PROYECTO DE INVESTIGACIÓN DEL CURSO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

FECHA DE ENTREGA: JULIO 15 DE 2016

PROPUESTO POR LA DRA. ZENAIDA CASTILLO Y EL DR. JEAN PIERO SUÁREZ

Aproximación de Imágenes

1 MOTIVACIÓN Y OBJETIVO ESPECÍFICO

Una imagen puede ser representada por una matriz A de orden $m \times n$ donde cada elemento a_{ij} de A contiene un valor real que representa la intensidad del color que posee la imagen en la posición (i, j) [2]. Teniendo en cuenta esta asociación, el objetivo del presente proyecto es, dada una imagen representada por una matriz A, desarrollar un algoritmo basado en una factorización matricial que permita obtener una buena aproximación a la matriz A, a partir de pocos vectores.

Para lograr el objetivo anterior, se empleará la descomposición en valores singulares de la matriz A, conocida como SVD[1] [1, 3]. En la siguiente sección se describirá dicha descomposición.

[1] Singular Value Decomposition en ingles.

2 Plan de Ejecución

2.1 Descomposición en valores singulares

Considere la siguiente descomposición matricial:

$$A = U\Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}, \tag{2.1}$$

donde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices ortogonales, $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ y $\sigma_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. La ecuación planteada en (2.1) recibe el nombre de descomposición en valores singulares. Las columnas de U y V son conocidas como los vectores singulares por la izquierda y derecha respectivamente, mientras que los σ_i reciben el nombre de valores singulares de A. Más aún los σ_i, son todos positivos y están ordenados de forma ascendente, es decir, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$. Con esta información, se está en capacidad de enunciar el siguiente resultado que será de mucha utilidad en la elaboración del presente proyecto:

Teorema 2.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango r, entonces A se puede escribir como la suma de r matrices, cada una de ellas de rango 1, más específicamente*

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T, \tag{2.2}$$

donde σ_i representa el i-ésimo elemento diagonal de la matriz Σ_r y los vectores u_i y v_i representan las i-ésimas columnas de las matrices U y V, respectivamente.

2.2 SVD y Procesamiento de Imágenes

Como se mencionó anteriormente, la forma más simple de almacenar una imagen bidimensional, es usando una matriz A, donde cada elemento de la matriz representa un color dentro de la imagen. Ahora bien, para motivar el uso de la SVD, piense en cada una de las siguientes situaciones:

- A puede ser una matriz de dimensiones muy grandes si la imagen que ella representa es de alta definición. ¿Cómo evitar almacenar toda la mariz A?
- Es posible que la imagen que representa A tenga que viajar largas distancias, por ejemplo, las imágenes que son tomadas en un satélite deben viajar grandes

distancias antes de llegar a una estación en la tierra donde serán finalmente procesadas. Dicho viaje puede implicar que los elementos de A se alteren por efectos del ruido. ¿Qué hacer en este tipo de situaciones?

- Algunos tipos de imágenes son muy grandes pero no tienen gran variabilidad de colores, por ejemplo piense en las vistas aéreas. ¿Será necesario almacenar toda la matriz que representa a la imagen?

Las preguntas anteriores encuentran respuesta, en cierto modo, en la descomposición en valores singulares de la matriz que representa a la imagen. Debido al teorema 2.1, es lógico pensar que se pueden obtener aproximaciones a una matriz A dada, truncando la suma descrita en (2.2), es decir, es posible definir $\widetilde{A}_p$ tal que,

$$A \approx \widetilde{A}_p = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^T \quad \text{con} \quad p < r.$$

Observe que, debido a la forma de $\widetilde{A}_p$, no es necesario almacenarla completamente. Así para "armar" $\widetilde{A}_p$ sólo se requiere almacenar $2p$ vectores (los vectores u_i y v_i) y p escalares (los σ_i). Cabe señalar que $\widetilde{A}_p$ es la matriz de rango p que mejor aproxima a la matriz A.

2.3 Requerimientos

1. De la ecuación (2.1) se obtiene que $AV = U\Sigma$. Realice un programa que, para matrices aleatorias de dimensión 2, genere gráficas que permitan

    - visualizar el efecto geométrico que tiene premultiplicar a la matriz V por A,
    - visualizar el efecto geométrico que tiene premultiplicar a la matriz Σ por U.

    En función de las gráficas anteriores, explique el significado de la igualdad $AV = U\Sigma$.

    Ayuda: El conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ define a la esfera unitaria en norma 2, las columnas de U y V pertenecen a E.

2. Desarrolle una función en MATLAB con las siguientes funcionalidades:

    - Como parámetro de entrada la imagen que se desea trabajar, así como los diferentes valores de p para obtener las aproximaciones de A.

- El programa debe visualizar tanto la imagen original A, como las aproximaciones $\widetilde{A}_p$, a fin de apreciar la calidad de cada $\widetilde{A}_p$. Así mismo, el programa debe mostrar como varía el error relativo en las aproximaciones, a medida que varía el valor de p. Las imágenes de prueba tendrán extensión .mat.

3. Dé una explicación satisfactoria del por qué para algunas imágenes, se requieren menos valores singulares para generar una buena aproximación y para otras no. Para justificar su respuesta, grafique los valores singulares de la matriz que representa cada imagen.

4. ¿Que ventajas y/o desventajas observa de esta forma de aproximar imágenes?

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. J. Martínez. La Descomposición en Valores Singulares (SVD) y Alguna de sus Aplicaciones. *La Gaceta de la RSME*, 8.3:795–810, 2005.

[2] R. Rodríguez. *Procesamiento y Análisis Digital de Imágenes*. Ediciones RA-MA, 2011.

[3] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.