TALLER 3 : Mínimos Cuadrados /Métodos Iterativos

MATLAB

- `[Q,R] = qr(A)`: Factorización `QR` full de la matriz `A`.
- `[Q,R] = qr(A,0)`: Factorización `QR` reducida de la matriz `A`.
- `cond(A,p)`: Número de condición de la matriz `A`, en la norma subordinada `p`.

Parte Práctica

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

La solución exacta de este sistema es $x_* = (1, 1, 1)^t$ razón por la cual $r = b - Ax_* = 0$. Así mismo, observe que para $|\epsilon| \neq 0$ el rango de A es tres, mientras que para $\epsilon = 0$ el rango de esta matriz es uno. El objetivo de este ejercicio es, aproximar x_* mediante distintos métodos directos para resolver un sistema sobredeterminado y luego determinar la calidad de dichas aproximaciones.

Para los siguientes valores de $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}$:

(a) Calcule la condición de $A^T A$.

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones normales usando la factorización de Cholesky de $A^T A$, y denote por x_c la aproximación obtenida. Calcule $r_c = b - Ax_c$ y $e_c = x_* - x_c$.

(c) Resuelva el sistema sobredeterminado usando la factorización QR full de A y denote por x_f la aproximación obtenida. Calcule $r_f = b - Ax_f$ y $e_f = x_* - x_f$.

(d) Resuelva el sistema sobredeterminado usando la factorización QR reducida de A, y denote por x_r la aproximación obtenida. Calcule $r_r = b - Ax_r$ y $e_r = x_* - x_r$.

(e) Con los valores obtenidos en los ítems anteriores complete la siguiente tabla

		Residuales			Errores		
ϵ	$cond(A^TA)$	$\|r_c\|_2$	$\|r_f\|_2$	$\|r_r\|_2$	$\|e_c\|_2$	$\|e_f\|_2$	$\|e_r\|_2$
10^{-6}							
10^{-7}							
10^{-8}							
10^{-9}							
10^{-10}							

(f) En función de los datos de la Tabla anterior, ¿Qué método usaría para resolver el sistema dado?. Justifique su respuesta.

2. Considere los siguientes puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$: $(0,4)$, $(1,5)$, $(2,8)$, $(3,1)$.

- Obtenga el polinomio $p_2(x)$ de grado menor o igual a dos que mejor aproxime, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los puntos dados.
- Grafique a $p_2(x)$ y a los puntos (x_i, y_i) en el intervalo $[-0.5, 3.5]$.
- Calcule $e_t = \sum_{i=1}^{4} [p_2(x_i) - y_i]^2$ (suma de los errores al cuadrado).
- Cambie el punto $(3,1)$ por el punto $(3,13)$ y repita los ítems anteriores. ¿Qué observa?

3. Dado el sistema lineal $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Emplee el método de SOR(ω) para resolver este sistema con $\omega \notin (0,2)$. ¿Qué observa?
- Realice una gráfica en donde se muestre cómo evoluciona la norma del residual por iteración ($\|r_k\|$ con $r_k = b - Ax_k$) para el método de SOR(ω) para distintos valores de ω que varíen en $(0,2)$ y con $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_J)^2}}$. Comente los resultados.
- Compare a los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR(ω) con $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_J)^2}}$, en cuanto a número de iteraciones.