

Rapport EA MEC570 : Analyse et dimensionnement du viaduc de Garabit

Charles FORESTIER et Émile ZACCOMER
École polytechnique, Habibou MAITOURNAM

2023

Résumé

Ce rapport présente une relecture moderne des travaux de Gustave Eiffel sur le viaduc de Garabit, tels que présentés dans son *Mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de Garabit* ([Eif89a]). Nous reprenons en particulier dans un cas précis (tablier latéral) certains calculs de systèmes hyperstatiques menés par Eiffel, qui font appel à des méthodes analytiques désormais peu utilisées aujourd’hui mais qui s’avèrent assez instructives. Le cœur de l’étude consiste toutefois en la modélisation numérique de l’ensemble du viaduc, qui est décrit comme un assemblage de poutres de sections et inerties variables. En particulier, nous tentons de comprendre le choix par Eiffel d’une forme parabolique pour l’arche centrale du viaduc, en présentant des arguments analytiques et numériques. Enfin, une fois notre modèle établi, nous le soumettons à divers chargements et comparons sa réponse à celle calculée par Eiffel.



Imp. Phot. AROM Frères, 30, rue Lebrun, Paris.

FIGURE 1 – Photographie du viaduc de Garabit (source : [Eif89b]).

Table des matières

1	Introduction	3
2	Tablier Marvejols	3
2.1	Présentation	3
2.1.1	Calcul des sections et des inerties équivalentes	4
2.1.2	Hypothèses de chargement	4
2.1.3	Critère de dimensionnement	5
2.2	Étude analytique	5
2.2.1	Présentation de la méthode des 3 moments	5
2.2.2	Formule des 3 moments	6
2.2.3	Résolution du système hyperstatique	6
2.2.4	Réponse aux charges	7
2.3	Étude numérique	7
2.3.1	Maillage de la structure	7
2.3.2	Modèle et comportement du matériau	7
2.3.3	Conditions aux limites	7
2.3.4	Chargement	8
2.3.5	Résultats hypothèse H0	8
2.3.6	Résultats hypothèse H1	8
2.3.7	Résultats hypothèse H2	8
2.3.8	Résultats hypothèse H3	9
2.3.9	Résultats hypothèse H4	10
2.3.10	Résultats hypothèse H5	10
2.4	Bilan de l'étude du tablier Marvejols	11
3	Arche centrale	11
3.1	Présentation	11
3.1.1	Calcul des sections et des inerties équivalentes	11
3.1.2	Hypothèses de chargement	12
3.2	Étude analytique	12
3.2.1	Analyse du choix de courbure	13
3.3	Étude numérique	13
3.3.1	Maillage de la structure et chargement	13
3.3.2	Cas circulaire	13
3.3.3	Cas parabolique	14
3.3.4	Cas de la chaînette	14
4	Viaduc complet	15
4.1	Présentation	15
4.1.1	Calcul des sections et des inerties équivalentes	15
4.1.2	Hypothèses de chargement	16
4.2	Étude analytique	17
4.3	Étude numérique	18
4.3.1	Résultats hypothèse H1	18
4.3.2	Résultats hypothèse H2	19
5	Conclusion	20
6	Références	20

1 Introduction

Le viaduc de Garabit est un viaduc ferroviaire qui permet le franchissement de la Truyère et dont la construction fut achevée en 1884. Conçu à l'origine par Léon Boyer, c'est Gustave Eiffel qui fut finalement chargé de sa finalisation et de sa réalisation. Eiffel rédigea en particulier le dossier du projet définitif, dont la version finale (publiée en 1889) *Mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de Garabit* ([Eif89a]) servira de fil conducteur tout au long de notre étude.

Schématiquement, le viaduc de Garabit est composé de trois grandes parties : le tablier Marvejols, le tablier Neussargues et l'arche centrale (voir Figure 2).

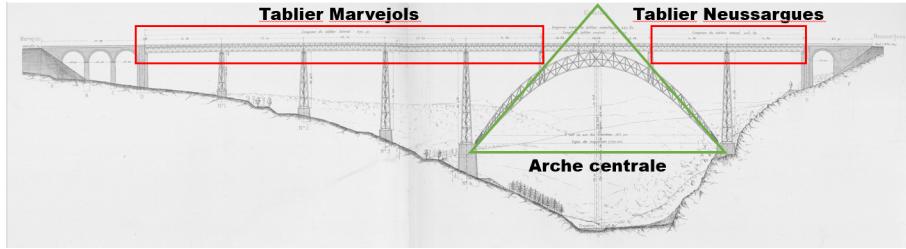


FIGURE 2 – Découpage du Viaduc en 3 parties (source du fond du schéma : [Eif89b])

L'objectif de cette étude est de proposer une modélisation analytique et numérique simple de l'ensemble de ces éléments grâce à un assemblage de poutres. On cherchera notamment à comparer les résultats analytiques obtenus par Gustave Eiffel en 1880 (parfois au prix d'hypothèses simplificatrices) aux résultats numériques que permettent d'obtenir directement les méthodes de calcul modernes par éléments finis.

L'étude s'appuiera sur deux sources majeures : le mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de Garabit ([Eif89a]) et les planches jointes au mémoire sur le viaduc de Garabit ([Eif89b]), tous deux signés de Gustave Eiffel. De plus, les calculs numériques seront réalisés à l'aide du logiciel Cast3M (développé par le CEA).

Dans un premier temps, nous étudions le dimensionnement du tablier Marvejols. L'étude est à la fois analytique et numérique, ce qui permet de comparer les deux approches. Ensuite, nous étudions le dimensionnement de l'arche centrale, pièce maîtresse du viaduc. Nous tentons notamment de justifier le choix par Eiffel d'une forme parabolique. Enfin, nous étudions le dimensionnement de l'ensemble du viaduc, en combinant les modèles des deux premières parties et en y adjoignant le reste de la structure (tablier central, tablier Neussargues et piles).

2 Tablier Marvejols

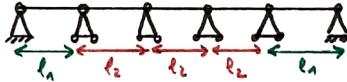
2.1 Présentation

En première approximation, le tablier Marvejols peut être modélisé par une poutre (de section et d'inertie constantes) sur 6 appuis. Chaque appui est un appui simple : la rotation est libre, et les translations sont bloquées selon la verticale \vec{e}_y et libres selon l'horizontale \vec{e}_x (à l'exception des deux appuis extrémaux, dont les translations sont bloquées à la fois en \vec{e}_x et \vec{e}_y). La poutre est représentée Figure 3a. Formellement, les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \llbracket M \rrbracket_{appui i} &= 0 \\ \llbracket N \rrbracket_{appui i} &= 0 \\ \llbracket T \rrbracket_{appui i} &= \text{inconnue} \end{aligned}$$

où le symbole $\llbracket X \rrbracket_{appui i}$ désigne la différence entre la limite à droite et la limite à gauche de la grandeur X au niveau du point d'appui i .

Le chargement prend la forme d'un ensemble de forces verticales linéaires $\{p_i\}$, où p_i désigne la force linéaire s'exerçant sur la travée i . Il est représenté Figure 3b.



(a) Modélisation du tablier par une poutre sur 6 appuis



(b) Modélisation des efforts s'exerçant sur le tablier

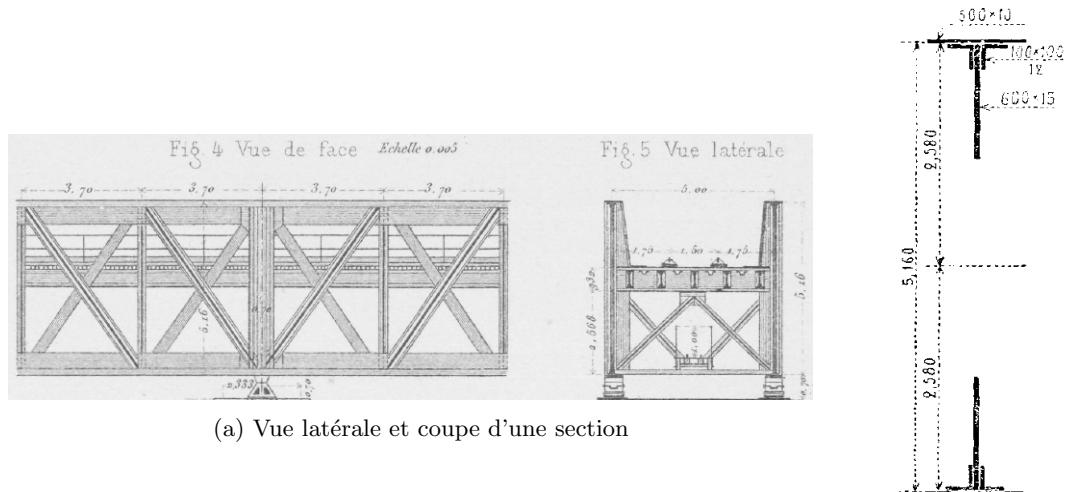
FIGURE 3 – Modélisation du tablier Marvejols

Par la suite, pour alléger l'étude, nous n'étudierons que le dimensionnement des tables horizontales du tablier. Nous n'aborderons donc pas le dimensionnement des barres de treillis formant les parois verticales des poutres, des panneaux sur palées et culées, des pièces de ponts, et des longerons.

De plus, par symétrie du tablier dans le plan xy , l'étude se portera uniquement sur un "demi" tablier. En particulier, nous conserverons uniquement la moitié du chargement linéaire total supporté par le tablier.

2.1.1 Calcul des sections et des inerties équivalentes

Pour simplifier l'étude, nous adoptons la même hypothèse qu'Eiffel pour le calcul des sections et des inerties équivalentes décrivant les tables horizontales du tablier. Nous conservons donc uniquement la partie constante des sections (voir Figure 4). Un calcul donne alors une section $A = 0.0376 m^2$ et (*via* une méthode de soustractions successives de sections rectangles) une inertie $I = 0.220 m^4$. De plus, la distance maximale entre un point d'une section de la poutre et sa fibre moyenne vaut $e = 2,59 m$.



(a) Vue latérale et coupe d'une section

(b) Détail de la partie conservée pour les calculs

FIGURE 4 – Schémas du tablier Marvejols (source : [Eif89b])

2.1.2 Hypothèses de chargement

Eiffel dimensionne le tablier de sorte à ce qu'il puisse résister aux moments fléchissants qui se développent sous l'effet de plusieurs hypothèses de chargement :

- H0 : aucune travée chargée (poids propre uniquement)
- H1 : première travée chargée
- H2 : deuxième travée chargée
- H3 : troisième travée chargée
- H4 : première et deuxième travée chargées
- H5 : deuxième et troisième travée chargées

	p_1 (kg/m)	p_2 (kg/m)	p_3 (kg/m)	p_4 (kg/m)	p_5 (kg/m)
H0	1695	1695	1695	1695	1695
H1	$1695 + 2400$	1695	1695	1695	1695
H2	1695	$1695 + 2400$	1695	1695	1695
H3	1695	1695	$1695 + 2400$	1695	1695
H4	$1695 + 2400$	$1695 + 2400$	1695	1695	1695
H5	1695	$1695 + 2400$	$1695 + 2400$	1695	1695

2.1.3 Critère de dimensionnement

Le tablier est dimensionné de sorte à rester en tout point sous son seuil de plasticité : $f(\underline{\sigma}(x)) \leq \sigma_y$. Dans le cas d'une poutre, cette condition devient en termes de moments fléchissants :

$$|M(x)| < \frac{\sigma_y I}{e} \quad \forall x$$

où σ_y est la contrainte de limite d'élasticité du matériau considéré, I l'inertie de la poutre et e son épaisseur¹. Les données de l'époque d'Eiffel donnent une limite d'élasticité $\sigma_y \approx 40 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$ (voir [Deb74]). Eiffel prend sans doute un coefficient de sécurité de l'ordre de 1/7, puisqu'il utilise plutôt une contrainte limite $\sigma_y = 6 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$.

Avec les valeurs de I et de e calculées précédemment, on obtient alors un moment fléchissant limite :

$$M_c = \frac{\sigma_y I}{e} = 509\,653 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

2.2 Étude analytique

2.2.1 Présentation de la méthode des 3 moments

On remarque tout d'abord qu'une résolution en efforts conduit à un système hyperstatique d'ordre 4 (NB : on ne s'intéresse qu'au comportement vertical du tablier). En effet, en considérant comme inconnues les réactions verticales des 6 appuis, on ne dispose que de 2 équations en efforts (force verticale et moment par rapport à un point pivot quelconque).

Pour résoudre un tel système hyperstatique, l'idée consiste alors à utiliser la méthode des 3 moments : on découpe la poutre sur 6 appuis en 5 petites poutres sur 2 appuis, en introduisant comme inconnues les moments fléchissants M_i sur chaque appui (Figure 5). Notons que l'on a $M_0 = -\mathcal{M}_{ext}(0) = 0$ et $M_5 = \mathcal{M}_{ext}(5) = 0$ (rotation libre), donc on a toujours 4 inconnues hyperstatiques M_1, M_2, M_3 et M_4 (à la place des 4 réactions verticales).



FIGURE 5 – Principe de la méthode des 3 moments.

La formule des 3 moments (que nous expliciterons plus loin) permet alors d'obtenir un système linéaire de 4 équations que doivent vérifier les $\{p_i\}$ (les 4 moments fléchissants "intérieurs" du tablier). La résolution de ce système permet ensuite d'obtenir la valeur de ces moments fléchissants en fonction du chargement $\{p_i\}$, et ensuite de résoudre le système hyperstatique de départ (les efforts et les déplacement dans le tablier étant entièrement déterminés par les $\{p_i\}$ et les $\{M_i\}$).

1. Ou plus généralement la distance de la fibre la plus éloignée à la fibre moyenne de la poutre.

2.2.2 Formule des 3 moments

Au niveau de la i-ème poutre, la formule des 3 moments s'écrit (voir par exemple [Cou64]) :

$$l_i M_{i-1} + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + l_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\theta'_{0,i+1} - \theta'_{0,i})$$

avec, dans le cas d'un chargement linéique $\{p_i\}$:

$$6EI(\theta'_{0,i+1} - \theta'_{0,i}) = -\frac{p_{i+1}l_{i+1}^3}{4} - \frac{p_il_i^3}{4}$$

2.2.3 Résolution du système hyperstatique

Dans notre cas, la méthode des 3 moments conduit aux 4 équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2M_1(l_1 + l_2) + l_2M_2 &= -\frac{p_2l_2^3}{4} - \frac{p_1l_1^3}{4} \\ l_2M_1 + 4M_2l_2 + l_2M_3 &= -\frac{p_3l_2^3}{4} - \frac{p_2l_2^3}{4} \\ l_2M_2 + 4M_3l_2 + l_2M_4 &= -\frac{p_4l_2^3}{4} - \frac{p_3l_2^3}{4} \\ l_2M_3 + 2M_4(l_1 + l_2) &= -\frac{p_5l_1^3}{4} - \frac{p_4l_2^3}{4} \end{aligned}$$

La résolution de ce système (à l'aide d'un logiciel de calcul formel) permet alors d'obtenir les expressions des inconnues $\{M_i\}$ en fonction du chargement $\{p_i\}$. On obtient par exemple pour le moment fléchissant M_1 au niveau du 2e appui :

$$M_1 = \frac{1}{4(60l_1^2 + 104l_1l_2 + 45l_2^2)} \left(p_1(30l_1^4 + 26l_1l_2) + p_2(22l_1l_2^3 + 19l_2^4) - p_3(6l_1l_2^3 + 5l_2^4) + p_4(2l_1l_2^3 + l_2^4) - p_5l_1^3l_2 \right)$$

ce qui est bien conforme à l'expression directement donnée par Eiffel (sans avoir détaillé les calculs en amont) à la page 23 de son mémoire.

En utilisant les valeurs $l_1 = 51,8 \text{ m}$ et $l_2 = 55,5 \text{ m}$ on obtient (en arrondissant les coefficients au centième) :

$$\begin{aligned} M_1 &= 173,97p_1 + 156,65p_2 - 42,00p_3 + 11,36p_4 - 3,22p_5 \\ M_2 &= -46,60p_1 + 164,33p_2 + 162,41p_3 - 43,92p_4 + 12,45p_5 \\ M_3 &= 12,45p_1 - 43,92p_2 + 162,41p_3 + 164,33p_4 - 46,60p_5 \\ M_4 &= -3,22p_1 + 11,36p_2 - 42,00p_3 + 156,65p_4 + 173,97p_5 \end{aligned}$$

Une fois les moments fléchissants aux niveaux des appuis $\{M_i\}$ connus, on peut en déduire la valeur du moment fléchissant $M(x)$ et de l'effort tranchant $T(x)$ en tout point du tablier en fonction du chargement $\{p_i\}$. Le moment fléchissant dans le courant de la travée i est par exemple donné par² :

$$M_i(x) = \frac{x}{l_i}M_{i+1} + (1 - \frac{x}{l_i})M_i - \frac{p_i}{2}x(l - x)$$

On peut ensuite en déduire le maximum des moments fléchissant dans le courant de chaque travée (on ne tient pas compte des moments fléchissants aux niveaux des appuis $\{M_i\}$) :

$$M_{max,i} = M_i - \frac{p_i}{2} \left(\frac{M_i - M_{i+1}}{p_il_i} + \frac{l_i}{2} \right)^2$$

2. Pour alléger les notations, l'origine des abscisses est ici prise au début de la travée.

puis le maximum des moments fléchissants dans l'ensemble du tablier :

$$M_{max} = \max(\{M_i\}, \max_i M_{max,i})$$

2.2.4 Réponse aux chargements

	Localisation M_{max}	Expression M_{max}	Valeur M_{max} ($kg \cdot m$)
H0	première et quatrième piles	$M_{max} = M_1 = M_4$	503 018
H1	première travée	$M_{max} = -\frac{p_1}{2} \left(-\frac{M_1}{p_1 l_1} + \frac{l_1}{2} \right)^2$	-951 771
H2	première pile	$M_{max} = M_1$	878 981
H3	troisième travée	$M_{max} = M_2 - \frac{p_3}{2} \left(\frac{M_2 - M_3}{p_3 l_2} + \frac{l_3}{2} \right)^2$	-765 411
H4	première pile	$M_{max} = M_1$	1 296 518
H5	deuxième pile	$M_{max} = M_2$	1 205 691

On remarque que ces maximums de moments fléchissants dépassent nettement la valeur limite $M_c = \frac{\sigma_y I}{e} = 509 653 kg \cdot m$. Pour s'en sortir, Eiffel augmente l'épaisseur e de la poutre en certains points. On montre alors qu'une variation d'épaisseur Δe conduit à un moment critique :

$$M'_c = \frac{\sigma_y I(e + \Delta e)}{e + \Delta e} = \frac{\frac{I}{e} + \frac{2le^2}{3}((1 + \frac{\Delta e}{e})^3 - 1)}{1 + \frac{\Delta e}{e}}$$

où l désigne la largeur de la section de la poutre ($l = 0,5$ m).

L'ajout d'une semelle de 32 mm d'épaisseur sur la première travée conduit par exemple à un moment critique $M'_c = 1 001 033 kg \cdot m$, qui permet bien de supporter le moment fléchissant maximum de l'hypothèse H1 $M_{max} = -951 783 kg \cdot m$. On retrouve ainsi les résultats donnés par Eiffel page 27 de son mémoire.

2.3 Étude numérique

2.3.1 Maillage de la structure

La structure est simplement constitué d'un ensemble de 5 droites, chaque droite modélisant une travée. Les droites comportent chacune $n = 100$ noeuds.

2.3.2 Modèle et comportement du matériau

On utilise le modèle "poutre", avec un comportement élastique linéaire isotrope. Nous devons donc déclarer 5 paramètres :

- le module d'Young E du matériau
- le coefficient de Poisson ν du matériau
- la section A de la poutre
- l'inertie (ou plus rigoureusement le moment quadratique) I de la poutre
- la masse volumique ρ du matériau

On utilise la section et l'inertie calculées en 2.1.1. On utilise de plus les coefficients caractéristiques du fer (dont est majoritairement composé le viaduc de Garabit) : $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7800$ $kg \cdot m^{-3}$.

2.3.3 Conditions aux limites

Comme vu en 2.1, nous modélisons le tablier Marvejols par une poutre sur 5 appuis. Tous les appuis ont une rotation libre et un déplacement selon la verticale \vec{e}_y bloqué. De plus, les deux appuis extrémaux ont également un déplacement selon l'horizontale \vec{e}_x bloqué.

2.3.4 Chargement

Pour implémenter un chargement linéique dans Cast3M, il convient d'abord de construire un champ de gravité équivalent (= champ de gravité donnant un poids linéique égal au chargement linéique considéré) ; on multiplie ensuite ce champ de gravité par la masse de la structure en chaque noeud.

Dans les hypothèses de chargement étudiées (voir 2.1.2), seulement deux chargements linéiques peuvent être rencontrés : $p_{propre} = 1695 \text{ kg/m}$ et $p_{charge} = 2400 \text{ kg/m}$. Pour déterminer les champs de gravité équivalents, il est nécessaire de calculer la masse linéique de la poutre. On a $\rho_{poutre} = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $A = 0.0376 \text{ m}^2$ d'où une masse linéique $\mu = 293 \text{ kg/m}$. D'où les champs de gravité équivalents $g_{propre} = 5.78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $g_{charge} = 8.18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2.3.5 Résultats hypothèse H0

Dans l'hypothèse de chargement H0 ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_{propre}$) on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant. On a par ailleurs représenté la déformée et les moments fléchissants Figure 6.

	$M_1 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_2 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_3 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_4 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_{max} (\text{kg} \cdot \text{m})$
Analytique	503 011	421 500	421 500	503 011	503 018
Numérique	503 018	421 496	421 496	503 018	503 018

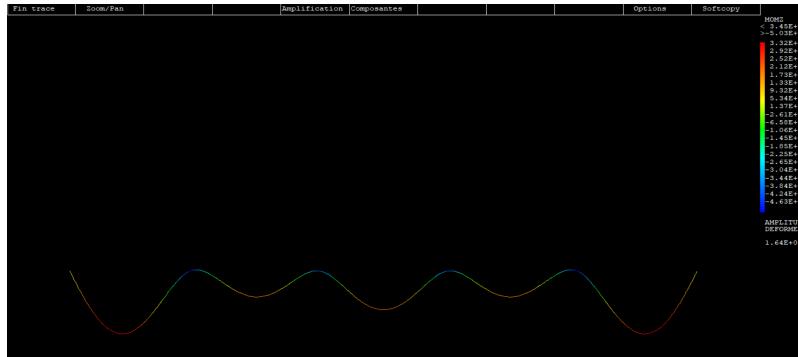


FIGURE 6 – Déformée et moments fléchissants dans l'hypothèse H0

On retrouve bien le fait que le moment fléchissant maximum est localisé au niveau des première et quatrième piles ($M_{max} = M_1 = M_4$). De plus, on obtient bien une réponse symétrique par rapport au centre du tablier : c'était prévisible, car la géométrie et le chargement ont cette symétrie. Par ailleurs, la déformée verticale maximale est de 0,2 mm.

2.3.6 Résultats hypothèse H1

Dans l'hypothèse de chargement H1 ($p_1 = p_{propre} + p_{charge}$ et $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_{propre}$) on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant. On a par ailleurs représenté la déformée et les moments fléchissants Figure 7.

	$M_1 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_2 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_3 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_4 (\text{kg} \cdot \text{m})$	$M_{max} (\text{kg} \cdot \text{m})$
Analytique	920 547	309 642	451 398	495 279	-951 771
Numérique	913 062	307 720	451 906	495 153	-954 332

On retrouve bien le fait que le moment fléchissant maximum est localisé dans la première travée. Par ailleurs, la déformée verticale maximale est de 5 mm.

2.3.7 Résultats hypothèse H2

Dans l'hypothèse de chargement H2 ($p_2 = p_{propre} + p_{charge}$ et $p_1 = p_3 = p_4 = p_5 = p_{propre}$) on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant. On a par ailleurs représenté la déformée et les moments fléchissants Figure 8.

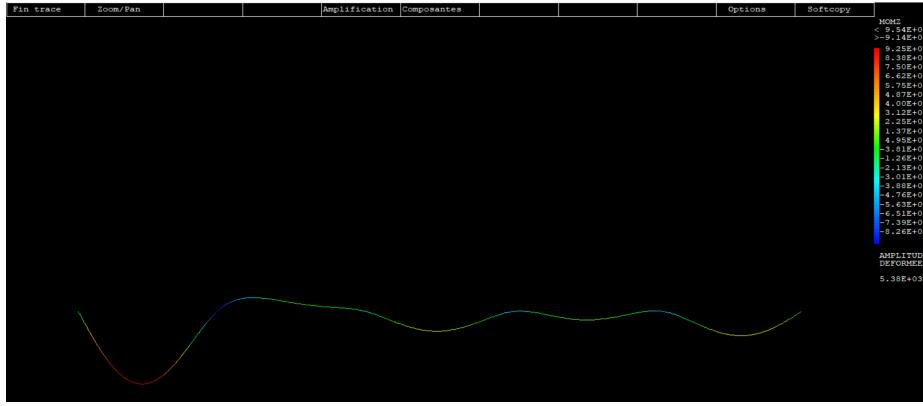


FIGURE 7 – Déformée et moments fléchissants dans l’hypothèse H1

	M_1 ($kg \cdot m$)	M_2 ($kg \cdot m$)	M_3 ($kg \cdot m$)	M_4 ($kg \cdot m$)	M_{max} ($kg \cdot m$)
Analytique	878 981	815 899	316 085	530 274	878 981
Numérique	872 739	810 075	313 720	530 891	872 739

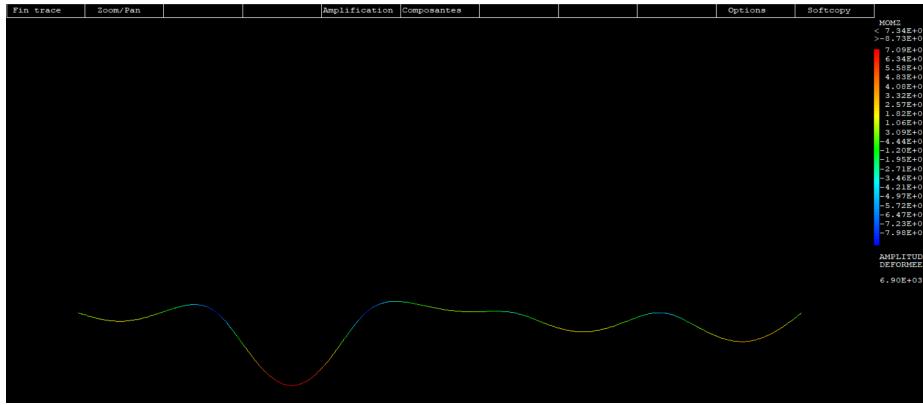


FIGURE 8 – Déformée et moments fléchissants dans l’hypothèse H2

On retrouve bien le fait que le moment fléchissant maximum est localisé au niveau de la première pile ($M_{max} = M_1$). Néanmoins, des efforts importants de développent également au niveau de la deuxième pile ($M_{max} \approx M_2$). Par ailleurs, la déformée verticale maximale est de 7 mm.

2.3.8 Résultats hypothèse H3

Dans l’hypothèse de chargement H3 ($p_3 = p_{propre} + p_{charge}$ et $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p_{propre}$) on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant. On a par ailleurs représenté la déformée et les moments fléchissants Figure 9.

	M_1 ($kg \cdot m$)	M_2 ($kg \cdot m$)	M_3 ($kg \cdot m$)	M_4 ($kg \cdot m$)	M_{max} ($kg \cdot m$)
Analytique	402 203	811 292	811 292	402 203	-765 411
Numérique	399 953	805 361	805 361	399 953	-770 340

On retrouve bien le fait que le moment fléchissant maximum est localisé dans la troisième travée. De plus, on obtient bien une réponse symétrique par rapport au centre du tablier : c’était prévisible, car la géométrie et le chargement ont cette symétrie. De plus, on remarque que des efforts importants se développent au voisinage des deuxième et troisième piles ($M_{max} \approx M_2$ et M_3). Par ailleurs, la déformée verticale maximale est de 6 mm.

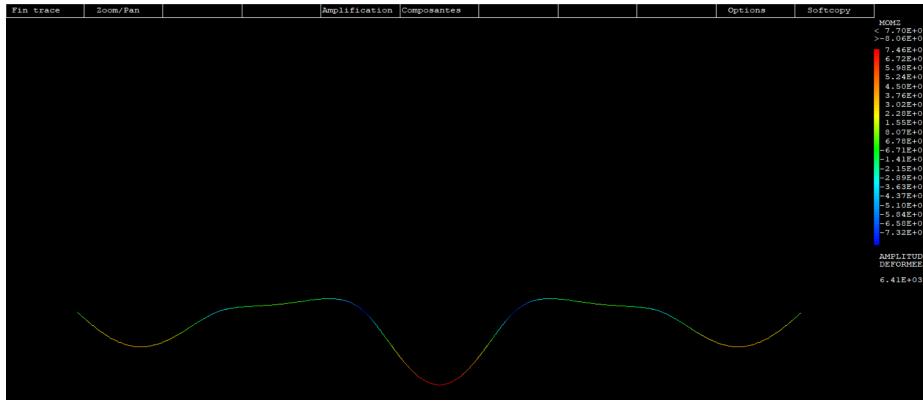


FIGURE 9 – Déformée et moments fléchissants dans l’hypothèse H3

2.3.9 Résultats hypothèse H4

Dans l’hypothèse de chargement H4 ($p_1 = p_2 = p_{propre} + p_{charge}$ et $p_3 = p_4 = p_5 = p_{propre}$) on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant. On a par ailleurs représenté la déformée et les moments fléchissants Figure 10.

	$M_1 (kg \cdot m)$	$M_2 (kg \cdot m)$	$M_3 (kg \cdot m)$	$M_4 (kg \cdot m)$	$M_{max} (kg \cdot m)$
Analytique	1 296 518	704 040	345 982	522 542	1 296 518
Numérique	1 297 910	696 357	344 114	523 030	1 297 910

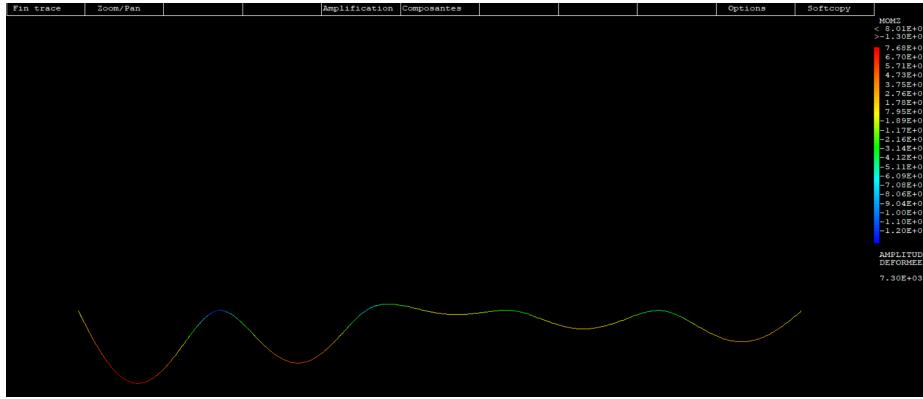


FIGURE 10 – Déformée et moments fléchissants dans l’hypothèse H4

On retrouve bien le fait que le moment fléchissant maximum est localisé au niveau de la première pile ($M_{max} = M_1$). Par ailleurs, la déformée verticale maximale est de 7 mm.

2.3.10 Résultats hypothèse H5

Dans l’hypothèse de chargement H5 ($p_2 = p_3 = p_{propre} + p_{charge}$ et $p_1 = p_4 = p_5 = p_{propre}$) on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant. On a par ailleurs représenté la déformée et les moments fléchissants Figure 11.

	$M_1 (kg \cdot m)$	$M_2 (kg \cdot m)$	$M_3 (kg \cdot m)$	$M_4 (kg \cdot m)$	$M_{max} (kg \cdot m)$
Analytique	778 173	1 205 691	705 876	429 466	1 205 691
Numérique	769 736	1 209 040	697 648	427 809	1 209 040

On retrouve bien le fait que le moment fléchissant maximum est localisé au niveau de la deuxième pile ($M_{max} = M_2$). Par ailleurs, la déformée verticale maximale est de 9 mm.

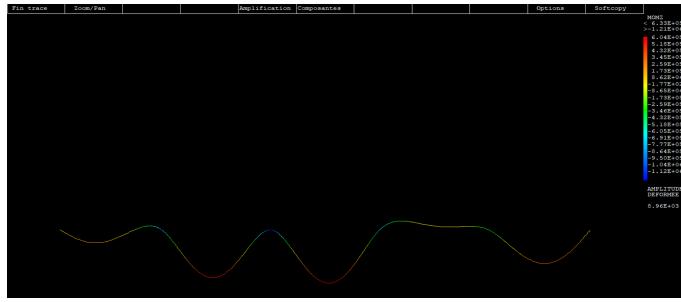


FIGURE 11 – Déformée et moments fléchissants dans l’hypothèse H5

2.4 Bilan de l’étude du tablier Marvejols

Ce cas a permis de vérifier la qualité de notre implémentation numérique. En effet, le système admettant une solution analytique exacte, nous avons pu la comparer aux résultats donnés par la simulation. On obtient pour l’ensemble des hypothèses de chargement une erreur inférieur à 1%, ce qui est satisfaisant.

Notons que l’étude du tablier Marvejols pourrait être approfondie, par exemple en dimensionnant les éléments du tablier autres que les poutres principales (barres de treillis des parois verticales, panneaux sur palées et culées, pièces de pont, longerons).

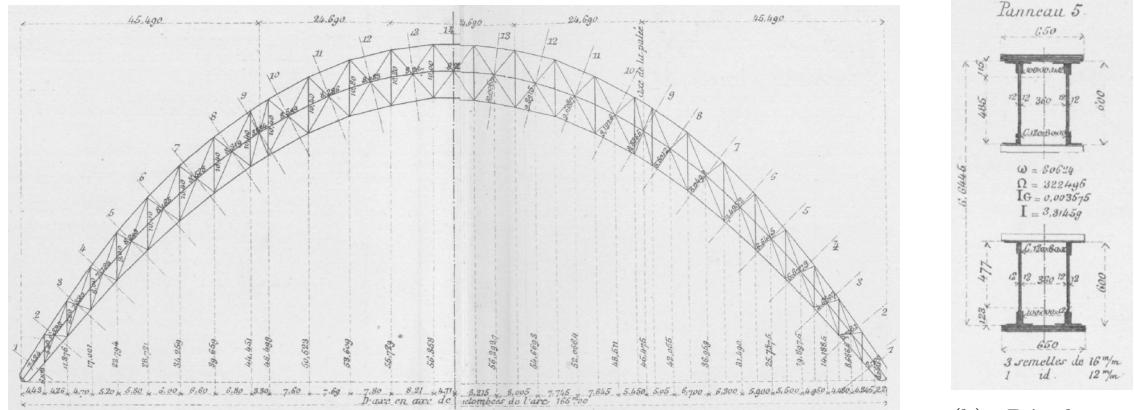
3 Arche centrale

3.1 Présentation

En première approximation, l’arche centrale peut être modélisée par une poutre (de section et d’inertie variables) de forme parabolique, encastrée au niveau de ses deux extrémités.

3.1.1 Calcul des sections et des inerties équivalentes

Pour modéliser la forme parabolique de l’arche et la variation de sa section et de son inertie, on la discrétise en un assemblage de 27 éléments de section et inertie différentes (les 27 éléments apparaissent Figure 12a et correspondent aux 27 montants réels de l’arche). Pour le calcul de ces sections et inerties, on ne conserve en chaque point que les contributions des deux montants situés de part et d’autre de la fibre moyenne de l’arche (voir Figure 12b).



(a) Coupe transversale de l’arche et découpage en 27 montants

(b) Détail : coupe montrant les deux montants

FIGURE 12 – Schémas de l’arche (source : [Eif89b])

3.1.2 Hypothèses de chargement

Eiffel donne les valeurs suivantes de poids d'exerçant sur chaque montant :

Montant	Poids propre du montant (kg)
Appui	21 065
I	41 905
II	42 760
III	44 416
IV	44 609
V	43 632
VI	43 763
VII	44 540
VIII	35 298
IX	30 921
X	33 914
XI	32 783
XII	35 545
XIII	34 376

Le poids propre retenu ici prend donc la forme d'un ensemble de forces ponctuelles, et non d'un chargement linéaire. Cela facilitera grandement l'implémentation numérique.

3.2 Étude analytique

Une question naturelle se pose lors de l'étude du viaduc de Garabit : quelle forme d'arche a été choisie (et pourquoi) ? En rentrant manuellement une série de points décrivant la fibre moyenne de l'arche depuis les schémas d'Eiffel, on peut effectuer une série de régressions linéaires afin de déterminer la fonction la mieux adaptée. On se propose de comparer les modèles d'approximations suivant : chaînette, parabole, cercle. L'utilisation de la bibliothèque `scipy.optimize` de Python permet de programmer un code produisant le graphe de la Figure 13. Le meilleur coefficient de corrélation est obtenu pour la parabole, et il est de $R^2 = 0,99991$, valeur particulièrement élevée.

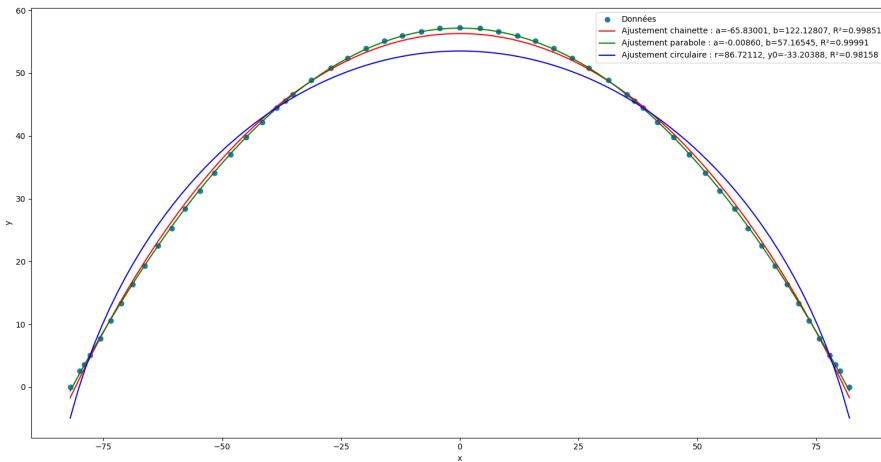


FIGURE 13 – Comparaison des modèles d'approximations retenus, avec paramètres optimaux et coefficients de corrélations R^2

3.2.1 Analyse du choix de courbure

Le modèle de la chaînette, d'équation $y = a \cosh(\frac{x}{a}) + b$, très proche de la parabole, pouvait sembler meilleur, car il permet de minimiser les efforts de traction d'un fil sous poids propre. Il permet donc, par symétrie, de minimiser les efforts de compression dans une arche en poids propre. Un calcul infinitésimal sur un élément élémentaire e situé entre x et $x + dx$ de fil en poids propre nous donne, en notant $T(x)$ la tension s'appliquant sur l'élément e ,

$$\begin{cases} T_x(x) = T_x(x + dx) \\ T_y(x) - T_y(x + dx) = P \end{cases} .$$

La tension horizontale est donc constante et la tension verticale dépend du poids s'appliquant sur le fil. C'est ici qu'une disjonction de cas importante à lieu. Si l'on prends P proportionnel à la longueur du fil $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, alors le calcul nous mène au modèle bien connu de la chaînette, avec l'apparition d'un cosinus hyperbolique comme solution de l'équation différentielle $y''(x) = \frac{\mu g}{T_x} \sqrt{1 + y''(x)^2}$. Cependant, si l'on choisit P proportionnel à la longueur dx , en imaginant un chargement linéaire selon l'axe x , alors on obtient tout simplement l'équation différentielle $T'_y(x) = \mu g$ qui nous mène à la solution $y(x) = \frac{T_x}{\mu g} x^2$ qui décrit une parabole.

Le choix de la parabole revient donc tout simplement à négliger le poids propre de l'arche devant les chargements linéaires possibles pouvant s'appliquer au-dessus de la fibre (ou du moins à considérer que ce sont ces derniers qui sont déterminants), ce qui justifie le choix d'Eiffel.

Comme nous le verrons dans l'étude numérique suivante, de telles formes parabolique permettent d'éviter que la courbe des pressions puisse sortir de l'arc, ce qui impose de très grands efforts de flexion sur certaines parties extérieures de la fibre (voir Figure 14).

3^e — FORME PARABOLIQUE DONNÉE A L'ARC ET RAPPROCHEMENT DES PALÉES INTERMÉDIAIRES VERS LA CLEF

Pour que l'arc travaille dans son entier à des efforts de compression, et que la courbe des pressions ne sorte jamais de l'arc, il est nécessaire que le tracé de la fibre moyenne se rapproche le plus possible de cette courbe. C'est ce qui a déterminé M. Eiffel à proposer pour fibre moyenne une parabole du 2^e degré, de manière à avoir près des reins une très faible courbure, et c'est aussi ce qui a conduit à rapprocher autant que possible de la clef les palées intermédiaires par lesquelles le tablier supérieur s'appuie sur l'arc.

FIGURE 14 – Justification d'Eiffel concernant le choix d'un arche parabolique

3.3 Étude numérique

L'idée est ici de mettre en évidence certains phénomènes simples fonction du choix de la courbe de l'arche. L'étude précise du Viaduc, avec cas de chargements et inertie variable le long de la fibre de l'arche, que l'on cherchera à comparer avec les résultats d'Eiffel, sera faite dans la partie suivante, avec une modélisation complète du Viaduc de Garabit.

3.3.1 Maillage de la structure et chargement

La structure est maillée en suivant différents modèles que l'on cherche à comparer simplement : circulaire, chaînette (hyperbolique) et parabolique. Les arches sont composée dans tous les cas de 300 points. Le chargement est linéaire selon la courbe de la fibre (modèle poids propre).

3.3.2 Cas circulaire

Le cas circulaire permet de mettre en évidence le risque soulevé par Eiffel dans la Figure 14 concernant le dépassement de la courbe de pression. On obtient les résultats de la Figure 15 après implémentation sur Cast3M.

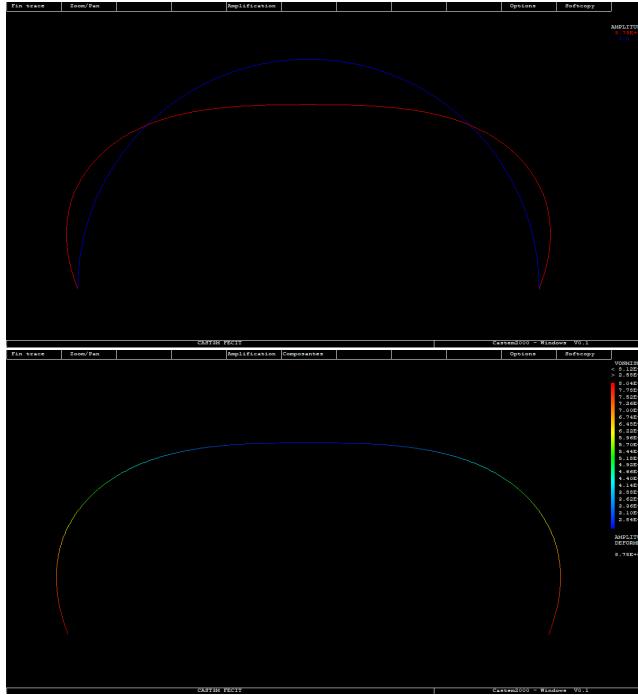


FIGURE 15 – Déformée et moments fléchissants pour l’arche circulaire

La déformée est très importante (avec un maximum de $1.10^{-2} m$) et les contraintes proches des points d’attaches sont rudes.

3.3.3 Cas parabolique

Le cas parabolique, correspondant à la courbe réelle de l’arche centrale du Viaduc, est nettement plus adapté. On obtient avec Cast3M le résultat de la Figure 16.

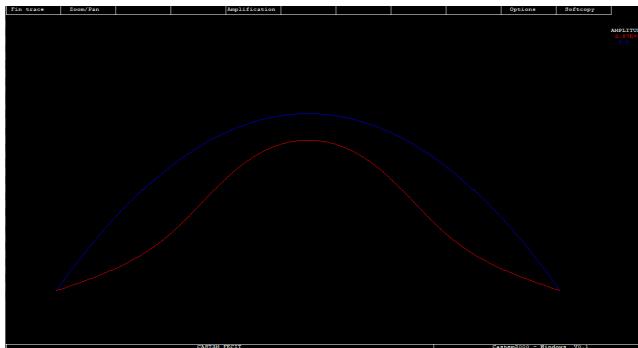


FIGURE 16 – Déformée pour l’arche parabolique

Ici, la fibre proche des points d’accroche à tendance à rentrer vers l’intérieur de l’arche. La déformée est plus basse, avec un maximum de $5.10^{-3} m$.

3.3.4 Cas de la chaînette

Le cas hyperbolique de la chaînette est ici sensé être optimal, car notre méthode d’implémentation du chargement, fondé sur une réécriture d’un champs de gravité pour le poids, nous oblige à exprimer pour cette étude simplifiée un chargement linéaire selon la fibre, et non selon l’axe x . Ce point sera traité dans la partie suivante, dans laquelle nous résolvons ce problème par une modélisation complète du Viaduc de Garabit. La forme obtenue pour l’arche hyperbolique apparaît immédiatement optimale,

car il n'y a plus de rotation particulière au niveau des points d'accroches, comme on le voit dans la Figure 17 après modélisation Cast3M.

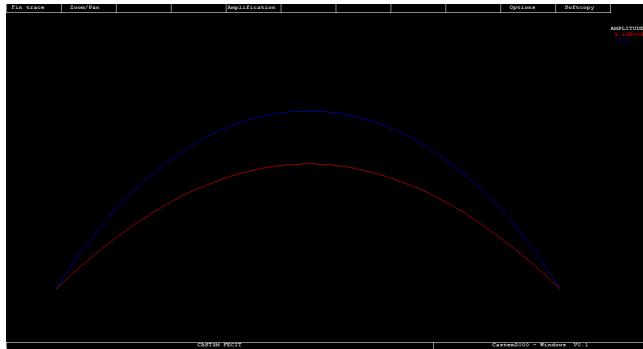


FIGURE 17 – Déformée pour l'arche hyperbolique du modèle chaînette

Cependant, preuve de la proximité entre le modèle chaînette et le modèle parabolique on obtient des contraintes du même ordre de grandeur et des déformées maximales qui sont sensiblement les mêmes ($5 \cdot 10^{-2} m$).

4 Viaduc complet

4.1 Présentation

Nous cherchons désormais à modéliser l'ensemble du viaduc, à l'aide d'un ensemble de poutres (voir Figure 18). On conserve la modélisation du tablier Marvejols réalisée en partie 1, en remplaçant seulement les appuis 1, 2, 3 et 4 par des piles. Chaque pile est modélisée par un ensemble de poutres de section et d'inertie variables.

Le tablier central et le tablier Neussargues sont modélisés de façon analogue au tablier Marvejols : seul le nombre de travées change (3 pour le tablier central, 2 pour le tablier Neussargues), les sections et les inerties étant les mêmes que celles du tablier Marvejols.

Enfin, on conserve la modélisation de l'arche présentée en partie 2. On y adjoint seulement les piles 4 et 5, les palées B et C, ainsi que les accroches C et D. Tous ces éléments sont modélisés par un ensemble de poutres, dont il reste à calculer les sections et inerties équivalentes.

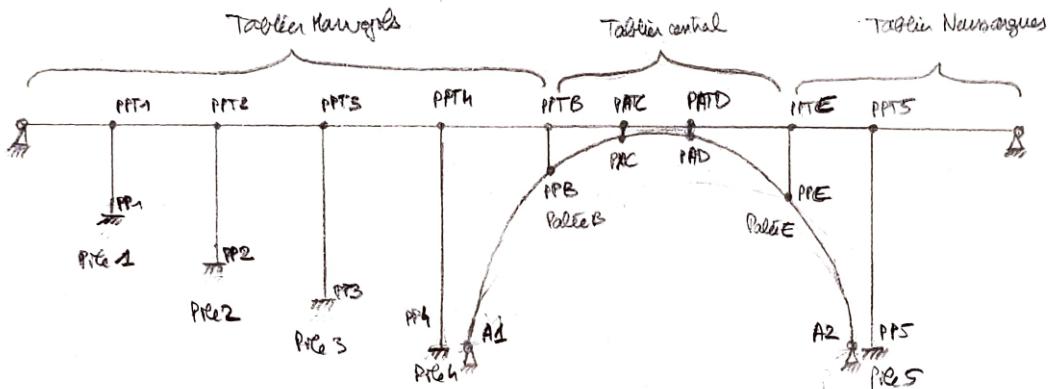


FIGURE 18 – Modélisation du viaduc de Garabit par un assemblage de poutres.

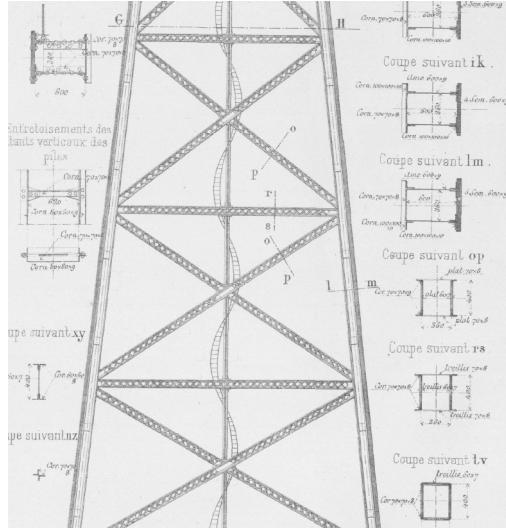
4.1.1 Calcul des sections et des inerties équivalentes

Piles 4 et 5 : Pour le calcul des sections et des inerties des piles 4 et 5 (voir Figure 18), on ne conserve que les arbalétriers (voir Figure 19a), dont le détail d'une coupe est donné Figure 19b. Un

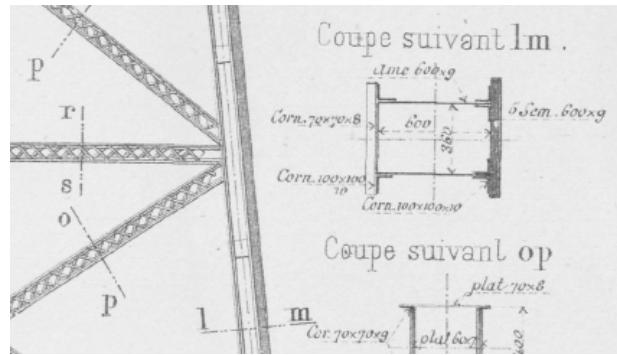
calcul donne alors une section $A = 0.0492 \text{ m}^2$ et (*via* une méthode de sosstractions successives) une inertie par rapport à l'axe Δ traversant la section $I_{\Delta} = 0.00399 \text{ m}^4$. Mais comme l'ensemble de la pile sera assimiliée à une unique poutre verticale, il nous faut calculer l'inertie de chaque arbalétrier par rapport à l'axe Δ' traversant non pas chaque montant vertical mais le milieu de la pile (et ensuite multiplier l'inertie résultante par 4, le nombre d'arbalétriers dans une pile). Le théorème de transport de Huygens donne :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + Ad^2$$

où d désigne la distance entre les axes Δ et Δ' . On obtient des inerties allant de $I_{\Delta'} = 0.380$ à 2.17 m^4 .



(a) Coupe transversale des piles 4 et 5



(b) Détail : coupe d'un arbalétrier

FIGURE 19 – Schémas des piles 4 et 5 (source : [Eif89b])

Palées B et E : On procède de manière analogue aux calculs des piles 4 et 5, à la différence près que la palée est modélisée par un seul élément. Les calculs donnent une section $A = 0.0492 \text{ m}^2$ et une inertie $I_{\Delta'} = 0.380 \text{ m}^4$.

Accroches C et D : Les poutres sont chacune constituées d'un seul élément, de section $A = 0.0246 \text{ m}^2$ et d'inertie $I_{\Delta'} = 0.00797 \text{ m}^4$.

Piles 1, 2 et 3 : On procède des manière analogue aux calculs des piles 4 et 5. Les calculs donnent une section constante $A = 0.0492 \text{ m}^2$ et des inerties variables de $I_{\Delta'} = 0.359$ à 1.69 m^4 .

4.1.2 Hypothèses de chargement

Eiffel dimensionne l'arche de sorte à ce qu'elle puisse résister aux efforts qui se développent sous l'effet de plusieurs hypothèses de chargement sur le tablier :

- H1 : tablier Marvejols + tablier central + tablier Neussargues sous poids propre
- H2 : portion de tablier comprise entre les deux piles principales de l'arc sous surcharge
- H3 : tablier central sous surcharge
- H4 : portion de tablier comprise entre une des piles principales de l'arc et le milieu du tablier central sous surcharge

Eiffel utilise les valeurs suivantes de force linéique :

	Marvejols (kg/m)	Central (kg/m)	Neussargues (kg/m)
Poids propre (Métal + rails + traverses + trottoirs)	3 390	2 900	3 440
Surcharge	$3\ 390 + 3\ 900$	$2\ 900 + 4\ 500$	$3\ 440 + 3\ 900$

On a donc en résumé (p_i désigne le chargement linéique dans la i -ième travée) un chargement :

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
H1	3390	3390	3390	3390	3390	2900	2900	2900	3440	3440
H2	3390	3390	3390	3390	7290	7400	7400	7400	7340	3440
H3	3390	3390	3390	3390	3390	7400	7400	7400	3440	3440
H4	3390	3390	3390	3390	7290	7400	7400 ³	2900	3440	3440

Mais à ce chargement dû au tablier s'ajoute le poids propre de l'arc, réparti sur l'ensemble des montants (voir 3.1.2). Pour calculer l'effet du poids propre et de la surcharge du tablier sur l'arche, Eiffel effectue un calcul intermédiaire : il calcule les efforts ponctuels dus au tablier, transmis par les palées B et E ainsi que les accroches C et D. Par exemple, la palée B impose sur l'arche un effort ponctuel qui synthétise (voir Figure 18 pour les notations) :

- Les efforts dus au chargement du tablier Marvejols, transmis à la palée B *via* la réaction au point PPTB. Cette réaction s'obtient grâce à des calculs analogues à ceux de la partie 1 (méthode des 3 moments) ;
- Les efforts dus au chargement du tablier central, transmis à la palée B *via* la réaction au point PPTB. Le principe est le même que pour le tablier Marvejols ;
- Le poids propre de la palée B.

Eiffel suppose ensuite que cet effort transmis à l'arche par la palée B se répartit également entre les deux montants adjacents au point d'accroche sur l'arche de la palée B (montants VIII et IX). En répétant ce raisonnement pour 2 palées et les 2 accroches, et ce pour les 4 hypothèses de chargement, Eiffel obtient les valeurs suivantes de chargement sur les montants (les valeurs pour les hypothèses Hi correspondent aux surcharges *supplémentaires* à prendre à compte) :

Montant	Poids propre du montant (kg)	H1	H2	H3	H4
VIII	35 298	67 918	66 131	22 176	66 320
IX	30 921	67 918	66 131	22 176	66 320
XII	35 545	78 570	121 968	121 968	118 240

Les charges et surcharges pour les montants symétriques sont analogues. De plus, les montants non indiqués dans ce tableau ont tous une charge inchangée.

Notons que l'étude numérique complète du viaduc permet de s'affranchir de ces calculs de force équivalente s'exerçant sur chaque montant. Nous pouvons en effet directement considérer le chargement réel s'exerçant sur le tablier.

4.2 Étude analytique

L'étude analytique est limitée, car du fait de la forme parabolique de l'arche les solutions ne peuvent s'écrire que comme fonctions d'intégrales qui ne peuvent pas être calculées analytiquement. On peut néanmoins mentionner la méthode qu'utilise Eiffel pour obtenir une expression des efforts s'exerçant dans l'arche. Il utilise les formules de Bresse (voir par exemple [Cou64]), qui permet le calcul d'arcs hyperstatiques. Le principe est d'exprimer l'effort tranchant, l'effort normal et le moment fléchissant en tout point de l'arche comme fonction des inconnues hyperstatiques (typiquement la poussée aux extrémités de l'arche), puis d'écrire, au moyen des formules de Bresse, que le déplacement horizontal des retombées est égal à zéro (l'arche étant encastrée aux naissances). Cette condition permet alors d'obtenir une expression des inconnues hyperstatiques en fonction du chargement, et donc finalement de résoudre le système. Une autre méthode possible, non employée par Eiffel, consiste à calculer l'énergie élastique de l'arche $W = \int_{A1}^{A2} \left(\frac{N(s)^2}{2EA} + \frac{M(s)^2}{2EI} \right) ds$ comme fonction des inconnues hyperstatiques R_i , puis à calculer ces dernières au moyen des conditions $\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0$.

3. Uniquement jusqu'à la moitié de la travée.

4.3 Étude numérique

4.3.1 Résultats hypothèse H1

Après avoir modélisé l'ensemble du Viaduc de Garabit, nous pouvons dans un premier temps faire une étude sur le comportement du Viaduc sous poids propre. Nous obtenons finalement les résultats de la Figure 20.

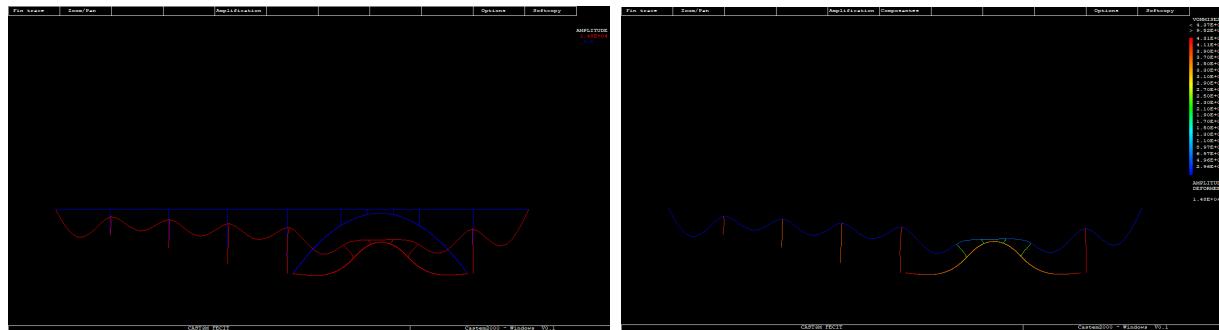


FIGURE 20 – Déformée et contraintes du Viaduc en poids propre

La déformée maximale en poids propre calculée par Cast3M est de $2,84 \times 10^{-3} m$.

Nous pouvons comparer ce résultat avec la même modélisation en poids propre avec une arche circulaire équivalente, dont le résultat apparaît dans la Figure 21.

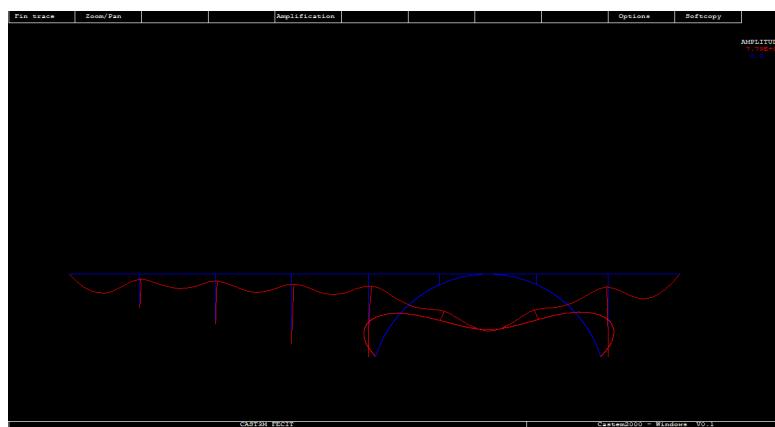


FIGURE 21 – Déformée du Viaduc en poids propre avec une arche circulaire

La déformée maximale en poids propre calculée par Cast3M est de $4,78 \times 10^{-3} m$, soit quasiment le double de celle dans le cas d'une arche parabolique.

4.3.2 Résultats hypothèse H2

Nous avons ensuite décidé de calculer les déplacements et les moments dans les différents cas de surcharge étudié par Eiffel. Nous présentons ici à titre d'exemple le cas H2, l'étude étant analogue dans les autres hypothèses de chargement. Sous Cast3M, nous générions un nouveau champ de gravité propre à H2 qui impose entre les deux piliers 4 et 5 une surcharge (qui vient s'ajouter à la charge permanente due au poids propre). On obtient les résultats de la Figure 22.

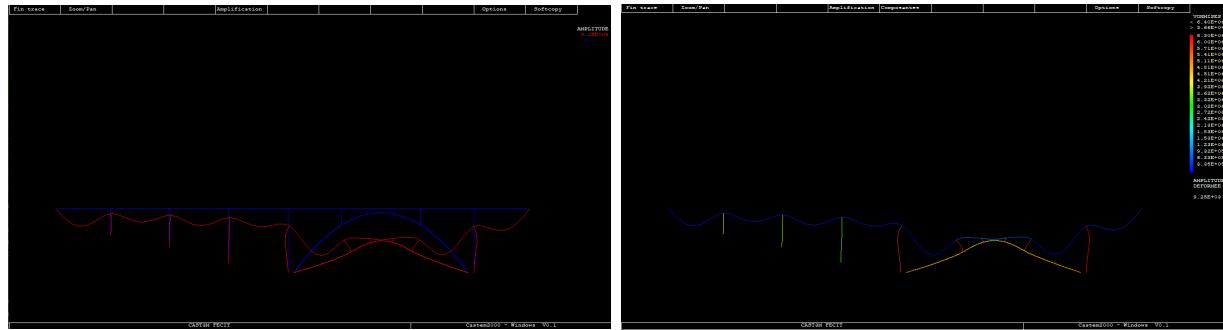


FIGURE 22 – Déformée et contraintes du Viaduc sous la surcharge d'hypothèse H2

On obtient notamment un déplacement maximal de $5,35\text{ mm}$, soit le double du déplacement maximal constaté en poids propre.

Ces résultats peuvent être comparé avec les calculs de déplacement d'Eiffel, dont une partie est reproduite Figure 23.

Tableau des déformations pour les points 5, 9 et 14.									
Désignation des charges agissant sur l'arc	Elément 5		Elément 9 sous la pile de gauche		Elément 14 à la clef		Elément 9 sous la pile de droite		Elément 5'
	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx
Charge permanente	+ 3 $\frac{3}{5}$	+ 12 $\frac{1}{5}$	+ 6 $\frac{3}{5}$	+ 21 $\frac{3}{5}$	0	+ 18 $\frac{3}{5}$	- 6 $\frac{3}{5}$	- 21 $\frac{3}{5}$	- 3 $\frac{3}{5}$
Surcharge totale seule	- 3,5	- 5,2	- 1,5	+ 9,8	0	+ 18,5	+ 1,5	+ 9,8	+ 9,5
Surcharge totale avec la charge permanente	- 8,5	+ 6,8	+ 4,5	+ 31,5	0	+ 37	- 7,5	+ 31,5	+ 6,5
Surcharge centrale seule	- 8,7	- 5,8	- 4,5	+ 4,7	0	+ 20,5	+ 4,5	+ 4,7	+ 9,7
Surcharge centrale avec la charge permanente	- 6,7	+ 6,2	+ 1,5	+ 28,2	0	+ 38	- 1,5	+ 26,2	+ 6,7
Demi-surcharge seule	+ 15,5	+ 15,8	+ 27,5	+ 80,5	+ 28,5	+ 9,5	+ 28,5	+ 19,5	+ 28,2
Demi-surcharge avec la charge permanente	+ 18,5	+ 27,8	+ 33,5	+ 52	+ 28,5	+ 28,3	+ 28,5	+ 2	+ 23,2
Température seule	{ Augmentation de 30°	- 9,5	- 23	- 10	- 40	0	- 50	+ 10	- 40
	{ Diminution de 30°	+ 9,5	+ 23	+ 10	+ 40	+ 60	- 10	+ 40	- 9,5
Température avec la charge permanente	{ Augmentation de 30°	- 6,5	- 11	- 6	- 18,5	0	- 31,5	+ 4	- 18,5
	{ Diminution de 30°	+ 12,5	+ 35	+ 16	+ 61,5	+ 68,5	- 18	+ 81,5	+ 12,5

Nota : Les déformations indiquées dans le tableau ci-dessus sont cotées en millimètres

FIGURE 23 – Tableau des déformées pour la partie centrale du viaduc, selon différentes hypothèse de chargement

La ligne 5 du tableau indique, dans le cas d'une surcharge centrale avec charge permanente (hypothèse H2), un déplacement maximal à la clef de 39 mm . Il y a donc un facteur 10 entre le résultat d'Eiffel et le nôtre (le déplacement à la clef étant de l'ordre de grandeur du déplacement maximal de l'ensemble de la structure). On remarque par ailleurs qu'Eiffel obtient lui aussi une variation d'un facteur 2 entre les cas de poids propre seul et de poids propre avec surcharge.

Ce raisonnement laisse penser qu'Eiffel se trouve, vis-à-vis de notre simulation numérique, du bon côté de la sûreté. Le facteur 10 entre notre résultat et celui d'Eiffel, en plus de situer nos conclusions dans le même ordre de grandeur, rassure quand aux marges prises par l'ingénieur.

5 Conclusion

Nous sommes parvenus à étudier l'ensemble du viaduc de Garabit, modélisé sous la forme d'un assemblage de poutres de sections et inerties variables (notamment l'arche centrale). Du fait de la complexité de l'ensemble, l'étude a essentiellement été numérique. Nous avons néanmoins pu mener des calculs raisonnables dans le cas particulier du tablier de Marvejols, ce qui a permis d'obtenir des résultats exacts qui ont ensuite pu être comparés avec ceux de notre simulation. Par ailleurs, nous avons pu étudier à la fois la réponse sous poids propre et sous chargement de la structure. Il est apparu que le choix d'une forme parabolique pour l'arche est pertinent dans le cas d'un chargement linéique du tablier, et que les calculs d'Eiffel donnent des résultats proches de ceux obtenus par simulation numérique. Remarquons pour conclure qu'un certain nombre de pistes pourraient encore être explorées : la modélisation sous forme de poutres pourrait être affinée (notamment en négligeant moins d'éléments du viaduc ou en étudiant plus finement la concentration de contraintes sur certaines pièces sensibles du viaduc), les effets de la température ou du vent pourraient être pris en compte, la modélisation pourrait être étendue en 3 dimensions, et l'étude pourrait être menée en dynamique (réponse du viaduc à un chargement mobile par exemple).

6 Références

- [Cou64] Jean Courbon. Résistance des matériaux. *Dunod*, 1964.
- [Deb74] Alphonse Debauve. Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées, rédigé conformément au programme annexé au décret du 7 mars 1868, réglant l'admission des conducteurs des ponts et chaussées au grade d'ingénieur. *Dunod*, 1874.
- [Eif89a] Gustave Eiffel. Mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de garabit. *Mémoires de la société des ingénieurs civils*, 1889.
- [Eif89b] Gustave Eiffel. Planches jointes au mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de garabit. *Mémoires de la société des ingénieurs civils*, 1889.