NÚMEROS COMPLEJOS

Seguimos ampliando el campo numérico...

Tal como surgió con los números reales, los números complejos surgieron por el interés (y necesidad) de dar solución a un problema dado. Por ejemplo, la ecuación $x^2+1=0$ *carece de solución real, ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo o cero; es decir que no existe un número x real tal que* $x^2=-1$.

Fue necesario, entonces, ampliar el concepto de número para incluir aquellos que verificaran esta ecuación particular. La idea fue definir un nuevo número que verificara $x^2+1=0$.

Tal fue "i" definido de modo que $i^2=-1$

Esta creación, genialidad de la mente humana, permitió llenar ciertos baches, como por ejemplo encontrar soluciones a toda ecuación polinómica.

La unidad imaginaria

El número ***i***, recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptándose que *i* se comporta como un número real, respetando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Son válidas también las propiedades de la potencia:

a) $i^r . i^s = i^{r+s}$ b) $(i^r)^s = i^{r.s}$ $con\ r, s \in \mathbb{Z}$

Comentario:

El número i (del latín imaginarius) fue llamado así por el matemático Euler (1707-1783). El nombre de imaginarios que hoy se emplea, aparece en el horizonte matemático hacia el siglo XVI. Hace referencia a las raíces cuadradas de números negativos como números "imposibles" o "imaginarios" o como "fantasmas de los números reales".

Si bien los números complejos nacieron en una atmósfera de misterio y desconfianza, cuestionándose la validez de las operaciones, es en el siglo XIX cuando, a través de los trabajos de los matemáticos Wessell (1745-1818), Argand (1768-1822) y Gauss (1777-1855) sobre la interpretación geométrica de los números complejos, se lograron sentar bases matemáticas sólidas para definir este nuevo conjunto de números.

Ejemplo:

La introducción de *i* permite resolver las raíces cuadradas de los números negativos.

$\sqrt{-1} = \pm i$ puesto que $i^2=-1$ y $(-i)^2=-1$

$\sqrt{-4} = \pm 2i$ puesto que $(2i)^2=-4$ y $(-2i)^2=-4$

Las potencias de la unidad imaginaria *i*

Se puede comprobar, también fácilmente, que las sucesivas potencias de i se repiten periódicamente en grupos de 4.

$$i^0 = 1 \qquad i^4 = i^2.i^2 = 1$$

$$i^1 = i \qquad i^5 = i^4.i = i$$

$$i^2 = -1 \qquad i^6 = i^4.i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2.i = (-1)i = -i \qquad i^7 = i^4.i^3 = -i$$

A partir de este reconocimiento, es posible calcular cualquier **potencia de *i*.** Por ejemplo, para calcular:

a) i^{21} como $21 = 4 \times 5 + 1$, se tiene $i^{21} = (i^4)^5 i^1 = 1^5 i^1 = i$

b) i^{-112} como $112 = 4 \times 28 + 0$, resulta $i^{-112} = \dfrac{1}{i^{112}} = \dfrac{1}{(i^4)^{28}} = \dfrac{1}{1^{28}} = 1$

Teniendo en cuenta el algoritmo de la división entera:

dividendo= divisor . cociente + resto, siendo *resto < divisor*

estamos en condiciones de generalizar lo observado en el siguiente teorema:

> Para todo $n \in \mathrm{Z}$, tenemos
> $$i^n = i^r$$
> donde r es el resto de la división de n por 4, por lo que r puede asumir los valores 0, 1, 2 o 3.

Demostración:

Al dividir n por 4 obtenemos un resto r, un cociente c y se puede verificar que $n = c \times 4 + r$, *entonces:*

$$i^n = i^{c\times 4+r} = i^{c\times 4}.i^r = (i^4)^c.i^r = 1^c.i^r = i^r$$

Ejemplos:

1) $i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} =_{(a)} i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$

(a) El resto de dividir 12 por 4 es 0, el resto de dividir 13 por 4 es 1, el resto de dividir 14 por 4 es 2 y el resto de dividir 15 por 4 es 3.

2) $i^{-14} + i^{-16} = \dfrac{1}{i^{14}} + \dfrac{1}{i^{16}} =_{(b)} \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^0} = \dfrac{1}{-1} + \dfrac{1}{1} = 0$

(b) El resto de dividir 14 por 4 es 2 y el resto de dividir 16 por 4 es 0.

Forma binómica de un número complejo:

Un número complejo es toda expresión

$$\boxed{z = a + bi}$$

donde ***a*** y ***b*** son números reales, e ***i*** se define por la relación $i^2 = -1$.

- Al número ***a*** se lo llama parte o componente real de z y se representa mediante $\mathrm{Re}(z)$
- Al número ***b*** es la parte o componente imaginaria de z y se representa por $\mathrm{Im}(z)$

$$\underbrace{a}_{Parte\ real} + \underbrace{b}_{Parte\ imaginaria} i$$

El conjunto de los números complejos

Lo simbolizaremos con la letra C, y está formado por todos los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in R$ e i es la unidad imaginaria, es decir que $i^2 = -1$. Resumiendo:

$$\boxed{C = \{z = a + bi / a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}}$$

- Los números reales son complejos ($R \subset C$), ya que si

$$x \in R \Rightarrow x = x + 0i \in C$$

- A los números complejos de la forma bi, es decir aquellos que su parte real es nula, se los denomina ***imaginarios puros.***

Igualdad de números complejos

Dos números $z_1 = a_1 + b_1 i$ *y* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son respectivamente iguales, en símbolos:*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$$

Opuesto de un número complejo

Si $z = a + bi$, entonces el opuesto de z es $-z = (-a) + (-b)i$

Suma y resta de números complejos

Debido a que hemos introducido a los números complejos anunciando que iban a respetar las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva, entre otras cosas. Podemos ir resolviendo algunos ejemplos

1.

$$(2+5i)+(3+8i)=2+5i+3+8i=2+3+5i+8i=$$
$$=(2+3)+(5i+8i)=5+(5+8)i=$$
$$=5+13i$$

2.

$$(2+5i)-(3+8i)=(2+5i)+[-(3+8i)]=(2+5i)+[(-3)+(-8)i]=$$
$$=[2+(-3)]+[5+(-8)]i=$$
$$=-1+(-3)i=-1-3i$$

En general:

Si $z_1=a_1+b_1i$ y $z_2=a_2+b_2i$, se tiene:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$

Multiplicación de números complejos

1.

$$(2+3i)\cdot(5+6i)=(2+3i)\cdot 5+(2+3i)\cdot 6i=2\cdot 5+3i\cdot 5+2\cdot 6i+3i\cdot 6i=$$
$$=10+(3\cdot 5)i+(2\cdot 6)i+(3\cdot 6)\cdot(i\cdot i)=$$
$$=10+15i+12i+18\cdot i^2=10+15i+12i+18\cdot(-1)=$$
$$=10+(-18)+(15+12)i=-8+27i$$

2.

$$(3-5i)\cdot(1+2i)=3-5i+6i-10i^2=3-5i+6i-10\cdot(-1)=$$
$$=3+10+6i-5i=13+i$$

En general:

Si $z_1=a_1+b_1i$ y $z_2=a_2+b_2i$, se tiene:

$$z_1\cdot z_2=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+(a_2\cdot b_1+a_1\cdot b_2)i$$

Práctica:

1. Resuelve las siguientes operaciones con números complejos:

a. $(5+7i)\cdot(2+i)+(1+3i)$ **c.** $5i+(1-i)^3$ **e.** $2\cdot i^{129}+3i(3-i)$

b. $(2+3i)^2$ **d.** $(1+i)^2-(2+3i)$ **f.** $(5-i)^2-(2-2i)$

2. Obtenga los valores de x e y reales tales que los números $z=x+2yi$ y $w=3\cdot(5-i)+2+3i$ sean iguales.

3. Encuentre el valor del número real k de forma que $z=(k+5i)\cdot(2+i)+3i$ sea:

a. un número real

b. un imaginario puro

4. Muestre que los números $1-i$ y $1+i$ verifican la ecuación $x^2-2x+2=0$

5. Calcula los números reales x e y para que se verifique la igualdad

$$(3+xi)-(y+6i)=8-3i$$

Conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$

Ejemplos

1) $\overline{3+5i}=3-5i$

2) $\overline{7-2i}=7+2i$

3) $\overline{3i}=\overline{0+3i}=0-3i=-3i$

4) $\overline{8}=\overline{8+0i}=8-0i=8$

<u>Propiedades $z=a+bi$</u>

- $z=\bar{z}$ si y sólo si $z \in \mathbf{R}$
- $z+\bar{z}=2a$
- $z-\bar{z}=2bi$
- $z.\bar{z}=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $-\bar{z}=\overline{-z}$

División de números complejos

Queremos dividir el número complejo $10+5i$ con el complejo 1+2i, es decir queremos efectuar

$$\frac{10+5i}{1+2i}$$

Con "resolver" nos referimos a llegar a la forma a+bi

$$\frac{10+5i}{1+2i}=\frac{10+5i}{1+2i}\cdot 1=\frac{10+5i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{(10+5i)\cdot(1-2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{20-15i}{5}=4-3i$$

Multiplico denominador y numerador por el conjugado del denominador

Por prop. de la multiplicación de conjugados

CONJUNTOS

Conceptualizando

Un conjunto es una colección de objetos de cualquier naturaleza, bien definidos y diferenciables entre sí. A dichos objetos se los llama elementos o miembros de un conjunto. Es esencial que esté bien definida la colección, no debe haber ambigüedad ni subjetividad. Ejemplo: los alumnos de esta comisión cuyo nombre comienza con A (no hay dudas de quienes son), la colección de números enteros comprendidos entre 1 y 6 (todos sabemos quiénes son los elementos de esta colección), los santafecinos entre 20 y 30 años (tomados al día de hoy, mañana tal vez es otra colección si cumplen años). Contraejemplo: la colección de los mejores profesores de la Facultad Regional Rosario.

Notación

Para nombrar a conjuntos se emplea letra mayúscula. Ejemplo: A
Para nombrar a elementos se usa letra minúscula. Ejemplo: x
Si x es un elemento del conjunto A se simboliza $x \in A$ (se lee "x pertenece a A")
Si x es un elemento que no está en el conjunto se simboliza $x \notin A$ (se lee "x no pertenece a A")
Observe que a la derecha del símbolo $\in$ está el nombre del conjunto y a la izquierda el nombre de alguno de los elementos.

Observación: la notación especificada es definida en forma genérica. Es decir, generalmente se utiliza la letra minúscula para referenciar los elementos de un conjunto, más adelante veremos que puede haber elementos que son conjuntos (considere el conjunto potencia) y en ese caso se los indica con mayúscula.

Ejemplo:

Sea el conjunto de las estaciones del año, que simbólicamente lo nombramos con la letra E. La palabra primavera es un elemento del conjunto, es decir, primavera pertenece al conjunto E. Simbólicamente:

$$\text{primavera} \in E$$

Formas de explicitar un conjunto

Un conjunto está bien determinado o definido si se sabe exactamente cuáles son los elementos que pertenecen a él y cuáles no. Hay dos maneras de determinar a un conjunto: por extensión o enumeración y por comprensión.

Extensión o enumeración

Si un conjunto tiene un número finito de objetos, es posible listar (o nombrar) los elementos que lo componen separados por comas y encerrados entre llaves. Esta notación se conoce con el nombre de extensión o enumeración.

Ejemplo:

Sea el conjunto V formado por las vocales de nuestro alfabeto español. Definimos el conjunto V por extensión de la siguiente manera:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

Describe el conjunto integrado por los elementos a, e, i, o, u (las vocales de nuestro alfabeto).

Claramente se observa lo siguiente: a ∈ V pero por ejemplo la siguiente letra del alfabeto no está en el conjunto, es decir, b ∉ V.

Observación:

- No importa el orden que se listan los elementos {a, e, i, o, u} {o, u, a, e, i} {i, o, u, a, e} son representaciones del mismo conjunto V.
- Cada elemento de un conjunto se nombra en la lista una sola vez, es decir no es correcto escribir al conjunto V de la siguiente forma {a, a, o, u, i, i, e}.

Comprensión

Si un conjunto es infinito o es finito pero sería complicado listar todos sus elementos por la cantidad que tiene, es conveniente definirlo por comprensión, es decir especificar un criterio, una característica o propiedad que los elementos del conjunto tienen en común. Se emplea la notación P(x) para denotar una oración o enunciado P relativo al objeto o variable x. Así **{x / P(x)}** (se lee "x tal que P de x") constituye la colección de todos los objetos x que satisfacen la propiedad P.

Ejemplo:

V = {x/ x es una vocal} (se lee V es el conjunto de x tal que x es una vocal)

Como puede observarse "x" en este caso designa a un elemento cualquiera del conjunto, ninguno en particular, por eso se lo llama variable o elemento genérico, y por lo tanto puede ir adoptando diferentes valores. Es decir, si reemplazo la x genérica por alguna de las vocales queda una oración (llamada proposición) que es verdadera, mientras que si reemplazo la "x" por una consonante, la oración será falsa. Además, observe el verbo empleado, se usa **es** y no son (concordancia del singular entre sujeto y verbo), porque se analiza un elemento por vez.

EJERCICIO:

A es el conjunto formado por todas las letras de la palabra "amistad", definirlo por extensión y por comprensión

A = {m,t,d,a,i,s}　　　　A={x/x es una letra de la palabra "amistad"}

Observación: Un conjunto escrito por extensión también podría ser definido por comprensión, pero lo contrario no siempre es posible.

Repaso de conjuntos numéricos

- $\mathbb{C}$ Complejos
  - $\mathbb{R}$ Reales
    - $\mathbb{Q}$ Racionales
      - $\mathbb{Z}$ Enteros
        - $\mathbb{Z}^+$ Enteros positivos
        - Cero
        - $\mathbb{Z}^-$ Enteros negativos
      - Fraccionarios
    - $\mathbb{I}$ Irracionales
  - Imaginarios

Enteros positivos y Cero: $\mathbb{Z}^+_0 = \mathbb{N}$ Naturales

- La adición de un superíndice + o – indica que sólo los elementos positivos o negativos se van a incluir.
- El cero no es ni positivo ni negativo. Algunos autores definen a los números naturales sólo como los enteros positivos, para evitar problemas utilizaremos la notación $\mathbb{Z}^+$ (para indicar enteros positivos solamente) y $\mathbb{Z}^+_0$ (para indicar enteros positivos con el cero) y no tanto la de naturales.
- El conjunto de los números reales generalmente se describe como el conjunto de todos los puntos en una recta.

Ejemplo:

B es el conjunto de los enteros positivos menores o iguales que 4. Defina por extensión y comprensión

Por extensión B = {1, 2, 3, 4}

Por comprensión B = {x/x es un entero positivo y x es menor o igual que 4}

O expresado mediante fórmulas simbólicas para lograr brevedad y precisión de la siguiente forma

$$B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } x \leq 4\}$$

(Se lee el conjunto B está formado por x tal que x es un número entero positivo y x es menor e igual a 4 o B es el conjunto de todo número entero positivo que es menor o igual que 4).)

¿Podría escribir por comprensión de alguna otra forma el conjunto B? Analice cuál es la más conveniente.

Observación:

- En el ejemplo, la propiedad necesaria para que un elemento pertenezca al conjunto tiene dos partes: la que determina el conjunto al que pertenece el elemento ($x \in \mathbb{Z}^+$) y la que establece otra condición más restrictiva, no son todos los enteros positivos, son los menores o iguales a 4.
- Una propiedad puede ser definida por varios criterios (o partes), cada uno de ellos vinculados por: "y" o "Λ" o ";" o ", ".

Ejemplo:

Determina los elementos del conjunto A = $\{x/x \in \mathbb{R}\,;\, x + 1 = 5\}$ (se lee el conjunto A está formado por todo número real x que sumado a 1 da como resultado 5 o el conjunto A es igual al conjunto de x tal que x es un número real que sumado a 1 da como resultado 5)

¿Cómo está definido el conjunto? ¿Puedo listar sus elementos? ¿Qué debo hacer para encontrar qué elementos satisfacen la propiedad?

Al despejar la ecuación se puede comprobar que el único valor posible de x es 4, por lo tanto $A = \{4\}$. Es un conjunto que tiene solo un elemento y se lo llama unitario.

Cuestión: ¿Cómo identifico si un elemento pertenece a un conjunto dado?

- Si el conjunto está dado por extensión, solo es necesario ver si el elemento aparece o no en la lista.
- Si el conjunto está dado por comprensión, se debe verificar si el elemento cumple con la propiedad indicada. Es decir sustituimos la x por el elemento que queremos analizar y verificamos si satisface todas las condiciones.

EJERCICIO:

Analiza los siguientes conjuntos y resuelve lo pedido en cada caso justificando la respuesta:

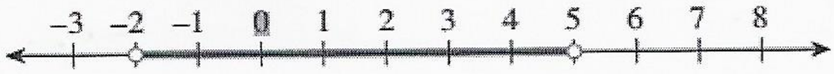
a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ¿El elemento 4 pertenece al conjunto? ¿El elemento 9 pertenece al conjunto?
b) $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq x^2 \leq 20\}$ Lista los elementos que pertenecen a B.
c) $C = \{x/x \in \mathbb{Z}^+;\, x^3 < 60\}$. Indica si los números 6, 2 y -3 pertenecen al conjunto.
d) $D = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } -2 < x < 5\}$
e) $E = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -2 < x < 5\}$
f) $F = \{x/\, x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } -2 < x < 5\}$

Solución:

a) Como el conjunto está dado por extensión, claramente se observa que el 4 está listado en el conjunto A por lo cual pertenece, mientras que el elemento 9 no está listado por lo cual no pertenece al conjunto.
b) El conjunto está dado por comprensión, lo primero que analizamos es el conjunto al que pertenece x, en este caso los enteros. Podemos comenzar con 0, $0 \in \mathbb{Z}$ y $0^2 \leq 20$ entonces $0 \in B$. Tomo el siguiente entero que sigue, el 1 y verifico si cumple la condición de su cuadrado ser menor o igual a 20 y sigo hasta que considero el número 4 (su cuadrado es $16 \leq 20$). Luego tomo los negativos y realizo el mismo análisis. Por lo cual $B = \{0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4\}$
c) Veamos cada caso:

$6 \in \mathbb{Z}^+$ pero $6^3 = 216 > 60$ entonces $6 \notin C$
$2 \in \mathbb{Z}^+$ y $2^3 = 8 < 60$ entonces $2 \in C$
$-3 \notin \mathbb{Z}^+$ entonces $-3 \notin C$ (aunque $(-3)^3 = 27 < 60$

d) El conjunto está dado por comprensión y se trata del intervalo abierto de los números reales (estrictamente) entre -2 y 5, como no podemos listar los elementos pues son infinitos, se ilustran de la siguiente manera:



e) Es el conjunto de todos los enteros (estrictamente) entre -2 y 5. Es igual al conjunto {-1, 0, 1, 2, 3, 4}.

f) Dado que todos los números enteros en $\mathbb{Z}^+$ son positivos, F = {1, 2, 3, 4}.

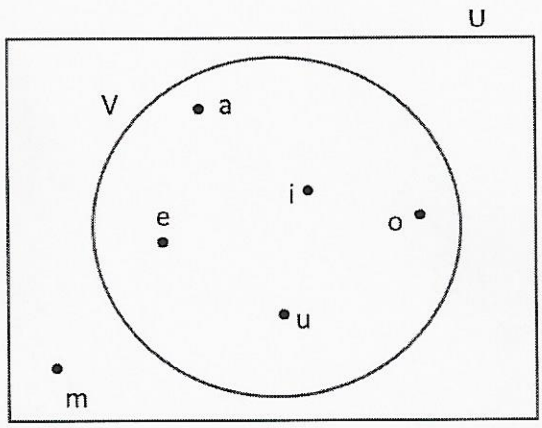
Diagramas de Venn

Ya se analizó el lenguaje coloquial y el simbólico empleado para conjuntos. Ahora introducimos el lenguaje gráfico donde se pueden visualizar los elementos de un conjunto. Así un conjunto puede ser representado gráficamente por medio de diagramas de Venn, teniendo en cuenta que:

1) Todo conjunto se representa gráficamente por una curva simple cerrada.
2) Los elementos del conjunto se representan por puntos interiores a la curva.
3) Los elementos que no pertenecen al conjunto se representan por puntos exteriores a la curva.
4) Ningún punto se representa sobre la curva.

A continuación se observa la representación gráfica del conjunto V, de las vocales. Claramente se puede observar que los elementos a, e, i, o, u están dentro círculo, pues cumplen con la propiedad de ser una vocal. Mientras que m no pertenece al conjunto V.

Observe que al conjunto V se lo ha incluido dentro de un rectángulo. Ese elemento gráfico se denomina Universal o referencial (la definición se verá en el apartado Conjuntos especiales). Siempre un conjunto se encuentra dentro de un referencial.



Cardinal de un conjunto

Cuando un conjunto es finito se puede contar la cantidad de elementos que tiene, en el caso de V tiene 5 elementos.

Simbólicamente $|V| = 5$ (se lee cardinal del conjunto V es 5)

EJERCICIOS: CONJUNTOS

Importante: la respuesta o resolución de cada ejercicio debe estar debidamente justificada.

1) Sea A = {1, 2, 4, a, b, c}. Identifica cada caso como verdadero o falso.

   a. $2 \in A$ b. $3 \in A$ c. $c \notin A$ d. $\emptyset \in A$ e. $\emptyset \notin A$ f. $A \in A$

2) Sea $A = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leq 5\}$. Identifica cada caso como verdadero o falso.

   a. $3 \in A$ b. $6 \in A$ c. $5 \notin A$ d. $8 \notin A$ e. $-8 \in A$ f. $3{,}4 \notin A$

3) Identifica cada caso como verdadero o falso.

   a. $2 \in \{2\}$ b. $\{0\} \in \{\{0\}, \{1\}\}$ c. $0 \in \{\{0\}, \{1\}\}$ d. $\{3\} \in \{1, 2, 3\}$ e. $0 \in \{0, \{1\}\}$

4) Escribe por extensión los elementos de cada conjunto:

   a. $A = \{x/x \in \mathbb{Z}\ ;\ x^2 \leq 14\}$ b. $B = \{ x/ x \in \mathbb{Z}^+ ; x = 4.n; n < 3; n \in \mathbb{Z}^+\}$ c. $C = \{ x/x \in \mathbb{Z}; x^2 + 1 = 0\}$

5) Escribe por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos:

   a. A = {2, 4, 6, 8, 10}
   b. B = {1, 8, 27, 64, 125}
   c. C = {-2, -1, 0, 1, 2}
   d. D = {Brasil, Uruguay, Chile, Bolivia, Paraguay}
   e. E = {a, e, i, o, u}