Proyecto de Investigación del curso de Métodos Numéricos

Fecha de entrega: Julio 15 de 2016

Propuesto por el Dr. Jean Piero Suárez y la Dra. Zenaida Castillo

Simulación Computacional del Sistema de Suspensión Neumática para Vehículos

1 Motivación y Objetivo Específico

El sistema de suspensión neumática, elemento esencial en el diseño de un vehículo, está compuesto principalmente por resortes y amortiguadores. Su función es controlar los movimientos vibratorios producidos, por ejemplo, por irregularidades en la carretera o desbalance de máquinas rotatorias [1, 2].

Las simulaciones computacionales para evaluar el rendimiento de un sistema de suspensión y predecir el comportamiento del vehículo en el tiempo, representan la base del desarrollo y construcción de prototipos. Su implementación se fundamenta en modelos físicos, matemáticos y el uso de métodos numéricos [1, 2].

El objetivo específico del proyecto es realizar una simulación para el "modelo simplificado de suspensión de un cuarto de vehículo[1]" [1], siguiendo el esquema presentado en la sección 2.

[1] La traducción del nombre del modelo al idioma ingles es "simplified quarter-car model".

El respectivo modelo mecánico se ilustra en la figura 1.1 y está compuesto por una masa m que representa el chasís del vehículo, un resorte de rigidez k, un amortiguador con coeficiente de amortiguación c y una función $r(t)$ que modela la superficie de la carretera. La posición vertical de la masa se denota por $x(t)$ y se considera que las fuerzas debidas al resorte y al amortiguador están dadas por $F_k(t) = kx(t)$ y $F_c = c\dot{x}(t)$, respectivamente.

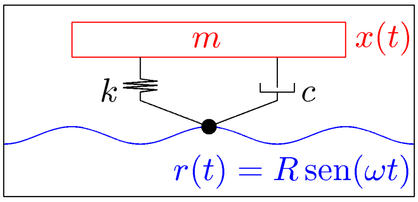

Figura 1.1: Representación gráfica del modelo simplificado de suspensión de un cuarto de vehículo.

2 Plan de Ejecución

- Deduzca la siguiente ecuación de movimiento para el modelo mecánico de la figura 1.1:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n R\big(\omega_n \,\mathrm{sen}(\omega t) + 2\zeta\omega\cos(\omega t)\big) \tag{2.1}$$

  para $t > 0$ y con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Posteriormente, verifique la consistencia dimensional de (2.1)[2].

  En (2.1), el parámetro adimensional $\zeta \overset{\text{def}}{=} \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$ se denomina razón de amortiguamiento y está dado por el cociente entre el amortiguamiento del sistema y su valor crítico; mientras que $\omega_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ se denomina frecuencia angular natural del sistema.

- Transforme (2.1) en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n R\big(\omega_n \,\mathrm{sen}(\omega t) + 2\zeta\omega\cos(\omega t)\big) \end{bmatrix}}_{f(t,y)}. \tag{2.2}$$

[2] Bajo la notación usual en análisis dimensional: $[m] = [\mathrm{M}]$, $[t] = [\mathrm{T}]$, $[r] = [\mathrm{L}]$, $[k] = [\mathrm{F}][\mathrm{L}^{-1}]$ y $[c] = [\mathrm{F}][\mathrm{T}][\mathrm{L}^{-1}]$; donde M, T, L y F son acrónimos para Masa, Tiempo, Longitud, y Fuerza, respectivamente.

- Realice un m-archivo con el nombre `runge_kutta_4` que implemente el método de Runge–Kutta de cuarto orden y verifique computacionalmente el comportamiento asintótico $\mathscr{O}(\Delta t^4)$ del error global.

  Si Δt denota el paso de tiempo en la discretización temporal, entonces la fórmula del respectivo método es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= \Delta t\, f(t, y),\\
\kappa_2 &= \Delta t\, f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{\kappa_1}{2}\right),\\
\kappa_3 &= \Delta t\, f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{\kappa_2}{2}\right),\\
\kappa_4 &= \Delta t\, f\left(t + \Delta t, y + \kappa_3\right),\\
y(t + \Delta t) &= y(t) + \frac{1}{6}\left(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right) + \mathscr{O}(\Delta t^5).
\end{aligned}
$$

- Para realizar la simulación computacional del sistema de suspensión del vehículo, resuelva (2.2) con los siguientes valores:

  - $m = 1200\,\mathrm{kg}$;
  - $R = 0.05\,\mathrm{m}$;
  - $\zeta = \frac{1}{20}, \frac{1}{2}$;
  - $k = 400\,000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$;
  - $\omega = \omega_n, \sqrt{2}\omega_n, 2\omega_n$;
  - $t \in [0\,\mathrm{s}, 10\,\mathrm{s}]$.

- Realice un análisis del comportamiento vibratorio del sistema de suspensión en términos de la amplitud de oscilación R, la razón de amortiguamiento ζ y el radio de frecuencias $\rho \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\omega}{\omega_n}$.

Bibliografía

[1] S. M. Savaresi, C. Poussot-Vassal, C. Spelta, O. Sename, and L. Dugard. *Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles.* ELSEVIER, 2010.

[2] W. T. Thomson. *Teoría de Vibraciones—Aplicaciones.* Prentice-Hall Internacional, 1981.