Capítulo 4

Almacenamiento de tablas en archivos e índices

Organización de los discos rígidos

- La superficie del plato de un disco se divide en **pistas circulares.**
  - Suele haber en los discos rígidos entre 50 mil y 100 mil pistas por plato.
- Cada pista se divide en **sectores**.
  - Un sector es la unidad de datos más chica que puede ser leída o escrita.
  - Una pista suele tener entre 500 y 1000 sectores para pistas internas y entre 1000 y 2000 sectores para pistas externas.
  - El tamaño de un sector suele ser típicamente 512 B.
- Un **bloque** es una secuencia contigua de sectores de una pista.
  - Los datos son transferidos entre el disco y la memoria principal en bloques.
  - El tamaño de un bloque va desde 512 B a varios KiB.
  - El tamaño típico de un bloque va de 4 KiB a 16 KiB.

Problemas considerados

- Consideramos los siguientes problemas:
- **Problema 1**: ¿Cómo almacenar una tabla de BD relacional en un archivo?
- **Solución**: usar enfoques de organización de archivos.
- **Problema 2**: ¿Cómo acceder eficientemente a registros de una tabla?
- **Solución**: usar archivo de índice
- Primero estudiaremos el problema 1 y a continuación el problema 2.

Organización de registros en archivos

- Con respecto a la **ubicación de las tablas** de la BD tenemos como alternativas:
  1. Cada tabla se aloja en archivo separado.
  2. Registros de diferentes tablas se alojan en el mismo archivo (se lo llama **agrupamiento de tablas en archivos**).
- Vamos a estudiar en detalle primero la primera alternativa y después la segunda.

Organización de registros en archivos

- Con respecto a la **ubicación de los registros** en un archivo:
  1. **Heap**: un registro puede almacenarse en cualquier lugar del archivo donde hay espacio.
  2. **Secuencial**: almacenar registros de una tabla de modo que estén ordenados secuencialmente,
     - con respecto al valor de una **clave de búsqueda** de cada registro.
     - La **clave de búsqueda** es un subconjunto de los atributos de los registros.
- Vamos a estudiar ambos casos a continuación.

Heap: Enfoque de registros de tamaño fijo

- **Idea**: Almacenar registro i desde el byte n*(i-1), donde n es el tamaño de cada registro.
  - Con esta idea registros pueden cruzar bloques.
  - El problema de esto, es que acceder a un registro puede requerir acceder al bloque siguiente al bloque donde comienza.
  - Queremos evitar este costo extra.
- **Modificación**: que cada registro esté en un bloque.
- Para esta modificación, analizamos el borrado de registros.
  - Veremos distintas alternativas para hacerlo.

Heap: Borrar registro 3 y compactar

Borrar registro i:

- **Idea**: Mover registros i+1,…, n a i,…, n-1.
- En el ejemplo se borra registro 3

record 0	10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
record 1	12121	Wu	Finance	90000
record 2	15151	Mozart	Music	40000
record 3	22222	Einstein	Physics	95000
record 4	32343	El Said	History	60000
record 5	33456	Gold	Physics	87000
record 6	45565	Katz	Comp. Sci.	75000
record 7	58583	Califieri	History	62000
record 8	76543	Singh	Finance	80000
record 9	76766	Crick	Biology	72000
record 10	83821	Brandt	Comp. Sci.	92000
record 11	98345	Kim	Elec. Eng.	80000

record 0	10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
record 1	12121	Wu	Finance	90000
record 2	15151	Mozart	Music	40000
record 4	32343	El Said	History	60000
record 5	33456	Gold	Physics	87000
record 6	45565	Katz	Comp. Sci.	75000
record 7	58583	Califieri	History	62000
record 8	76543	Singh	Finance	80000
record 9	76766	Crick	Biology	72000
record 10	83821	Brandt	Comp. Sci.	92000
record 11	98345	Kim	Elec. Eng.	80000

Heap: Borrar registro 3 y mover el último registro

Borrar registro i:

- **Idea**: Mover último registro n a i.
- En el ejemplo se borra el registro 3

record 0	10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
record 1	12121	Wu	Finance	90000
record 2	15151	Mozart	Music	40000
record 3	22222	Einstein	Physics	95000
record 4	32343	El Said	History	60000
record 5	33456	Gold	Physics	87000
record 6	45565	Katz	Comp. Sci.	75000
record 7	58583	Califieri	History	62000
record 8	76543	Singh	Finance	80000
record 9	76766	Crick	Biology	72000
record 10	83821	Brandt	Comp. Sci.	92000
record 11	98345	Kim	Elec. Eng.	80000

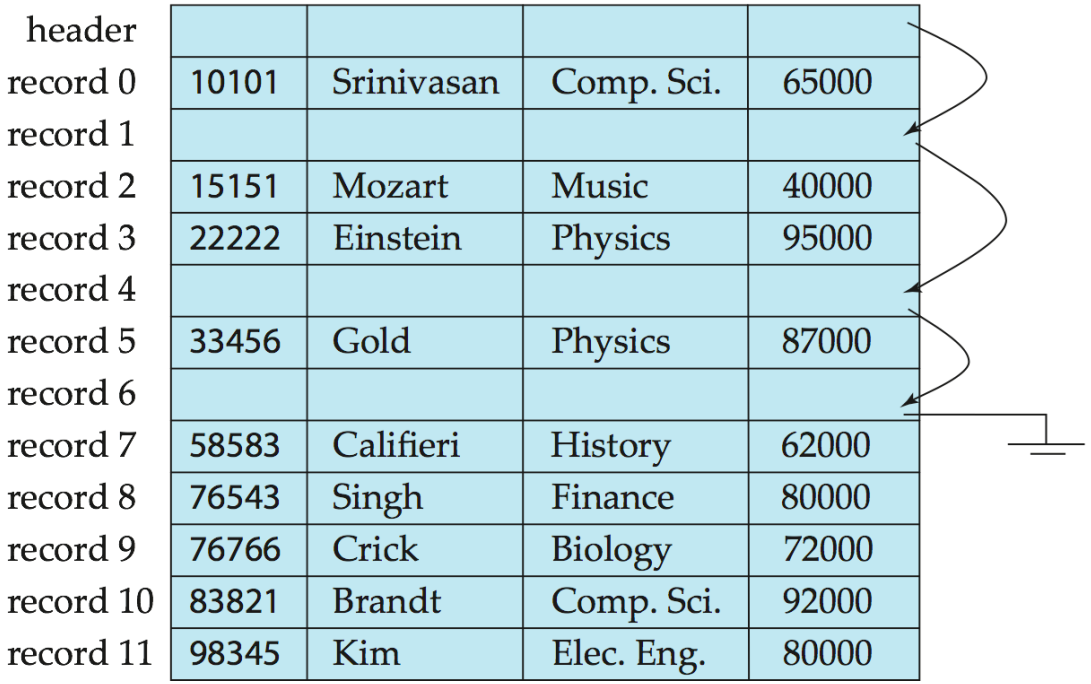
record 0	10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
record 1	12121	Wu	Finance	90000
record 2	15151	Mozart	Music	40000
record 11	98345	Kim	Elec. Eng.	80000
record 4	32343	El Said	History	60000
record 5	33456	Gold	Physics	87000
record 6	45565	Katz	Comp. Sci.	75000
record 7	58583	Califieri	History	62000
record 8	76543	Singh	Finance	80000
record 9	76766	Crick	Biology	72000
record 10	83821	Brandt	Comp. Sci.	92000

Heap: Uso de listas enlazadas

Idea: No se mueven registros, pero se enlazan los registros libres en una lista.

- Almacenar la dirección del primer registro borrado en un encabezado del archivo.

record 0	10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
record 1	12121	Wu	Finance	90000
record 2	15151	Mozart	Music	40000
record 3	22222	Einstein	Physics	95000
record 4	32343	El Said	History	60000
record 5	33456	Gold	Physics	87000
record 6	45565	Katz	Comp. Sci.	75000
record 7	58583	Califieri	History	62000
record 8	76543	Singh	Finance	80000
record 9	76766	Crick	Biology	72000
record 10	83821	Brandt	Comp. Sci.	92000
record 11	98345	Kim	Elec. Eng.	80000

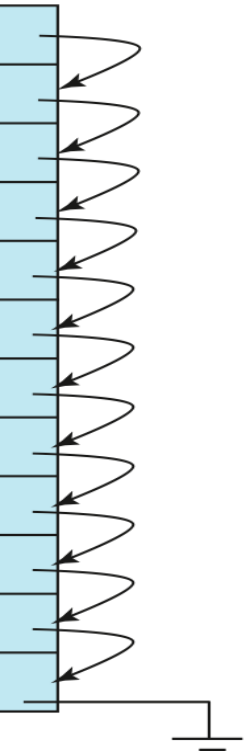


- Usar un registro borrado para almacenar la dirección del siguiente (en el tiempo) registro borrado.
- Estas direcciones son punteros, pues apuntan a localizaciones de registros.

Organización de archivos secuencial

- La **organización de archivos secuencial** es adecuada para aplicaciones donde se requiere el procesamiento secuencial del archivo entero.
- Los registros en el archivo están **ordenados por clave de búsqueda**.
- **Ejemplo**: En la tabla siguiente la primera columna representa la clave de búsqueda.

10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000	
12121	Wu	Finance	90000	
15151	Mozart	Music	40000	
22222	Einstein	Physics	95000	
32343	El Said	History	60000	
33456	Gold	Physics	87000	
45565	Katz	Comp. Sci.	75000	
58583	Califieri	History	62000	
76543	Singh	Finance	80000	
76766	Crick	Biology	72000	
83821	Brandt	Comp. Sci.	92000	
98345	Kim	Elec. Eng.	80000	

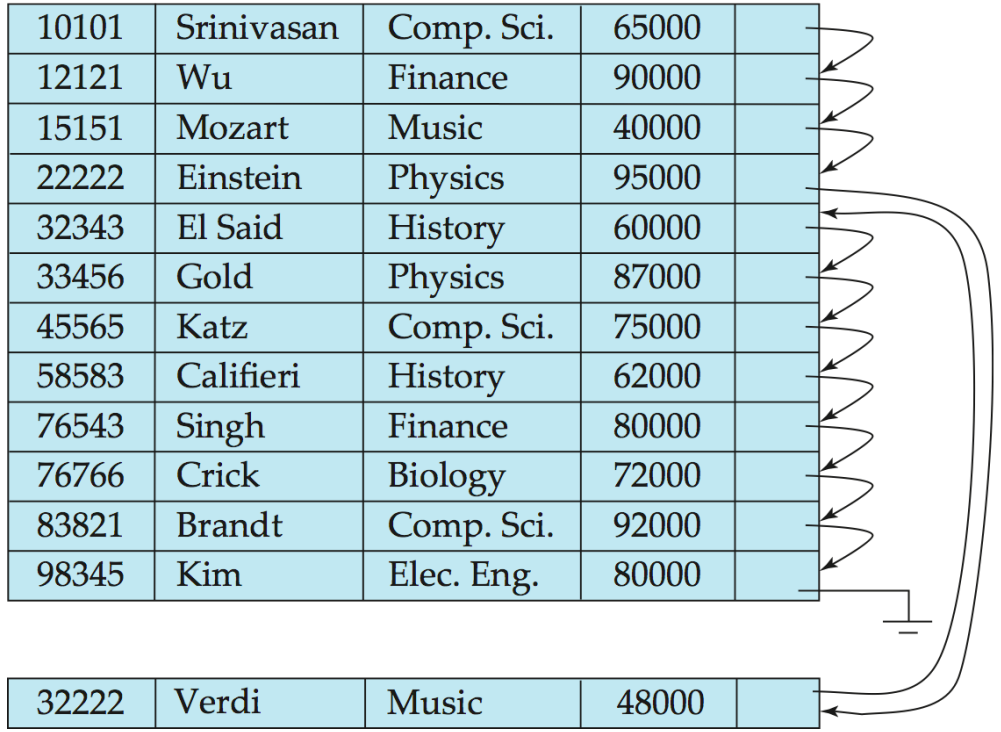


Organización de archivos secuencial

- **Algunas aclaraciones:**
  - Una **clave de búsqueda** es cualquier atributo o conjunto de atributos. No necesita ser la clave primaria o una superclave.
  - Para permitir retorno rápido de registros en orden de clave de búsqueda encadenamos los registros por punteros.
  - Un puntero en cada registro apunta al siguiente registro en el orden de la clave de búsqueda.
  - Para minimizar el número de acceso a bloques en procesamiento de archivos secuenciales, almacenamos los registros físicamente en orden de clave de búsqueda o tan cercano al orden de clave de búsqueda como sea posible.

Organización de archivos secuencial

- **Borrado**: usar cadenas de punteros (como se vio en filmina 9).
- **Inserción**: localizar la posición donde el registro va a ser insertado.
  - Si hay espacio libre (en lista de libres) insertar allí.
  - Si no hay espacio libre, insertar el registro en **bloque de overflow**
  - En ambos casos el puntero de la cadena debe ser actualizado.
  - Hace falta reorganizar el archivo cada cierto tiempo para restaurar el orden secuencial.



10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000	
12121	Wu	Finance	90000	
15151	Mozart	Music	40000	
22222	Einstein	Physics	95000	
32343	El Said	History	60000	
33456	Gold	Physics	87000	
45565	Katz	Comp. Sci.	75000	
58583	Califieri	History	62000	
76543	Singh	Finance	80000	
76766	Crick	Biology	72000	
83821	Brandt	Comp. Sci.	92000	
98345	Kim	Elec. Eng.	80000	

Bloque de overflow ->

32222	Verdi	Music	48000	

Organización de archivos secuencial

- **Evaluación**:
  - A veces las consultas necesitan acceder a registros relacionados de dos tablas.
  - **Por ejemplo**: calcular una reunión natural de dos tablas.
  - Más adelante veremos que esto va a ser pesado de hacer si solo se usa organización de archivos secuencial.

Agrupamiento de tablas en archivos

- Varias tablas van en un archivo.

department

dept_name	*building*	*budget*
Comp. Sci.	Taylor	100000
Physics	Watson	70000

instructor

ID	*name*	*dept_name*	*salary*
10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
33456	Gold	Physics	87000
45565	Katz	Comp. Sci.	75000
83821	Brandt	Comp. Sci.	92000

Agrupamiento de *instructor* y *departamento* en un archivo.

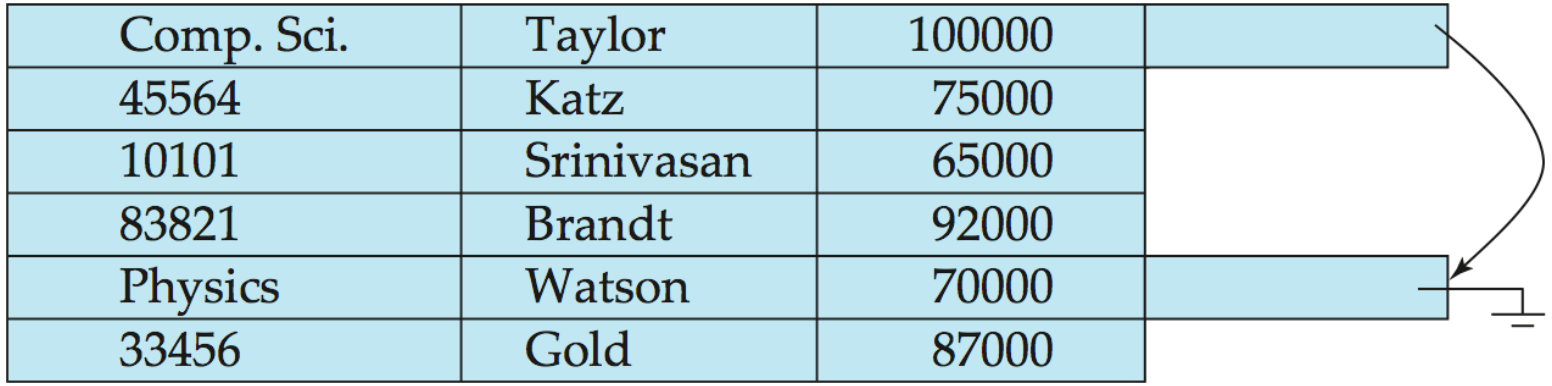
- Luego de cada departamento se almacenan registros de instructores de ese departamento.

Comp. Sci.	Taylor	100000
45564	Katz	75000
10101	Srinivasan	65000
83821	Brandt	92000
Physics	Watson	70000
33456	Gold	87000

Agrupamiento de tablas en archivos

- **Evaluación**:
  - Esta estructura es buena para consultas involucrando *department* ⋈ *instructor* y para consultas involucrando un único departamento y sus instructores.
    - **Por ejemplo**:

      select *dept name, building, budget, ID, name, salary*
      from *department* **natural join** *instructor;*
  - La estructura resulta en registros de tamaño variable.
- Se pueden agregar cadenas de punteros para enlazar registros de una relación particular.
  - **Ejemplo**: estructura de la figura.



Almacenamiento de tablas en archivos

- **A partir de ahora haremos las siguientes suposiciones**:
  - Cada tabla se almacena en un archivo y cada archivo se usa para una tabla.
  - Un **archivo** es una secuencia de registros y un **registro** es una secuencia de campos.
  - El tamaño de registro es fijo.

Algunos conceptos

- Un archivo de BD es particionado en **bloques** de tamaño fijo.
  - Los bloques son tanto **unidades de almacenamiento** como de **transferencia de datos.**
- Un **búfer** en memoria principal es usado para almacenar una copia de un bloque de disco.
  - El **gestor de búfer** aloja búferes en memoria principal.
- **Meta del SGBD**: Minimizar cantidad de transferencias de bloques entre disco y memoria.

Índices

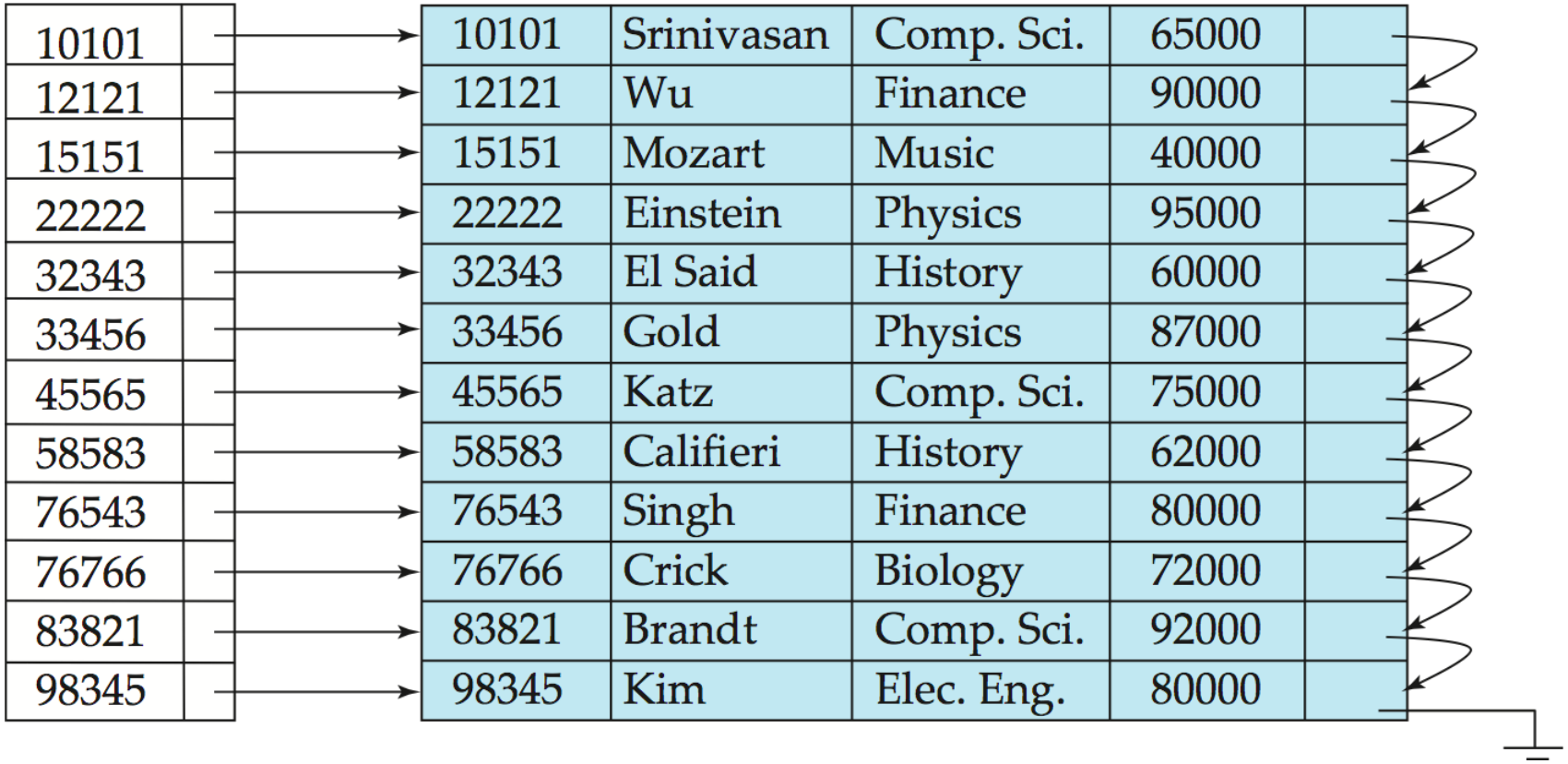
- Una **clave de búsqueda** es un atributo o conjunto de atributos usados para buscar registros en un archivo (de una tabla).
- Un **archivo de índice** consiste de registros llamados **entradas del índice** de la forma:
  - <clave de búsqueda, puntero>
- **Archivos de índices** son usados para poder ejecutar más rápido ciertas consultas
  - Más adelante cuando estudiemos procesamiento de consultas veremos cuáles.
  - **Ejemplo:** consultar por los registros para una combinación de valores de la clave de búsqueda.
- **El precio a pagar por tener archivos de índices:**
  - Almacenamiento extra en disco y actualización del índice.
  - Pero estos archivos son mucho más chicos que el archivo original de la tabla.

Índices

- Un **índice ordenado** puede tomar la forma de:
  - Una **lista de entradas** ordenada por valor de clave de búsqueda
  - Un **árbol ordenado**: en cada nodo del árbol las entradas están ordenadas por valor de clave de búsqueda.
- A partir de aquí vamos a trabajar con índices ordenados.
- Los índices además se clasifican en **primarios** y **secundarios**.
- **Índice primario:**
  - Sea *f* un archivo secuencialmente ordenado;
  - el **índice primario** es el índice cuya clave de búsqueda especifica el orden secuencial del archivo *f.*
- **Índice secundario**:
  - Sea *f* un archivo secuencialmente ordenado;
  - un **índice secundario** es un índice cuya clave de búsqueda especifica un orden diferente del orden secuencial del archivo.

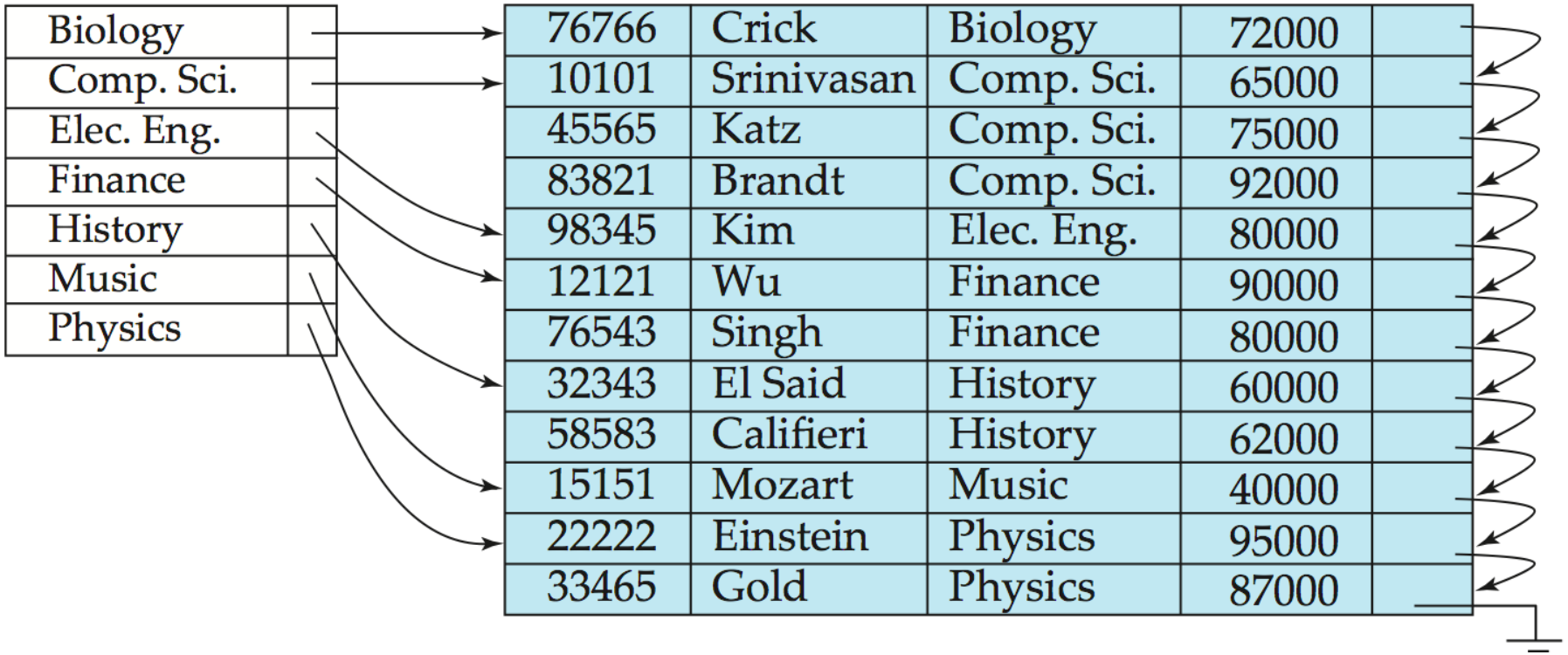
Índice denso

- En un **índice denso** hay una entrada del índice por cada valor de la clave de búsqueda en el archivo.
- **Ejemplo**: Índice primario en atributo ID de tabla de instructor (ID clave primaria).



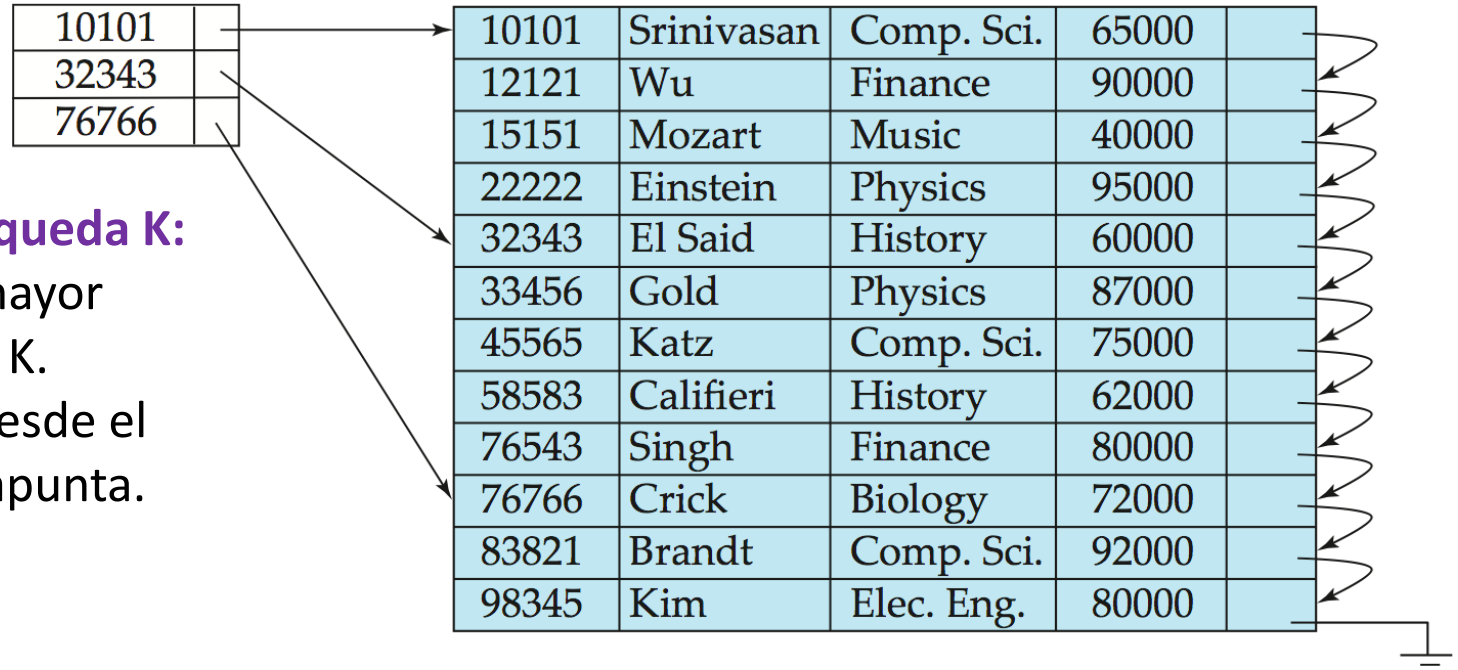
Índice denso

- **Ejemplo**: índice primario denso en *nombre de departamento* con archivo de *instructor* ordenado por *nombre de departamento* (no es clave primaria).
  - Observar que los punteros en el índice apuntan al primer registro con ese *nombre de departamento* y siguiendo los punteros en el archivo de la tabla se puede recorrer todos los registros de ese *nombre de departamento*.



Índice disperso

- Un **índice disperso** contiene registros de índice para solo algunos valores de clave de búsqueda.
  - Se usan cuando los registros de la tabla están secuencialmente ordenados por clave de búsqueda del índice (o sea, son índices primarios).

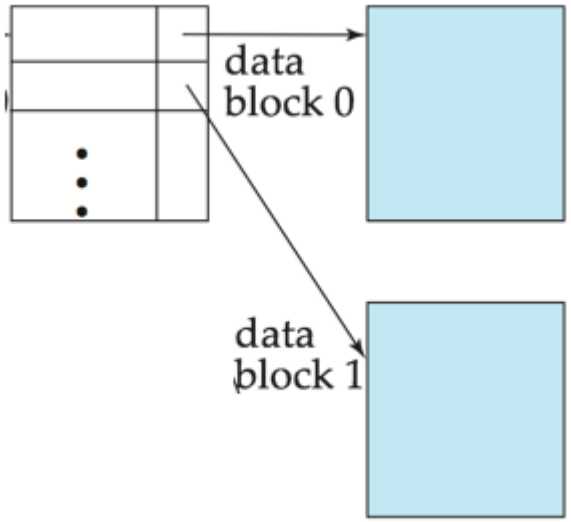


Para ubicar un registro de clave de búsqueda K:

- Encontrar el registro del índice con mayor valor de clave de búsqueda menor a K.
- Buscar el registro secuencialmente desde el registro al cual el registro del índice apunta.

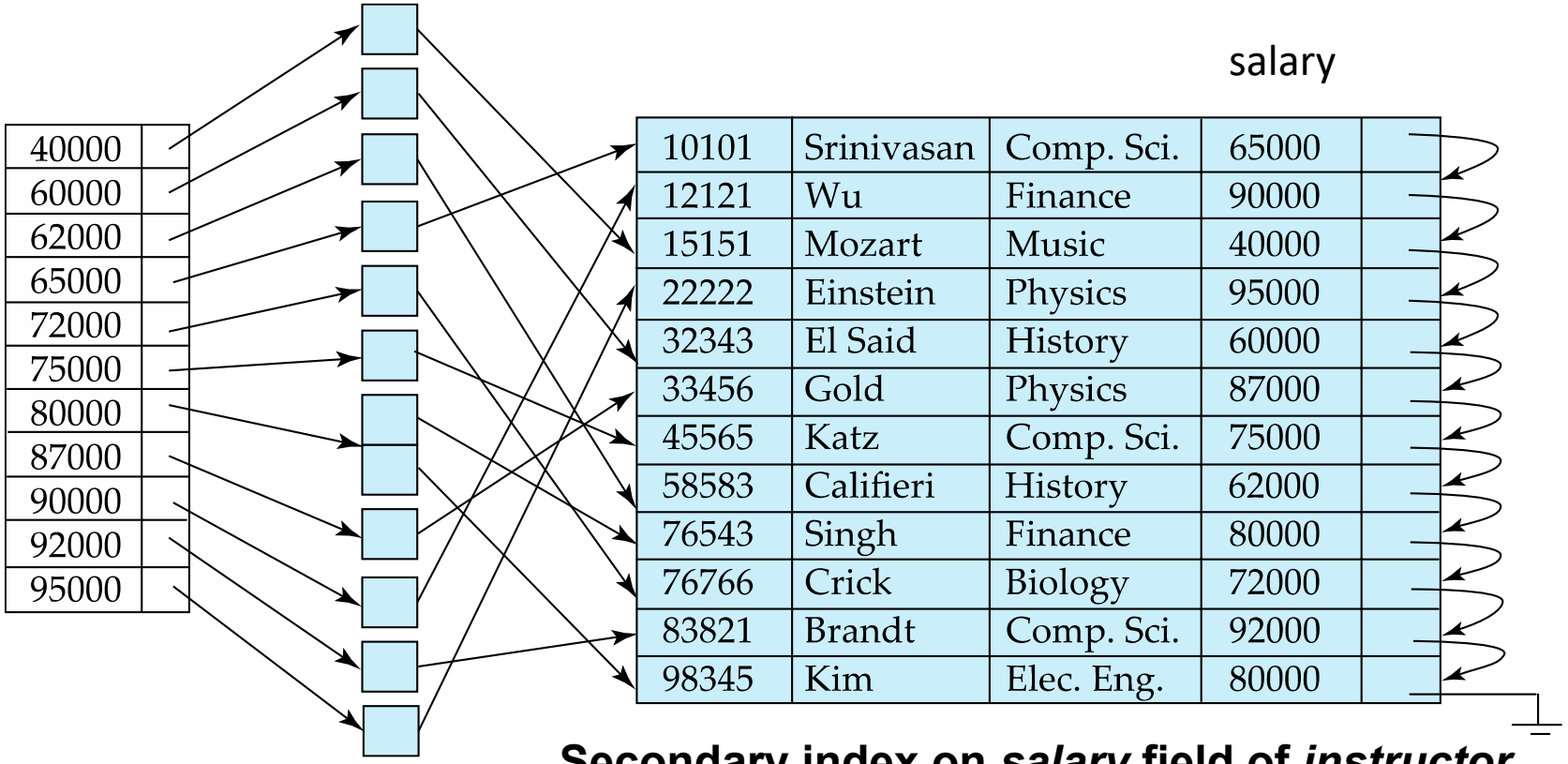
Índice disperso

- **Evaluación de los índices dispersos**:
  - Comparado con los índices densos requieren menos espacio y menos sobrecarga de mantenimiento para inserciones y borrados en la tabla.
  - Generalmente son **más lentos** que los índices densos para localizar registros.
- **Ejemplo**: usar índice disperso con una entrada de índice para cada bloque del archivo de la tabla, correspondiente a la menor clave de búsqueda en el bloque.



Índices secundarios

- Cada registro del índice apunta a un **balde** (bucket) que contiene punteros a todos los registros actuales con el valor particular de clave de búsqueda.
- Los índices secundarios deben ser densos.



Secondary index on *salary* field of *instructor*

Índices secundarios

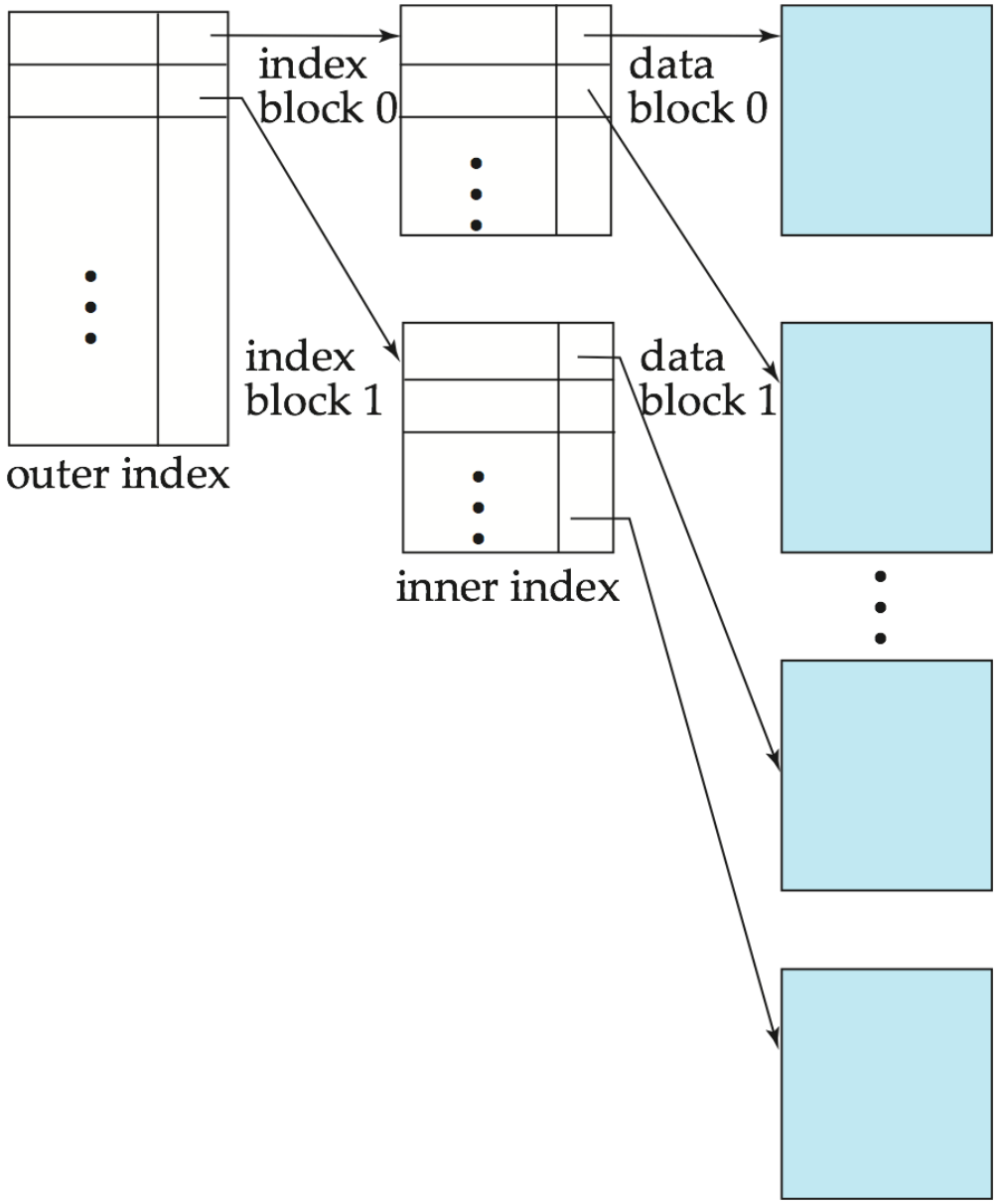
- **Evaluación de los índices secundarios**:
  - Escaneo secuencial usando índice primario es eficiente.
  - Escaneo secuencial usando índice secundario es costoso.
    - Cada acceso a registro de tabla puede requerir recoger un nuevo bloque de disco.
    - Recoger un bloque requiere entre 5 y 10 msec.

Índices

- **Evaluación del uso de índices:**
  - Los índices ofrecen beneficios sustanciales cuando se accede a registros de tablas.
  - Actualizar índices impone una sobrecarga en la modificación de la BD.
    - Cuando un archivo se modifica, cada índice al archivo debe ser actualizado.

Índice de multinivel

- **Problema**: Si el índice primario **no cabe en memoria**, entonces el acceso pasa a ser **costoso** (muchos accesos a bloque antes de llegar a la entrada).
- **Solución**: tratar el índice primario mantenido en disco como **archivo secuencial** y construir un **índice disperso** en el mismo (en memoria).
  - **Índice externo**: índice disperso del índice primario.
  - **Índice interno**: archivo del índice primario.
- **Evaluación**
  - Índices de los dos niveles deben ser actualizados al insertar y borrar en la tabla.



Actualización de índice por borrado de registro

- **Índice de un solo nivel**
  - **Índice denso**:
    - **Si el registro borrado fue el único registro en el archivo con su clave de búsqueda particular**: la clave de búsqueda es borrada del índice también.
    - **sino**:
      - **Si la entrada del índice almacena punteros a todos los registros con el mismo valor de clave de búsqueda:** se borra el puntero al registro borrado de la entrada del índice.
      - **Sino**: si el registro borrado es el primer registro con el valor de la clave de búsqueda, se actualiza la entrada del índice para que apunte al siguiente registro.

Actualización de índice por borrado de registro

- **Índice de un solo nivel (Cont)**
  - **Índice disperso**:
    - **Si el índice no contiene una entrada con el valor de clave de búsqueda del registro borrado:** nada necesita hacerse en el índice.
    - **Sino**:
      - **Si el registro borrado era el único registro con su clave de búsqueda *B*:**
        - **Si el próximo valor de clave de búsqueda tiene una entrada en el índice**: la entrada para *B* es borrada del índice.
        - **Sino**: se reemplaza el registro de índice correspondiente con un registro de índice para el próximo valor de clave de búsqueda (en el orden de clave de búsqueda).
      - **Sino: si la entrada del índice para la clave de búsqueda apunta al registro siendo borrado**: se actualiza la entrada del índice para apuntar al próximo registro con el mismo valor de clave de búsqueda.

Actualización de índice por inserción de registro

- **Índice de un solo nivel:**
  - Primero se hace búsqueda usando el valor de clave de búsqueda que aparece en el registro a ser insertado.
  - **Índice denso**:
    - **Si el valor de la clave de búsqueda no aparece en el índice**: insertar una entrada de índice con valor de clave de búsqueda en el índice en la posición apropiada.
    - **Sino**:
      - **Si la entrada del índice almacena punteros a todos los registros con el mismo valor de clave de búsqueda**: el sistema agrega un puntero al nuevo registro en la entrada del índice.
      - **Sino**: la entrada del índice almacena un puntero a solo el primer registro con el valor de la clave de búsqueda. Se coloca el registro en la tabla, siendo insertado luego de los otros registros con los mismos valores de clave de búsqueda.

Actualización de índice por inserción de registro

- **Índice de un solo nivel (Cont.):**
  - **Índice disperso:**
    - Asumimos que el índice almacena una entrada para cada bloque.
    - **Si el sistema crea un nuevo bloque**: inserta el primer valor de la clave de búsqueda (en orden de clave de búsqueda) apareciendo en el nuevo bloque en el índice.
    - **sino:**
      - **Si el nuevo registro tiene el menor valor de clave de búsqueda en su bloque**: el sistema actualiza la entrada del índice (con ese valor de clave de busqueda) apuntando al bloque.
      - **Sino**: el sistema no hace cambios al índice.

Actualización de índice de varios niveles

- Algoritmos de inserción y borrado para índices de varios niveles son una extensión simple del esquema ya descripto.
- **Luego de inserción o borrado de registro** el sistema actualiza el índice de más bajo nivel como se describió.
- Con respecto al segundo nivel, el índice de más bajo nivel es meramente un archivo conteniendo registros.
- **Si hay algún cambio en el índice de más bajo nivel:** el sistema actualiza el índice de segundo nivel como se describió.

Índices con clave de búsqueda compuesta

- Una clave de búsqueda conteniendo más de un atributo se llama **clave de búsqueda compuesta**.
- La estructura del índice es la misma como la de cualquier otro índice; la única diferencia es que la clave de búsqueda del índice contiene una lista de atributos.
- La clave de búsqueda puede representarse como una tupla de valores de la forma: $(a_1,\ldots,a_n)$, donde los atributos individuales son: $A_1,\ldots, A_n$.
- El orden de los valores de la clave de búsqueda es el **orden lexicográfico**.
- P. ej: si la clave de búsqueda tiene 2 atributos: $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ si $a_1<b_1$, o $a_1=b_1$ y $a_2<b_2$.

Acceso a múltiples claves de búsqueda

- **Usar múltiples índices para ciertos tipos de consultas**.
- **Ejemplo**:

  select ID
  from instructor
  where dept_name = 'Finance' and salary = 80000

- **Posibles estrategias** para procesar consultas usando índices en atributos simples:
  - ❑ Usar índice en *dept_name* para encontrar instructores con nombre de departamento 'Finance'; testear *salary* = 80000.
  - ❑ Usar índice en *salary* para encontrar instructores con *salary* de 80000; testear *dept_name* = 'Finance'.
  - ❑ Usar índice en *dept_name* para encontrar punteros a todos los registros pertenecientes al departamento de *finanzas*. Similarmente usar índice en salario para hallar punteros a registros con salario de 80000. Tomar la intersección de ambos conjuntos de punteros obtenidos.

Índices en varios atributos

- Supongamos que tenemos un índice en la clave de búsqueda combinada (*dept_name*, *salary*).
- Con la cláusula **where** anterior el índice en (*dept_name*, *salary*) puede ser usado para recoger solo registros que satisfacen ambas condiciones.
- Además se puede manejar eficientemente:

  where dept_name = ‘Finance’ and salary < 80000
- Pero no se puede manejar eficientemente:

  where dept_name < ‘Finance’ and salary = 80000
  - Puede recolectar varios registros que satisfacen la primera, pero no la segunda condición.

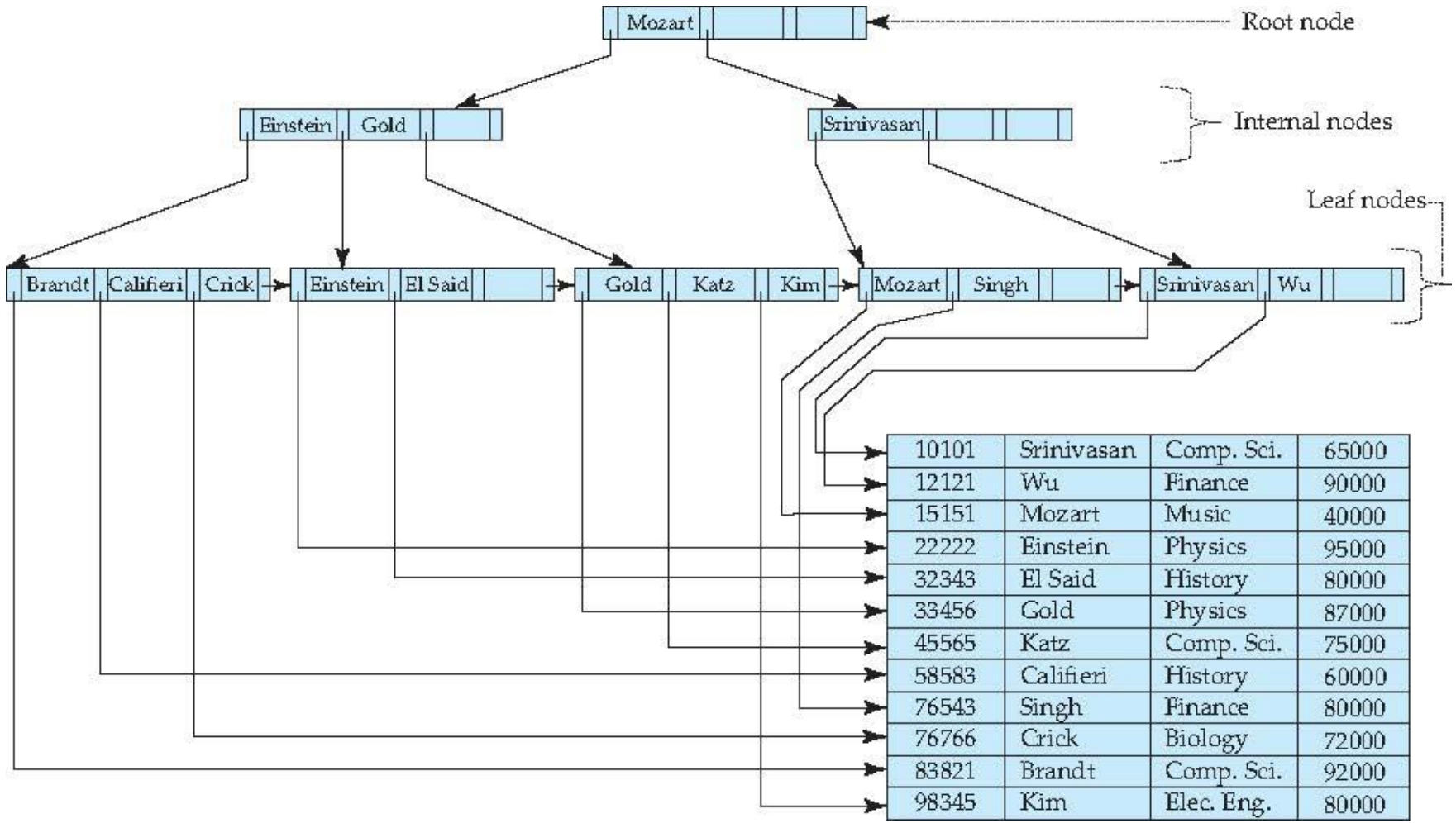
Índices árbol B^+

- **Problema**: al usar índices que son organizados con archivos secuenciales, el desempeño se degrada a medida que el índice crece,
  - porque muchos bloques overflow son creados.
  - Esto hace que haya idas y vueltas entre bloques a medida que se recorre el índice.
  - Aun sin haber bloques de overflow, si el índice es grande, recorrerlo para encontrar una entrada puede significar muchas transferencias y accesos de bloques.
- **Solución 1**: reorganizar periódicamente el archivo del índice.
  - Esto es costoso y toma bastante tiempo.
  - Solo resuelve la primera parte del problema.
  - Por lo tanto necesitamos una solución mejor.

Índices árbol B^+

- **Solución 2:** usar índices ordenados con forma de **árbol balanceado** (por ejemplo, **árbol B^+**).
  - No hace falta reorganizar el archivo del índice para mantener el desempeño.
  - **Encontrar la entrada deseada** representa recorrer la **altura del árbol**, y esto representa una **cantidad logarítmica de bloques.**
    - Porque el árbol es balanceado.
    - Entonces el acceso a entradas específicas es eficientísimo.
    - Suele ser mejor que recorrer un índice secuencial grande para llegar a la entrada correcta.
  - El índice **se actualiza** con **cambios pequeños locales** frente a inserciones y borrados.
    - Y esto toma usualmente O(1), salvo excepciones raras.
  - Los **árboles B^+** son usados extensivamente.

Ejemplo de árbol B+



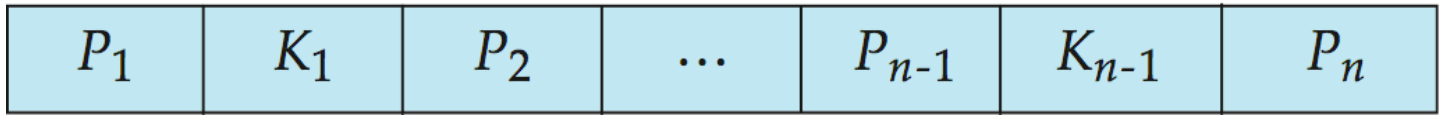
10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
12121	Wu	Finance	90000
15151	Mozart	Music	40000
22222	Einstein	Physics	95000
32343	El Said	History	80000
33456	Gold	Physics	87000
45565	Katz	Comp. Sci.	75000
58583	Califieri	History	60000
76543	Singh	Finance	80000
76766	Crick	Biology	72000
83821	Brandt	Comp. Sci.	92000
98345	Kim	Elec. Eng.	80000

Índices árbol B^+

- **Un árbol B^+ satisface las siguientes propiedades:**
  - Todos los caminos desde la raíz a una hoja son de la misma longitud.
  - Cada nodo que no es la raíz o una hoja tiene entre $\lceil n/2 \rceil$ y n hijos.
  - Un nodo hoja tiene entre $\lceil (n–1)/2 \rceil$ y n *-1* valores.
  - Si la raíz no es una hoja, tiene al menos 2 hijos.
  - Si la raíz es una hoja, puede tener entre 0 y n -1 valores.

Estructura de nodo de árbol B^+

- **Nodo típico**:

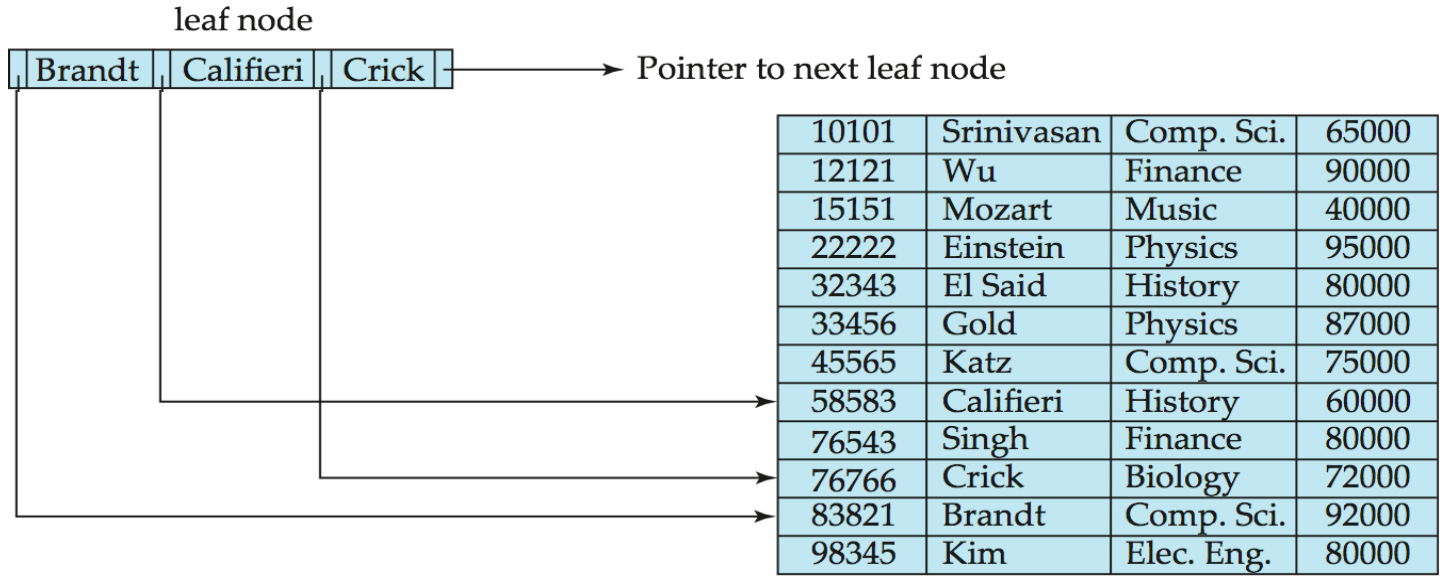


  - Los K_i son valores de clave de búsqueda.
  - Los P_i son:
    - Para **nodos no hoja**: punteros a hijos
    - Para **nodos hoja**: punteros a registros o buckets de registros.
  - Las claves de búsqueda en un nodo están ordenadas.

    $K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_{n-1}$
  - Los rangos de valores en cada hoja no se solapan, excepto cuando hay valores de clave de búsqueda duplicados, en cuyo caso un valor puede estar presente en más de una hoja.
  - Asumir inicialmente que no hay claves duplicadas; manejar duplicaciones después.

Nodos hoja de un árbol B^+

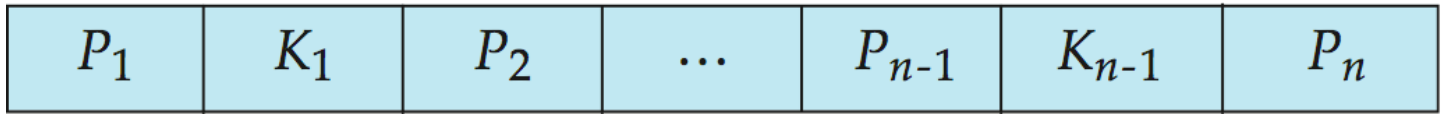
- **Propiedades de un nodo hoja:**
  - Para i = 1, 2, …, n-1, el puntero P_i apunta al registro del archivo con el valor de clave de búsqueda K_i.
  - Si L_i, L_j son nodos hoja y i < j, los valores de la clave de búsqueda de L_i son menores o iguales a los valores de la clave de búsqueda de L_j.
  - P_n apunta al próximo nodo hoja en el orden de clave de búsqueda.



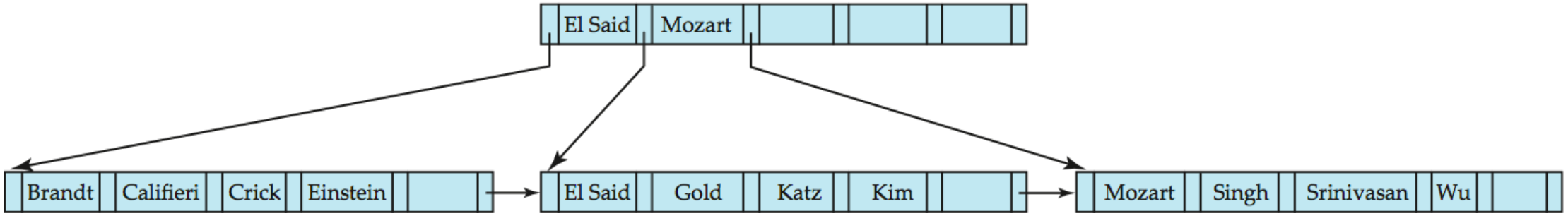
10101	Srinivasan	Comp. Sci.	65000
12121	Wu	Finance	90000
15151	Mozart	Music	40000
22222	Einstein	Physics	95000
32343	El Said	History	80000
33456	Gold	Physics	87000
45565	Katz	Comp. Sci.	75000
58583	Califieri	History	60000
76543	Singh	Finance	80000
76766	Crick	Biology	72000
83821	Brandt	Comp. Sci.	92000
98345	Kim	Elec. Eng.	80000

Nodos no hoja en árboles B^+

- Los **nodos no hoja** forman un índice disperso multinivel en los nodos hoja. Para un nodo no hoja con *n* punteros:
  - Todas las claves de búsqueda en el subárbol al cual P_1 apunta son menores que K_1.
  - Para $2 \leq i \leq n - 1$: todas las claves de búsqueda en el subárbol al cual P_i apunta tienen valores mayores o iguales a K_{i-1} y menores que K_i .
  - Todas las claves de búsqueda en el subárbol al cual P_n apunta tiene valores mayores o iguales que K_{n-1}.



Ejemplo de árbol B^+



Árbol B^+ para tabla *instructor* (n = 6)

Observaciones

- Como las conexiones entre nodos son hechas mediante punteros, los bloques lógicamente cercanos no necesitan estar físicamente cercanos.
- Si hay *K* valores de clave de búsqueda en la tabla, la altura del árbol B^+ no es mayor a $\lceil \log_{\lceil n/2 \rceil}(K) \rceil$.
  - Entonces las consultas pueden ser realizadas eficientemente.
  - El *n* es cantidad máxima de punteros que tiene un nodo.
- Borrados e inserciones a la tabla pueden ser manejados eficientemente, porque el índice puede ser restructurado en tiempo logarítmico.

Consultas en árboles B^+

- **Encontrar registro con valor de clave de búsqueda *V.***
- *Function find(value V)*
  1. *C = root*
  2. While *C* is not nodo hoja {
     1. Sea *i* el menor valor tal que $V \leq K_i$.
     2. If no existe: set *C = último puntero non-null en C*
     3. Else { if (V = K_i): *C* = P_{i+1} else: *C* = P_i}
     }
  3. *Sea i* el menor valor tal que $K_i = V$
  4. If existe tal valor *i:* seguir el puntero P_i al registro deseado.
  5. Else no existe registro con valor de clave de búsqueda *k*.

Manejando duplicados

- **Con claves de búsqueda duplicadas** (tanto en nodos hoja como internos):
  - No podemos garantizar que $K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_{n-1}$
  - Pero podemos garantizar que $K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \ldots \leq K_{n-1}$
- Las claves de búsqueda en el subárbol al cual P_i apunta
  - son $\leq K_i$, pero no necesariamente $< K_i$.
  - Para ver por qué, supongamos que el mismo valor de la clave de búsqueda V está presente en dos nodos hoja L_i y L_{i+1}.
    - Entonces, en el nodo padre K_i debe ser igual a V.

Manejando duplicados

- **Modificamos el procedimiento de búsqueda como sigue**:
  - Recorrer P_i *incluso* si $V = K_i$
  - Tan pronto como alcanzamos un nodo hoja *C*, chequear si *C* tiene solo valores de clave de búsqueda menores que *V*.
    - Si es así, sea *C* = hermano derecho de *C* antes de chequear si *C* contiene *V*.
- **Procedimiento *printAll***
  - Usa búsqueda modificada para encontrar primera ocurrencia de *V*.
  - Recorre las hojas consecutivas para encontrar todas las ocurrencias de *V*.

Consultas en árboles B^+

- Si hay *K* valores de clave de búsqueda en el archivo, la altura del árbol no es mayor a $\lceil \log_{\lceil n/2 \rceil}(K) \rceil$.
- Un nodo tiene generalmente el mismo tamaño que un bloque de disco, típicamente 4 KiB.
- **Ejemplo**: Con 1 millón de valores de clave de búsqueda y $n = 100$
  - A lo más $log_{50}(1{,}000{,}000) = 4$ nodos son accedidos en una búsqueda.
- Resulta útil usar la fórmula de **cambio de base** para calcular logaritmos:

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

Lectura recomendada

- Leer sobre otras operaciones en árboles árbol B^+:
  - Inserción, borrado.

Indexando strings

- **Problema**: Creando índices árbol B^+ en atributos de valor string da lugar a dos problemas:
  - los string pueden ser de longitud variable y
  - los string pueden ser largos dando lugar a menor cantidad de punteros por nodo y llevando a aumentar la altura del árbol.
- **Notar que:**
  - Un nodo debe ser subdividido si está lleno sin importar cuantas entradas de búsqueda contenga.
  - Nodos pueden ser combinados o sus entradas redistribuidas dependiendo de qué fracción del espacio en los nodos es usado,
    - en lugar de basarse en el número máximo de entradas que un nodo puede contener.

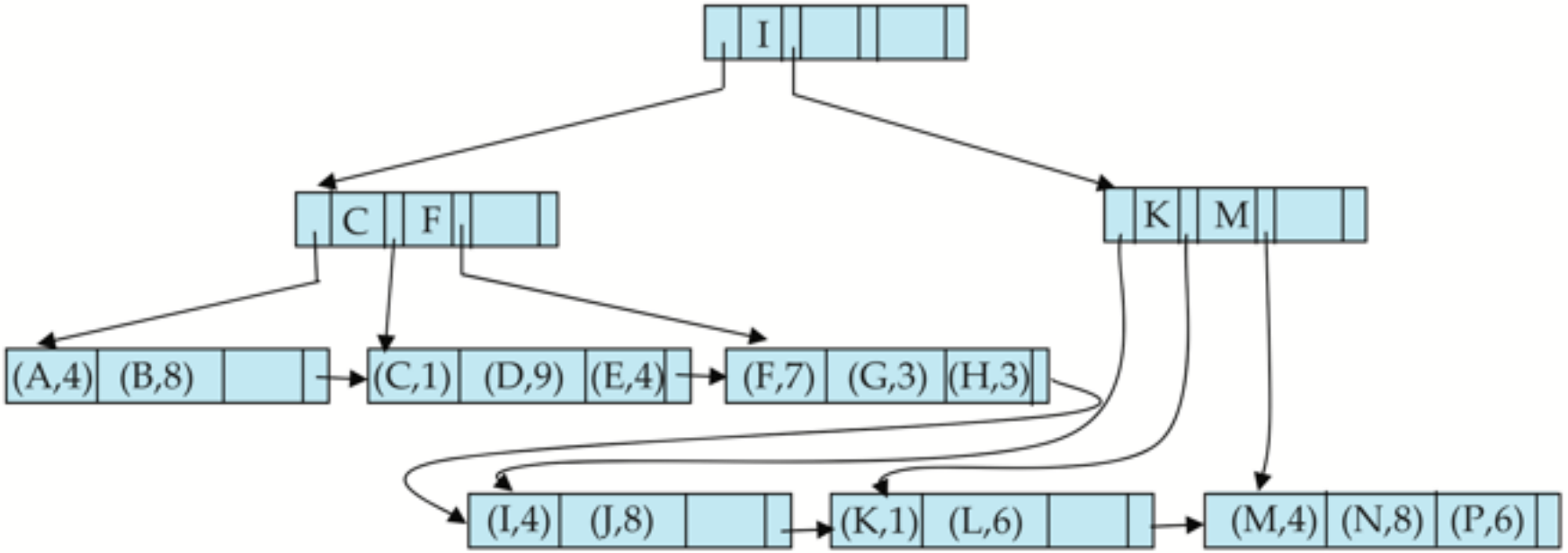
Indexando strings

- **Solución**: La cantidad de punteros de un nodo puede ser aumentada usando una técnica llamada **compresión de prefijos**.
  - En los nodos no hoja no almacenamos el valor entero de la clave de búsqueda.
  - Solo almacenamos un **prefijo** de cada valor de clave de búsqueda que es suficiente para distinguir entre los valores de las claves de búsqueda en los subárboles que separa.
- **Ejemplo**: si tenemos un índice en nombres, el valor de la clave de búsqueda en un nodo no hoja puede ser un prefijo de un nombre.
  - Puede ser suficiente almacenar 'Silb' en un nodo no hoja en lugar de 'Silberschatz' si el valor más cercano en los dos subárboles que separa son 'Silas' y 'Silver' respectivamente.

Organización de archivo con árbol B^+

- El problema de la degradación de archivo de índice secuencial se resuelve usando índice de árbol B^+
- El problema de la degradación de un archivo de datos se resuelve usando una **organización de archivo de árbol B^+**
- Los **nodos hoja** en una organización de archivo de árbol B^+ almacena registros en lugar de punteros.
- Los nodos hoja son todavía requeridos que estén la mitad llenos.
  - Como los registros ocupan más espacio que los punteros, el máximo número de registros que pueden ser almacenados en un nodo hoja es menor que el número de punteros en un nodo no hoja.
- La inserción y borrado son manejados de la misma manera que inserción y borrado de entradas en índices de árbol B^+

Organización de archivo con árbol B^+



Ejemplo de organización de archivo con árbol B^+