´

TALLER 5 - Interpolación Polinomial

Parte Introductoria

Para la elaboración de este taller se requiere el uso de las siguientes funciones de MATLAB:

- `p=polyfit(x,y,n)`: Encuentra los coeficientes de un polinomio $p_n(x)$ de grado n tal que $p_n(x_i) = y_i$.
- `y = polyval(c,x)`:, donde c es un vector de longitud $n+1$ que representan los coeficientes de un polinomio de grado n. Esta función evalúa p_n en x y deja el resultado en y.

Parte Práctica

1. Considere, en el intervalo $[-1, 1]$, a la función: $f(x) = |x|$. Usando $n = 30$, grafique $f(x), p_n(x)$ y el error $f(x) - p_n(x)$, donde p_n es el polinomio que interpola a f en:

   - Nodos igualmente espaciados.
   - Nodos elegidos totalmente al azar de forma simétrica

     ```
     nra = rand(1,n/2);  %15 nodos entre 0 y 1
     nra = [-nra nra]; %nodos anteriores con signo negativo (30 nodos)
     ```

   - Nodos elegidos al azar, en donde al menos 10 nodos estén ubicados en los extremos del intervalo de interpolación

     ```
     r1 = 0.75.*rand(5,1);  % 5 nodos entre 0 y 0.75
     r2 = 1 + (0.75-1).*rand(10,1);  % 10 nodos entre 0.75 y 1
     nra1=[r1' r2'];  %15 nodos entre 0 y 1
     nra1=[-nra1 nra1]; %nodos anteriores con signo negativo (30 nodos)
     ```

   Responda a las siguientes preguntas

   a) ¿Por qué al usar nodos igualmente espaciados, el error de interpolación aumenta en los extremos del intervalo?. Use el siguiente Teorema del error de interpolación para justificar su respuesta:
   Sea f una función $n+1$ veces continua en el intervalo $[a, b]$ y sea p_n el polinomio

de grado $\leq n$ que interpola a f en $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en $[a,b]$. Para cada x en $[a,b]$ corresponde un δ_x en (a,b) tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

donde $f^{(n+1)}(\delta_x)$ representa a la $n+1$ derivada de f evaluada en δ_x.

b) ¿Por qué al usar nodos repartidos de forma aleatoria se observa que la interpolación mejora cuando se tienen más nodos en los extremos del intervalo de interpolación?

2. Con tres puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ se puede construir un polinomio de grado 2,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{1}$$

que pasa por dichos puntos, este polinomio recibe el nombre de *interpolador cuadrático.*

Considere los siguientes puntos $(1, log(1))$, $(4, log(4))$, $(6, log(6))$.

- Plantee y resuelva un S.E.L. que permita obtener los coeficientes a_i necesarios del polinomio del menor grado posible que pase por todos los puntos anteriores.
- Obtenga el número de condición de la matriz de coeficientes del sistema planteado.
- Grafique la función real con el polinomio interpolador. Qué observa?
- Emplee el polinomio hallado para estimar $log(2)$.
- Calcule el error relativo y comparen los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior.

3. Otra forma de escribir un polinomio que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ es:

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1). \tag{2}$$

Un procedimiento simple que puede usarse para calcular los b_i de la forma (2) es el siguiente

a) Evaluando (2) en x_0 se obtiene que

$$b_0 = f(x_0)$$

b) Evaluando (2) en x_1 y sustituyendo el valor de b_0 se obtiene que

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

c) Evaluando (2) en x_2 y sustituyendo el valor de b_0 y de b_1 se obtiene que

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

- Emplee los mismos puntos del ejercicio anterior para obtener los b_i que permitan construir el polinomio interpolador.
- Emplee el polinomio hallado para estimar $log(2)$.
- Calcule el error relativo y compare los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior.
- Cuál de los dos procedimientos considera mejor?