Práctica: Técnicas de interpolación

Nota Preliminar: Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes conceptos: Espacio vectorial de polinomios, Base canónica, Base de Lagrange, Base de Newton, Sistemas lineales, Direferencias divididas, Error de Interpolación.

1. Encuentre los polinomios de menor grado posible que interpolen a los siguientes conjuntos de datos, usando las bases canónica, de Lagrange y de Newton

x	3	7
y	5	-1

x	3	7	1	2
y	10	146	2	1

x	7	1	2
y	146	2	1

x	3	7	1	2
y	12	146	2	1

2. Dada la siguiente tabla de datos:

x	-2	1	0	2	4
y	6	5	4	3	2

   a) Halle el polinomio de interpolación de grado menor ó igual a 3 utilizando las bases de Lagrange y Newton.

   b) Escriba ambos polinomios en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ con el fin de verificar que son el mismo polinomio, pero escrito de forma distinta.

3. Dado $p_2(x) = 5x^2 - 6x - 3$, y los puntos:

x	0	1	2
y	-3	-4	5

   a) Verifique que p_2 interpola a los puntos de la tabla anterior.

   b) Utilice p_2 para obtener otro polinomio de grado menor ó igual a 3 que interpole la siguiente tabla de datos.

x	0	1	2	3
y	-3	-4	5	10

4. Obtenga una aproximación a $\sqrt{3}$, utilizando un polinomio de interpolación de grado menor ó igual a 2, que aproxima a la función 3^x en los nodos $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.75$, y $x_2 = 1$.

5. Se tiene la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	1	2

   a) Calcule el polinomio interpolante usando diferencias divididas.

   b) Si los datos anteriores se amplian con el punto $(x, y) = (4, 3)$, determine el nuevo polinomio de interpolación.

6. Complete la tabla de diferencias divididas de una cierta función f

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

7. Sean $q_2(x)$ y $r_2(x)$ los polinomios de grado 2 que interpolan a siguientes conjuntos de puntos respectivamnte $\{(1, y_0),\ (3, y_1),\ (6, y_2)\}$ y $\{(1, y_0),\ (3, y_1),\ (4, y_4)\}$. Muestre que el polinomio

$$p(x) = \frac{(x-4)q_2(x)}{2} - \frac{(x-6)r_2(x)}{2},$$

interpola al conjunto de puntos $\{(1, y_0),\ (3, y_1),\ (6, y_2),\ (4, y_4)\}$. Determine el grado de p.

8. Demuestre que si g interpola a la función f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, y si la función h interpola a f en los nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces la función

$$r(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}[g(x) - h(x)],$$

interpola a f en los nodos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Observe que h y g no necesariamente son polinomios.

9. Considere los puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \ldots n$, y asuma que los x_i son distintos entre sí. Demuestre que

   a) Existe un único polinomio p, de grado menor ó igual a n que satisface las $n+1$ condiciones $p(x_i) = y_i$ con $0 \leq i \leq n$.

   b) Existen infinitos polinomios de grado mayor a n que interpolan los $n+1$ puntos dados.

10. Demuestre que para toda x

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1,$$

donde l_i representa al i-ésimo polinomio de Lagrange.

11. Considere la función $f(x) = \frac{1}{2}2^x$.

    a) Calcule el polinomio $p(x)$ que interpola a $f(x)$ en los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$.

    b) Calcule el error relativo que se comete al aproximar $f(\frac{3}{2})$ mediante $p(\frac{3}{2})$.

12. Sea la tabla de datos correspondientes a la función $f(x) = e^x$

x	0	0.2	0.4	0.6
y	1	1.2214	1.4918	1.8221

    a) Calcule el polinomio p_3 que interpole a la tabla de datos.

    b) Calcule una cota para el error de interpolación en $x = \frac{4}{5}$.

    c) Calcule el error exacto, $e = |f(\frac{4}{5}) - p_3(\frac{4}{5})|$, y compare con la cota obtenida en el ítem anterior.

13. Se quiere aproximar la función $f(x) = \frac{1}{4}x^{-1}$ en el intervalo $[1, 3]$ utilizando interpolación polinomial con 3 nodos equidistantes en dicho intervalo. ¿Cúal es el error máximo teórico que se cometerá en $x = 1.7$?. ¿Cúal es el error real?

14. Se desea construir una tabla de datos para interpolar a la función e^x, con nodos uniformemente espaciados a una distancia h en el intervalo $[0, 1]$. Determine el valor de h para que el error de interpolación lineal, en ese intervalo, esté acotado por 5×10^{-5}.

15. ¿Cuántos nodos igualmente espaciados se deben tomar para interpolar a la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-1, 1]$, de tal manera que el error en la interpolación esté acotado por $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.