UNER Facultad de Ingeniería

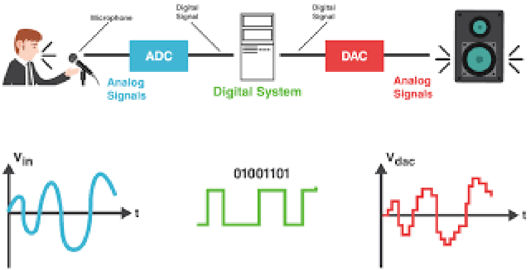
# Filtrado Analógico y Digital

Mg. Bioing. Juan Manuel Reta

Sistemas de Adquisición y Procesamiento de Señales

# Contenidos

# DSP


Microphone
Digital Signal
Digital Signal
ADC
DAC
Analog Signals
Digital System
Analog Signals
Vin
t
01001101
Vdac
t

# Respuesta en Frecuencia

$$H(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\varphi(j\omega)}$$

Donde:

$$|H(j\omega)|^2 = R^2(\omega) + I^2(\omega)$$

$$\varphi(j\omega) = \arctan\left(\frac{I^2(\omega)}{R^2(\omega)}\right)$$

Cuando una señal atraviesa un sistema LTI esta es defasada en proporción a su frecuencia.

# Defasaje

## Ejemplo: Defasaje

Una señal de 1KHz experimenta un defasaje de 36° que corresponde a un retraso de 0.1ms. (EL periodo de una senoidal de 1Khz es 1ms y 36° representa 0.1 ciclo de la señal).
Si la fase cambia en forma proporcional a la frecuencia, entonces una senoidal de 2 Khz experimentará un defasaje de 72°, lo que también representa un retardo de 0.1 ms. (el periodo de la señal es ahora 0.5ms y 72° representa 0.2 ciclos).

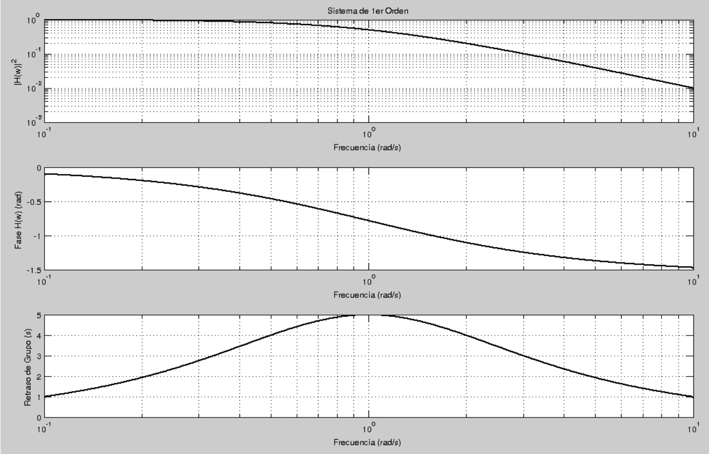
## Ejemplo: 1er Orden

$$\left|H\left(j\omega\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{R^2C^2\omega^2+1}}$$

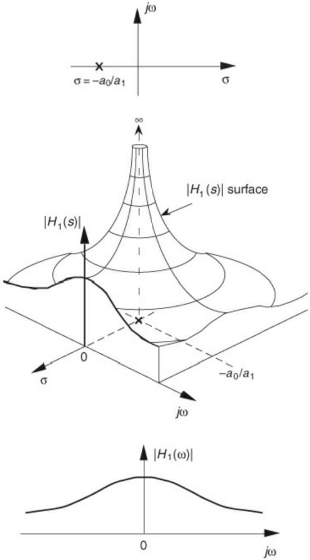
$$\varphi\left(j\omega\right) = -\arctan\left(\omega RC\right)$$

$$\tau\left(\omega\right) = \frac{RC}{\omega^2R^2C^2+1}$$

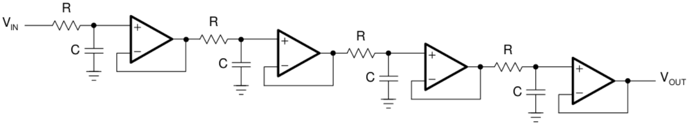
# Magnitud, Fase y Retardo de Grupo



# 1er Orden, Polo Real



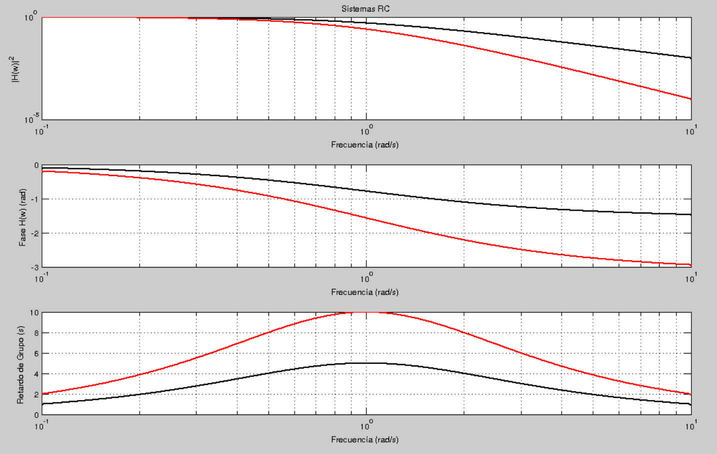
# Sistema RC



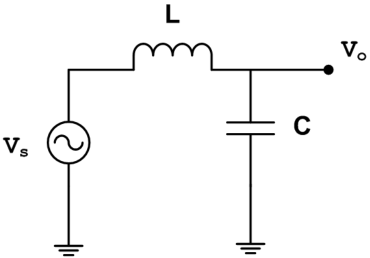

$$H(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\dots(T_n s + 1)}$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = \cdots = T_n$$

# Magnitud, Fase y Retardo de Grupo

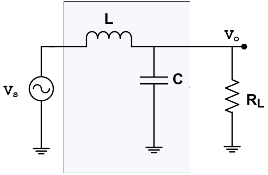


# Sistema LC




$$H(s)_{LC} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

# Sistema RLC



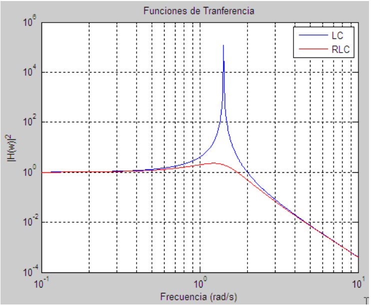

$$H(s)_{RLC} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}\left(\frac{L}{R_L} + R_s C\right)s + \frac{1}{LC}\left(\frac{R_s}{R_L} + 1\right)}$$

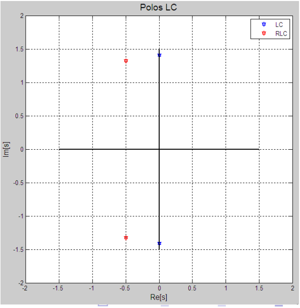
Si $R_s = 0$

$$H(s)_{RLC} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{R_L C}s + \frac{1}{LC}}$$

# Sistema RLC

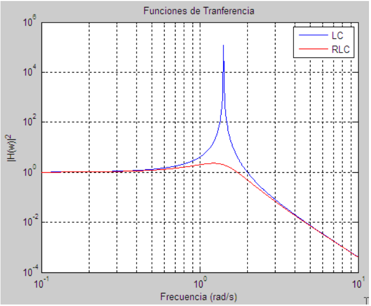
$$H(s)_{LC} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

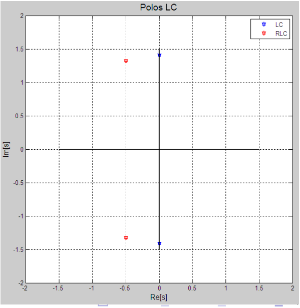


# Sistema RLC

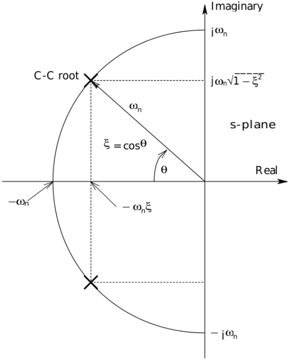
$$H(s)_{RLC} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}\left(\frac{L}{R_L} + R_s C\right)s + \frac{1}{LC}\left(\frac{R_s}{R_L} + 1\right)}$$



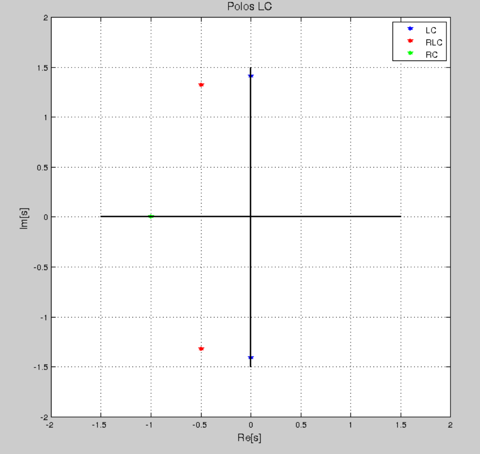



# Sección de 2do Orden

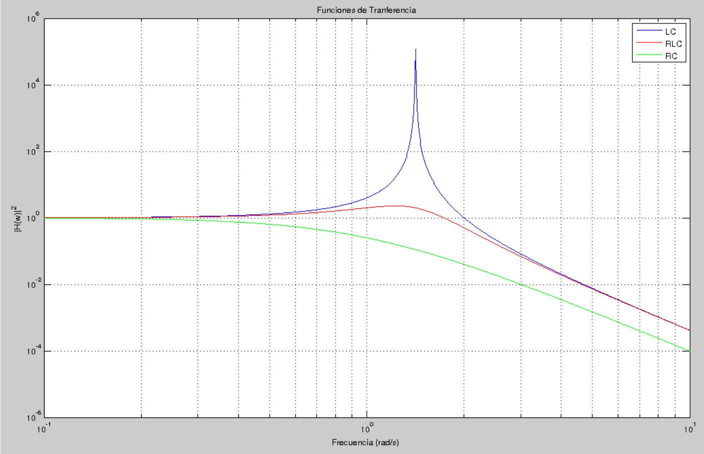
$$H(s) = \frac{H_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$



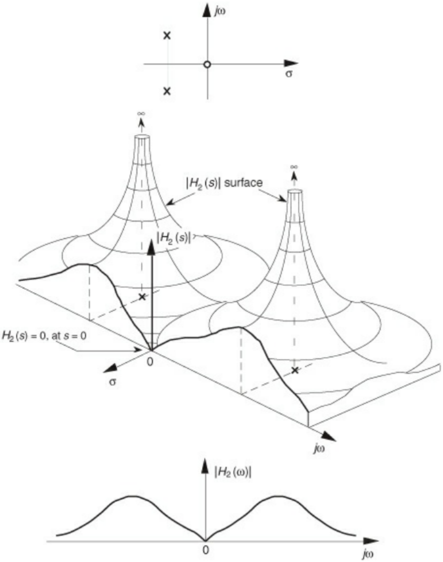
# Sección de 2do Orden



# Sección de 2do Orden



# 2do Orden, Polos Complejos Conjugados



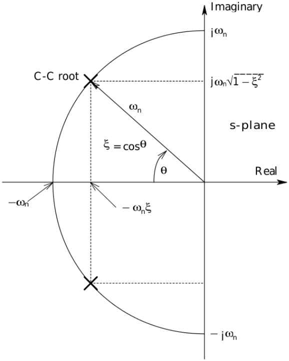
# Factor de Calidad (Q)

Los filtros de mejor rendimiento incluyen pares de polos conjugados, para estos se definen el Factor de calidad Q de un par de polos de resonancia:

$$H(s) = \frac{H_0\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$H(s) = \frac{H_0\omega_n^2}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2}$$



# Factor de Calidad (Q)

## Parámetro Q

El Q es un parámetro que mide la relación entre la energía reactiva que se almacena y la que se disipa durante un ciclo completo de la señal.
Tanto en los filtros pasa-altos como en los pasa-bajos el Q se define como el factor de calidad de los polos y es igual:

$$Q = 1/2\xi$$

# Sección de 2do Orden

Para secciones pasa-alto:

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2}$$

Para secciones pasa-banda:

$$H(s) = \frac{H_0 \frac{\omega_n}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2}$$

En los filtros pasabanda el Q se define como la relación entre la frecuencia central $\omega_n$ y el ancho de banda del filtro.

$$\frac{w_{c2} - w_{c1}}{w_n} = \frac{1}{Q}$$

$$B = w_{c2} - w_{c1}$$

# Conceptos Generales

Muchas secuencias $x[n]$ admiten una representación mediante la integral de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) e^{j\theta n}\, d\theta$$

Siendo:

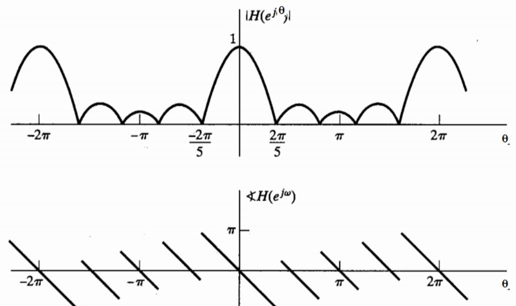
$$X\left(e^{j\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\theta n}$$

# Conceptos Generales

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1} & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$H\left(e^{j\theta}\right) = \alpha \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\theta n}$$

$$\alpha = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}$$



# Conceptos Generales

| Sequence $x[n]$ $y[n]$ | Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$ |
|---|---|
| 1. $ax[n] + by[n]$ | $aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ |
| 2. $x[n - n_d]$ ($n_d$ an integer) | $e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$ |
| 3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$ | $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ |
| 4. $x[-n]$ | $X(e^{-j\omega})$<br>$X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real. |
| 5. $nx[n]$ | $j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ |
| 6. $x[n] * y[n]$ | $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ |
| 7. $x[n]y[n]$ | $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ |

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$$

# Conceptos Generales

Sea $x[n]$ una secuencia discreta:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Usualmente se la considera como un operador transformada:

$$\mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = X(z)$$

# Conceptos Generales

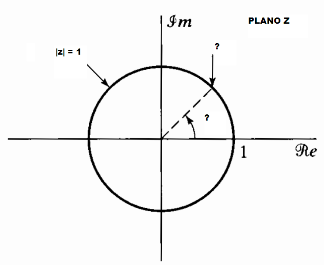
$$z = r \cdot e^{j\theta}$$

$$X\left(r \cdot e^{j\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{n} \cdot e^{-j\theta n}$$

# Conceptos Generales

$$z = r \cdot e^{j\theta}$$

$$X\left(r \cdot e^{j\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{n} \cdot e^{-j\theta n}$$




# Propiedades

| | |
|---|---|
| $x[n]$ | $X(z)$ |
| $x_1[n]$ | $X_1(z)$ |
| $x_2[n]$ | $X_2(z)$ |
| $ax_1[n] + bx_2[n]$ | $aX_1(z) + bX_2(z)$ |
| $x[n - n_0]$ | $z^{-n_0}X(z)$ |
| $z_0^n x[n]$ | $X(z/z_0)$ |
| $nx[n]$ | $-z\dfrac{dX(z)}{dz}$ |
| $x^*[n]$ | $X^*(z^*)$ |
| $\mathcal{R}e\{x[n]\}$ | $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$ |
| $\mathcal{J}m\{x[n]\}$ | $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$ |
| $x^*[-n]$ | $X^*(1/z^*)$ |
| $x_1[n] * x_2[n]$ | $X_1(z)X_2(z)$ |

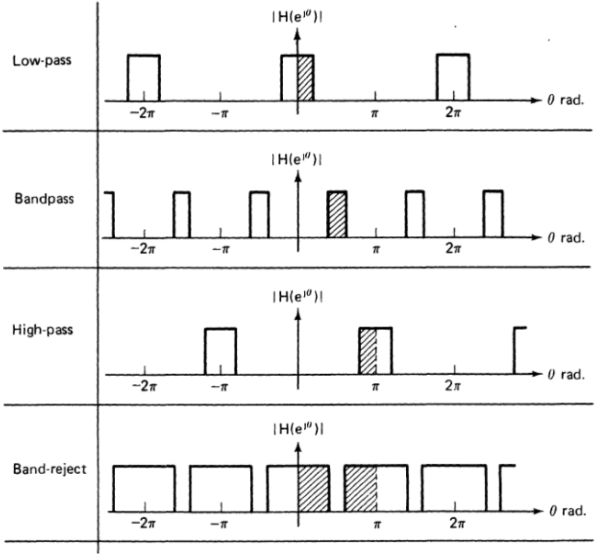
Initial-value theorem:

$$x[n] = 0, \quad n < 0 \qquad \lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$$

# Plantillas de Filtros Digitales

¿Pude dibujar las plantillas de filtros Pasa-Bajos, Pasa-Altos y Pasa-Banda. en el dominio de la frecuencia digital?

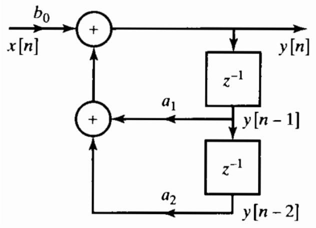
# Plantillas de Filtros Digitales



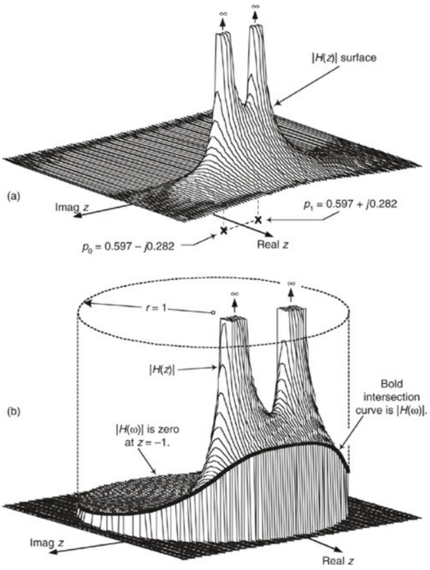
# Filtros Digitales

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



# Filtros Digitales



# Bilbliografía