

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Leçons | 2 |
| 1 | Exemples de méthodes et outils pour la correction des programmes. | 4 |
| 1 | Terminaison | 4 |
| 2 | Correction partielle | 6 |
| 3 | Correction | 7 |
| 4 | Outils pratiques | 9 |
| 2 | Paradigmes de programmation : impératif, fonctionnel, objet. Exemples et applications. | 10 |
| 1 | La programmation impérative | 10 |
| 2 | Programmation fonctionnelle | 11 |
| 3 | Programmation orientée objet | 12 |
| 4 | Dans la vraie vie ? | 13 |
| 3 | Tests de programme et inspection de code. | 14 |
| 1 | Introduction | 14 |
| 2 | Tests en boîtes noires | 15 |
| 3 | Tests en boîte blanche | 16 |
| 4 | Pratiques pour éviter d'avoir à déboguer | 17 |
| 4 | Principe d'induction | 18 |
| 1 | Principe | 18 |
| 2 | Structures de données inductives | 21 |
| 3 | Ensembles inductifs | 22 |
| 5 | Implémentations et applications des piles, files et files de priorité | 24 |
| 1 | Les piles | 24 |
| 2 | Les files | 25 |
| 3 | File de priorité | 26 |
| 4 | Applications aux graphes | 27 |
| 5 | Applications systèmes | 28 |
| 6 | Implémentations et applications des ensembles et des dictionnaires | 29 |
| 1 | Dictionnaire : type abstraits et motivation | 29 |
| 2 | Implémentation | 29 |
| 3 | Ensembles | 32 |
| 4 | Application | 32 |
| 7 | Accessibilité et chemins dans un graphe. Applications | 34 |
| 1 | Définition | 34 |
| 2 | Accessibilité | 35 |
| 3 | Plus court chemin | 37 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 8 | Algorithme de tri. Exemple, Complexité et Applications | 40 |
| 1 | Introduction | 40 |
| 2 | Tri quadratiques | 41 |
| 3 | Tri efficace | 42 |
| 4 | Application | 44 |
| 9 | Algorithmique du texte. Exemples et applications. | 46 |
| 1 | Encodage et compression | 46 |
| 2 | Comparaison | 48 |
| 3 | Recherche de motifs | 49 |
| 10 | Arbres : représentations et applications | 52 |
| 1 | Généralités sur les arbres | 52 |
| 2 | Représentation informatique | 53 |
| 3 | Application | 55 |
| 11 | Exemples d'algorithmes d'approximation et d'algorithmes probabilistes | 58 |
| 1 | Algorithmes probabilistes | 58 |
| 2 | Algorithmes d'approximation | 60 |
| 3 | Algorithmes d'approximation probabilistes | 62 |
| 12 | Exemples d'algorithmes glouton et de retour sur trace | 64 |
| 1 | Algorithmes gloutons | 64 |
| 13 | Exemples d'algorithmes utilisant la méthode « diviser pour régner » | 65 |
| 1 | Introduction | 65 |
| 2 | Applications au calcul formel | 65 |
| 3 | Application aux listes | 67 |
| 4 | Application Géométrique | 69 |
| 14 | Programmation dynamique | 71 |
| 1 | Principe | 71 |
| 2 | Algorithmes illustrant le principe | 73 |
| 3 | Autres applications | 74 |

Première partie

Leçons

Leçon 1

Exemples de méthodes et outils pour la correction des programmes.

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Commentaire 1.1 Ici correction est pris majoritairement dans le sens «est correct» et non dans le sens de «corriger», à savoir rectifier car c'est souvent dans ce sens là qu'on parle de correction de programme.

Commentaire 1.2 On se concentre ici surtout sur les outils théoriques, en estimant que le terme «méthode» de l'intitulé de la leçon laisse penser que c'est sur ceux-là qu'il faut se concentrer

La conjecture de Syracuse est un problème ouvert de Mathématiques :

La suite u définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{N}^* \\ u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$
 finie-t-elle toujours par le cycle 1, 2, 4 ?
(toujours = pour tout $a \in \mathbb{N}^*$)

Cela revient à savoir si l'algorithme

Algorithme 1.1 : Syracuse(a)

$u \leftarrow a$

tant que u est une nouvelle valeur **faire**

si u est pair **alors**

$u \leftarrow \frac{u}{2}$

sinon

$u \leftarrow 3u + 1$

retourner u

renvoie toujours 1, 2 ou 4.

Commentaire 1.3 C'est un exemple fleuve qui nous permettra d'illustrer toutes les notions autour de la correction et leur non trivialité

1 Terminaison

Une première question est de savoir si Syracuse finit (ne boucle pas à l'infini) sur toute entrée.

Définition 1.1 Prouver la terminaison d'un algorithme revient à prouver que sur toute entrée il termine

Remarque 1.1 On se limite parfois aux entrées valides (pour Syracuse, $a \in \mathbb{N}^*$ par exemple)

Exemple 1.1

Tant que $a > 0$:
 $a = a - 1$

Termine sur toute entrée si on n'autorise pas a à valoir $+\infty$, sinon ne termine pas sur toute entrée.

Définition 1.2 Un **variant** est une fonction des variables, à valeurs dans \mathbb{N} qui décroît strictement :

- à chaque passage dans la boucle pour les algorithmes itératifs
- à chaque appel récursif pour les algorithmes récursifs.

Exemple 1.2

Algorithme 1.2 : $\text{pgcd}(a, b)$

```

tant que  $\min(a, b) > 0$  faire
  si  $a < b$  alors
     $b \leftarrow b - a$ 
  sinon
     $a \leftarrow a - b$ 
retourner  $\max(a, b)$ 

```

La fonction $\text{pgcd}(a, b)$ qui calcule le pgcd de a et b pour $a, b \in \mathbb{N}$ admet comme variant $a + b$ (qui est en effet toujours positif, et décroît à chaque fois)

Commentaire 1.4 Nous réutiliserons plusieurs fois cet exemple du pgcd

Proposition 1.1 Si une boucle a un variant de boucle, alors elle s'exécute un nombre fini de fois. De même pour un algorithme récursif.

Exemple 1.3 $\text{pgcd}(a, b)$ termine pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$

Remarque 1.2 Si un algorithme termine sur toute entrée, il existe toujours un variant, mais il peut être difficile à trouver (ou à prouver)

Commentaire 1.5 Il suffit de prendre comme variant le nombre d'étapes de calcul restantes en fonction de l'état de la mémoire

Exemple 1.4

Algorithme 1.3 : $\text{ack}(n, m)$

On définit $\text{ack}(n, m)$ pour $n, m \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} \text{ack}(0, m) = m + 1 \\ \text{ack}(n, 0) = \text{ack}(n - 1, 1) \\ \text{ack}(n, m) = \text{ack}(n - 1, \text{ack}(n, m - 1)) \end{cases}$$

```

si  $n = 0$  alors
  retourner  $m + 1$ 
sinon
  si  $m = 0$  alors
    retourner  $\text{ack}(n - 1, m)$ 
  sinon
    retourner  $\text{ack}(n - 1, \text{ack}(n, m - 1))$ 

```

Il n'est pas immédiat que ack termine.

Définition 1.3 On dit qu'un ordre est un **ordre bien fondé** si toute suite décroissante est stationnaire

Exemple 1.5 \mathbb{N} avec l'ordre naturel est bien fondé

Proposition 1.2 Les ordres produit et lexicographiques d'ordre bien fondés sont bien fondés

Exemple 1.6 Un ordre total sur un ensemble fini est bien fondé, donc l'ordre alphabétique est bien fondé (c'est un ordre lexicographique)

Définition 1.4 On étend alors la définition du variant aux fonctions à valeurs dans un bon ordre.

Proposition 1.3 La propriété 1.1 reste valide avec notre définition étendue du variant

Exemple 1.7 Pour ack , (n, m) est un variant dans \mathbb{N}^2 avec l'ordre lexicographique, donc ack termine

2 Correction partielle

Une autre question pour Syracuse est de savoir si on peut tomber sur un autre cycle que 1,2,4 et donc renvoyer autre chose que 1,2 ou 4.

Définition 1.5 On appelle **spécification** d'un algorithme deux propriétés P_1 sur les entrées (pré-condition) et P_2 sur les sorties (post-condition)

Exemple 1.8 Pour Syracuse, $P_1 : \ll a \in \mathbb{N} \gg$ et $P_2 : \ll \text{Syracuse}(a) \in \{1, 2, 4\} \gg$

Définition 1.6 On dit qu'un algorithme est **partiellement correct** si pour toute entrée vérifiant la pré-condition, si l'algorithme termine, la sortie vérifie la post-condition.

Exemple 1.9 L'algorithme de l'exemple 1.2 est partiellement correct si la pré-condition est $\ll a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \gg$ et la post-condition $\ll \text{pgcd}(a, b)$ renvoie le PGCD de a et de $b \gg$

I Correction partielle des algorithmes impératifs

Pour prouver la correction partielle des langages impératifs, on utilise un invariant de boucle.

Définition 1.7 Un invariant de boucle est une propriété qui est vrai avant la boucle, et si elle est vraie quand on commence un tour de boucle, alors elle l'est quand on le finit.

Proposition 1.4 Si un invariant de boucle est valide, alors il est vrai après la boucle, et la condition d'arrêt de la boucle est fausse.

Exemple 1.10 Pour pgcd, $\ll PGCD(a, b) = PGCD(a_0, b_0) \gg$ où a_0 et b_0 sont les valeurs initiales de a et b , est un invariant valide.

A la fin de l'exécution, on a donc $\min(a, b) = 0$ et $PGCD(a, b) = PGCD(a_0, b_0) = PGCD(\min(a, b), \max(a, b)) = PGCD(0, \max(a, b)) = \max(a, b)$. D'où l'assertion de l'exemple 1.9

II Correction partielle des algorithmes récurifs

Commentaire 1.6 On ne présente souvent pas la correction partielle des algorithmes récurifs, en se contentant de la correction totale directement. Néanmoins on présente quand cela, car cela illustre très bien la manière de raisonner quand on veut coder en récurif (et que tout est vrai)

Principe 1.1 Pour prouver la correction partielle d'un algorithme récurif, on vérifie que si

- la pré-condition est vérifiée

, alors

- on ne fait que des appels récurifs où les arguments vérifient la pré-condition
- Si la post-condition des appels récurifs est vérifiée, alors celle de notre appel est vérifiée

Théorème 1.1 Si le principe 1.1 est respecté, alors l'algorithme est partiellement correct.

Exemple 1.11 $\exp(a, n)$ pour $a, n \in \mathbb{N}$ renvoie a^n .

Algorithme 1.4 : $\exp(a, n)$

```

si  $n = 0$  alors
  retourner 1
sinon
   $x = \exp(a, n)$ 
  si  $n$  est pair alors
    retourner  $x * x$ 
  sinon
    retourner  $x * x * a$ 
```

Précondition : $\ll a$ est un flottant et n un entier \gg .

Postcondition : $\exp(a, n) = a^n$.

Alors, la pré-condition est valide à chaque appel, et comme $a^n = a^{\lfloor n/2 \rfloor} * a^{\lfloor n/2 \rfloor}$, le principe 1.1 est respecté dans tous les cas donc l'algorithme est partiellement correct.

3 Correction

La conjecture de Syracuse dit donc que notre fonction Syracuse termine, et quand elle termine est correcte (i.e. partiellement correcte).

I Cas général

Définition 1.8 Quand un programme termine sur toute entrée valide et est partiellement correct, on dit qu'il est correct, ou encore totalement correct.

Exemple 1.12

Algorithme 1.5 : fusion(L_1, L_2)

```

res ← []
i, j ← 0
tant que i < |L1| et j < |L2| faire
    si L1[i] < L2[j] alors
        res.ajouter(L1[i])
        i ← i + 1
    sinon
        res.ajouter(L2[j])
        j ← j + 1
Ajouter le reste de L1 et de L2 à res
retourner res

```

Algorithme 1.6 : tri_fusion(L)

```

n ← |L|
si n ≤ 1 alors
    retourner L
L1, L2 ← partitionner(L)
retourner fusion( tri_fusion(L1), tri_fusion(L2) )

```

Developpement ?? Correction totale de tri_fusion.

Néanmoins, ce n'est pas toujours facile. La conjecture de Syracuse est toujours un problème ouvert. Et c'est parfois même pire.

Théorème 1.2 La correction partielle et la terminaison sont indécidables.

Developpement ?? Preuve du théorème 1.2

II Cas des algorithmes récursifs

Dans le cas des algorithmes récursifs, on fait régulièrement la correction totale directement.

Proposition 1.5 Si (E, \preceq) est un ordre bien fondé, alors toutes parties non vides à un élément minimal (plus grand que personne)

Théorème 1.3 Soit (A, \preceq) un ensemble muni d'un ordre bien fondé et \mathcal{P} une propriété sur A , alors $\forall x \in A, (\forall y \in A, y \preceq x \Rightarrow \mathcal{P}(y) \Rightarrow \mathcal{P}(x)) \Rightarrow \forall x, \mathcal{P}(x)$

Remarque 1.3 Cela étend le principe de récurrence forte sur \mathbb{N}

L'ordre bien fondé nous donne alors le variant et la propriété l'invariant. On montre alors la terminaison et la correction partielle en même temps.

Exemple 1.13 Dans l'exemple 1.2, la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll \text{exp}(a,n) = a^n \gg$ vérifie les hypothèses du théorème 1.3. Donc, $\forall n, \text{exp}(a,n) = a^n$, et ce pour tout $a \in \mathbb{N}$

Commentaire 1.7 Ici on suppose que $\text{exp}(a,n) = a^n$ veut dire que exp termine et renvoie a^n

4 Outils pratiques

- ★ Typage : Le fait d'utiliser un typage fort comme en OCaml permet d'éviter beaucoup d'erreurs bêtes
- ★ Programmer défensivement en utilisant la bibliothèque `assert.h` permet de vérifier qu'à un moment donné du code, les hypothèses (ou les invariants) sont satisfaits (et pas seulement une erreur aléatoire parmi 1000 lignes)
- ★ Faire des tests tout au long de la programmation, en utilisant au maximum la modularité, pour détecter le plus tôt possible les erreurs.
- ★ Utiliser des logiciels comme GDB ou Valgrind pour détecter les fuites mémoires, ou l'inspecter au cours du programme.
- ★ Commentez ! C'est primordial pour déclarer la spécification des fonctions et rendre le code compréhensible, donc déboguable.

Commentaire 1.8 On pourrait développer cette partie également en parlant plus longuement des tests (cf leçon 3) qui est un autre type d'outils pour éprouver la correction d'un programme. Mais ça nous emmène un peu loin pour cette leçon (il faut bien faire des choix)

Leçon 2

Paradigmes de programmation : impératif, fonctionnel, objet. Exemples et applications.

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Programmer, c'est mettre en relation un cahier des charges et des instructions compréhensibles par la machine.

Définition 2.1 *Un **paradigme de programmation** définit la façon d'approcher la programmation informatique.*

Suivant le contexte il en existe plusieurs que nous verrons ici.

1 La programmation impérative

C'est la plus classique.

Définition 2.2 *La **programmation impérative** consiste à donner une suite d'instructions, chacune ayant pour seul effet de modifier l'état du programme (la mémoire, la valeur des variables, l'endroit où on en est etc...).*

Remarque 2.1 *Ainsi, dans la programmation impérative, il n'existe pas de valeurs de retour. Si on en veut une, il faut écrire la valeur que l'on veut dans la mémoire.*

Remarque 2.2 *Informellement, programmer impérativement, c'est utiliser des variables, des affectations, des tableaux, des boucles for et while, etc...*

Exemple 2.1 *La majorité du code en python est impératif*

```

x = 1
y = x + 3
while (x != y):
    print(y)
    y -= 1

```

Ce programme écrit 1 dans la case mémoire de x , puis y accède pour écrire 4 dans celle de y , puis écrit la valeur de y dans l'espace mémoire dédié à l'affichage, etc...

Remarque 2.3 Impératif est pris ici dans son sens courant (en informatique). Une autre définition d'impératif est qu'on dit exactement ce que la machine doit faire (ex : l'assembleur), ce qui s'oppose alors au déclaratif (comme SQL). Mais cette notion est à degré (dans tous langages il y a une marge plus ou moins grande pour la machine) et n'est pas nécessairement celle à laquelle on pense quand on pense à de la programmation impérative (même si les deux sont très liées).

2 Programmation fonctionnelle

Définition 2.3 La **programmation fonctionnelle** consiste à composer le programme de fonctions (au sens mathématiques), et de récupérer la valeur de retour. Les changements d'état ne peuvent pas être représentés par des évaluations de fonctions, donc la programmation fonctionnelle ne les admet pas. On dit que les structures de données fonctionnelles sont immuables.

Exemple 2.2 $\text{let } \text{max}(x, y) = \text{if } x > y \text{ then } x \text{ else } y$
(fonction de type $\text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int}$)

Informellement, programmer en fonctionnel, c'est considérer les fonctions comme des objets comme les autres, et n'avoir que des structures de données immuables.

Remarque 2.4 Un argument d'une fonction ou la valeur de retour d'une fonction peut être une fonction. C'est ce que l'on appelle la programmation d'ordre supérieure.

Définition 2.4 La **curryfication** est la transformation d'une fonction à plusieurs arguments en une fonction à un argument qui retourne une fonction sur le reste des arguments

Exemple 2.3 On peut transformer la fonction max de l'exemple 2.2 en la fonction
 $\text{let } \text{max } x \ y = \text{if } x > y \text{ then } x \text{ else } y$ de type $\text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int}$

Exemple 2.4 Si, sur l'exemple 2.3, on veut que max puisse comparer des éléments sur lesquels on ne connaît pas l'ordre, on peut en faire une fonction d'ordre supérieur en lui fournissant une fonction de comparaison :

$\text{let } \text{max } \text{compar } x \ y = \text{if } \text{compar } x \ y \text{ then } x \text{ else } y$ de type $('a \rightarrow 'a \rightarrow \text{bool}) \rightarrow 'a \rightarrow 'a \rightarrow 'a$
On a alors

$\text{max } (\text{fun } x \ y \rightarrow x > y)$ qui calcule le max

$\text{max } (\text{fun } x \ y \rightarrow x > y) \ 3$ qui est une fonction de type $\text{int} \rightarrow \text{int}$ renvoyant le maximum de son argument et 3

$\text{max } (\text{fun } x \ y \rightarrow x < y)$ qui calcule le min

Remarque 2.5 La puissance du fonctionnel vient de la récursivité

3 Programmation orientée objet

I Obtenir de la modularité

Définition 2.5 Une **classe** est un ensemble de types de données appelés **attributs** et de **fonction** appelées **méthodes**.

Un **objet** est un représentant d'une classe. C'est un espace en mémoire contenant les valeurs des différentes attribut, les méthodes étant communes à tous les objets.

Exemple 2.5

```
class Noeud:
    def __init__(self, x):
        self.valeur = x
    def afficher(self):
        print(self.valeur)
    def est_egal(self, autre):
        return self.valeur == autre.valeur
a = Noeud(5)
a.afficher()
```

Ici Noeud est une classe, valeur un attribut de la classe Noeud, afficher et est_egal des méthodes de la classe Noeud et a un objet (représentant) de la classe Noeud

Définition 2.6 La **programmation orienté objet** consiste à utiliser des classes et des objets de ces classes quand on programme.

Remarque 2.6 Une utilisation massive des classes et de permettre de la modularité : on peut avoir une interface entre un type abstrait et son utilisation, rendant l'utilisation et la structure implémentant le type indépendant.

Exemple 2.6 En python, le package numpy propose les objets numpy.array que l'on crée via la commande `a = numpy.array([...])`. Un tel objet possède des attributs comme sa taille (`a.size`) mais aussi des méthodes tq `a.sort()`. Cette classe implémente des tableaux de taille fixe et de nombreuses méthodes dessus. On peut les utiliser en ne comprenant rien à comment elles fonctionnent, seulement ce qu'elles font, mais on peut aussi les réimplémenter sans rien changer à l'utilisation de ces tableaux par des millions de personnes.

II Pour résoudre un problème

Une autre utilité de la programmation orienté objet, et de représenter un problème avec ses différents objets que l'on fera interagir entre eux.

Exemple 2.7 Sur l'exemple 2.5, on peut rajouter la classe Arbre contenant des noeuds.

```
class Arbre:
    def __init__(self, n, liste_arbre):
        self.noeud = n
        self.fils = liste_arbre
    def afficher(self):
```

```
n.afficher()  
for x in self.fils :  
    x.afficher()
```

4 Dans la vraie vie ?

I Le multiparadigme

Dans la vraie vie, la plupart des langages de programmation implémentent plusieurs paradigmes. En effet, python, comme C ou Ocaml, permettent de faire des boucles while, de faire des tableaux, de faire des structures et des fonctions récursives, et même les fonctions d'ordre supérieur dans une certaine mesure.

On appelle cela le multiparadigme. Néanmoins, certains langages sont plus adaptés à certains paradigmes, eux-mêmes plus adaptés à certaines contraintes.

Des langages comme C, C++, Fortran, python, Java sont des langages impératifs, quand Haskell, ML, Ocaml sont fonctionnels. De plus, python, C++ sont orientés objets.

II Comparaison des paradigmes

- ★ Pour des structures récursives comme des arbres (ou des graphes peu denses), le paradigme fonctionnel est approprié
- ★ Le paradigme fonctionnel offre également élégance et lisibilité au code, avec moins d'instructions «superflues»
- ★ Le caractère intrinsèquement modulaire et sans effet de bord le rend aussi plus facile à tester et sécuriser : C'est en Ocaml (en Coq) qu'est implémenté CompCert, un compilateur C vérifié.
- ★ La programmation impérative est beaucoup plus proche de la machine et rend donc la compilation plus simple, et le développement intelligent potentiellement plus efficace.
- ★ Il est aussi très performant pour des structures de données séquentielles et des accès «aléatoires» à des données. Par exemple représenter une matrice, en faire des multiplications, etc... paraît beaucoup plus simple en C qu'en Ocaml.

Exercice 2.1 Implémenter un tas min en C et en OCaml

- ★ L'orienté objet est quant à lui de plus haut niveau et repose souvent sur d'autres paradigmes plus bas niveau.
- ★ Il est souvent utilisé pour représenter des situations complexes grâce à sa modularité

Exercice 2.2 Implémenter les classes représentant un personnage de jeu vidéo, ses objets, ses compétences, etc...

III Et SQL ?

Il existe néanmoins bien d'autres paradigmes, comme par exemple le paradigme logique, où seul le résultat est présenté par le code, et non la manière de l'obtenir. C'est par exemple le cas du SQL pour les bases de données, où l'exécution n'est pas dictée par la requête, seul son sens l'est, laissant le SGBD se charger du déroulement.

Leçon 3

Tests de programme et inspection de code.

Auteur·e·s: Emile Martinez, Malory Marin

Références :

1 Introduction

I Qu'est-ce qu'un test

Tester est un anglicisme pour le mot français essayer (ou éprouver). Me soumettant à la folie anglomane ambiante je garderai ce mot, soucieux de ma cohérence avec le monde extérieur.

Définition 3.1 *Tester un programme consiste à essayer d'y trouver des erreurs*

Remarque 3.1 *On ne cherche pas ici à prouver directement que le programme est correct, mais à prouver qu'on n'arrive pas à se rendre compte qu'il est incorrect.*

II Données de tests

Définition 3.2 *Une donnée de test est un couple (valeur d'entrée, valeur de sortie), où à l'évidence, le deuxième élément représente la valeur de sortie quand la fonction est appelée sur le premier élément.*

Définition 3.3 *Un jeu de données de test (ou jeu de tests) est alors un ensemble de tels couples, permettant de vérifier la validité du programme sur certaines entrées.*

Remarque 3.2 *Certaines sorties (attendues) peuvent être des erreurs.*

Exemple 3.1 *Un jeu de tests pour une fonction calculant le pgcd peut être $\{((1, 2), 1), ((-3, 6), 3), ((0, 0), 0), ((2, 2.45), \text{Erreur de type})\}$*

III Types de tests

Il existe deux types de tests :

- Les tests en boîtes noires : On ne connaît pas le code de la fonction, on peut simplement l'appeler.
- Les tests en boîtes blanches : On connaît le code et on génère un jeu de test en fonction.

2 Tests en boîtes noires

I Caractéristiques

Pour un test en boîtes noires, comme on ne connaît pas le code, il faut tester beaucoup de données. Idéalement, toutes, mais cela se trouve souvent impossible.

Exemple 3.2 *On peut tester toutes les valeurs d'une fonction qui implémente une fonction booléenne mais pas celles de notre fonction calculant le pgcd de deux nombres*

Viennent alors deux problèmes : Générer suffisamment de données d'entrées et effectuer le test suffisamment rapidement.

II Générer des données d'entrée

Dans de nombreux cas, ne pouvant pas essayer toutes les données d'entrées, on va devoir faire des choix.

Idée 3.1 *La première approche consisterait à générer des valeurs aléatoires dans un domaine, et espérer en prendre suffisamment pour que cela fonctionne.*

Principe 3.1 *Une approche plus maline, à partitionner le domaine, puis à appliquer l'approche naïve sur chaque domaine.*

Exemple 3.3 *Pour le calcul de $\text{pgcd}(a,b)$, on peut partitionner le domaine d'entrées en comparant a , b , et 0 , (avec donc 6 domaines : $a \leq 0 \leq b$, $0 \leq a \leq b$, $0 \leq b \leq a$, $a \leq b \leq 0$, $b \leq a \leq 0$, $b \leq 0 \leq a$)*

Remarque 3.3 *On se contente souvent de prendre un seul test par classe.*

Remarque 3.4 *Le choix du partitionnement est arbitraire et doit donc être fait suivant la manière d'approcher le problème*

Une fois cela fait, il est très commun que les erreurs puissent venir des cas limites.

Principe 3.2 *On essaye alors de se placer au limites des domaines, et de vérifier spécifiquement ces cas là.*

Exemple 3.4 *Pour l'exemple précédent, on testera les cas d'égalité : $0 \leq a = b$, $a = 0 = b$, $a = 0 \leq b$ etc... (en effet par exemple, le cas $0, 0$ est différent des autres, la valeur pouvant être $+\infty$ ou 0 suivant les définitions).*

III Utiliser les valeurs de sorties efficacement

Néanmoins, maintenant que l'on a les valeurs d'entrées, il faut pour avoir notre jeu de tests avoir également les valeurs de sorties.

Exemple 3.5 *si l'on veut générer la sortie du pgcd sur des entrées que l'on a pris au hasard, il faut connaître déjà le pgcd. Quel intérêt d'avoir notre fonction alors si on a déjà une fonction qui le fait*

On a alors plusieurs méthodes :

1. Générer un jeu de tests à la main
2. Utiliser un programme moins performant mais que l'on sait correct.

Exemple 3.6 *Si on calcule le pgcd par soustraction successives, on peut tester en calculant le pgcd en testant tous les nombres inférieurs à a et à garder le plus grand qui divise a et b .*

3. Ne pas calculer la réponse mais simplement vérifier que la réponse fournie est correcte.

Exemple 3.7 *Si on a un programme qui nous donne la décomposition en facteurs premiers d'un nombre, il nous suffit de tester la primalité de chaque sortie et de vérifier que leur produit fait l'entrée.*

Exemple 3.8 *Si on a un algorithme performant effectuant le produit de matrice, on peut :*

1. Créer à la main quelque petite matrice et faire leur produit pour vérifier que tout fonctionne
2. Comparer avec l'algorithme naïf du calcul de produit de matrice
3. Vérifier de manière probabiliste que le résultat est bien le bon.

Developpement ?? *Vérification probabiliste du produit de matrice.*

3 Tests en boîte blanche

I Graphe de flot de contrôle

Pour un test en boîte blanche, on connaît le code, et on va vouloir générer des données d'entrées en fonction de ce code là.

Pour cela, on extrait du code le graphe de flot de contrôle.

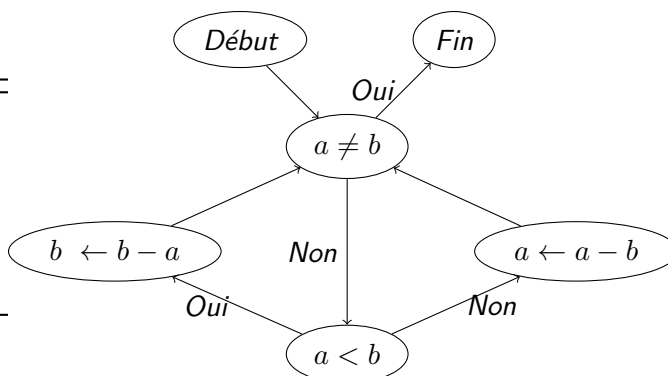
Définition 3.4 *Le graphe de flot de contrôle est un graphe où chaque boîte contient des lignes de codes, les boîtes sont reliés si on peut exécuter l'une puis l'autre.*

Exemple 3.9 *On prend l'exemple du pgcd pour $a, b \in \mathbb{N}^*$*

```

tant que  $a \neq b$  faire
  si  $a < b$  alors
     $b \leftarrow b - a$ 
  sinon
     $a \leftarrow a - b$ 
retourner  $a$ 

```



II Utilisation du graphe

On essaye alors de générer un jeu de données qui parcourt une bonne partie du graphe.

Par exemple, un jeu couvrant :

- Tous les nœuds (On veut un jeu de tests tel que tous les tests pris ensemble, chaque nœud du graphe est parcouru au moins une fois).
- Tous les arcs
- Tous les chemins

Commentaire 3.1 Si on veut aller plus loin, on peut aussi rajouter toutes les conditions décisions, toutes les p utilisations, etc... On peut alors rajouter un exercice proposant de montrer la hiérarchie entre ces tests.

Exemple 3.10 Sur l'exemple, $\{((1, 1), 1), ((1, 3), 3)\}$ ne couvre pas tous les nœuds quand $\{((1, 3), 3), ((3, 1), 3)\}$ couvre tous les nœuds et tous les arcs mais pas tous les chemins.

Remarque 3.5 Quand il y a une boucle, tous les chemins peut-être un critère infini. On peut alors se limiter aux chemins d'une certaine taille.

Remarque 3.6 Parfois les critères sont insatisfiables.

Remarque 3.7 Aucun de ces critères ne garantissent la validité d'un algorithme. Elles permettent simplement de vérifier que notre jeu de tests n'est pas trop lacunaire.

Developpement ?? Intérêts et insuffisances de ces critères

III Test exhaustif de condition

Idée 3.2 Une autre approche consiste à avoir un jeu qui satisfait ou invalide toutes les conditions de toutes les manières possibles.

Exemple 3.11 On voit l'utilité sur l'exemple suivant :

```

1 int max(int a, int b){
2   if(a > b || a == 500){
3     return a;
4   else
5     return b;
6 }
```

Pour détecter le problème (que `max` ne calcule pas le `max`), il faut des tests où on mets à vrai le premier `if` à cause de `a == 500`, donc des tests où `a` vaut 500.

4 Pratiques pour éviter d'avoir à déboguer

Dans la pratique, de bonne pratique de code sont très efficace pour éviter de passer trop de temps à debugger son code.

- ★ Compiler avec `-Wall` (activant tous les warnings, donnant beaucoup de bugs stupides)
- ★ Respecter la ponctuation et éventuellement utiliser un linter (de manière à rendre lisible le code par d'autres personnes)
- ★ Faire de la programmation défensive en utilisant `assert` par exemple

Leçon 4

Principe d'induction

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

1 Principe

I Définition

Définition 4.1 $(\mathcal{B}, (f_i))$ est une signature sur X si :

- $\mathcal{B} \subset X$ (appelé cas de base)
- $f_i : X^{\alpha(f_i)} \rightarrow X$ appelé constructeurs, d'arité $\alpha(f_i)$ avec f_i injectif et $\mathfrak{S}(f_i) \cap \mathfrak{S}(f_j) = \emptyset$ et $\mathfrak{S}(f_i) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ pour tout $i \neq j$

Commentaire 4.1 L'intérêt de cette définition est d'être rigoureux. Néanmoins le programme demande de se contenter de présenter des choses proches de ce que l'on rencontrera, or là c'est plus ou moins la version formelle de ce qui se passe en Ocaml. Donc même si ce cadre théorique n'est pas explicitement au programme, sa présence là est justifiée par sa proximité avec Ocaml

Remarque 4.1 On se contente souvent de dire que les constructeurs existent, sans donner leur définition. (de même pour les cas de bases, et pour X)

Exemple 4.1 On prend une constante Z et un constructeur d'arité 1 $Succ$

Exemple 4.2 On peut prendre les constructeurs \oplus , \ominus et \otimes avec $\alpha(\oplus) = 2$, $\alpha(\ominus) = 1$ et $\alpha(\otimes) = 2$ et comme cas de bases \mathbb{N} .

Définition 4.2 Un ensemble inductif est défini par une signature $(\mathcal{B}, (f_i))$:

1. Le plus petit ensemble contenant \mathcal{B} et stable par tous les f_i (définition par le haut) ou de manière équivalente
2. $\bigcup T_i$ où $T_0 = \mathcal{B}$ et $T_{n+1} = T_n \cup \bigcup_i f_i(T_n^{\alpha(f_i)})$ (définition par le bas)

Exemple 4.3 L'ensemble inductif défini par l'exemple 4.1 peut être une définition des entiers naturels

Exemple 4.4 Exemple : L'ensemble inductif \mathcal{A}_{simp} défini par l'exemple 4.2 est l'ensemble des expressions arithmétiques simplifiées.

Remarque 4.2 $\oplus(1, 1) \neq \otimes(1, 2) \neq \otimes(2, 1)$. On s'intéresse à l'expression et non au résultat.

Développement ?? Validité de la construction d'un ensemble inductif (remarque 4.1 et définition 4.2)

II Induction structurelle

On prendra maintenant $(\mathcal{B}, (f_i)_{i \in I})$ une signature.

Proposition 4.1 Soit E un ensemble inductif construit par $(\mathcal{B}, (f_i))$

Alors la donnée de fonction g_i (avec $\alpha(g_i) = \alpha(f_i)$ et $\mathfrak{S}(g_i) \subset \text{Dom}(g_j)$) et de $f(b)$ pour $b \in \mathcal{B}$ définit une unique fonction f sur E ayant la propriété :

$$\forall i \in I, \forall x_1, \dots, x_{\alpha(i)} \in X, f(f_i(x_1, \dots, x_{\alpha(i)})) = g_i(f(x_1), \dots, f(x_{\alpha(i)}))$$

Commentaire 4.2 Cette propriété est fondamentale, et justifie en partie (parce que là il ne faut pas un matching complet mais directement les constructeurs) la bonne définition des fonctions OcamL. D'où d'ailleurs les références à cette propriété dans la suite.

Exemple 4.5 Sur \mathcal{A}_{simp} , on peut définir $eval : \mathcal{A}_{simp} \rightarrow \mathbb{N}$ par

- $eval(a) = a$ pour $a \in \mathbb{N}$
- $eval(\oplus(a, b)) = eval(a) + eval(b)$
- $eval(\otimes(a, b)) = eval(a) \times eval(b)$
- $eval(\ominus(a)) = -eval(a)$

Théorème 4.1 (Induction structurelle) Soit E l'ensemble inductif défini par $(\mathcal{B}, (f_i)_{i \in I})$, et \mathcal{P} une propriété définie pour tout $x \in E$.

$$\text{Alors } \begin{cases} (i) & \forall b \in \mathcal{B}, \mathcal{P}(b) \\ (ii) & \forall i \in I, \forall x_1, \dots, x_{\alpha(i)}, (\forall j, \mathcal{P}(x_j)) \implies \mathcal{P}(f_i(x_1, \dots, x_{\alpha(i)})) \end{cases}$$

Remarque 4.3 La récurrence est un cas particulier dans le cas de la définition des entiers par l'exemple 4.3

Exemple 4.6 On montre par induction structurelle que $eval(e)$ pour $e \in \mathcal{A}_{simp}$ est multiple du pgcd des constantes apparaissant dans e

Définition 4.3 Un ordre bien fondé est un ordre où toute partie non vide admet un élément minimal (plus grand que personne)

Proposition 4.2 *L'ordre produit et l'ordre lexicographique d'ordres bien fondés sont bien fondés*

Exemple 4.7 \mathbb{N} avec l'ordre naturel est bien fondé, donc \mathbb{N}^k avec l'ordre produit ou lexicographique aussi.

Théorème 4.2 *Soit (A, \preceq) un ensemble muni d'un ordre bien fondé et \mathcal{P} une propriété sur A , alors $\forall x \in A, (\forall y \in A, y \preceq x \Rightarrow \mathcal{P}(y) \Rightarrow \mathcal{P}(x)) \Rightarrow \forall x, \mathcal{P}(x)$*

Remarque 4.4 *Cela étend le principe de récurrence forte.*

Définition 4.4 *Soit E l'ensemble inductif défini par $(\mathcal{B}, (f_i)_{i \in I})$
On définit l'ordre structurel \leq_s sur E comme la clôture transitive réflexive de $x_j \leq_s f_i(x_1, \dots, x_{\alpha(i)})$*

Proposition 4.3 \leq_s est une relation d'ordre bien fondé

Corollaire 4.1 *On peut alors réécrire l'induction structurelle comme une induction sur l'ordre structurelle*

Commentaire 4.3 *Si on manque de place, on peut mettre les ordres bien fondés en prérequis (mais alors écrire la formule dans le corollaire)*

III En OCaml

Commentaire 4.4 *On essaye de faire au maximum le lien entre les définitions formelles et OCaml*

Syntaxe 4.1 *En OCaml on peut créer un type représentant un ensemble inductif avec cette syntaxe :*

```
type t = Casdebase1 | Casdebase2 | ...
      | Constructeur1 of type11 * type12 * ....
      | Constructeur2 of type21 * tpye22 * ...
```

Où :

- *Casdebase* peut soit être un type déjà défini d'OCaml, soit une constante (nom commençant par une majuscule)
- *Constructeur* est une étiquette commencée par une majuscule
- *type_i* est un type OCaml (pouvant contenir *t*)

Exemple 4.8 *Pour définir les entiers de l'exemple 4.3, on peut écrire*

```
type entier = Zero | Succ of entier
```

Syntaxe 4.2 Pour gérer les types, on peut utiliser le filtrage comme pour les listes.

Exemple 4.9 Pour l'addition sur notre type entier, on peut écrire :

```
let rec ajouter x y = match y with
| Zero -> x
| Succ(z) -> ajouter (Succ(x)) z
```

Exemple 4.10 La validité de cette définition vient de la propriété 4.1

2 Structures de données inductives

I Les listes chaînées

En Ocaml on peut définir des listes d'entier simplement chaînés par

```
type liste = V | Cons of int * liste
```

Ainsi, une liste c'est soit une liste vide, soit un entier et le reste de la liste.

Remarque 4.5 Ici V est le cas de base, et $Cons$ le constructeur. $Cons$ est défini sur $\mathbb{N} \times \{\text{ensemble des listes}\}$ et non $\{\text{ensemble des listes}\}^2$. Cela est un raccourci d'OCaml, où en réalité on définit un constructeur pour chaque premier argument, et donc on construit non pas $Cons(x, l)$ mais $Cons_x(l)$.

Remarque 4.6 Cela correspond au type `int list` d'OCaml ;-)

Exercice 4.1 Définir inductivement la taille d'une liste chaînée

II Les arbres binaires

Exercice 4.2 Définir inductivement la taille d'une liste chaînée.

Définition 4.5 (Arbre binaires) Soit A un ensemble. On définit de manière inductive les arbres binaires sur A par :

- l'arbre vide E (cas de base)
- si $e \in A$ et g et d sont des arbres binaires, alors $\text{Noeud}(e, g, d)$ est un arbre binaire.

Implémentation 4.1 Ce qui en OCaml nous donne type `'a arbre = E | Noeud of 'a * 'a arbre * 'a arbre`

Exemple 4.11 La hauteur d'un arbre binaire se calcule alors inductivement par

```
let rec hauteur arb = match arb with
| E -> 0
| Noeud(e, g, d) -> 1 + max (hauteur g) (hauteur d)
```

Exercice 4.3 Prouver par induction structurelle la terminaison de la fonction hauteur

Exercice 4.4 Donner la définition inductive de la taille d'un arbre binaire (son nombre d'éléments)

III Les arbres généraux

Définition 4.6 Un arbre général est un noeud (la racine) et une liste d'arbre (ses fils)

On voudrait alors définir le type `arbre` par (pour les arbres d'entier)

```
type arbre = Noeud of int * arbre_liste
```

Il faut alors définir le type `arbre_liste`, par

```
type arbre_liste = Vide | Cons of arbre * arbre_liste
```

On remarque que chaque type a besoin de l'autre pour exister. On écrit alors

```
type arbre = Noeud of int * arbre_liste
and type arbre_liste = Vide | Cons arbre*arbre_liste
```

Remarque 4.7 On passe souvent cela sous le tapis grâce au polymorphisme qui définit des manières de construire des types et non des types directement

Commentaire 4.5 Dans la défense de plan, on peut parler ici des différentes définitions des arbres (par coinduction, avec une infinité de constructeur (pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ d'arité k , pour les arbres à k fils), par un constructeur `Ajout_fils` d'arité 2 où le premier argument est l'arbre sans son premier fils, et le dernier argument le premier fils (on en déduit les cas de bases))

3 Ensembles inductifs

I Formules propositionnelles

Définition 4.7 (formule propositionnelle) Soit V un ensemble de variables et la signature

- $\mathcal{B} = \{\top, \perp\} \cup V$
- le constructeur \neg d'arité 1
- les constructeurs \vee , \wedge et \rightarrow d'arité 2 (en forme infixe)

Les formules propositionnelles forment l'ensemble inductif défini par cette signature

Exercice 4.5 Défini inductivement le nombre de variables présent dans la formule

Définition 4.8 On appelle valuation (ou distribution de vérité) toute fonction $v : V \rightarrow \{0, 1\}$

Définition 4.9 (Evaluation d'une formule) Soit v une valuation. La fonction d'évaluation d'une formule $[\cdot]_v : F \rightarrow \{0, 1\}$ se définit inductivement par

- $[\top]_v = 1$
- $[\perp]_v = 0$
- $[x]_v = v(x)$ pour $x \in V$

- $[\neg F]_v = 1 - [F]_v$
- $[f_1 \wedge f_2]_v = \min([f_1]_v, [f_2]_v)$
- $[f_1 \vee f_2]_v = \max([f_1]_v, [f_2]_v)$
- $[f_1 \rightarrow f_2]_v = \begin{cases} 0 & \text{si } [f_1]_v = 0 \text{ et } [f_2]_v = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4.6 Définir l'équivalence entre formules et montrer par induction structurale que, à équivalence près, on peut ne garder que les constructeurs \neg et \vee

II Langages

Commentaire 4.6 Ici comme exemple on aurait aussi pu prendre les langages réguliers, cela est plus pertinent comme construction, mais nécessite d'avoir déjà les définitions de bases sur les langages. Et de plus trouver des inductions paraît non trivial

Définition 4.10 Soit Σ un ensemble (appelé alphabet) fini et non vides d'éléments (appelés lettres). On définit inductivement l'ensemble des mots sur Σ , Σ^* par la signature :

- ε (le mot vide) comme cas de base
- Si $a \in \Sigma$ et $w \in \Sigma^*$, $wa \in \Sigma^*$

Remarque 4.8 On aurait aussi pu prendre comme définition de Σ^* , $\bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$

Définition 4.11 La concaténation de deux mots $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ se définit inductivement comme :

- $\text{concat}(w_1, \varepsilon) = w_1$
- $\text{concat}(w_1, w_2.a) = \text{concat}(w_1, w_2).a$

Exercice 4.7 Montrer par induction structurale que $\text{concat}(w_1, \text{concat}(a, w_2)) = \text{concat}(w_1.a, w_2)$

Leçon 5

Implémentations et applications des piles, files et files de priorité

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Commentaire 5.1 Comme il y a beaucoup à dire, et que le titre ne mentionne pas d'aspects théoriques sur les structures, on suppose ici les structures déjà définie dans le cours. Ainsi, on rappellera uniquement, pour uniformisation les méthodes caractéristiques. On se concentre ainsi sur les implémentations et les applications.

1 Les piles

Rappel : Une pile est une structure de données avec les méthodes `vide`, `est_vide`, `empiler`, `depiler`.

I Implémentation par listes

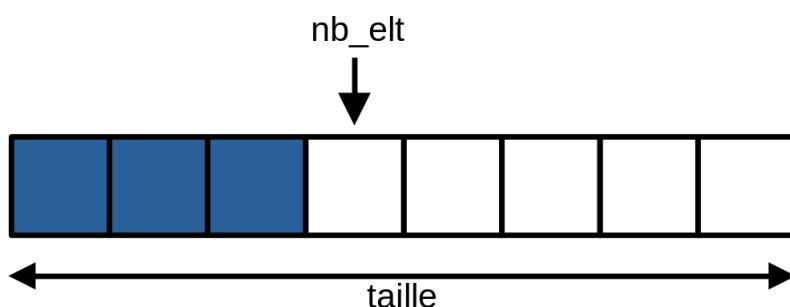
Cette manière est immédiate et donc naturelle.

Exercice 5.1 (Au tableau avec participation des élèves) A quoi correspondent les opérations de bases de la pile sur une liste (à l'oral et éventuellement avec le dessin d'une liste simplement chaînés pour montrer les modifications).

Les listes étant naturelles en OCaml, nous les implémenterons de cette manière en Ocaml. Néanmoins cette pile est immuable.

II Implémentation par tableaux

La deuxième manière est en utilisant un tableau.



Idée 5.1 Pour cela, on utilise un indice `nb_elt` qui nous indiquera à quelle case du tableau correspond le sommet de la pile, les cases précédentes du tableau contenant les autres éléments empilés.

Implémentation 5.1 On doit soit alors utiliser un tableau de taille fixe (et donc connaître à l'avance le nombre max d'éléments dans la pile)

Exercice 5.2 Quels sont les inconvénients de cette implémentation ? (le fait qu'il faut soit utilisé un tableau dynamique, soit connaître à l'avance la taille maximale de la pile)

Implémentation 5.2 en C en TP avec les déclarations déjà faites, vide également, et le corps des autres fonctions à remplir

Remarque 5.1 Les problèmes sont exactement similaires à ceux de l'implémentation d'une liste par un tableau. Cela vient de la proximité entre une liste et une pile.

Exercice 5.3 Laquelle de ces deux implémentations est mutable ? Immuable ?

III Complexité

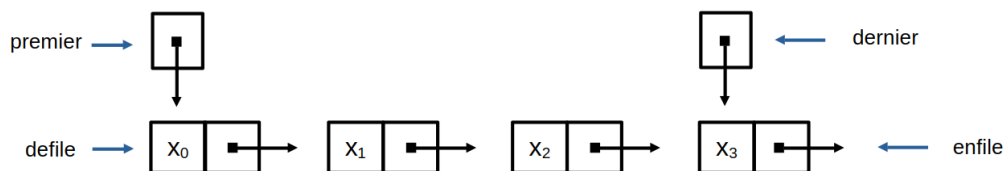
Toutes ces opérations sont en $O(1)$. De plus sa complexité spatiale n'est, si l'implémentation est bien effectuée, que $O(\text{hauteur maximale de la pile})$

2 Les files

Rappel : Une file est une structure de données avec les méthodes `vide`, `est_vide`, `enfiler`, `defiler`.

I Par une liste chaînée

Idée 5.2 On stocke les entrées dans une liste et on à l'aide de pointeurs le début et la fin de la file.



Implémentation 5.3 Ainsi, ajouter des éléments consiste seulement à enlever l'élément du début et à passer début sur l'élément suivant de la liste et enlever un élément consiste simplement à ajouter un élément à la fin de la liste et à y faire pointer le pointeur fin.

Exercice 5.4 Quelle est l'intérêt des pointeurs fin et début ? (fin pour trouver la fin de la liste en $O(1)$, début pour repérer la liste, équivalent à garder le premier élément de la file)

Exercice 5.5 Comment encode-t-on la file vide ?

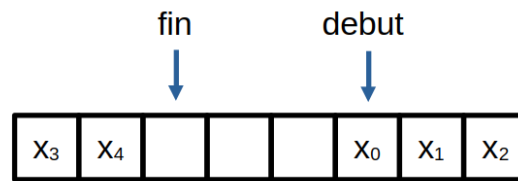
II Par un tableau

Idée 5.3 Les éléments sont stockés consécutivement dans un tableau avec deux indices début et fin indiquant dans le tableau le début de la liste et la fin de la liste.

Exercice 5.6 Quelle est la complexité de chaque opération élémentaire ?

Problème : La complexité spatiale est en $O(\text{nombre de enfile})$ alors que l'on souhaiterait avoir $O(\text{longueur maximale de la file})$

Idée 5.4 Pour cela, si l'on connaît à l'avance une borne sur cette longueur maximale, on peut utiliser des indices modulo cette borne (et ainsi utiliser un tableau «circulaire»)



Ces deux implémentations sont mutables.

III Par deux listes mais de manière immuable

Idée 5.5 Il est possible de créer efficacement une telle structure en utilisant uniquement deux piles :

- La première contiendra les éléments prêts à sortir
- La deuxième contiendra les éléments que l'on vient de rajouter

Remarque 5.2 En choisissant efficacement quand on les fait passer de l'un à l'autre, on peut avoir une structure efficace.

Proposition 5.1 Il existe une implémentation de la structure de file pour laquelle la complexité temporelle de chaque opération est en $O(1)$ amorti

Développement Implémentation d'une file PAPS avec deux listes et (au choix) introduction à la complexité amortie / implémentation par une liste doublement chaînées

IV Pour aller plus loin

Une liste doublement chaînée peut, au pris d'une lourdeur relative dans l'implémentation, fournir immédiatement les opérations de la pile et de la file combinée en $O(1)$

3 File de priorité

Rappel : Une file de priorité est une structure de donnée ayant les méthodes `vide`, `est_vide`, `insérer`, `extraire_min`

I En théorie

Idée 5.6 Nous implémenterons les files de priorité à l'aide de tas min.

Définition 5.1 Un tas min est un arbre binaire presque complet où chaque noeud a un attribut plus petit que ceux de ses fils

L'insertion On ajoute l'élément à l'endroit au seul endroit qui préserve la structure de tas (petit dessin). Ensuite, on l'inverse successivement avec son père, si il est plus petit que lui.

Théorème 5.1 *cet algorithme préserve la structure de tas min*

Récupérer l'élément minimum On enlève la racine, on prend le dernier élément du tas, on le met à la position de la racine, et tant qu'un fils est plus petit que lui, on l'échange avec son fils le plus petit.

Théorème 5.2 *Cet algorithme préserve la structure de tas.*

Théorème 5.3 *Toutes ces opérations sont en $O(\log(n))$ où $\log(n)$ est le nombre d'éléments dans le tas.*

Commentaire 5.2 *Cette application n'est pas avec les autres car assez immédiate*

Application 5.1 *Tri par tas en $O(n \log(n))$*

II En pratique

Idée 5.7 *Pour implémenter de tels arbres, on peut les implémenter comme des structures récursives, en gardant le chemin jusqu'à la dernière feuille sous forme de listes de droite/gauche*

Exercice 5.7 *Expliciter l'algorithme permettant de mettre à jour le chemin*

Commentaire 5.3 *C'est un algorithme d'addition binaire, où quand on doit rajouter un 1 (droite), on rajoute un 0 (gauche). Donc c'est cet algorithme avec $111+1 = 0000$ et $0000-1 = 111$ (et le nombre de 0 qui importe)*

Exercice 5.8 *Implémenter cette structure en Ocaml*

Idée 5.8 *Sinon, on peut l'implémenter comme un tableau où le fils de l'élément à l'indice i , sont stockés aux indices $2i + 1$ et $2i + 2$.*

Exercice 5.9 *Faire cette implémentation en C*

4 Applications aux graphes

Algorithme 5.1 : Parcours de graphe

```

a_faire ← vide()
a_faire.ajouter(s0)
tant que a_faire n'est pas vide faire
    u ← a_faire.extraire()
    si u n'a pas encore été visité alors
        pour v voisin de u faire
            a_faire.ajouter(v)

```

Si *a_faire* est une pile, on fait un parcours en profondeur et si *a_faire* est une file PAPS, on fait un parcours en largeur.

Algorithme 5.1 (Algorithme de Dijkstra)

On cherche la distance dans un graphe pondéré d'un sommet s à chaque autre sommet.

On fait le parcours de graphe avec une file de priorité pour a_faire . On garde un tableau des distances, que l'on met à jour à chaque étape. La priorité dans la file est la distance que l'on a au moment de l'insertion, et on ajoute toujours les voisins non encore visités.

On obtient alors les plus courts chemins.

5 Applications systèmes

Ces structures sont utilisés dans de nombreuses applications à bas niveau.

I Pile d'appel

Quand on exécute un programme avec des appels successifs à des fonctions, de nouvelles variables sont créées, des emplacements pour les arguments, etc..., mais à la fin de la fonction, on doit restaurer l'environnement précédent.

Idée 5.9 *Pour cela, à chaque appel de fonctions, on empile l'état actuel sur une pile, et à chaque retour de fonction, on restaure l'état au sommet de la pile (que l'on dépile).*

Commentaire 5.4 *Suivant la place (notamment si on ne prend pas tous les exemples), on peut rajouter un schéma*

II Ordonnancement

Pour gérer le parallélisme, un ordonnanceur doit décider, quel processus doit être exécuté.

Pour cela on peut par exemple :

- stocker les processus dans une file de priorité pour que les processus les plus importants soient exécutés en premier.

Exemple 5.1 *avec comme clé, la date butoire de fin d'exécution, on exécute en premier les plus urgents*

- Mettre les processus dans une file, en prendre le premier élément, l'exécuté pendant un certain temps, puis le remettre en queue de file. C'est l'algorithme du tourniquet, qui garantie que tous les processus s'exécuteront un jour.

III Tampon

Dès que l'on a deux programmes dont la sortie de l'un est branché sur l'entrée de l'autre, et qui ne travaille pas à la même vitesse, on doit mettre un tampon entre les deux. On utilise alors une file PAPS pour stocker les données en attendant que le deuxième programme les récupère.

Exemple 5.2 *On reçoit des paquets du réseau. On doit les récupérer. On les mets dans un tampon, le temps que le programme viennent les traiter. On les restitue alors dans l'ordre d'arrivée grâce à la file.*

Commentaire 5.5 *Par manque de place, on peut éventuellement passer sur certains exemples, et éventuellement rajouter plein de schéma un peu partout dans la leçon. De plus, on peut évoquer à l'oral la vraie application dans un cours, surtout pour les piles et les files, qui seraient l'application pédagogique d'illustrer la différence type abstrait et structure sous-jacente, et donc ce que sont les méthodes sur les structures et la modularité de tout cela.*

Leçon 6

Implémentations et applications des ensembles et des dictionnaires

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

1 Dictionnaire : type abstraits et motivation

Définition 6.1 (Dictionnaire) Soit X un ensemble d'éléments appelés valeurs, et K un ensemble d'éléments appelés clés. Un dictionnaire D est une structure de données abstraites ayant les trois opérations :

- $Insérer(D, k, x)$: insère le couple (k, x) dans D , en écrasant un éventuel couple (k, x') préexistant.
- $Recherche(D, k)$: renvoie la valeur de x telle que (k, x) est dans D , si elle existe (peut renvoyer une valeur pas dans X sinon)
- $Supprime(D, k)$ supprime un éventuel couple (k, x) présent dans D .

Exemple 6.1 annuaire téléphonique : les clefs sont les noms des personnes, les valeurs leurs numéros de téléphone

Remarque 6.1 Les dictionnaires sont aussi appelés tableaux associatifs

Application 6.1 Si on a une base de données de personnes, identifiés par un pseudonyme, on peut stocker leur informations dans un dictionnaire.

Remarque 6.2 C'est ce qui se passe dans une base de données

Implémentation 6.1 (naive) On pourrait stocker tous les éléments dans une liste, sans ordre particulier

Exercice 6.1 Implémenter alors les fonctions de bases. Quelles sont leur complexité ?

2 Implémentation

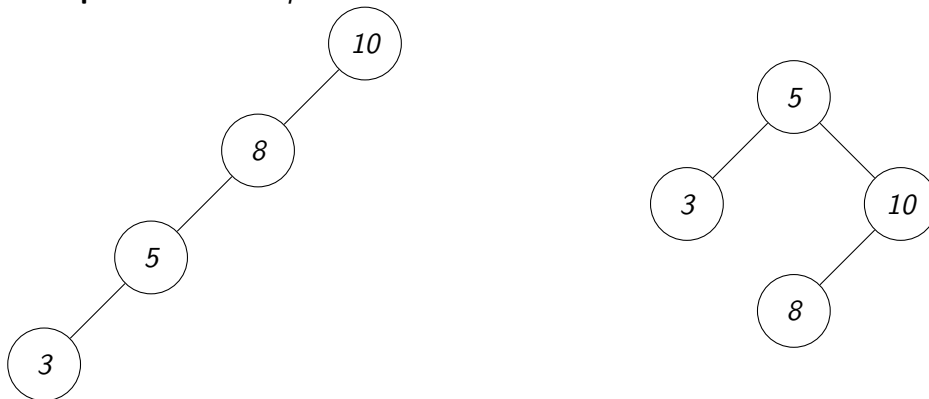
I Par des arbres

A Arbres binaires de recherche (ABR)

Définition 6.2 (ABR) Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire dont les éléments sont munis d'un ordre total et où, pour chaque sous-arbre $N(g, x, d)$, l'élément x est supérieur à tous les éléments de g et inférieur à tous les éléments de d .

Implémentation 6.2 On peut implémenter un dictionnaire à l'aide d'un ABR à condition que l'ensemble des clefs soit muni d'un ordre total (On insère les couples (clé, valeur) et l'ordre est sur les valeurs)

Exemple 6.2 Deux implémentations du même ABR :



Insertion Dans un ABR, on insère un élément x en descendant depuis la racine, en prenant le fils gauche ou le fils droit selon si x est plus petit ou plus grand que la racine courante, et en créant un nouveau nœud étiqueté par x lorsque l'on ne peut plus avancer.

Recherche Elle se fait de manière analogue

Suppression Lorsque le nœud est une feuille ou si le nœud n'a qu'un enfant, alors la transformation est simple. Par contre, si le nœud possède deux enfants, alors il faut retirer le minimum du sous-arbre droit (ou le maximum du sous-arbre gauche) pour le remplacer.

Exercice 6.2 Implémentation des ABR en OCaml

Proposition 6.1 Soit A un ABR à n nœuds et de hauteur h . La recherche, l'insertion et la suppression se font dans le pire cas en $O(h)$ comparaisons. Or un ABR peut être déséquilibré : la hauteur est alors en $O(n)$

B Arbres rouge-noir (ARN)

Définition 6.3 Un arbre rouge noir (ARN) est un ABR où chaque nœud porte une couleur rouge ou noir, et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- la racine est noire
- les potentiels fils d'un nœud rouge sont noirs
- pour chaque nœud, tous les chemins menant de ce nœud à une feuille ont le même nombre de nœuds noirs.

Proposition 6.2 Les ARN sont équilibrés ($h = O(\log n)$)

Corollaire 6.1 Dans un ARN, on peut effectuer les opérations d'insertion, de recherche et de suppression en $O(h)$, ie $O(\log n)$.

Developpement Preuve de la propriété 6.2 et présentation de l'insertion dans un ARN

II Tables de hachage

Idée 6.1 Le but ici va être de stocker nos données dans un tableau (d'où le nom *tableau associatif*). Cela se fait donc en deux étapes :

- Associer à notre données un nombre (pas trop grand) (appelé *hachage*) par une fonction appelée *fonction de hachage*.
- Avoir un tableau avec une case par hachage possible, où l'on stocke la donnée

A Fonction de hachage

Définition 6.4 Une fonction de hachage est une fonction $h : K \rightarrow \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ (avec $m \ll |K|$)

Proposition 6.3 Une fonction de hachage a la propriété du hachage parfait si pour $x \neq y \in K$, $\mathbb{P}(h(x) = h(y)) = \frac{1}{m}$

Remarque 6.3 Le hachage parfait veut dire que les valeurs de hachage sont comme pris au hasard dans $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$. Néanmoins, comme on veut que $h(x)$ vaille toujours la même chose, on ne prend pas de fonctions aléatoires.

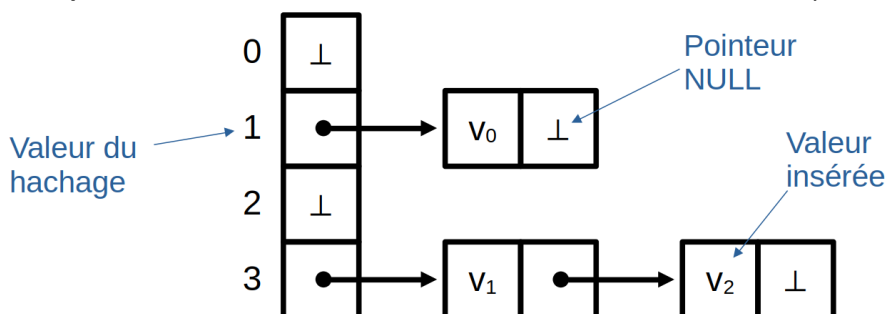
Exemple 6.3 On choisit un flottant A . On interprète les bits de données de la structure comme un entier x (en les collant). On prend alors $h(d) = \lfloor A * x \rfloor \bmod m$

B Table de hachage

Il y a trois étapes dans le stockage dans un tableau :

1. Hacher la valeur et la mettre dans sa case dans le tableau
2. Si la case était déjà occupée (collision), stocker la donnée dans une structure annexe
3. Si le tableau est trop plein, augmenter m (et donc recopier toutes les données).

Exemple 6.4 Schéma où la structure annexe est une liste chaînée pour chaque case



Commentaire 6.1 Si on a la place on peut écrire la remarque, sinon le dire à l'oral que si les abr nécessite un ordre total, la table de hachage nécessite de sérialiser ou de donner directement le hachage

Commentaire 6.2 Normalement là on pourrait parler de complexité, mais on considère que le tableau 3 suffit.

3 Ensembles

Définition 6.5 Un ensemble est un dictionnaire dans lequel il n'y a pas de clefs. La fonction recherche renvoie donc un booléen qui indique la présence ou non de l'élément.

Remarque 6.4 On déduit alors de l'implémentation des dictionnaires, l'implémentation des ensembles

Commentaire 6.3 Cette remarque justifie que l'on parle si brièvement des ensembles, et si tard dans la leçon. Beaucoup des choses sur les ensembles se déduisant de celles des dictionnaires

Idée 6.2 Comme ce sont des ensembles on pourrait également vouloir des opérations ensemblistes comme l'union, l'intersection, etc...

Implémentation 6.3 On peut faire ces opérations sur les structures précédentes en les parcourant (pour l'union, on insère tous les éléments de l'un dans l'autre par exemple)

Remarque 6.5 Ces opérations réhabilite l'idée de la liste triée

Récapitulatif des complexités :

| Structure | Insertion | Suppression | Recherche | union | intersection |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------|---|
| liste | $O(n)$ | $O(n)$ | $O(n)$ | $O(n \times m)$ | $O(n \times m)$ |
| liste triée | $O(n)$ | $O(n)$ | $\log n$ | $O(n + m)$ | $O(n + m)$ |
| ARN | $O(\log n)$ | $O(\log n)$ | $O(\log n)$ | $O(n + m) \log(n + m)$ | $O(\min(n, m) \log(\max(n, m)))$ |
| Table de hachage | $O(n)$ $O(1)$ moy. | $O(n)$ $O(1)$ moy. | $O(n)$ $O(1)$ moy. | $O(n \times m)$ $O(n + m)$ moy. | $O(n \times m)$ $O(\min(n, m))$ moy. |

Exercice 6.3 Choisir des implémentations en C et les comparer. Si l'on traite les listes triées, ouverture sur les skip listes

4 Application

I Dictionnaire d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe. (où $S = \llbracket 1, n \rrbracket$)

On peut représenter G par un tableau de dictionnaire D tq $D[u]$ est un dictionnaire contenant les voisins de u

intérêts : On a les avantages de la matrice d'adjacence (on détecte rapidement si il y a une arête) et des listes d'adjacence (stockage en $\text{—}A\text{—}$ et obtention de tous les voisins linéairement).

Exemple 6.5 Sur un graphe de personnes se connaissant, on sait si A connaît B rapidement, mais on n'a pas à stocker tous les fausses des couples de personnes en se connaissant pas.

II Mémoïsation

Supposons que l'on ait une fonction du type

```
fonction (f_args):
    corps de f
    return x
```

Il se peut que l'on ait beaucoup d'appels à f sur les mêmes arguments, comme des fonctions récursives en programmation dynamique. En s'inspirant de cette dernière, on peut alors ne faire qu'une fois les appels sur chaque argument grâce à un dictionnaire :

```
fonction f(args):
    Si args est dans dictionnaire:
        renvoyer dictionnaire[args]
    Sinon:
        corps de f
        dictionnaire[args] = x
        renvoyer x
```

III Autres applications

Commentaire 6.4 On peut dire à l'oral que en gros, utiliser un dictionnaire est un peu équivalent à $f : K \rightarrow \llbracket 1, K \rrbracket$. (c'est plus que simplement le fait logique que, par un tableau classique, c'est équivalent)

Les dictionnaires et les ensembles servent dès que l'on veut accéder rapidement à un élément dont la structure n'est pas un entier.

Exemple 6.6 En algorithmique du texte, pour associer des valeurs à des chaînes de caractère (Huffman, Boyer-Moore)

Exemple 6.7 Quand on fait un parcours de graphe dont les sommets ne sont pas $\llbracket 1, n \rrbracket$ on peut utiliser un ensemble pour savoir quels éléments on a déjà parcouru.

Commentaire 6.5 On peut soit insister à l'oral sur cet exemple, soit en faire une sous partie, du fait que c'est une application pour les ensembles

Mais on peut les retrouver également dans beaucoup de domaines comme en bases de données, et dès que l'on manipule un nombre faible de valeur comparés à l'ensemble des valeurs possibles.

Développement : Amélioration du tri par comptage par l'usage de dictionnaires.

Leçon 7

Accessibilité et chemins dans un graphe. Applications

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

1 Définition

Commentaire 7.1 Les applications sont éparpillées tout le long de la leçon, et relativement peu développer, donc il peut-être rentable des les souligner pendant la défense de plan.

Définition 7.1 (chemin) Dans un graphe orienté G (resp. non orienté) on appelle chemin de longueur λ une suite de $(\lambda + 1)$ sommets $(s_0, s_1, \dots, s_\lambda)$

Remarque 7.1 Par convention, on dit qu'il y a un chemin de longueur 0 de tout sommet vers lui-même.

Remarque 7.2 Dans un graphe non-orienté, les chemins sont aussi appelés chaînes.

Application 7.1 Dans un graphe de flot de contrôle, le critère tous les chemins consiste à trouver des tests qui font tous les chemins possibles du graphe

Commentaire 7.2 Une première application, dont on ne parle pas beaucoup plus parce que ca a pas grand chose a voir. Donc les chemins servent là, mais la théorie derrière n'est pas intéressante par la théorie des graphes. Illustre simplement la diversité de l'utilisation des graphes.

Commentaire 7.3 On peut mentionner que ca fait déjà une première application

Définition 7.2 (chemin élémentaire) Un chemin est dit élémentaire s'il ne contient pas plusieurs fois le même sommet.

Commentaire 7.4 Par manque de place, cette définition peut être enlevé

Définition 7.3 (circuit/cycle) Dans un graphe orienté (resp. non orienté), un chemin (s_0, \dots, s_λ) dont les λ arcs (resp. arêtes) sont distincts deux à deux et tels que $s_0 = s_\lambda$, est un circuit (resp. un cycle).

Exemple 7.1 On dit qu'un circuit est hamiltonien si il passe par tous les sommets une et une seule fois. Décider de l'existence d'un tel circuit dans un graphe est NP-complet (i.e. dur)

Exercice 7.1 On dit qu'un graphe non orienté est Eulérien s'il existe un cycle passant par chaque arête exactement une fois. Montrer qu'un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Commentaire 7.5 Ces deux choses là peuvent être présenter comme des formes d'applications, du moins d'application des définitions (il semble important que la NP-complétude de quelque chose soit mentionné dans cette leçon)

Définition 7.4 (accessibilité) Étant donné un graphe G (orienté ou non) et deux sommets s et t , on dit que t est accessible depuis s s'il existe un chemin allant de s à t dans G .

2 Accessibilité

I Tri topologique

Définition 7.5 (tri topologique) Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$, on dit que $\sigma : S \rightarrow [1, |S|]$ est un tri topologique si $(s, t) \in A \implies \sigma(s) < \sigma(t)$

Corollaire 7.1 Soit σ un tri topologique sur G . Pour $s, t \in S$, si il existe un chemin de s à t , alors $\sigma(s) \leq \sigma(t)$

Proposition 7.1 G est acyclique si et seulement si G admet un tri topologique.

Démonstration pour le sens direct. On montre par l'absurde par récurrence qu'un graphe acyclique a un sommet source.

On montre par récurrence la proposition sur $|S|$

□

Algorithme 7.1 Construction d'un tri topologique

- Créer une pile vide

- Faire un parcours en largeur postfixe de G en appliquant la fonction empile
- Renvoyer la pile

Application 7.2 Ordonnancement de tâches

Définition 7.6 Soit $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ un ensemble de tâches d'un ordinateur et $C = T^2$ un ensemble de contraintes ($(t_i, t_j) \in C$ veut dire que t_i doit être fait avant t_j). Un ordonnancement de ces tâches est un ordre d'exécution de ces tâches.

Proposition 7.2 On peut trouver un ordonnancement en temps linéaire

Démonstration. On prend le graphe (T, C) et on fait un tri topologique. □

II Connexité

Proposition 7.3 La relation «il existe un chemin de s à t et de t à s » est une relation d'équivalence.

Exercice 7.2 Montrer que le graphe quotienté par cette relation d'équivalence est acyclique

Commentaire 7.6 Ici on introduit le DAG des classes des composantes (fortement) connexes. On peut néanmoins dire que suivant le niveau de la classe, il est très probable que le terme quotienté ne soit pas maîtrisé. Donc la on le met par concision, au cas où il aurait déjà été vu en maths (hors programme en maths), mais en vrai on pourrait pérorer et faire des définitions. De plus la c'est un plan, donc on dit ce qu'on ferait dans l'exercice, pas tout l'énoncé rigoureux.

Définition 7.7 Dans un graphe non orienté (resp. orienté), les classes d'équivalence de cette relation sont appelées composantes connexes (resp. fortement connexes).
Si il n'y a qu'une seule classe, le graphe est dit connexe (resp. fortement connexe)

Commentaire 7.7 On prend ça comme déf et non pas la propriété suivantes en ayant défini connexe comme un chemin de tous le monde à tout le monde, pour avoir une définition plus explicites et naturelles que de passer par la maximalité. Néanmoins, cela nécessite l'abstraction de la classe d'équivalence (vue en maths). Si la classe est faible, on peut faire tout ça plus avec les mains.

Exercice 7.3 Dans un graphe connexe, deux chemins élémentaires maximaux ont un nœud en commun.

Proposition 7.4 Une composante connexe (resp. fortement connexe) est un sous-graphe connexe (resp. fortement connexe) maximal.

Algorithme 7.2

Algorithme 7.1 : Calcul des composantes connexes (cas non orienté)

tant que un sommet n'est pas visité **faire**

 Créer une nouvelle composante connexe

 Parcourir le graphe des sommets non visités depuis un sommet v non visité en ajoutant à la composante tous les sommets que l'on croise

Pour les composantes fortement connexes, il faudra plus qu'un simple parcours.

Algorithme 7.3

Algorithme 7.2 : Algorithme de Kosaraju

Appliquer l'algorithme de construction d'un tri topologique (même si le graphe a des cycles)

Prendre G^T le graphe transposé de G (i.e., (u, v) devient (v, u)) **pour** i allant de 1 à n **faire**

 Si $\sigma(i)$ n'a pas déjà été visité

 Créer une nouvelle composante fortement connexe

 Visiter G^T depuis $\sigma(i)$ en ajoutant les sommets visités non encore attribués

Proposition 7.5 Cet algorithme construit les composantes fortement connexes en temps linéaire

Définition 7.8 Le problème 2-SAT est le problème de savoir si étant donné n variables x_1, \dots, x_n et p clauses C_1, \dots, C_p de taille 2 sur x_1, \dots, x_n , $\varphi = \bigwedge_{i=1}^p C_i$ est satisfiable

Developpement : Résolution en temps linéaire de 2-SAT.

3 Plus court chemin

Définition 7.9 (graphe pondéré) Un graphe pondéré est un graphe $G = (S, A)$ muni d'une fonction de poids $w : A \rightarrow \mathbb{Z}$.

Le poids d'un chemin est alors défini comme la somme des poids des arêtes qui le compose.

Remarque 7.3 On peut étendre w à S^2 en posant $w(u, v) = +\infty$ lorsque $(u, v) \notin A$.

Définition 7.10 Dans un graphe G , un plus court chemin (pcc) de u à v ($u, v \in S$) est un chemin de poids minimal de u à v

Remarque 7.4 Si les poids sont unitaires, on peut trouver le pcc entre deux sommets u et v en faisant un parcours en largeur depuis u .

Commentaire 7.8 On considère les parcours déjà vu (servant dans bien d'autres contextes que les chemins dans les graphes). Ici on fait simplement le lien, et on illustre la notion. On pourrait également le faire sur un exemple au tableau, et essayer de le faire deviner aux élèves (lien entre différentes parties du cours)

I D'un sommet à tous les autres

Lorsque la fonction de poids est à valeur dans \mathbb{N} , on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Algorithme 7.3 : $\text{dijkstra}(G, S)$

```

distance ← tableau de taille |S| initialisé à  $+\infty$ 
distance[s] ← 0
F ← FilePriorite()
Inserer(F, s, 0)
tant que  $\neg \text{estVide}(F)$  faire
    u, du ← ExtraireMin(F)
    pour  $v \in N(u)$  faire
        d ← du + w(u, v)
        si  $d < \text{distance}[v]$  alors
            si  $\text{distance}[v] = +\infty$  alors
                Inserer(F, v, d)
            sinon
                DiminuerPriorite(F, v, d)
                distance[v] ← d
retourner distance

```

Algorithme 7.4

Proposition 7.6 L'algorithme de Dijkstra réalise au plus $|S|$ appels à *Inserer* et *ExtraireMin*, et $|A|$ appels à *DiminuerPriorite*.
Donc avec un tas min, on obtient $O(|A| \times \log |S|)$

Remarque 7.5 Si la structure d'entrée est une matrice d'adjacence, on peut faire l'algorithme en $O(n^2)$ sans structure particulière pour F .

Remarque 7.6 Lorsque la fonction de poids est à valeur dans \mathbb{Z} et que le graphe ne contient aucun circuit absorbant, on peut utiliser l'algorithme de Bellman-Ford.

Application 7.3 Détection des cycles absorbants.

Remarque 7.7 Si l'on souhaite seulement le plus court chemin entre deux points, on peut utiliser l'algorithme A^* (Dijkstra + heuristique du chemin restant).

II De tous les sommets à tous les sommets

Lorsque le graphe ne contient aucun cycle absorbant, l'algorithme de Floyd Warshall calcule les plus courts chemins entre toute paire de sommets de $S = \{1, \dots, n\}$ par programmation dynamique.

★ **Sous-problèmes** : $d^{(k)}(i, j)$ la distance du pcc de i à j avec seulement $\llbracket 1, k \rrbracket$ comme sommets intermédiaires

★ **Relation de récurrence**

$$\begin{aligned} d^{(0)}(i, j) &= w(i, j) \\ d^{(k+1)}(i, j) &= \min(d^{(k)}(i, j), d^{(k)}(i, k) + d^{(k)}(k, j)) \end{aligned}$$

★ **Résolution** : On résout sur S^2 à k croissant

Proposition 7.7 Floyd Warshall est en $O(n^3)$

Remarque 7.8 Si les poids sont positifs, appliquer dijkstra à chaque sommet nous donne $O(n \times |A| \times \log n)$

Remarque 7.9 Cette algorithme utilise une matrice d'adjacence (algorithme centralisé)

Algorithme 7.5 Si on a des listes d'adjacence (algorithme décentralisé/distribué), on peut utiliser l'algorithme de Bellman Ford

Application 7.4 Routage des paquets d'un réseau par le protocole IP avec l'algorithme de Bellman Ford.

Developpement : Presentation et terminaison de l'algorithme de Bellamn Ford.

Commentaire 7.9 On a fait une leçon sur les graphes, sans aucun dessin de graphes. En vrai, il pourrait y en avoir sur des exemples, et puis les schémas ne sont pas absolument nécessaires pour illustrer la plupart des concepts, dont surtout la formalisation est importante (la def d'un chemin est explicite).

Leçon 8

Algorithme de tri. Exemple, Complexité et Applications

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

1 Introduction

Définition 8.1 Un algorithme de tri prend en entrée une liste d'éléments E muni d'un ordre total \leq (mais dont on peut se passer de l'antisymétrie) et renvoie une liste S telle que :

1. elle contient exactement les éléments de E
2. les éléments de S apparaissent dans l'ordre croissant

Application 8.1 Pourquoi trier ? Cela permet de simplifier des opérations (min, max, recherche, etc...)

Exercice 8.1 Chercher à la main un mot dans une liste triée et non triée.

Commentaire 8.1 On peut faire cet exercice en seconde. Avec éventuellement le fait de comparer deux listes de mots. Tout ça pour voir l'intérêt du tri. Ensuite on peut leur demander comment faire pour trier, permettant de faire émerger des algorithmes sans les formalismes nécessaires. Et suivant le format des mots, on obtiendra probablement des choses différentes (une liste écrite sur un papier -> tri par sélection, des cartes avec les mots -> tri par insertion, tri à bulle, voir même du tri par paquet).

Ainsi on peut faire de l'informatique sans l'écueil de l'apprentissage de la syntaxe python qui bloque beaucoup d'élèves.

Définition 8.2 (Propriétés des tris)

- en place : Utilise $O(1)$ espace en plus de l'espace des données d'entrées

- stable : Si $E[i] \leq E[j]$ et si $E[j] \leq E[i]$, avec $i < j$, dans S , $E[i]$ apparaîtra avant $E[j]$
- en ligne : on peut trier les données même si elles arrivent au fur et à mesure
- parallélisable : on peut diviser le travail sur plusieurs fils.

2 Tri quadratiques

I Tri par sélection

Algorithme 8.1 : *Tri_par_selection*(E)

```

 $S \leftarrow []$ 
pour  $i$  allant de 1 à  $|E|$  faire
  Extraire  $mini$ , le minimum de  $E$ 
  Ajouter  $mini$  à la fin de  $S$ 
retourner  $S$ 
  
```

Exemple 8.1 $E = [4, 3, 6, 1]$

| i | E | m | S |
|----------|----------------|----------|----------------|
| \times | $[4, 3, 6, 1]$ | \times | $[]$ |
| 0 | $[4, 3, 6]$ | 1 | $[1]$ |
| 1 | $[4, 6]$ | 3 | $[1, 3]$ |
| 2 | $[6]$ | 4 | $[1, 3, 4]$ |
| 3 | $[]$ | 6 | $[1, 3, 4, 6]$ |

 $S = [1, 3, 4, 6]$

Commentaire 8.2 Cet exemple peut être remplacé par simplement : «Exemple : mettre un exemple d'exécution de l'algorithme» si on manque de place

Proposition 8.1

- ★ *Terminaison* : l'algorithme n'utilise que des boucles bornées
- ★ *Correction* : Invariant de boucle « S est trié et contient les i plus petits de E »
- ★ *Cout* : environ $|E|^2$

Proposition 8.2 Le tri par sélection est stable (si on extrait le premier min) mais ni en ligne, ni en place, ni facilement parallélisable

Exercice 8.2 Réécrire le tri pour qu'il soit en place. Qu'advient-il de la stabilité ?

II Tri par insertion

Algorithme 8.2 : *Tri_par_insertion*

```

pour  $i$  allant de 0 à  $|E| - 1$  faire
   $v \leftarrow E[i]$ 
   $j \leftarrow i - 1$ 
  tant que  $j > 0$  et  $E[j] > E[j + 1]$  faire
    Échanger  $E[j]$  et  $E[j + 1]$ 
     $j \leftarrow j - 1$ 
retourner  $E$ 
  
```

Proposition 8.3 L'algorithme 8.2 est stable, en place et en ligne.

Remarque 8.1 Il est difficilement parallélisable

Exercice 8.3 Quel est la complexité de cet algorithme

III Recherche Dichotomique

Algorithme 8.3 : *Recherche_dichotomique*(E, x)

```

si  $|E| = 0$  alors
  retourner Faux
sinon
   $a \leftarrow 0, b \leftarrow |E| - 1, m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$ 
  tant que  $E[m] \neq x$  et  $(b-a) > 0$  faire
    si  $E[m] < x$  alors
       $a \leftarrow m + 1$ 
    sinon
       $b \leftarrow m - 1$ 
       $m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$ 
  si  $E[m] = x$  alors
    retourner Vrai
  sinon
    retourner Faux

```

Terminaison : variant de boucle : $\langle\langle b - a \rangle\rangle$

Correction : invariant de boucle : $\langle\langle \text{Si } x \text{ est dans } E \text{ alors son indice est entre } a \text{ et } b \rangle\rangle$

Cout : nombre de bit de $|E|$

Implémentation 8.1 Implémentation en Python et comparaison avec la recherche linéaire

Exercice 8.4 Écrire une version récursive de l'algorithme

3 Tri efficace

I Tri fusion

Définition 8.3 L'algorithme de tri fusion est un algorithme de tri qui repose sur deux opérations :

- *partitionner*(L) : coupe L en deux listes de taille équivalente L_1, L_2
- *fusion*(L_1, L_2) : avec L_1 et L_2 deux listes triées, renvoie L_3 la liste triée contenant tous les éléments de L_1 et L_2 .

Algorithme 8.4 : *fusion*(L_1, L_2)

```

res  $\leftarrow []$ 
 $i, j \leftarrow 0$ 
tant que  $i < |L_1|$  et  $j < |L_2|$  faire
  si  $L_1[i] < L_2[j]$  alors
    res.ajouter( $L_1[i]$ )
     $i \leftarrow i + 1$ 
  sinon
    res.ajouter( $L_2[j]$ )
     $j \leftarrow j + 1$ 
Ajouter le reste de  $L_1$  et de  $L_2$  à res
retourner res

```

Algorithme 8.5 : tri_fusion(L)

```

 $n \leftarrow |L|$ 
si  $n \leq 1$  alors
   $\underline{\text{retourner } L}$ 
 $L_1, L_2 \leftarrow \text{partitionner}(L)$ 
retourner fusion( tri_fusion( $L_1$ ), tri_fusion( $L_2$ ) )

```

Developpement : Correction totale du tri fusion

Proposition 8.4 *Ce tri est stable mais pas en place. Parallélisable mais pas en ligne.*

Complexité : $C(n) = 2 \times C(\frac{n}{2})$ donc $C(n) = O(n \times \log n)$

II Tri rapide

Idée 8.1 Choisir un élément appelé pivot et mettre à gauche tous les éléments plus petit, à droite tous les plus grands, puis à trier cette partie à droite et à gauche.

Algorithme 8.6 : tri_rapide($L, \text{debut}, \text{fin}$)

```

si  $\text{debut} \geq \text{fin} - 1$  alors
   $\underline{\text{retourner } L}$ 
 $\text{pivot} \leftarrow L[0]$ 
 $i \leftarrow \text{debut}$ 
 $j \leftarrow \text{fin}$ 
tant que  $i < j$  faire
  si  $L[i + 1] \leq \text{pivot}$  alors
    échanger  $L[i + 1]$  et  $L[i]$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
  sinon
    échanger  $L[i + 1]$  et  $L[j]$ 
     $j \leftarrow j - 1$ 
  tri_rapide( $L, \text{debut}, i - 1$ )
  tri_rapide( $L, i + 1, \text{fin}$ )

```

Commentaire 8.3 Par manque de place, on peut remplacer l'écriture de cet algorithme par un dessin expliquant l'idée, et mettre son écriture en exo

Proposition 8.5 (Complexité) — pire des cas : $O(n^2)$

- meilleur cas : $O(n \log n)$
- cas moyen avec pivot aléatoire : $O(n \log n)$
- pire cas avec pivot astucieux : $O(n \log n)$

Proposition 8.6 *Ce tri est en place, non stable, non en ligne mais parallélisable*

Commentaire 8.4 On peut éventuellement mentionner que dans beaucoup d'implémentation, pour le pivot on prend quelques valeurs (exemple 5) et on prend la médiane de ces valeurs là (ainsi on est quasiment jamais dans le pire cas et sans devoir calculé la médiane). Mais avec l'avantage de rester en place

Commentaire 8.5 Pour le caractère en place, il faut discuter de la pile d'appel. A priori, l'espace supplémentaire utilisé est en $O(\log n)$ (voir $O((\log n)^2)$ si on considère le stockage des indices mais là on part un peu trop loin)) et non $O(1)$, mais on s'en contente souvent.

Exercice 8.5 Écrire une version stable de ce tri. Préserve-t-on le caractère en place.

III Tri par tas

Algorithme 8.7 : $tri_tas(L)$

Insérer les éléments de L dans un tas initialement vide

Extraire successivement l'élément minimum du tas.

Exercice 8.6 Quelles propriétés vérifie ce tri ?

IV Minoration de la complexité du tri

Proposition 8.7 On ne peut pas trier n éléments avec une complexité inférieure à $n - 1$

Proposition 8.8 Un algorithme de tri par comparaison aura une complexité pire cas au mieux $O(n \log(n))$

Démonstration. S'intéresser à l'arbre des chemins que prend l'algorithme en fonction du résultat des comparaisons. □

Remarque 8.2 Si on ne trie pas par comparaison, on peut avoir des complexités plus faibles. Par exemple, si E ne contient que des entiers entre 0 et 9, on peut simplement compter le nombre de 0 et de 9 puis reconstruire là dessus le tableau trié.

Développement : Amélioration du tri par comptage avec des dictionnaires

4 Application

I Algorithmes gloutons

Définition 8.4 Un algorithme glouton est un algorithme qui résout un problème d'une entrée E de la forme :

- on trie les éléments de E
- on construit une solution en les parcourant, sans revenir en arrière

Exemple 8.2 On a n évènements sportifs ayant lieu respectivement entre les dates d_i et f_i ($i \in \mathbb{N}$) ayant chacun besoin d'un gymnase. Comment allouer des gymnases à des évènements pour utiliser le moins possible de gymnase ?

Algorithme glouton :

1. Trié les évènements par d_i croissant (impliquant souvent de trier)
2. Mettre chaque évènement dans le premier gymnase vide (peut en être un nouveau)

Proposition 8.9 Le glouton de l'exemple 8.2 renvoie une solution optimale (minimisant le nombre de gymnases)

Exercice 8.7 Écrire un algorithme glouton pour le problème de rendu de monnaie

Définition 8.5 Un arbre couvrant minimal d'un graphe pondéré est un sous graphe connexe acyclique de poids minimal

Algorithme 8.8 : kruskal

Entrées : L liste d'arêtes

Sorties : Arbre couvrant de poids minimal

Trier L

$res \leftarrow []$ **pour** $a \in L$ **faire**

si $\{a\} \cup res$ n'ajoute pas de cycles **alors**
 $res \leftarrow res \cup \{a\}$

retourner res

Exercice 8.8 Proposer des algorithmes gloutons pour la coloration de graphe. Sont-ils optimaux ?

II Implémentation des ensembles

Commentaire 8.6 Cette partie fait un peu écho à l'activité mentionner dans le commentaire 8.1

Proposition 8.10 On peut implémenter les ensembles par des listes, par des listes triées, par des listes que l'on trie pour l'union et l'intersection. On obtient alors les complexités suivantes :

| Structure | Insertion | Suppression | Recherche | union / intersection |
|----------------|-----------|-------------|-----------|-------------------------------|
| liste | $O(n)$ | $O(n)$ | $O(n)$ | $O(n \times m)$ |
| liste triée | $O(n)$ | $O(n)$ | $\log n$ | $O(n + m)$ |
| liste avec tri | $O(1)$ | $O(n)$ | $O(n)$ | $O((n + m) \log(\min(n, m)))$ |

Exercice 8.9 Proposer une implémentation mélangeant les listes triées et les listes avec tri ayant de meilleur complexité

Commentaire 8.7 On s'attend ici à ce que on aient d'une part les éléments déjà triés, de l'autre les éléments pas encore, et on ne trie que quand on fait l'union ou l'intersection (ou éventuellement la recherche) en triant les éléments pas encore triés, puis en fusionnant (cf tri fusion) les deux listes.

Leçon 9

Algorithmique du texte. Exemples et applications.

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Un auteur envoie son manuscrit à un éditeur. Il commence par compresser le texte. A la réception, l'éditeur compare le manuscrit à d'autres ouvrages pour vérifier qu'il n'y a pas plagiat. Il peut ensuite chercher un motif dans le texte.

Commentaire 9.1 Cela justifie l'ordre dans lequel on a mis nos parties. De plus, suivant le niveau du cours, on pourrait inaugurer chaque partie en rappelant quelle partie de ce contexte cela concerne. Mais là le niveau (MPI) est un peu élevé pour s'apresentir sur ce genre de choses

Notation : On prend les conventions de slicing de python

Commentaire 9.2 Il n'y a pas de partie application car souvent les applications sont directes depuis les algorithmes. Ainsi on les dissémine illustrant directement le concept

1 Encodage et compression

I Encodage par lettre

Définition 9.1 (Algorithme de compression) Un algorithme de compression sans perte est la donnée d'une fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ injective (il existe un unique décodage).

Algorithme 9.1 (Codage préfixe)

1. *Prétraitement :* On construit un arbre binaire \mathcal{A} qu'on appelle arbre de Huffman dont les feuilles sont les lettres $c \in \Sigma$.
2. *Compression :* On code chaque lettre c par une suite de 0 et 1 correspondant au chemin (0 : gauche, 1 : droite) de la racine à la feuille contenant c dans \mathcal{A} .
3. *Décompression :* On décode une suite de 0 et 1 en parcourant le chemin correspondant dans \mathcal{A} .

Algorithme 9.2 (Codage de Huffman) On note f_a la fréquence du caractère a dans le texte et on note $f_{\mathcal{A}} = \sum_{a \in \mathcal{A}} f_a$

Créer une forêt \mathcal{F} d'arbres binaires réduits à un noeud (a, f_a)

tant que $|\mathcal{F}| > 1$ **faire**

 Extraire de \mathcal{F} les arbres \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 de plus petites fréquences // $f_{\mathcal{A}_1} \leq f_{\mathcal{A}_2}$ à la racine

 Insérer un arbre de racine $f_{\mathcal{A}_1} + f_{\mathcal{A}_2}$ ayant pour fils \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 dans \mathcal{F}

retourner \mathcal{A}_H tel que $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}_H\}$

Commentaire 9.3 Mentionner à l'oral qu'on ferait le lien avec le fait que c'est un algorithme glouton sur les arbres unifiant ceux de fréquences des lettres agrégés minimal.

Théorème 9.1 L'arbre construit par le codage de Huffman 9.2 minimise la quantité $S = \sum_c \in \Sigma f_c d_c$ où d_c est la profondeur du caractère c dans l'arbre.

Idée 9.1 Cela revient à dire que l'algorithme de Huffman est optimal parmi les codages préfixes

Exercice 9.1 Quelle structure pour \mathcal{F} dans l'algorithme 9.2 ? Quelle complexité alors ?

II Encodage par séquences

Idée 9.2 On va associer un code à une séquence de lettres (ou motifs)

Remarque 9.1 Pour cela, on peut utiliser le codage de Huffman, en prenant comme alphabet les mots apparaissant dans le livre. Mais on peut faire quelque chose de spécifique aux séquences, mais moins spécifiques à un livre (car ici le caractère " " comme délimiteur est arbitraire).

Commentaire 9.4 Si on manque de places, on peut faire cette remarque uniquement à l'oral

Idée 9.3 L'algorithme LZW détermine un codage dans un dictionnaire d au fur et à mesure de la lecture du texte (algorithme online). On va coder certains motifs (groupement de lettres consécutives) présents dans le texte.

Algorithme 9.3 (Compression par LZW)

Initialement, les lettres de Σ sont codées par un entier (par ex. avec le code ASCII).

$m \leftarrow ""$

tant que il reste du texte s à coder **faire**

 Retirer le plus long préfixe w de s qui soit dans d

 Ajouter le codage de w à la fin de m

$w' \leftarrow w$ concaténé avec la prochaine lettre de s

 Ajouter un nouveau codage pour w' dans d

retourner m

Remarque 9.2 Pour la décompression, il n'est pas nécessaire de transmettre le dictionnaire car on peut le reconstruire à la volée.

Application 9.1 Le format de fichier .zip compressé un dossier en utilisant (entre autre) les algorithmes de Huffman et LZW.

Développement : Présentation de la compression et de la décompression de l'algorithme LZW

2 Comparaison

I Plus longue sous-suite commune (PLSSC)

Définition 9.2 (Problème PLSSC) Soit $x, y \in \Sigma^*$. Une plus longue sous-suite commune à x et y , noté $PLSSC(x, y)$ est $\operatorname{argmin} \{k \mid \exists i, j : x[i : i+k] = y[j : j+k]\}$

Application 9.2 Ce problème correspond au fait de trouver des morceaux d'ADN communs entre deux séquences.

Exemple 9.1 Pour $x = \text{'patate'}$ et $y = \text{'frites'}$ on a 'te'

Algorithme 9.4 (Brute force) On essaie toutes les séquences possibles \rightarrow exponentiel

Algorithme 9.5 (programmation dynamique) On considère les sous-problèmes $c_{i,j} = |PLSSC(x[:i], y[:j])|$.
On a alors $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ c_{i-1,j-1} & \text{si } x[i-1] = y[j-1] \\ \max(c_{i-1,j}, c_{i,j-1}) & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 9.1 L'algorithme 9.5 calcule $PLSSC(x, y)$ en $O(|x| \times |y|)$

Remarque 9.3 Pour obtenir la sous suite, on sauvegarde d'où l'on vient pour pouvoir reconstruire la solution

II Distance entre deux chaînes

Définition 9.3 (distance) Une distance sur un ensemble E est une application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tq :

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(y, x) && (\text{symétrie}) \\ d(x, y) &= 0 \iff x = y && (\text{séparation}) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) && (\text{inégalité triangulaire}) \end{aligned}$$

Définition 9.4 (Distance de Hamming) La distance de Hamming entre deux chaînes de caractères de même taille est le nombre de caractères distincts.

Application 9.3 Dans un protocole réseau, on peut ajouter des bits de contrôle, ayant une information redondante avec les bits du message. Certains messages sont donc invalides (si les bits de contrôle ne correspondent pas). On prend alors le message valide ayant la plus petite distance de Hamming (et ainsi, on peut espérer retrouver le message corrigé).

Exemple 9.2 Pour $\langle\text{truc}\rangle$ et $\langle\text{troc}\rangle$ c'est 1.

Définition 9.5 La distance d'édition (ou de levenshtein) entre deux chaînes de est le nombre minimal de transformation pour passer de l'une à l'autre parmi ($a \in \Sigma, i \in \mathbb{N}$) :

- $ins_{a,i}$: insertion de a à la position i
- $sub_{a,i}$: substitution de la i -ème lettre par a
- sup_i : suppression de la i -ème lettre.

Application 9.4 On peut utiliser cette algorithme pour détecter des mutations ponctuelles dans des brins d'ADN, et ainsi essayer de les faire correspondre.

Application 9.5 Dans les logiciels de traitement de texte, les correcteurs orthographiques cherchent dans un dictionnaire le mot le plus proche de celui mal orthographié pour proposer une correction.

Proposition 9.2 La distance d'édition $lev : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ est une distance. De plus,

$$lev(u.a, v.b) = \min \begin{cases} lev(u, v) + (a \neq b) & \text{Rien, ou substitution si } a \neq b \\ lev(u, v.b) + 1 & \text{Suppression de } a \\ lev(u.a, v) + 1 & \text{Insertion de } b \end{cases}$$

Corollaire 9.1 Il existe un algorithme de programmation dynamique calculant $lev(a, b)$ en $O(|a| \times |b|)$

3 Recherche de motifs

I Recherche de motifs dans un texte

Définition 9.6 (Problème de recherche de motif) Pour $m \in \Sigma^*, t \in \Sigma^*$, m est-il un sous mot de t ?.

Remarque 9.4 On peut éventuellement rajouter les questions «où ?» et «combien de fois»

Application 9.6 CTRL + F

Algorithme 9.6 (Solution naïve) On essaie toutes les positions possibles pour m dans t . L'algorithme est donc en $O(|m| * |t|)$

Proposition 9.3

1. Le problème est équivalent à savoir si $t \in \Sigma^* m \Sigma^*$ qui est rationnel.
2. Déterminer si un mot est dans un langage rationnel est linéaire en la longueur du mot
3. On peut résoudre le problème en $O(|t|) + f(m)$ (où f peut être très grand)

Développement : Construction de l'automate des motifs

Idée 9.4 On essaye de décaler de plus de 1 quand on se trompe

Commentaire 9.5 C'est ce qu'on fait avec l'automate des motifs. Mais on peut essayer de le faire directement sans passer par le formalisme des automates

Algorithme 9.7 Boyer-Moore Amélioration de l'algorithme naïf en décalant de plus de 1 à chaque fois qu'on se trompe

```

i ← 0 tant que i < |t| - |m| faire
  pour j allant de |m| - 1 à 0 faire
    si t[i + j] ≠ m[j] alors
      i ← i + decalage[t[i + j]]
      break
  
```

où $\text{decalage}[a]$: l'indice en partant de la fin de la dernière occurrence de a dans m ($|m|$ si a non présent)

Proposition 9.4 Complexité :

Pire des cas : $O(|t| \times |m|)$

meilleur des cas : $O\left(\frac{|t|}{|m|}\right)$ Précalcul : $O(|m|)$ (mais dans le meilleur cas en $O(|\Sigma|)$)

Remarque 9.5 On peut mélanger les deux idées pour obtenir quelque chose qui sera en général sous linéaire, mais au pire linéaire (en $|t|$ mais on augmente le coût du précalcul).

Idée 9.5 Dans l'algorithme de Rabin Karp, on compare directement $t[i : i + |m| - 1]$ avec m grâce à des fonctions de hachage (donc rapidement). Si les hachages sont égaux, on vérifie caractère à caractère, et sinon on incrémente i .

Remarque 9.6 Le hachage h défini par $h(t_0, \dots, t_{|m|-1}) = \sum_{j=1}^{|m|-1} B^{|m|-1-j} \times t_j$ peut se calculer en $O(1)$ à partir du calcul précédent : $h(t_i + 1, \dots, t_i + |m|) = B \times (h(t_i, \dots, t_i + |m| - 1) - B^{|m|-1}t_i) + t_i + 1$

II Analyse lexicale

Application 9.7 Lors de la compilation d'un programme C , le compilateur reconnaît des lexèmes définis par des langages réguliers.

Exemple 9.3 `if (abs < 5) abs += 52; reconnu en IF LPAR VAR INF INT RPAR VAR PLUSEGAL INT`

Algorithme 9.8

- On ordonne les règles $e_i \rightarrow t_i$ et on construit \mathcal{A}_i un automate reconnaissant $\mathcal{L}(e_i)$
- On exécute en parallèle les \mathcal{A}_i sur le texte.
- Quand tous les automates sont bloqués on prend :
 - le préfixe du texte le plus long qui finit dans un état acceptant d'un automate
 - en prenant l'automate de priorité maximale si plusieurs reconnaissent le même préfixe
- On recommence sur le texte restant.

Commentaire 9.6 *Par manque de place on peut ici résumer plus succinctement l'algorithme en disant simplement qu'on reconnaît chaque lexème avec un automate, en parallèle pour trouver le bon.*

Application 9.8 *grep suivi d'une regexp en norme POSIX et de noms de fichiers affiche toutes les lignes des fichiers qui contiennent la regexp.*

Application 9.9 *En SQL, on peut comparer des attributs de type CHAR avec des expression régulières grâce au mot clef LIKE.*

Exemple 9.4 *SELECT prénom FROM clients WHERE nom LIKE "%on%";*

Leçon 10

Arbres : représentations et applications

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

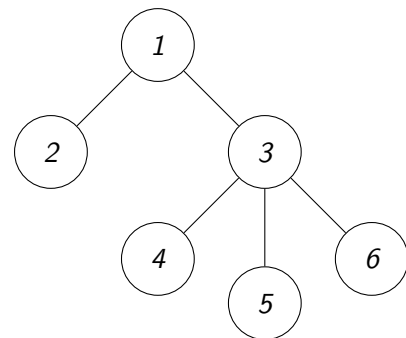
1 Généralités sur les arbres

Un arbre est une structure de données récursives stockant hiérarchiquement les données. Dans un arbre, les données sont appelées des noeuds.

Définition 10.1 (arbre) Un arbre est un couple (u, l) où u est un noeud (élément) et l une liste (potentiellement vide) d'arbre

- u est appelé la racine de l'arbre (u, l)
- si l est vide, u est appelé une feuille
- les arbres de l , sont appelés sous arbres de (u, l)
- Les racines des arbres de l sont appelées enfant de u (et ont u pour parent)
- la hauteur $h(u) = h((u, l)) = 1 + \max_{A \in l} h(A)$ (et donc 1 si l est vide)

Exemple 10.1 $(1, [(2, []), (3, [(4, []), (5, []), (6, [])])])$ \rightarrow



Remarque 10.1 Il n'existe ici pas d'arbre vide.

Exemple 10.2 L'organisation des fichiers en répertoire peut être représenté sous forme d'arbre.

Remarque 10.2 On peut à chaque noeud associer une étiquette. On parle alors d'arbre étiqueté.

Théorème 10.1 Identifions les arbres à des graphes non orientés où un sommet (la racine) est choisi, en considérant les liens de parentés comme des arêtes. Les arbres sont alors les graphes connexes acycliques

Démonstration. Exercice

□

Corollaire 10.1 On représente les arbres comme des graphes (cf exemple 10.1)

Définition 10.2 Un arbre binaire est défini inductivement par :

- E est un arbre vide
- Si A_1 et A_2 sont des arbres binaires et u une donnée, $B(u, A_1, A_2)$ est un arbre binaire, A_1 étant le sous-arbre gauche, et A_2 le droit.

Idée 10.1 Les arbres binaires sont des arbres dont les listes sont de taille 2, mais où l'on rajoute des arbres vides.

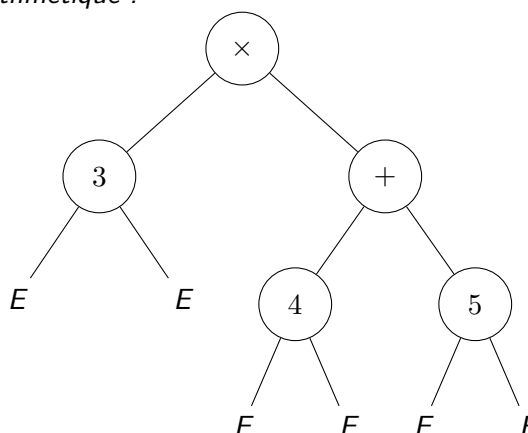
Exemple 10.3 Représentation d'une expression arithmétique :

$3 \times (4 + 5)$

$\rightarrow N(\times, N(3, E, E), A)$

avec $A = N(+, N(4, E, E), N(5, E, E))$

\rightarrow



2 Représentation informatique

I Représentation comme structure inductive

En représentant un arbre en utilisant sa structure inductive, on obtient :

- Pour les arbres généraux

```
type 'a arbre = N of 'a arb_liste and
type 'a bin arb_liste = V | Cons of ('a arb * ('a arb_liste));;
```

- Pour les arbres binaires

```
type 'a bin = E | B of 'a * 'a bin * 'a bin;;
```

Développement 1 : Correspondance entre les arbres binaires et les arbres généraux de taille n et utilisation en C

II Représentation comme un graphe

Les arbres étant des graphes connexes acycliques (cf. théorème 10.1), on peut les représenter comme tels :

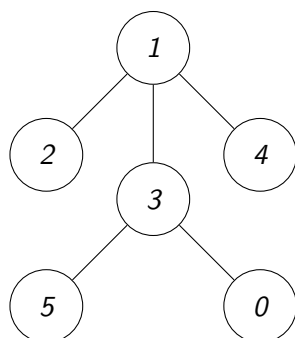
- par des listes (ou dictionnaires) d'adjacence
- Par une matrice d'adjacence
- Comme la liste de toutes les arêtes

Remarque 10.3 *N'exploitant pas la structure d'arbres, ces structures sont peu utilisées.*

III Représentation par un tableau

Si les identifiants des noeuds sont des entiers de 0 à $n - 1$, on peut stocker l'arbre dans un tableau de taille n , la case i contenant l'identifiant du père du noeud i , -1 si il est racine.

Exemple 10.4



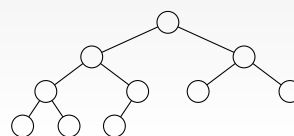
| | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|
| 3 | -1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Remarque 10.4 *On ne stocke ici que la structure. Pour stocker des données, on produit un tableau de couples.*

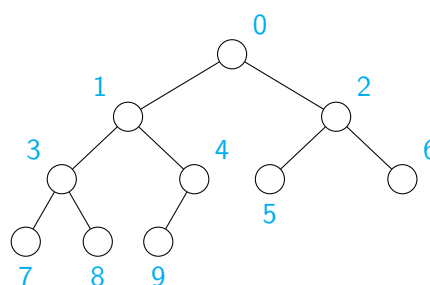
IV Représentation d'un arbre binaire presque complet

Définition 10.3 (Arbre binaire presque complet)

Un arbre binaire presque complet est un arbre binaire dont tous les étages sont remplis sauf éventuellement le dernier qui est alors rempli à gauche.

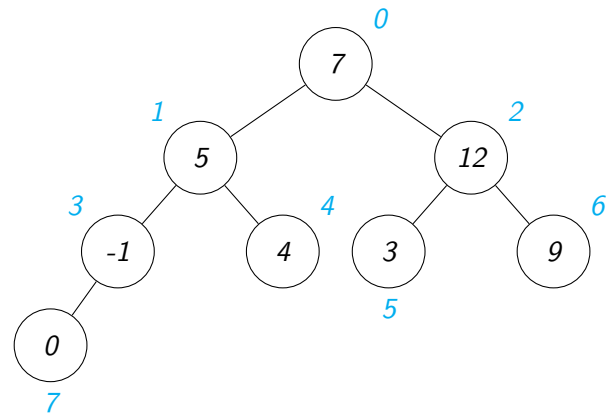


Principe 10.1 On peut alors représenter un tas par un tableau. On numérote alors les sommets ci contre, donnant l'indice dans le tableau. Les fils du noeuds d'indice i se retrouve aux cases $2 \times i + 1$, $2 \times i + 2$, et son père $\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$



Exemple 10.5

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 12 | -1 | 4 | 3 | 9 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

**3 Application**

Commentaire 10.1 A chaque fois on va écrire en début quelle représentation on utilise pour notre application. Néanmoins, en classe, on pourrait le laisser proposer par les élèves (une fois l'application présentée). On justifie de ce fait notre organisation, ou les applications arrivent toutes ensemble à la fin. (mais on écrit quand même la représentation au début pour que ce soit plus facile de naviguer à la partie que l'on souhaite).

I Dictionnaires

Représentation : Structure inductive

Définition 10.4 Un arbre binaire de recherche $N(x, G, D)$ est un arbre binaire de recherche (ABR) si G et D sont des ABR et si, selon un attribut a , $\max_{u \in G} u.a \leq x.a \leq \min_{v \in D} v.a$ (avec E qui est un ABR et $\max_{u \in E} u.a = -\infty$ et $\min_{u \in E} u.a = +\infty$)

Proposition 10.1 Chercher et insérer dans un ABR est en $O(h)$

Proposition 10.2 En imposant des contraintes supplémentaires (exemple arbres rouge-noir), on peut forcer $h = O(\log n)$

Définition 10.5 Un dictionnaire (ou tableau associatif) est un tableau où les indices (clés) ne se limite pas à $\llbracket 0, n \rrbracket$

Idée 10.2 On peut alors implémenter un dictionnaire par un ABR, les clés étant les étiquettes des nœuds, à condition d'avoir un ordre total sur les clés

Théorème 10.2 Une implémentation efficace des dictionnaires par ABR permet des opérations de base en $O(\log n)$

Commentaire 10.2 Si on ne veut pas faire le développement 2, et qu'on préfère celui sur les arbres k -dimensionnel, on peut aussi parler aussi du pb des k -plus proches voisins et parler des ABR comme des arbres k -dim pour résoudre le pb

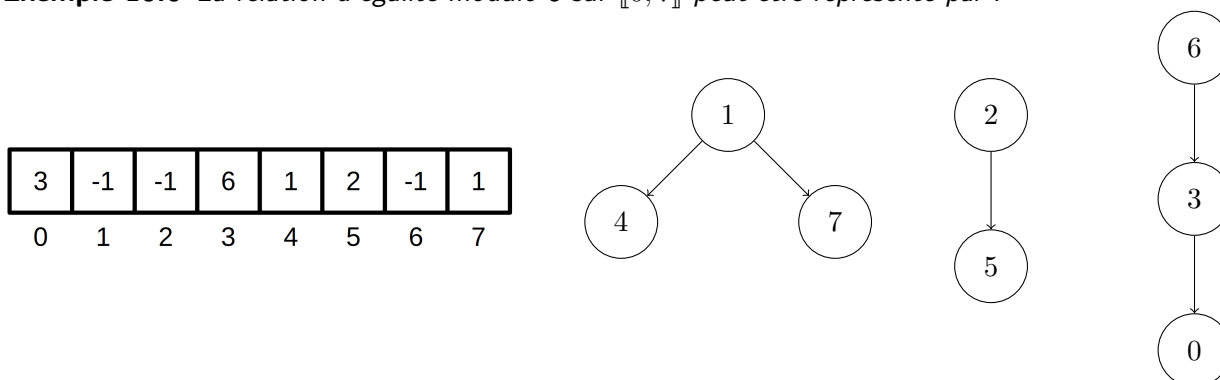
II Classes d'équivalence

Représentation : Tableaux

Définition 10.6 Une structure union & trouver est une structure implémentant les classes d'équivalence, permettant de trouver les représentants d'une classe et d'unir deux classes.

Idée 10.3 On implémente cette structure sous formes d'un ensemble d'arbres (forêt), où chaque arbre représente une classe et où la racine est le représentant de la classe

Exemple 10.6 La relation d'égalité modulo 3 sur $\llbracket 0, 7 \rrbracket$ peut être représenté par :



Proposition 10.3 Si on unifie en faisant pointer la racine de l'arbre le moins profond vers celle de l'arbre le plus profond, on obtient des opérations unir et trouver en $O(\log(n))$

III Arbres couvrant de poids minimal

Représentation : liste des arêtes

Définition 10.7 Dans un graphe pondéré connexe, un arbre couvrant de poids minimal, est un sous-ensemble maximal d'arêtes sans cycles de somme de poids minimal.

Algorithme 10.1 : *Kruskal*(L)

Entrées : L liste des arêtes

Sorties : Liste des arêtes d'un ACM

$L \leftarrow L$ trié

$res \leftarrow []$

pour a parcourant L **faire**

si a ne rajoute pas de cycle dans res **alors**
 Ajouter a à res

retourner res

Proposition 10.4 En implémentant la détection de cycle par une structure union & trouver, *Kruskal* renvoie un arbre couvrant de poids minimal en $O(|L| \times \log |L|)$

IV Files de priorité

Représentation : celles des arbres semi-complet

Définition 10.8 Une file de priorité est une séquence de données dont on peut extraire la donnée d'attribut minimum, et rajouter des données.

Idée 10.4 On peut implémenter les files de priorité par des tas min

Définition 10.9 Un tas min est un arbre semi-complet où chaque noeud a un attribut plus petit que ses fils

Développement 2 : Correction de l'insertion dans un tas min et discussion sur l'implémentation

Principe 10.2

- * Pour ajouter un élément, on le met au bout du tableau et on l'échange avec son père tant qu'il est plus petit
- * , Pour extraire le min, on met le dernier élément du tableau au début et on l'inverse avec le plus petit de ses fils tant qu'il est plus grand.

Proposition 10.5 Cette implémentation permet des opérations en $O(\log n)$

Application 10.1 Trier par tas en $O(n \log n)$

Leçon 11

Exemples d'algorithmes d'approximation et d'algorithmes probabilistes

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Beaucoup de problèmes sont durs à résoudre. On cherchera alors à sacrifier un peu de la fiabilité du résultat pour gagner en complexité. Il y a deux manières de faire un tel compromis :

- utiliser des algorithmes probabilistes (pouvant prendre beaucoup de temps, ou renvoyer faux)
- n'utiliser des algorithmes ne fournissant que des solutions approchées.

1 Algorithmes probabilistes

Définition 11.1 Un algorithme est déterministe si, pour une entrée x donnée, il s'exécute toujours de la même manière. En particulier, la sortie ne dépend que de l'entrée.

Un algorithme probabiliste est un algorithme dont l'exécution dépend de son entrée x et de valeurs obtenues via un générateur de nombre (pseudo)-aléatoire.

Exemple 11.1 Recherche dans un tableau T de booléens d'un indice i tel que $T[i] == \text{True}$

Algorithme 11.1 : *deterministe(T)*

```
pour  $i$  de 1 à  $|T|$  faire
    si  $T[i]$  alors
        retourner True
retourner False
```

Algorithme 11.2 : *probabiliste(T, k)*

```
pour  $j$  de 1 à  $k$  faire
    Tirer uniformément  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ 
    si  $T[i]$  alors
        retourner True
retourner False
```

Remarque 11.1 Soit $p < 1$ la proportion de booléen à Faux dans T . Alors l'algo probabiliste se trompe avec une probabilité $= p^k$. Pour $p = \frac{1}{4}$ et $k = 5$, cela fait 10^{-3}

I Algorithme de type Monte-Carlo

Définition 11.2 Un algorithme probabiliste A pour un pb P est de type Monte-Carlo si pour toute instance i de P ,

- $A(i)$ est une solution, erronée avec une certaine probabilité

— Le temps d'exécution de A sur i est indépendant des choix aléatoires.

Exemple 11.2 L'algorithme probabiliste de l'exemple 11.1 est de type Monte-Carlo

Développement 1 : Vérification probabiliste du produit matriciel

Proposition 11.1 (Amplification) Soient $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1$.

S'il existe un algorithme Monte Carlo pour un problème Π ayant une probabilité d'erreur ε_1 , alors on peut construire un algorithme Monte Carlo pour le problème Π ayant une probabilité d'erreur ε_2 , en appliquant plusieurs fois l'algorithme initial.

Algorithme 11.3 : $mediane(L)$

```

 $n \leftarrow |L|$ 
 $L_0 \leftarrow k = n^{\frac{3}{4}}$  éléments de  $L$  aléatoirement
Trier  $L_0$ 
 $x_1 \leftarrow L_0[\frac{k}{2} - \sqrt{n}]$ 
 $x_2 \leftarrow L_0[\frac{k}{2} + \sqrt{n}]$ 
 $L_1 \leftarrow$  liste des éléments  $< x_1$ 
 $L_2 \leftarrow$  liste des éléments entre  $x_1$  et  $x_2$ 
 $L_3 \leftarrow$  liste des éléments  $> x_2$ 
si  $|L_1| > \frac{n}{2}$  ou  $|L_3| > \frac{n}{2}$  alors
    retourner n'importe quoi; //  $L_2$  n'a pas capturé la médiane
si  $|L_2| > n^{\frac{3}{4}}$  alors
    retourner n'importe quoi; // On a trop d'éléments dans  $L_2$  pour les trier
Trier  $L_2$ 
retourner  $L_2[\frac{n}{2} - |L_1|]$ 

```

Idée 11.1 On fait la médiane sur un échantillon de L . Puis on prend tous les éléments autour de cette médiane et on les trie pour trouver la vraie médiane (si elle y est, sinon tant pis).

Commentaire 11.1 Ici le temps dépend du hasard. On considère quand même que c'est un Monte Carlo car c'est borné et prend le temps moyen est un Ω du temps dans le pire des cas. On pourrait aussi à la place de retourner n'importe quoi, trier $n^{3/4}$ éléments et remplir L_2 avec des $= \infty$ mais alors on complexifie pour rien.

II Algorithmes de type Las Vegas

Définition 11.3 Un algorithme probabiliste A est de Las Vegas si :

- Si A termine, alors la solution renvoyée est correcte.
- Le temps d'exécution de A est une variable aléatoire.

Remarque 11.2 Quand on parle de complexité en moyenne pour un algorithme de Las Vegas, on ne considère pas (ou pas uniquement) la moyenne des complexité sur toutes les entrées possibles prisent uniformément, mais la plus grande espérance du temps d'exécution sur une entrée

Algorithme 11.1**Algorithme 11.4 :** *tri_rapide_randomise*(T)

```

si  $|T| = 1$  alors
   $\perp$  retourner
  Tirer  $q$  uniformément dans  $\llbracket 1, |T| \rrbracket$  ; //  $T[q]$  sera le pivot
   $i \leftarrow \text{partition}(T, q)$ 
  tri_rapide_randomise( $T[:i]$ )
  tri_rapide_randomise( $T[i+1:]$ )

```

où *partition*(T, q) mets dans T , tous les éléments $< T[q]$ puis tous les éléments supérieurs, et renvoie l'indice du milieu.

Remarque 11.3 Le temps d'exécution de l'algorithme 11.1 dépend du choix du pivot : $O(n^2)$ dans le pire cas, $O(n \log n)$ dans le meilleur et en moyenne.

Remarque 11.4 Il est possible de transformer un algorithme de type Las Vegas en Monte Carlo en l'exécutant pendant un temps défini et en générant une réponse aléatoire s'il n'a pas terminé.

Remarque 11.5 Si on peut vérifier efficacement la validité du résultat, on peut également faire l'inverse.

Exemple 11.3 A la place de l'échec dans l'algorithme 26, on peut relancer l'algorithme. On obtient alors un algorithme trouvant toujours la médiane, la calculant en moyenne en $1,5n$ comparaisons, sans adversaires, ce qui est mieux que tout algorithme déterministe (qui ont nécessairement besoin d'au moins $2n$ comparaisons en moyenne).

2 Algorithmes d'approximation

I Définition

Définition 11.4 Un problème d'optimisation est un problème $\Pi = (I, S, c)$ où

- I est l'ensemble des instances
- $\forall i \in I, S(i)$ est l'ensemble des solutions pour i
- $c : I \times S \rightarrow \mathbb{R}$ fonction d'évaluation.

Étant donnée une instance $i \in I$, l'objectif est de construire une solution $s^* \in S(i)$ vérifiant :
 $c(i, s^*) = \min \{c(x, s) / s \in S(i)\}$

Commentaire 11.2 On peut aussi demander à ce que c soit calculable en temps polynomial mais ce n'est pas nécessaire. Les deux définitions coexistent.

Remarque 11.6 On se ramène au max en prenant $-c$.

Définition 11.5 Une λ -approximation est un algorithme polynomial A donnant pour chaque instance i de Π une solution tel que $\max \left(\left| \frac{A(i)}{OPT(i)} \right|, \left| \frac{OPT(i)}{A(i)} \right| \right) \leq \lambda$

II Exemples

Définition 11.6 (Couverture par des sommets (Vertex-Cover)) Entrée : Un graphe $G = (S, A)$
Solution : Un ensemble $S \subset V$ tel que $\forall u, v \in E, v \in S$ ou $u \in S$

Algorithme 11.5 : Glouton Vertex Cover

```

 $S \leftarrow \{\}$ 
tant que il existe une arête  $(u, v) \in A$  tel que  $u \notin S$  et  $v \notin S$  faire
  Choisir  $(u, v)$  une telle arête
   $S \leftarrow S \cup \{(u, v)\}$ 
retourner  $S$ 

```

Proposition 11.2 L'algorithme 28 est une 2-approx du problème de la couverture par les sommets.

Développement : Une $\frac{3}{2}$ -approximation et une $\frac{7}{6}$ -approximation gloutonnes pour le problème d'ordonnement de tâches indépendantes sur 2 processeurs.

Définition 11.7 (Voyageur de commerce (TSP)) Instance : $G = (S, A, c)$ un graphe orienté complet pondéré
Solution : Un cycle hamiltonien sur G de poids minimal

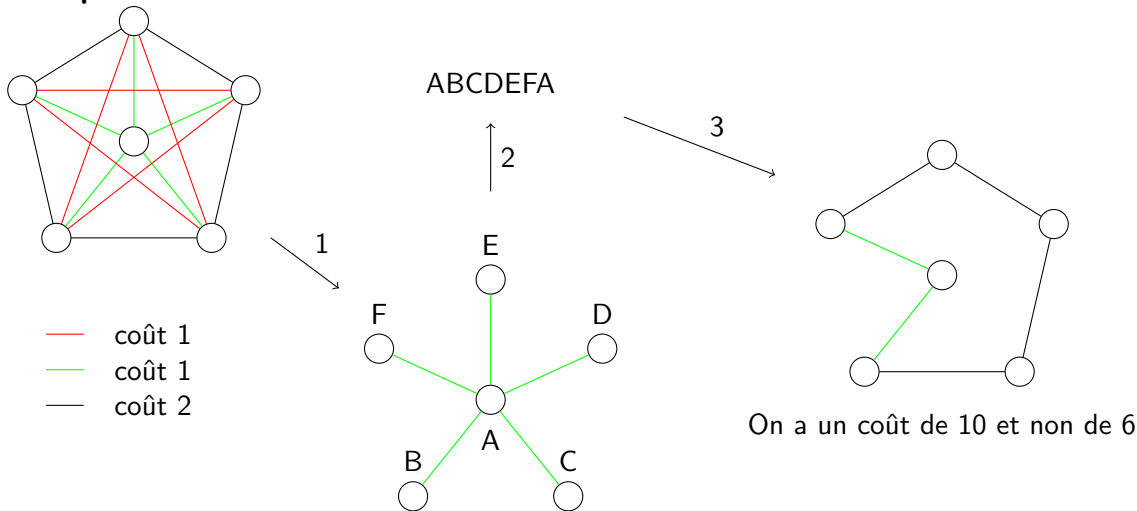
Théorème 11.1 Il n'existe pas d'algorithme d'approximation pour TSP, sauf si $P = NP$.

Algorithme 11.2 (Algorithme pour TSP)

1. $\mathcal{A} \leftarrow$ arbre couvrant de poids minimal de G
2. $P \leftarrow$ parcours en profondeur préfixe de \mathcal{A}
3. Renvoyer P

Proposition 11.3 L'algorithme 11.2 est une 2-approx si c vérifie l'inégalité triangulaire ($\forall x, y, z \in C, c(x, y) + c(y, z) \geq c(x, z)$)

Exemple 11.4



3 Algorithmes d'approximation probabilistes

Il existe des algorithmes d'approximation probabilistes. Ce sont alors souvent des algorithmes de Monte Carlo.

I Max Sat

Définition 11.8 Instance : n variables $\{x_1, \dots, x_n\}$, p clauses C_1, \dots, C_p sur (x_1, \dots, x_n) contenant au moins k littéraux Solution : Trouver une valuation maximisant le nombre de clauses à vrai

Exemple 11.5 Si $\varphi = \bigwedge_{i=1}^p C_i$ est satisfiable, une solution optimale est une valuation satisfaisant φ

Algorithme 11.3 Renvoyer une valuation aléatoire.

Théorème 11.2 L'espérance du nombre de clauses satisfaites $\mathbb{E}(\varphi)$ vérifie $\mathbb{E}(\varphi) \geq p \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \geq \frac{c}{2}$

Remarque 11.7 On peut créer un algorithme déterministe qui est une $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ -approx.

II Calcul de π

On peut calculer une valeur approchée de π par des méthodes probabilistes

Commentaire 11.3 On peut aussi mettre un dessin ici pour expliquer ce qui se passe.

Algorithme 11.6 : *calcul_pi(N)*

```

i ← 0
répéter
  Tirer deux flottants x, y dans  $[-1, 1]$  uniformément
  si  $x^2 + y^2 < 1$  alors
     $i \leftarrow i + 1$ ; // On a tapé dans le cercle d'aire  $\pi$ 
jusqu'à N fois;
retourner  $\frac{4i}{N}$ ; // Nombre de points dans le cercle / aire du carré =  $\frac{\pi}{4}$ 

```

Commentaire 11.4 Si on veut parler plus précisément d'algorithme d'approximation, on prendrait dans la def, pour *I* la manière de représenter les flottants (nb de bits d'exposant, de mantisse, etc...) et pour *S* de tels flottants. La fonction de coût *c* serait alors la distance à *pi* (même si pas facilement calculable en temps polynomial)

Remarque 11.8 On peut généraliser la méthode pour le calcul d'intégrales

Remarque 11.9 Cette méthode se généralise en une méthode de Monte Carlo où l'on échantillonne le problème, on calcule la solution sur cette échantillon, puis on généralise la solution à partir de cet échantillon.

Leçon 12

Exemples d'algorithmes glouton et de retour sur trace

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Quand on aborde un problème à la main, on essaye souvent de construire des solutions au fur et à mesure, en faisant plein de choix locaux. Essayons de mettre cela en oeuvre algorithmiquement.

1 Algorithmes gloutons

I Définition

Définition 12.1 *Un algorithme glouton construit une solution à un problème par choix successifs considérés localement optimaux, sans jamais revenir en arrière.*

Avantage : C'est souvent peu coûteux, et potentiellement en ligne.

Exemple 12.1 (Gymnases)

Instances : n évènements, leur date de début $\{d_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ et de fin $\{f_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$

Problème : trouver un nombre minimal de gymnases pour organiser les évènements

Algorithme 12.1

1. Trier les évènements par dates de début croissantes
2. Allouer successivement le premier gymnase disponible. En ouvrir un si nécessaire.

Leçon 13

Exemples d'algorithmes utilisant la méthode « diviser pour régner »

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

1 Introduction

Définition 13.1 (Paradigme Diviser pour Régner) *Un algorithme de type Diviser pour Régner s'effectue en 3 étapes :*

1. *Division du problème en sous-problèmes indépendants*
2. *Résolution récursive des sous-problèmes*
3. *Construction d'une solution du problème global à partir des solutions des sous-problèmes*

Principe 13.1 (Calcul de la complexité d'un tel algorithme.) *Trouver une fonction donnant la taille du problème (comme le nombre d'éléments pour une liste). Définir C la complexité maximale des instances de cette taille, puis trouver une relation de récurrence sur C , pour tenter de la résoudre.*

Commentaire 13.1 *La méthode de résolution sera inculqué par l'exemple, et progressivement (d'abord le cas de base, où l'on découpe en seulement 2 avec l'exponentiation rapide, puis on complexifie)*

2 Applications au calcul formel

I L'exponentiation rapide

Problème : Étant donné un entier a et un entier positif n , calculer a^n .

Solution naïve : n multiplications

Algorithme 13.1 (Méthode D&R)

Algorithme 13.1 : *exponentiation_rapide*(a, n)

```

si  $n = 0$  alors
  | retourner 1
 $m \leftarrow m/2$  ; // étape 1
 $x \leftarrow \text{exponentiation\_rapide}(a, m)$  ; // étape 2
si  $n$  est pair alors ; // étape 3
  | retourner  $x \times x$ 
sinon
  | retourner  $x \times x \times a$ 

```

Proposition 13.1 (Complexité) La complexité en nombre de multiplication par rapport à l'entier positif (noté $C(n)$) vaut $C(n) = O(\log(n))$

Démonstration.

1. $C(n) = C\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + O(1)$
2. C est majoré par $D(n) = D\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + K$
3. D est croissante
4. $D(2^k)$ est une suite arithmétique donc $D(2^k) = O(k)$
5. $C(n) \leq D(n) \leq D(2^{\lceil \log(n) \rceil + 1}) = O(\log(n))$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 4$

□

II Multiplication matricielle

Problème : Étant donné $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille n , on cherche à calculer $A \times B$

Solution naïve : $O(n^3)$

Algorithme 13.2 (Méthode D&R : Algorithme de Strassen) 1. Rajouter des 0 pour que A et B soient de tailles paires. Diviser alors A et B en matrices de taille $\frac{n}{2}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right)$$

2. Calculer récursivement

$$\begin{aligned}
 M_1 &= (A_{1,1} + A_{2,2}) \times (B_{1,1} + B_{2,2}) \\
 M_2 &= (A_{2,1} + A_{2,2}) \times B_{1,1} \\
 M_3 &= A_{1,1} \times (B_{1,2} - B_{2,1}) \\
 M_4 &= A_{2,2} \times (B_{2,1} - B_{1,1}) \\
 M_5 &= (A_{1,1} + A_{1,2}) \times B_{2,2} \\
 M_6 &= (A_{2,1} - A_{1,1}) \times (B_{1,1} + B_{1,2}) \\
 M_7 &= (A_{1,2} - A_{2,2}) \times (B_{2,1} + B_{2,2})
 \end{aligned}$$

3. Calculer $A \times B = \left(\begin{array}{c|c} \frac{M_1 + M_4 - M_5 + M_7}{M_2 + M_4} & \frac{M_3 + M_5}{M_1 - M_2 + M_3 + M_6} \end{array} \right)$

Exercice 13.1 Prouver la correction de l'algorithme de Strassen.

Proposition 13.2 Cette algorithm a une complexité en $O(n^{\log_2(3)})$

Exercice 13.2 Prouver cela en reprenant la preuve pour l'exponentiation en considérant $\frac{D(2^k)}{7^k}$ à l'étape 4 de la preuve

3 Application aux listes

I Recherche dichotomique

Problème : Rechercher un élément a dans une liste L d'éléments triés selon un ordre \leq

Algorithme 13.2 : *recherche_dichotomique*($l, a, debut, fin$)

Entrées : L une liste triée, a un élément

Sorties : i tel que $L[i] = a$ s'il existe, -1 sinon

si $fin < debut$ **alors**

retourner -1

$m \leftarrow \left\lfloor \frac{debut + fin}{2} \right\rfloor$

si $l[m] = a$ **alors**

retourner m

si $l[m] < a$ **alors**

retourner *recherche_dichotomique*($l, a, m + 1, fin$)

sinon

retourner *recherche_dichotomique*($l, a, debut, m + 1$)

Exercice 13.3 Ecrire le code en plus de lignes et faire apparaître les 3 étapes de D&R

Proposition 13.3 La recherche dichotomique est en $O(\log |L|)$

Exercice 13.4 Écrire une version itérative de cet algorithme

II Tri fusion

Algorithme 13.3 : *fusion*(L_1, L_2)

Entrées : L_1, L_2 deux listes triées d'éléments comparables

Sorties : La fusion des listes L_1 et L_2 triée

$res \leftarrow []$

$i, j \leftarrow 0$

tant que $i < |L_1|$ **et** $j < |L_2|$ **faire**

si $L_1[i] < L_2[j]$ **alors**

$res.ajouter(L_1[i])$

$i \leftarrow i + 1$

sinon

$res.ajouter(L_2[j])$

$j \leftarrow j + 1$

Ajouter le reste de L_1 et de L_2 à res

retourner res

Algorithme 13.4 : *tri_fusion*(*L*)**Entrées :** Une liste *L* d'éléments comparables**Sorties :** La liste *L* triée $n \leftarrow |L|$ **si** $n \leq 1$ **alors** **retourner** *L* $L_1, L_2 \leftarrow \text{partionner}(L) ;$

// Étape 1

 $A \leftarrow \text{tri_fusion}(L_1) ;$

// Étape 2

 $B \leftarrow \text{tri_fusion}(L_2)$ **retourner** *fusion*(*A*, *B*)**Proposition 13.4** *Le tri fusion est $O(n \log n)$ avec $n = |L|$*

Démonstration. Exercice

□

Développement : Correction et terminaison du tri fusion**Application 13.1** *Si l'on veut chercher si K entiers sont présents parmi N , on peut avec I et II faire cela en $O((N + K) \log N)$ au lieu de $O(k \times N)$* **III Tri rapide****Objectif :** Faire un tri D&R en place**Commentaire 13.2** *Ici, on peut avoir des questions sur le tri fusion en place, ce qui existe plus ou moins mais est assez pénible. Donc ça peut valoir le coup de se renseigner sur le sujet.***Idée 13.1** *Choisir un élément appelé pivot et mettre à gauche tous les éléments plus petit, à droite tous les plus grands, puis à trier cette partie à droite et à gauche.***Algorithme 13.5 :** *tri_rapide*(*L*, *debut*, *fin*)**si** $\text{debut} \geq \text{fin} - 1$ **alors** **retourner** *L* $\text{pivot} \leftarrow L[0]$ $i \leftarrow \text{debut}$ $j \leftarrow \text{fin}$ **tant que** $i < j$ **faire** **si** $L[i + 1] \leq \text{pivot}$ **alors** échanger $L[i + 1]$ et $L[i]$ $i \leftarrow i + 1$ **sinon** échanger $L[i + 1]$ et $L[j]$ $j \leftarrow j - 1$ *tri_rapide*(*L*, *debut*, $i - 1$) *tri_rapide*(*L*, $i + 1$, *fin*)**Commentaire 13.3** *Par manque de place, on peut remplacer l'écriture de cet algorithme par un dessin expliquant l'idée, et mettre son écriture en exercice.*

Proposition 13.5 Ce tri est dans le pire des cas en $O(n^2)$, dans le cas moyen en $O(n \log n)$. Il est néanmoins en place (en autorisant un espace non pas constant mais logarithmique).

Commentaire 13.4 L'occasion de briller sur le fait que le tri rapide écrit comme ça n'est pas en place avec la définition première, mais l'est avec la définition élargie où on autorise $O(\log n)$ espace (utilisé par les appels récursifs)

4 Application Géométrique

I Plus petite distance dans le plan

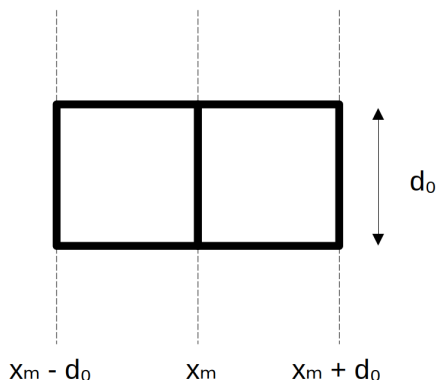
Problème : Étant donné n points de \mathbb{R}^2 , donner la plus petite distance entre deux points

Solution naïve : n multiplications

Algorithme 13.3 (Solution D&R)

1. Choisir une abscisse x_m séparant les points en deux sous-ensembles P_1 et P_2 de taille égale (à + ou - 1)
2. Trouver les plus petites distances d_1 et d_2 de P_1 et P_2
3. Rechercher la plus petite distance d_3 entre deux points dans la bande d'abscisse $[x_m - d_0, x_m + d_0]$ pour $d_0 = \min d_1, d_2$

L'étape 3 peut se faire en ne regardant que les 7 points suivants (suivants au sens de l'ordonnée).



On a au plus 8 éléments dans ce rectangle, car dans chaque domaine, les points sont au moins à distance d_0 . On a donc au plus 4 points par carré, d'où le résultat en mettant notre point sur le bas du rectangle.

Proposition 13.6 On a une complexité en $O(n(\log n)^2)$

II Arbre K-dimensionnel

Problème : Trouver les k plus proches voisins d'un point $y \in \mathbb{R}^K$ parmi un ensemble de n points $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^K$

Solution initiale : Stocker nos k valeurs en cours dans une file de priorité et parcourir les n points, en mettant à jour la file de priorité. $\rightarrow O(n \log k)$

Algorithme 13.4 (Solution D&R) Faire un pré traitement où l'on stockera nos valeurs dans un arbre binaire de recherche, où l'on partitionnera récursivement les données alternativement sur chaque dimension. La recherche se fait alors en ne cherchant que d'un côté si le deuxième n'est pas nécessaire.

Développement : Présentation de la structure d'arbre K-dimensionnel

Proposition 13.7 (Complexité) — *prétraitement : $O(n \log(n))$*

— *Recherche des k plus proches voisins : $O(\log n \times k)$ en moyenne, $O(N \times k)$ dans le pire des cas*

Remarque 13.1 *On y perd pour une seule recherche, mais si on cherche les k -plus proches voisins de N points, on obtient du $O(n \log n + N \times k \times \log n)$ au lieu de $O(N \times n \times \log k)$.*

Commentaire 13.5 *Si il reste beaucoup de places ou si on veut enlever un exemple au dessus (comme le tri rapide faisant doublons avec le tri fusion, même si il est très classique), on peut rajouter une section supplémentaire ici, et parler de l'additionneur à retenue anticipée par méthode D&R du développement *à compléter**

Leçon 14

Programmation dynamique

Auteur·e·s: Emile Martinez

Références :

Commentaire 14.1 On présentera d'abord le principe de la méthode diviser pour régner. Ensuite on divise nos exemples, en deux : ceux qu'on verrait dans la leçon diviser pour régner car ils sont là spécifiquement pour illustrer le paradigme, et ceux que l'on verrait au cours de l'année, et s'appuyant sur le fait qu'on ait déjà vu la méthode diviser pour régner. Cette distinction vient du fait que dans un vrai cours, on ferait comme ça, et les problèmes de la dernière partie serait insérer dans autre chose, et on souligne alors le fait que on ne ferait pas simplement une liste d'algo, mais que pour que le paradigme soit assimiler, il faut mieux le présenter et y revenir régulièrement, plutôt que d'introduire plusieurs fois beaucoup de concepts. (et on met ainsi de la structure sans faire simplement une liste)

1 Principe

I Motivation

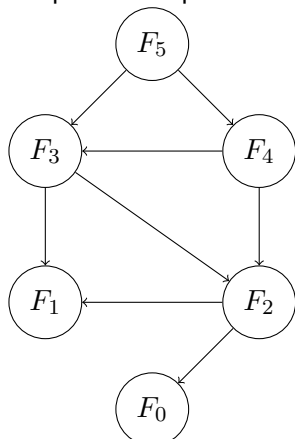
Algorithme 14.1 Implémentation naïve de la suite de Fibonacci

Algorithme 14.1 : $fibonacci(n)$

```
si  $n = 0$  ou  $n = 1$  alors
| retourner  $n$ 
sinon
| retourner  $fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)$ 
```

Proposition 14.1 Complexité en $O(2^n)$

Graphes des dépendances des sous problèmes pour $n = 5$



Les sous-problèmes se chevauchent : la méthode diviser pour régner est inefficace.

En programmation dynamique, on stocke les valeurs des sous-problèmes pour éviter de recalculer.

Algorithme 14.2 Fibonacci avec stockage.**Algorithme 14.2 :** $Fibo(n)$

```

F ← [0, 1]
pour i allant de 2 à n faire
  Ajouter F[i - 1] + F[i - 2] à F
retourner F[n]
  
```

II Définition

Définition 14.1 La programmation dynamique consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes, puis à résoudre les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.

Principe 14.1

1. Complexifier le problème en créant plein de sous-problèmes (dont un sera celui que l'on veut résoudre)
2. Trouver une relation entre les sous-problèmes
3. Résoudre les sous-problèmes en partant du plus petit, en utilisant la relation :
 - Soit impérativement en ayant un tableau des sous-problème qui stockera leur résultat, et en le remplissant avec une (ou des) boucle (méthode ascendante)
 - Soit récursivement en mémorisant. (méthode descendante)

Remarque 14.1 L'algorithme 14.2 utilise la méthode ascendante. On aurait pu utiliser uniquement deux variables et écraser les résultats intermédiaires.

Remarque 14.2 Dans le paradigme diviser pour régner, les sous pb sont indépendants. On peut donc se passer de la mémorisation.

Remarque 14.3 Pour obtenir, en plus de la valeur de la solution optimale, quelle est cette solution, on peut mémoriser quel(s) sous-problème(s) on a utilisé pour l'obtenir.

Développement : Illustration du paradigme sur le problème du chemin dans la pyramide.

2 Algorithmes illustrant le principe

I Rendu de monnaie

Instance : n pièces p_1, \dots, p_n , $S \in \mathbb{N}$

Pb : trouver un n -uplet $T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i p_i = S$ et qui minimise $\sum_{i=1}^n x_i$. (i.e. trouver le nombre de pièces minimum pour rendre la monnaie)

Algorithme 14.3 Approche gloutonne :

1. Ajouter la pièce p_i de plus grande valeur $\leq S$
2. Recommencer avec $S - p_i$

Cet algorithme est-il optimal ?

Exercice 14.1 Avec les pièces $(4, 3, 1)$, trouver une somme S pour laquelle le glouton n'est pas optimal ($S = 6$ convient)

Algorithme 14.4 (Approche par programmation dynamique du rendu de monnaie)

1. On considère les sous-problèmes $R(s)$ pour $s \in \llbracket 0, S \rrbracket$
2. Pour trouver la relation de récurrence, on regarde la dernière pièce rendue p_i . On a alors

$$R(S) = \begin{cases} +\infty & \text{si } S < 0 \\ 0 & \text{si } S = 0 \\ \min_{i \in \{1, \dots, n\}} (R(s - p_i) + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Résolution des sous problèmes (méthode descendante)

Algorithme 14.3 : $\text{rendu}(P, S, m)$

Entrées : P est un tableau tel que $P[i] = p_i$
 m tableau de mémorisation initialisé à 0

si $S = 0$ alors
 └ retourner 0

si $m[S] > 0$ alors
 └ retourner $m[S]$

$n \leftarrow +\infty$

pour $p \in P$ faire
 └ $n \leftarrow \min(n, 1 + \text{rendu}(P, S - p, m))$

$m[S] \leftarrow n$

retourner n

Complexité : $O(n \times S)$

Exercice 14.2 Écrire la méthode ascendante de résolution (i.e. trouver l'ordre de remplissage du tableau)

II Sac à dos

Instance : n objets de poids $\{w_1, \dots, w_n\} \in \mathbb{N}^n$, et de valeur $\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{N}^n$. Une capacité $W \in \mathbb{N}$.

Problème : Trouver $T = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$ et qui maximise $\sum_{i=1}^n x_i v_i$

Exercice 14.3 Proposer des algorithmes gloutons pour résoudre le pb du sac à dos. Sont-ils optimaux ?

Algorithme 14.5 (Approche par programmation dynamique du problème du sac à dos)

1. On considère les sous-problèmes $SD(i, w)$ réduit aux i premiers objets avec une capacité w . La solution qui nous intéresse est celle de $SD(n, W)$

$$2. T(i, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ ou } w = 0 \\ \max \left(\underbrace{T(i-1, w)}_{\text{si l'optimal prend pas l'objet } i}, \underbrace{T(i-1, w - w_i) + v_i}_{\text{si l'optimal prend l'objet } i} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On remplit à i et w croissant.

Remarque 14.4 Le problème de décision associé au problème de sac à dos est NP-complet. Ici, l'algorithme résout le problème d'optimisation en $O(S \times n)$, or la taille de l'instance d'entrée est en $\log |S| + n$, donc notre algorithme n'est pas polynomial en la taille de l'instance.

3 Autres applications

I L'algorithme de Floyd-Warshall

Instance : Un graphe orienté $G = (S, A)$ sans circuit absorbant et une fonction de poids $w : A \rightarrow \mathbb{Z}$

Problème : Déterminer les valeurs des plus courts chemins entre toutes les paires de sommets de G

Algorithme 14.6 (Résolution du problèmes des plus courts chemins en découpant selon les sommets que l'on

On numérote les sommets de $G : S = \{1, \dots, n\}$. On s'intéresse aux sous problèmes $FW(i, j, k)$ qui correspond au plus court chemin de i à j empruntant des sommets intermédiaires dans $\{1, \dots, k\}$. Les problèmes qui nous intéressent sont $FW(i, j, n)$ pour $i \neq j$.

$$2. FW(i, j, k) = \begin{cases} w(i, j) & \text{si } k = 0 \\ \min \left(\underbrace{F(i, j, k-1)}_{\substack{\text{si le plus court} \\ \text{chemin de } i \text{ à } j \\ \text{n'utilise pas } k}}, \underbrace{F(i, k, k-1) + F(k, j, k-1)}_{\substack{\text{si le plus court} \\ \text{chemin de } i \text{ à } j \\ \text{utilise } k}} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Résolution par la méthode ascendante

Algorithme 14.4 : Floyd – Warshall(G)

$W \leftarrow$ matrice d'adjacence de G

pour k allant de 1 à n **faire**

pour i allant de 1 à n **faire**

pour j allant de 1 à n **faire**

$W[i, j] \leftarrow \min(W[i, j], W[i, k] + W[k, j])$

Complexité : $O(|S|^3)$

Remarque 14.5 On écrase la matrice au fur et à mesure car l'étape k ne dépend que de l'étape $k - 1$

Remarque 14.6 On aurait pu découper les sous problèmes différemment. Par exemple, on peut découper au chemin de taille au plus k . On retombe alors sur un algorithme de routage en réseau.

Développement : Terminaison et discussion autour de l'algorithme de Bellman-Ford

II Distance de Levenshtein (d'édition)

Définition 14.2 La **distance de Levenshtein** correspond au nombre minimum d'opérations (suppression, modification ou ajout d'une lettre) pour transformer un chaîne de caractère en l'autre.

Plus formellement, pour $a \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$ on définit

★ $ins_{a,i} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* : \text{insertion de la lettre } a \text{ à la position } i$

★ $sub_{a,i} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* : \text{modification de la lettre à la position } i \text{ en } a$

★ $sup_i : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* : \text{suppression de la lettre à la position } i$

et alors $lev(w_1, w_2) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists f_1, \dots, f_k \in \{ins_{a,i}, sub_{a,i}, sup_i \mid a \in \Sigma, i \in \mathbb{N}\} : w_2 = f_k \circ \dots \circ f_1(w_1) \right\}$

Exercice 14.4 C'est une distance.

Commentaire 14.2 Ici on ne donne que l'idée parce que on a pas la place et parce que l'élève peut avoir le recul pour trouver lui-même

Algorithme 14.7 (Idée de l'approche par programmation dynamique pour la distance de levenshtein) 1.

1. Considérer la distance d'édition entre tous les préfixes de w_1 et w_2
2. Considérer la modification sur la dernière lettre (rien, insertion, suppression ou modification)
3. Résoudre à préfixe croissant