U-ERRE

MÉTODO
TRAPECIO

Diego Emiliano Guajardo Pérez 746174

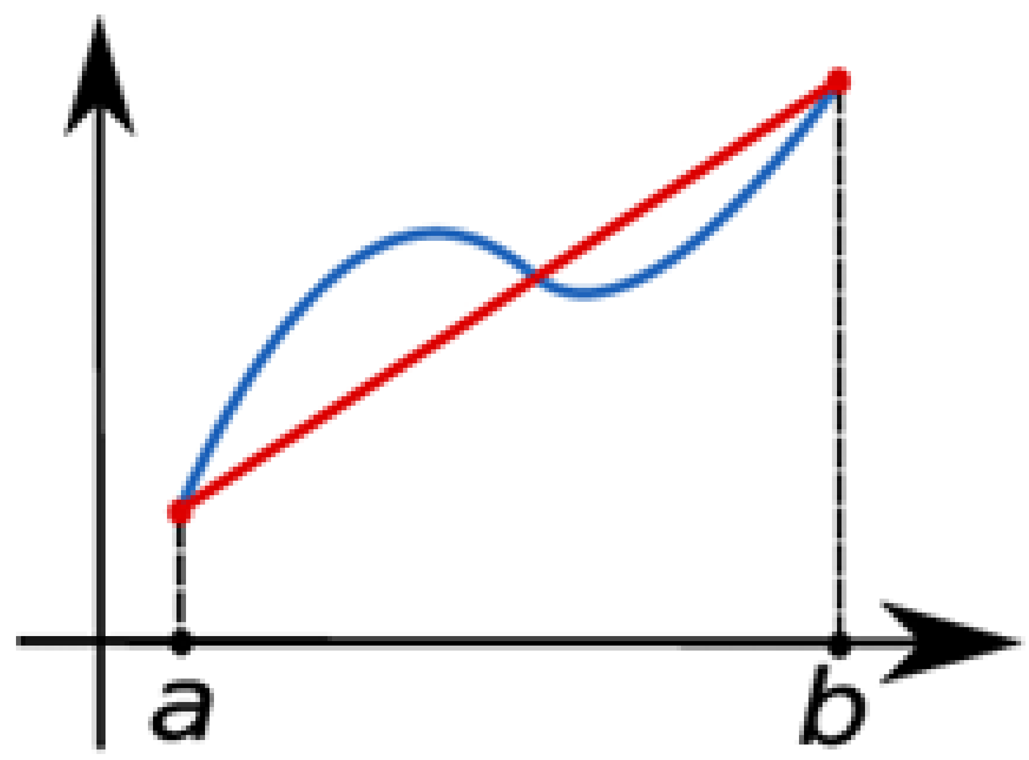
D E F I N I C I Ó N

La regla del trapecio es uno de los métodos más utilizados para calcular aproximaciones numéricas de integrales definidas. Es la primera de las fórmulas cerradas de integración de Newton – Cotes, para el caso cuando el polinomio interpolante es de grado uno.

Se basa en aproximar el valor de la integral de f(x) por el de la función lineal que pasa a través de los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)). La integral de ésta es igual al área del trapecio bajo la gráfica de la función lineal.

Se usa cuando:

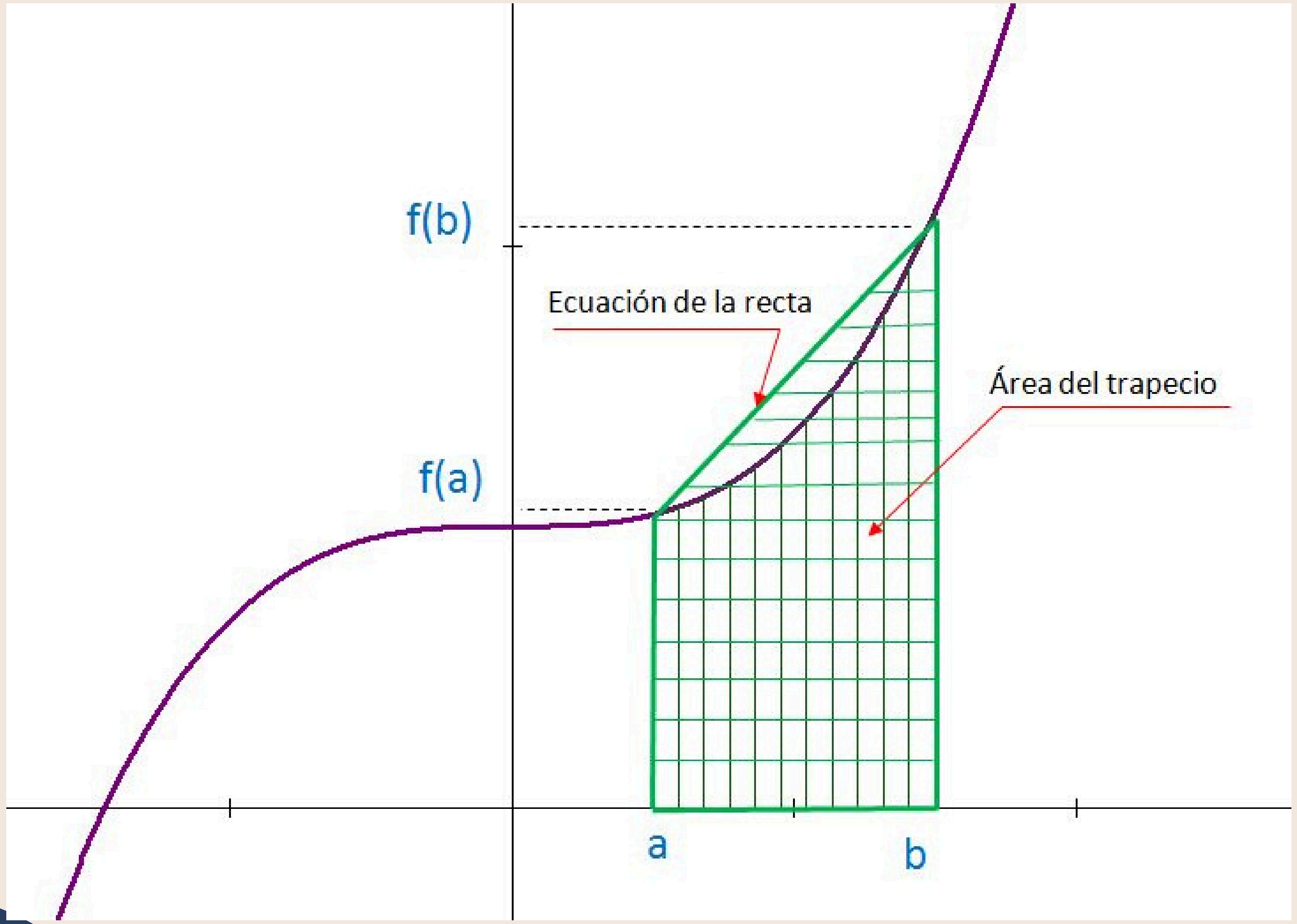
- No se puede integrar la función analíticamente.
- Se tienen datos experimentales (puntos discretos).
- Se desea una solución rápida con precisión aceptable.



La función $f(x)$ (en azul) es aproximada por la función lineal (en rojo).

DEFINICIÓN

El nombre regla del trapecio se debe a la interpretación geométrica que se hace de la fórmula. Cuando el polinomio interpolante es de grado uno, su gráfica representa una línea recta en el intervalo [a, b] que es el área del trapecio que se forma.



Antecedentes

El método del trapecio tiene sus raíces en el desarrollo del cálculo numérico durante los ***siglos XVII y XVIII.***

Cuando los matemáticos buscaban maneras de aproximar integrales definidas que no podían resolverse de forma analítica.

Este método forma parte de la familia de las reglas de **Newton-Cotes**, que utilizan polinomios para aproximar funciones y calcular áreas bajo curvas.

A medida que crecía la necesidad de resolver problemas en física, ingeniería y astronomía, surgieron técnicas más prácticas para calcular áreas a partir de datos discretos, dando lugar al método del trapecio como una de las soluciones más simples y efectivas para la integración numérica.

Su facilidad de implementación lo convirtió en una herramienta fundamental tanto en contextos teóricos como en aplicaciones computacionales.

Métodos relacionados

Método del punto medio:
Este método aproxima la función con una línea horizontal en el punto medio de cada subintervalo. A diferencia del método del trapecio, que utiliza los extremos del subintervalo, el método del punto medio usa el punto medio para formar un rectángulo.

Fórmulas de Newton-Cotes:
El método del trapecio es la primera fórmula cerrada de Newton-Cotes, donde el polinomio interpolante es de grado uno (una línea recta). Otras fórmulas de Newton-Cotes utilizan polinomios de mayor grado para aproximar la función, como la regla de Simpson, que usa polinomios de grado dos.

Regla del trapecio compuesta:
Esta regla mejora la precisión del método del trapecio al dividir el intervalo en más subintervalos y sumar las áreas de los trapecios resultantes. Cuanto mayor sea el número de subintervalos, más precisa será la aproximación.

FÓRMULA MATEMÁTICA

FORMA BÁSICA

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Error

$$-\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

Siendo ξ un número entre a y b.

FÓRMULA MATEMÁTICA

FORMA COMPUESTA

Después de realizar todo el proceso matemático:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + f(b)]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

n= número de divisiones

ALGORITMO

01

División del intervalo

Se divide el intervalo de integración [a, b] en n subintervalos de igual ancho, denotado como h, donde h = (b-a)/n.

02

Aproximación con trapecios

En cada subintervalo, se aproxima la función mediante una línea recta que conecta los puntos de la función en los extremos del subintervalo, formando un trapecio.

.

03

Cálculo del área de cada trapecio

El área de cada trapecio se calcula utilizando la fórmula: (base mayor + base menor) * altura / 2. En este caso, las bases son los valores de la función en los extremos del subintervalo, y la altura es el ancho del subintervalo, h.

04

Suma de las áreas

Finalmente, se suman las áreas de todos los trapecios para obtener una aproximación del área total bajo la curva, es decir, la integral definida.

APLICACIÓN

Se aplica en diversas situaciones cotidianas para aproximar áreas bajo curvas o volúmenes, especialmente cuando los cálculos analíticos son difíciles o imposibles como la estimación de áreas topográficas, cálculos hidrológicos como secciones transversales de ríos, y análisis de datos experimentales.

Ingeniería:

Se utiliza para calcular áreas, volúmenes y otras magnitudes a partir de datos medidos, como en el diseño de estructuras o la evaluación de terrenos.

Análisis de datos:

Permite aproximar el área bajo curvas de datos experimentales, como en el análisis de experimentos científicos o resultados de pruebas.

Física:

Permite aproximar el trabajo realizado por una fuerza variable, por ejemplo, al analizar el movimiento de un objeto bajo una fuerza no constante

EJEMPLO

En x0 será el límite inferior que es 1, después x2 se le sumará 1/4 (0.25) y así sucesivamente hasta que se llegue al límite superior que es 3, y evaluamos cada uno en la función.

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

a=1
b=3
n=8

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta_x = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$\Delta_x = \frac{1}{4}$$

$x_0 = 1$	$f(x_0) = 0.5$
$x_1 = 1.25$	$f(x_1) = 0.363$
$x_2 = 1.5$	$f(x_2) = 0.247$
$x_3 = 1.75$	$f(x_3) = 0.168$
$x_4 = 2$	$f(x_4) = 0.117$
$x_5 = 2.25$	$f(x_5) = 0.084$
$x_6 = 2.5$	$f(x_6) = 0.062$
$x_7 = 2.75$	$f(x_7) = 0.047$
$x_8 = 3$	$f(x_8) = 0.036$

EJEMPLO

Sustituimos en la función.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) \ldots . +2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{3-1}{2(8)}[0.5 + 2(0.363) + 2(0.247) + 2(0.168) + 2(0.117) + 2(0.084) + 2(0.062) + 2(0.047) + 0.036]$$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{2}{16}[2.712]$$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}dx = 0.339\, u^2$$

0.339

BIBLIOGRAFÍAS

- Método Trapecio. (s. f.). HTML. Recuperado 16 de julio de 2025, de https://multimedia.uned.ac.cr/pem/metodos_numericos_ensenanza/modulo4/descripcion.html

- Regla del Trapecio. (s. f.). PDF. Recuperado 16 de julio de 2025, de https://fjarabo.webs.ull.es/VirtualDoc/Curso%202011-2012/Ingenier%C3%ADa%20Qu%C3%ADmica/2_Teoria/Tema_6_Ingenieria_de_la_Reaccion_Quimica/A60/603_Integracion_grafica_por_Trapecios.pdf