Ejercicio 1. Algoritmo en MATLAB

Realice un m-archivo con el nombre `cds` que calcule una solución aproximada para la ecuación unidimensional estacionaria de convección-difusión

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{50}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}, \tag{1}$$

con condiciones de Dirichlet $u(0) = 0$ y $u(1) = 1$, utilizando un esquema central en diferencias finitas sobre n nodos equidistantes en el intervalo $[0, 1]$ dados por $x_i = (i-1)h$ con $h = \frac{1}{n-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejercicio 2. Solución analítica y discreta para la ecuación de convección-difusión

(a) Verifique que la solución analítica de (1) es

$$u(x) = \frac{\exp(50x) - 1}{\exp(50) - 1}. \tag{2}$$

(b) Verifique que la solución discreta de (1) mediante el esquema central en diferencias finitas satisface el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta & \gamma & & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & & \\ & \alpha & \beta & \gamma & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & & \alpha & \beta \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}}_{\widetilde{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix}}_{b},$$

donde los coeficientes de la matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ y el vector $b \in \mathbb{R}^{n-2}$ están dados por $\alpha = 1 + 25h$, $\beta = -2$ y $\gamma = 1 - 25h$. El valor de u_i para $i = 2, 3, 4, \ldots, n-2, n-1$ en el vector de incógnitas $\widetilde{u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ representa la aproximación de $u(x_i)$.

Ejercicio 3. Análisis del error de discretización

(a) Grafique (2) y la solución aproximada $\widetilde{u}$ sobre los nodos $\{x_i\}_{i=2}^{n-1}$, para $n = 11, 21, 41, 81$.

(b) Estime el orden de convergencia de la solución numérica en las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_{L^p(0,1)}$ con $p = 1, 2$[1]; para $n = 161, 321, 641, 1281$.

[1] $\|f\|_{L^p(0,1)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$.