2-SAT est linéaire

Référence : 131 Développements pour l'oral, D.Lesesvre, P. Montagnon.

Définition 1 (2-SAT)**.**
Données :
— *un ensemble de variable propositionnelle* $X = \{x_1, ..., x_n\}$
— *une formule* F *sous forme normale conjonctive où chaque clause est composée de 2 littéraux (un littéral étant une variable ou sa négation).*
Problème : *existe-t-il une valuation* $d : \{x_1, ..., x_n\} \to \{0, 1\}$ *telle que* $d(F) = 1$ *?*

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *2-SAT est décidable en temps linéaire.*

Construction du graphe. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ et $F = C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_m$ une instance de 2-SAT. On construit le graphe orienté $G = (V, E)$ avec :
— $S = \{x_1, \overline{x_1}, ..., x_n, \overline{x_n}\}$;
— pour $1 \leqslant i \leqslant m$, en notant $C_i = u \vee v$, on a $(\overline{u}, v) \in E$ et $(\overline{v}, u) \in E$.

Remarque 1. *On remarque que la taille du graphe est linéaire en la taille de la formule.*

Caractérisation de la satisfiabilité. On peut alors montrer le résultat suivant :

Théorème 2. *F est satisfiable ssi aucune composante fortement connexe de G ne contient à la fois une variable x et son complément $\overline{x}$.*

Lemme 1. *Soit d une valuation. On a $d(F) = 0$ ssi il existe un chemin $l_1...l_k$ dans G avec $d(l_1) = 1$ mais $d(l_k) = 0$.*

Démonstration. Si $d(F) = 0$, alors il existe une clause $C = u \vee v$ telle que $d(C) = 0$. On prend alors le chemin $\overline{u}v$, et on a $d(\overline{u}) = 1$ et $d(v) = 0$.

Réciproquement, on suppose $d(F) = 1$. Montrons tout d'abord que si $uv \in E$ et $d(u) = 1$, alors $d(v) = 1$. En effet, si $uv \in E$, alors on a dans F la clause $\overline{u} \vee v$ ou la clause $v \vee \overline{u}$ (donc la même clause). On a directement $d(v) = 1$.

Ainsi, s'il existait un chemin $l_1...l_k$ dans G avec $d(l_1) = 1$, alors on a immédiatement $d(l_2) = ... = d(l_k) = 1$. □

Sens direct du théorème 2. Par contraposée, on suppose qu'il existe x et $\overline{x}$ dans la même composante fortement connexe. Soit d une valuation, montrons $d(F) = 0$. Il y a deux cas :
— si $d(x) = 1$, alors puisqu'il existe un chemin $x \rightsquigarrow \overline{x}$ et $d(\overline{x}) = 0$, on conclut par le lemme 1 que $d(F) = 0$;
— si $d(x) = 0$, alors on a $d(\overline{x}) = 1$ et il existe un chemin $\overline{x} \rightsquigarrow x$ dans G. On conclut de la même manière.

Ainsi, F n'est pas satisfiable. □

Sens indirect du théorème 2. On suppose maintenant que pour tout $x \in X$, on a x et $\overline{x}$ dans des composantes fortement connexes différentes. On utilisera le lemme suivant.

Lemme 2. *Pour toute composante fortement connexe C de G, il existe une composante fortement connexe $\overline{C}$ tel que $u \in C$ ssi $\overline{u} \in C$.*

Démonstration. Soit $u \in C$, on pose $\overline{C}$ la composante de $\overline{u}$. On montre alors que $v \in C$ ssi $\overline{c} \in \overline{C}$.

On a $v \in C$ ssi $u \rightsquigarrow v$ et $v \rightsquigarrow u$. Or s'il existe un chemin $u_1...u_k$ dans G, on a par définition de G aussi le chemin $\overline{u_k}...\overline{u_1}$. Ainsi, on a $u \rightsquigarrow v$ ssi $\overline{v} \rightsquigarrow \overline{u}$ et on peut conclure facilement. □

On peut maintenant construire la valuation. On considère le graphe des composantes fortement connexes de G. C'est un DAG et on peut alors prendre un tri-topologique de ce graphe $C_1....C_n$. On construit la valuation d de la manière suivante : pour $i = 1...n$, si C_i n'a toujours pas été traité, alors on pose $d(C_i) = 1$ et $d(\overline{C_i}) = 0$.

La fonction d est bien définie par hypothèse. Par l'absurde, si $d(F) = 0$, alors il existe un chemin $l_1....l_k$ dans G avec $d(l_1) = 1$ mais $d(l_k) = 0$. En particulier, il existe une arête ll' sur le chemin avec $d(l) = 1$ et $d(l') = 0$. On a l et l' dans deux CFC différente C et C'.

Puisque $d(C) = 1$, $\overline{C}$ est après dans le tri topologique ($\overline{C} < C$). Puisque $d(C') = 0$, $\overline{C'}$ a été traité avant et donc $C' < \overline{C'}$. Enfin, puisqu'on a une arête entre C et C', on a $C < C'$, et donc :

$$\overline{C} < C < C' < \overline{C'}$$

Or, puisque $ll' \in E$, on a $\overline{l'l} \in E$, et donc $\overline{C'} < \overline{C}$, c'est absurde.

Finalement, F est satisfiable. □

Le théorème **??** est alors un corollaire du théorème 2 puisqu'il suffit de calculer les composantes fortement connexes en temps linéaire (via Tarjan ou Kosaraju), et de vérifier linéairement si une variable et sa négation sont dans la même CFC.