Balayage de Graham

Référence : Introduction to algorithms, Cormen

Balayage de Graham. Le balayage de Graham résout le problème de l'enveloppe convexe en gérant une pile S de points candidats. Chaque point de l'ensemble Q est empilé une fois, et les sommets qui ne sont pas dans EC(Q) finissent par être dépilé.

On utilisera deux autres opérations sur les piles :

— `Sommet(S)` : retourne le sommet de la pile sans changer son contenu ;

— `Sous-Sommet(S)` : retourne l'élément juste en dessous du sommet de la pile, sans changer son contenu.

À la fin de l'exécution, S contiendra, du bas vers le haut, les sommets de EC(Q) dans l'ordre trigonométrique.

Algorithme. On suppose que l'on dispose d'une fonction `Tri-Polaire`(Q, p_0) qui trie les éléments de Q par angle polaire respectivement à p_0, dans le sens trigonométrique. Si deux éléments ont le même angle, on garde seulement celui qui est le plus loin de p_0.

Algorithme 1 : BalayageGraham(Q)

$p_0 \leftarrow$ sommet de S minimal pour l'ordre lexicographique sur (ordonnée, abscisse). ;
$p_1, ..., p_m \leftarrow$ Tri-Polaire($Q \backslash \{p_0\}, p_0$) ;
$S \leftarrow$ PileVide() ;
Empiler(S, p_0) ;
Empiler(S, p_1) ;
Empiler(S, p_2) ;
pour $i = 3...m$ **faire**
  $q_1 \leftarrow$ Sous-Sommet(S) ;
  $q_2 \leftarrow$ Sommet(S) ;
  tant que $\widehat{q_1, q_2, p_i} > 0$ **faire**
    Dépiler(S) ;
    $q_1 \leftarrow$ Sous-Sommet(S) ;
    $q_2 \leftarrow$ Sommet(S) ;
  Empiler(S, p_i) ;
retourner S

Exemple. (Faire un dessin en parallèle de l'écriture de l'algorithme).

Correction.

Théorème 1. *Si BalayageGraham est exécutée sur un ensemble Q de points tel que $|Q| \geqslant 3$, alors, à la fin de la procédure, la pile S, du abs vers le haut, les sommets de EC(Q) dans le sens trigonométrique.*

Démonstration. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on pose $Q_i = \{p_1, ..., p_i\}$. Quelques remarques :

— $Q \backslash Q_m$ est l'ensemble des points supprimés par Tri-Polaire.

— EC(Q)=EC(Q_m).

— pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, $p_0, p_1, p_i \in$ EC(Q_i) (à justifier)

On montre l'invariant suivant :

« Au début de chaque itération du `Pour`, la pile S contient, du bas vers le haut, les sommets de $\mathrm{EC}(Q_{i-1})$ pris dans l'ordre trigonométrique. »

Initialisation Pour $i = 3$, on a $Q_{i-1} = \{p_0, p_1, p_2\}$. L'enveloppe convexe d'un triangle est lui-même et S contient p_0, p_1, p_2.

Conservation Au début de l'itération i, le sommet de la pile est p_{i-1}. Soit p_j le sommet de la pile après l'exécution du `Tant que`, juste avant d'empiler p_i. En notant P_i l'ensemble des sommets dépilés lors de la boucle `Tant que` de l'itération i, on veut montrer que :

$$\mathrm{EC}(Q_j \cup \{p_i\}) = \mathrm{EC}(Q_i \backslash P_i) = \mathrm{EC}(Q_i) \tag{1}$$

Soit p_t un sommet dépilé, et soit p_r le sommet qui était juste en dessous de p_t. On sait deux choses :
- l'angle polaire de p_t (respectivement à p_0) est supérieur à celui de p_r et inférieur à p_i ;

- l'angle $(p_r, p_t, p_i$ est positif.

On en déduit alors que p_t est dans le triangle p_0, p_r, p_i et donc n'est pas dans $\mathrm{EC}(Q_i)$ (sauf s'il est sur le segment $[p_i; p_r]$, mais ce cas ne pose pas problème). Ainsi, on a :

$$\mathrm{EC}(Q_i \backslash \{p_t\}) = \mathrm{EC}(Q_i)$$

et en répétant ce raisonnement pour tous les points de P_i, on a

$$\mathrm{EC}(Q_i \backslash P_i) = \mathrm{EC}(Q_i)$$

Or, par définition, on a $Q_i \backslash P_i = Q_j \cup \{p_i\}$ et donc on en déduit l'égalité 1.

Cette égalité nous permet de justifier que S contient les sommets de $\mathrm{EC}(Q_i)$ exactement, et l'ordre est trivial.

Terminaison Quand la boucle termine, on a $i = m + 1$ et donc S contient les sommets de $\mathrm{EC}(Q_m)$ dans l'ordre trigonométrique du bs vers le haut.

$\square$

Complexité. On peut aussi discuter de la complexité du balayage de Graham, qui est un $\mathcal{O}(n \log n)$ où n est le nombre de points. La recherche de p_0 est linéaire, et le tri se fait en $\mathcal{O}(n \log n)$. Le traitement suivant se fait alors en $\mathcal{O}(n)$ en complexité amortie. En effet, chaque sommet est empilé exactement une fois et chaque sommet ne peut être dépiler qu'une fois. Ainsi, en totalité on réalise exactement m fois `Empiler` et au plus $m-2$ fois `Dépiler` (car p_0, p_1 et p_m ne sont jamais dépilés). Puisque $m \leqslant n$, on réalise tout le traitement en $\mathcal{O}(n)$ opérations.