражения (в том числе бесконечный) не существует, то Matlab даёт ответ NaN:

Пример 6.

```
>> syms x
>> limit(1/x^3, x, 0)
ans =
NaN
>> limit(1/x^3, x, 0, 'left')
ans =
-Inf
```

Упражнение 3.

Вычислите точные значения пределов из упражнения 2 . Соответствуют ли они полученным приближениям?

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.
2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1.

Построить графики функций, , $y_3 = \left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|$, $y_3 = \dfrac{|3x-6|}{x-2}$ на таких промежутках, чтобы можно было судить о поведении этих функции на $+\infty$, $-\infty$, ∞, при $x \to 1+0$, $x \to 1-0$, $x \to 1$, $x \to 2+0$, $x \to 2-0$, $x \to 2$. В отчет вставить построенные графики. Под каждым графиком перечислить те из приведенных ниже утверждений, которые, насколько позволяет судить график, справедливы для рассматриваемой функции.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2+0$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2+0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$,

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$,

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-3$.

Упражнение С2.

Используя графики функций, найдите приближенно пределы (или убедитесь, что они не существуют):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x\sin x$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Упражнение С3.

Вычислите точные значения пределов из упражнения 2 а) - г). Соответствуют ли они полученным приближениям?

3. Ответить на контрольные вопросы:

Дать определения следующих пределов:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; 8) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a$;

9) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$; 10) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$;

11) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty$; 12) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$.

Список рекомендуемой литературы

1. http://orioks.miet.ru/oroks-miet/scripts/login.pl?DBnum=9 - ОМА. Предел и непрерывность. Предел функции

2. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.4.

3. http://www.tehnauk.ru/mathlab/8?start=2 – Символьные вычисления