Diseño de Filtros Digitales

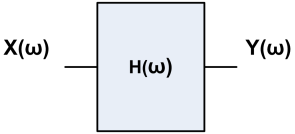
Mg. Bioing. Juan Manuel Reta

Sistemas de Adquisición y Procesamiento
Filtros Digitales

Aproximación

El problema/solución de la aproximación...

Sistema sin Distorsión



$$h(t) * x(t) = kx(t-\tau)$$

Aplicando TF a ambos miembros:

$$H(j\omega)\,X(j\omega) = KX(j\omega)\,e^{-j\omega\tau}$$

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega\tau}$$

Filtro ideal Pasabajos

El filtro ideal pasabajos se comporta como un sistema sin distorsión para las frecuencias de banda de paso y un atenuador absoluto para el resto de las frecuencias.

$$H(j\omega) = e^{-j\omega} \quad \vee\, 0 \leq \; |\omega| \leq 1$$

$$= 0 \quad \vee \; |\omega| > 1$$

Plantilla

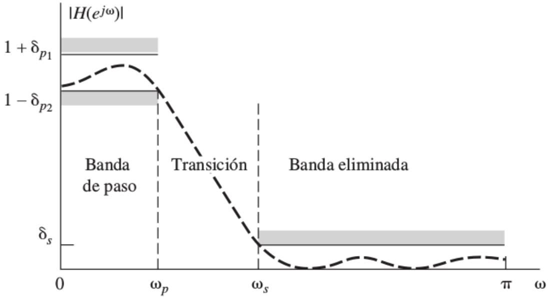


Figura:

Butterworth

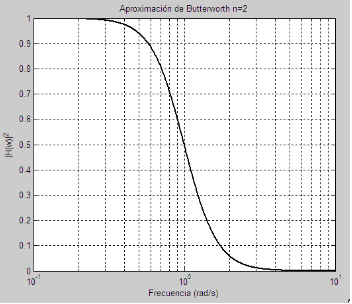
La aproximación de Butterworth aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

Butterworth

La aproximación de Butterworth aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$



Butterworth

Propiedades:

1. Para todo n $|H(j0)|^2 = 1$; $|H(j1)|^2 = \frac{1}{2}$ y $|H(j\infty 0)|^2 = 0$

Butterworth

Propiedades:

1. Para todo n $|H(j0)|^2 = 1$; $|H(j1)|^2 = \frac{1}{2}$ y $|H(j\infty 0)|^2 = 0$
2. La función magnitud de Butterworth es monotónicamente decreciente para $\omega \geq 0$

Butterworth

Propiedades:

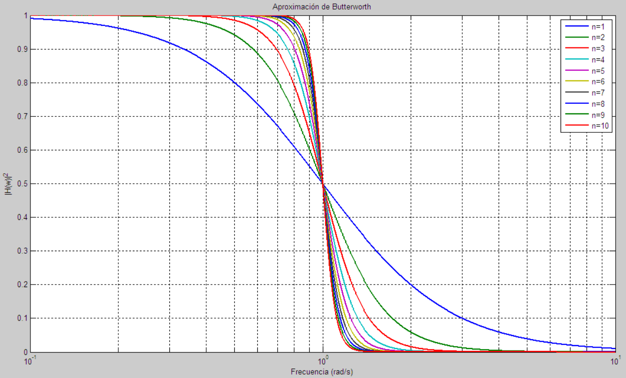
1. Para todo n $|H(j0)|^2 = 1$; $|H(j1)|^2 = \frac{1}{2}$ y $|H(j\infty 0)|^2 = 0$
2. La función magnitud de Butterworth es monotónicamente decreciente para $\omega \geq 0$
3. Las primeras $(2n-1)$ derivadas de un filtro pasabajos de Butterworth de orden n son cero en $\omega = 0$. Por este motivo se los llama de *magnitud maximamente plana.*

Butterworth

Propiedades:

1. Para todo n $|H(j0)|^2 = 1$; $|H(j1)|^2 = \frac{1}{2}$ y $|H(j\infty 0)|^2 = 0$
2. La función magnitud de Butterworth es monotónicamente decreciente para $\omega \geq 0$
3. Las primeras $(2n-1)$ derivadas de un filtro pasabajos de Butterworth de orden n son cero en $\omega = 0$. Por este motivo se los llama de *magnitud maximamente plana.*
4. A alta frecuencia la pendiente de caida de un filtro de Butterworth de orden n es $20n$ dB/década.

Butterworth



Butterworth

Para obtener la función de transferencia aplicamos un procedimiento de sintesis de funciones de fase mínima basado en la Transformada de Hilbert. LAM - Cap 3- pag 68.

1.

$$h(s) = H(s)\,H(-s) = \left|H(j\omega)\right|^2_{\omega=s/j}$$

$$h(s) = \frac{1}{1+\omega^{2n}}_{\omega=s/j} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

Butterworth

Para obtener la función de transferencia aplicamos un procedimiento de sintesis de funciones de fase mínima basado en la Transformada de Hilbert. LAM - Cap 3- pag 68.

1.
$$h(s) = H(s)\,H(-s) = \left|H(j\omega)\right|^2_{\omega=s/j}$$

$$h(s) = \frac{1}{1+\omega^{2n}}_{\omega=s/j} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

2. Factorizar $h(s)$ en polinomios de 1er y 2do orden.

Butterworth

Para obtener la función de transferencia aplicamos un procedimiento de sintesis de funciones de fase mínima basado en la Transformada de Hilbert. LAM - Cap 3- pag 68.

1.
$$h(s) = H(s)\,H(-s) = \left|H(j\omega)\right|^2_{\omega=s/j}$$

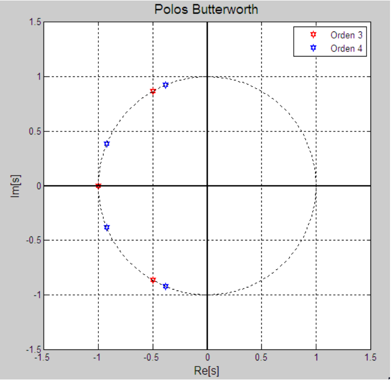
$$h(s) = \frac{1}{1+\omega^{2n}}_{\omega=s/j} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

2. Factorizar $h(s)$ en polinomios de 1er y 2do orden.
3. Asociar los factores de $h(s)$ cuyos polos se encuentran en el semiplano izquierdo de S a $H(s)$.

Butterworth

Se puede observar que los polos de $h(s)$ se obtendrán a partir de la solución de la ecuación:

$$1 + (-1)^n s^{2n} = 0$$



Butterworth

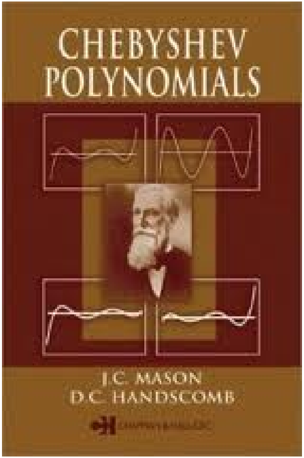
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0$

Order n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.00000000								
2	1.00000000	1.41421356							
3	1.00000000	2.00000000	2.00000000						
4	1.00000000	2.61312593	3.41421356	2.61312593					
5	1.00000000	3.23606798	5.23606798	5.23606798	3.23606798				
6	1.00000000	3.86370331	7.46410162	9.14162017	7.46410162	3.86370331			
7	1.00000000	4.49395921	10.09783468	14.59179389	14.59179389	10.09783468	4.49395921		
8	1.00000000	5.12583090	13.13707118	21.84615097	25.68835593	21.84615097	13.13707118	5.12583090	
9	1.00000000	5.75877048	16.58171874	31.16343748	41.98638573	41.98638573	31.16343748	16.58171874	5.75877048

(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s)\, B_2(s)\, B_3(s)\, B_4(s)\, B_5(s)$

Order n	$B(s)$
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + 1.41421356s + 1)$
3	$(s^2 + s + 1)\ (s + 1)$
4	$(s^2 + 0.76536686s + 1)\ (s^2 + 1.84775907s + 1)$
5	$(s^2 + 0.61803399s + 1)\ (s^2 + 1.61803399s + 1)\ (s + 1)$
6	$(s^2 + 0.51763809s + 1)\ (s^2 + 1.41421356s + 1)\ (s^2 + 1.93185165s + 1)$
7	$(s^2 + 0.44504187s + 1)\ (s^2 + 1.24697960s + 1)\ (s^2 + 1.80193774s + 1)\ (s + 1)$
8	$(s^2 + 0.39018064s + 1)\ (s^2 + 1.11114047s + 1)\ (s^2 + 1.66293922s + 1)\ (s^2 + 1.96157056s + 1)$
9	$(s^2 + 0.34729636s + 1)\ (s^2 + s + 1)\ (s^2 + 1.53208889s + 1)\ (s^2 + 1.87938524s + 1)\ (s + 1)$

Aproximación de Chebyshev



Chebyshev

La aproximación de Chebyshev aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.
La aproximación se contruye a partir de los polinomios de Chebyshev.

$$T_n(\omega) \triangleq \cos\left(n \cdot \cos^{-1} \omega\right)$$

Chebyshev

La aproximación de Chebyshev aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.
La aproximación se contruye a partir de los polinomios de Chebyshev.

$$T_n(\omega) \triangleq \cos\left(n \cdot \cos^{-1}\omega\right)$$

Considerando:

$$x \triangleq \cos^{-1}\omega$$

Chebyshev

La aproximación de Chebyshev aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.
La aproximación se contruye a partir de los polinomios de Chebyshev.

$$T_n(\omega) \triangleq \cos\left(n \cdot \cos^{-1}\omega\right)$$

Considerando:

$$x \triangleq \cos^{-1}\omega$$

Entonces:

$$T_n(\omega) = \cos(n \cdot x)$$

Chebyshev

$$T_0(\omega) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(\omega) = \cos x = \cos\left(\cos^{-1}\omega\right) = \omega$$

$$T_2(\omega) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1$$

$$T_3(\omega) = \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x = -3\omega + 4\omega^3$$

$$T_4(\omega) = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4$$

Chebyshev

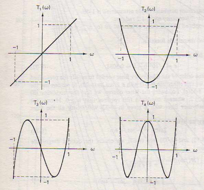
$$T_0(\omega) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(\omega) = \cos x = \cos\left(\cos^{-1}\omega\right) = \omega$$

$$T_2(\omega) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1$$

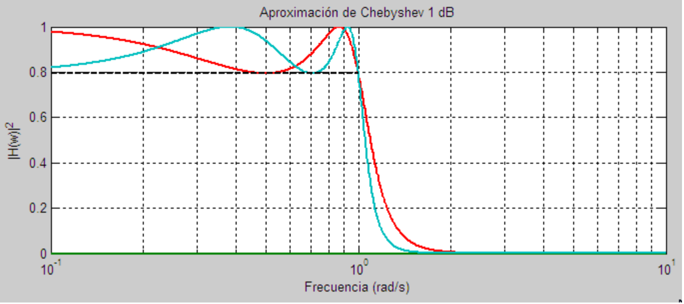
$$T_3(\omega) = \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x = -3\omega + 4\omega^3$$

$$T_4(\omega) = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4$$



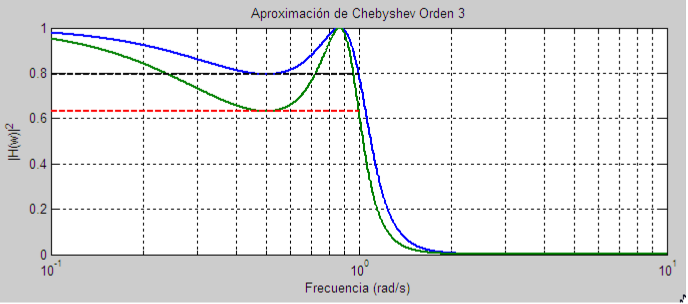
Chebyshev

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot T_n^2(\omega)}$$



Chebyshev

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot T_n^2(\omega)}$$



Chebyshev

Propiedades:

1. Para todo $|\omega| \leq 1, |H(j\omega)|^2$ oscila entre $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ y 1.
   Hay n puntos críticos para el intervalo de ω entre 0 y 1.

Chebyshev

Propiedades:

1. Para todo $|\omega| \leq 1, |H(j\omega)|^2$ oscila entre $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ y 1.
   Hay n puntos críticos para el intervalo de ω entre 0 y 1.
2. Para $\omega \geq 1; |H(j\omega)|^2$ decrece monotónicamente a 0 a razón de $20 \cdot ndB/decada$;

Chebyshev

Propiedades:

1. Para todo $|\omega| \leq 1, |H(j\omega)|^2$ oscila entre $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ y 1.
   Hay n puntos críticos para el intervalo de ω entre 0 y 1.
2. Para $\omega \geq 1; |H(j\omega)|^2$ decrece monotónicamente a 0 a razón de $20 \cdot ndB/decada$;
3. Para todo n:
   - $|H(j1)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$
   - $|H(j0)|^2 = 1;$ *Para n impar*
   - $|H(j0)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2};$ *Para n par*

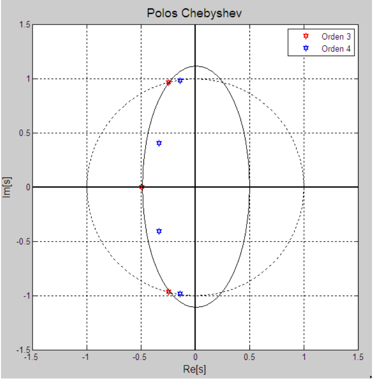
Chebyshev

Propiedades:

1. Para todo $|\omega| \leq 1, |H(j\omega)|^2$ oscila entre $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ y 1.
   Hay n puntos críticos para el intervalo de ω entre 0 y 1.
2. Para $\omega \geq 1; |H(j\omega)|^2$ decrece monotónicamente a 0 a razón de $20 \cdot ndB/decada$;
3. Para todo n:
   - $|H(j1)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$
   - $|H(j0)|^2 = 1;\ Para\ n\ impar$
   - $|H(j0)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2};\ \ Para\ n\ par$
4. $A_{MAX}dB \triangleq -10\log\frac{1}{1+\epsilon^2}$
   $A_{MAX}dB = 10\log\left(1+\epsilon^2\right)$

Chebyshev

Para obtener la función de transferencia aplicamos un procedimiento de sintesis de funciones de fase mínima basado en la Transformada de Hilbert. LAM - Cap 3- pag 68.



Chebyshev

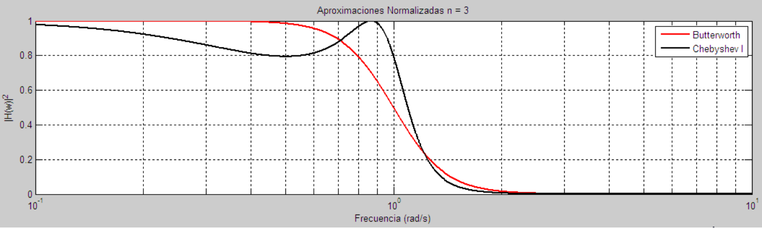
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0$

Order n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.96522673								
2	1.10251033	1.09773433							
3	0.49130668	1.23840917	0.98834121						
4	0.27562758	0.74261937	1.45392476	0.95281138					
5	0.12282667	0.58053415	0.97439607	1.68881598	0.93682013				
6	0.06890690	0.30708064	0.93934553	1.20214039	1.93082492	0.92825096			
7	0.03070667	0.21367139	0.54861981	1.35754480	1.42879431	2.17607847	0.92312347		
8	0.01722672	0.10734473	0.44782572	0.84682432	1.83690238	1.65515567	2.42302642	0.91981131	
9	0.00767667	0.07060479	0.24418637	0.78631094	1.20160717	2.37811881	1.88147976	2.67094683	0.91754763

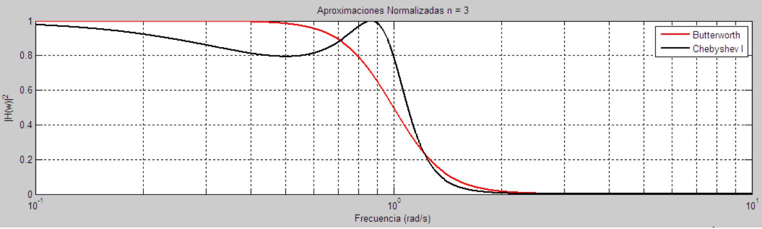
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s)\,B_2(s)\,B_3(s)\,B_4(s)\,B_5(s)$

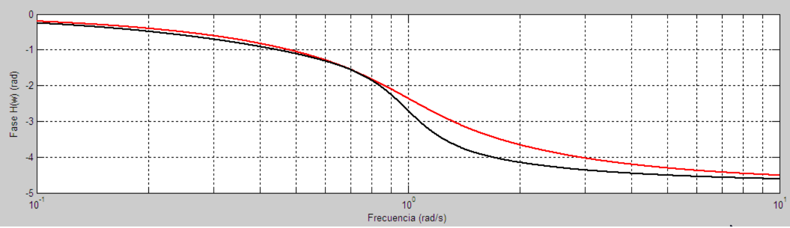
Order n	$B(s)$
1	$(s + 1.96522673)$
2	$(s^2 + 1.09773433s + 1.10251033)$
3	$(s^2 + 0.49417060s + 0.99420459)\ (s + 0.49417060)$
4	$(s^2 + 0.27907199s + 0.98650488)\ (s^2 + 0.67373939s + 0.27939809)$
5	$(s^2 + 0.17891672s + 0.98831489)\ (s^2 + 0.46841007s + 0.42929790)\ (s + 0.28949334)$
6	$(s^2 + 0.12436205s + 0.99073230)\ (s^2 + 0.33976343s + 0.55771960)\ (s^2 + 0.46412548s + 0.12470689)$
7	$(s^2 + 0.09141796s + 0.99267947)\ (s^2 + 0.25614744s + 0.65345550)\ (s^2 + 0.37014377s + 0.23045013)\ (s + 0.20541430)$
8	$(s^2 + 0.07001647s + 0.99414074)\ (s^2 + 0.19939003s + 0.72354268)\ (s^2 + 0.29840826s + 0.34085925)\ (s^2 + 0.35199655s + 0.07026120)$
9	$(s^2 + 0.05533489s + 0.99523251)\ (s^2 + 0.15933047s + 0.77538620)\ (s^2 + 0.24410845s + 0.43856211)\ (s^2 + 0.29944334s + 0.14236398)\ (s + 0.15933047)$

Respuesta en Frecuencia

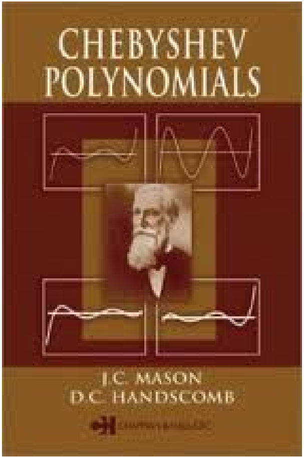


Respuesta en Frecuencia





Aproximación de Chebyshev II



Chebyshev II

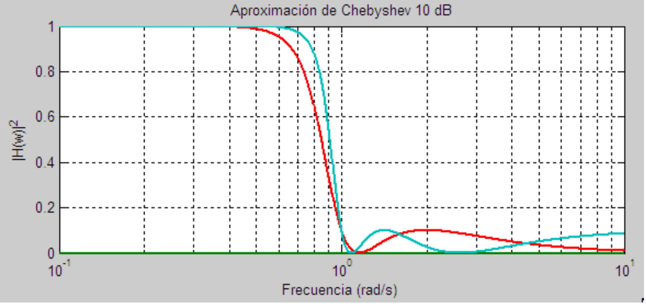
La aproximación de Chebyshev II aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 \cdot T_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \epsilon^2 \cdot T_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}$$

Chebyshev II

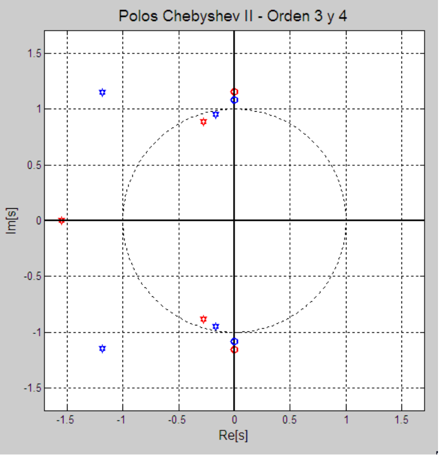
La aproximación de Chebyshev II aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 \cdot T_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \epsilon^2 \cdot T_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}$$



Chebyshev II

Ubicación de los polos y ceros:



Filtros de Cauer

Filtros Elípticos

Elípticos

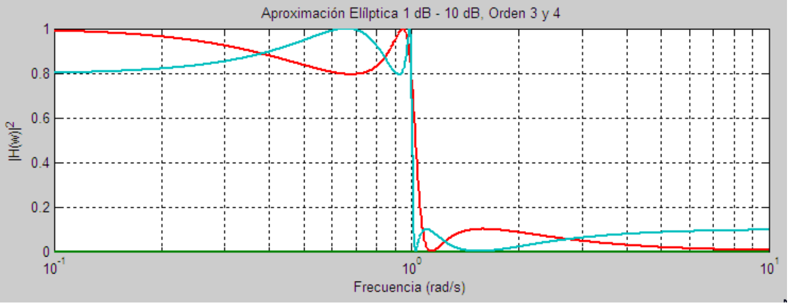
La aproximación de Elípticos aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.
También se los denomina Filtros de Cauer.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 \cdot R_n^2(\omega)}$$

Elípticos

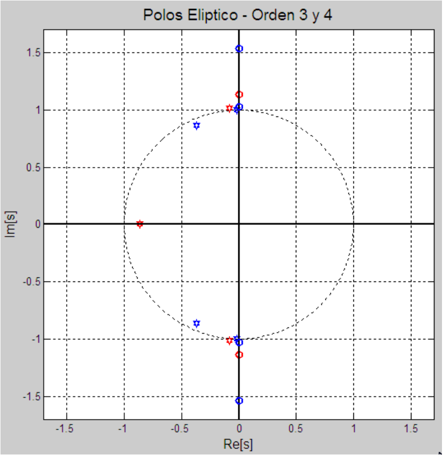
La aproximación de Elípticos aproxima la característica de **magnitud** del filtro ideal pasabajos.
También se los denomina Filtros de Cauer.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot R_n^2(\omega)}$$



Chebyshev II

Ubicación de los polos y ceros:



Bessel


DEUTSCHE BUNDESPOST
80
FRIEDRICH WILHELM BESSEL
1784 Astronom und Mathematiker 1846
1984

Bessel

La aproximación de Bessel aproxima la característica de **Fase** del filtro ideal pasabajos.

$$H(s) = \frac{k}{B_n(s)}$$

Bessel

La aproximación de Bessel aproxima la característica de **Fase** del filtro ideal pasabajos.

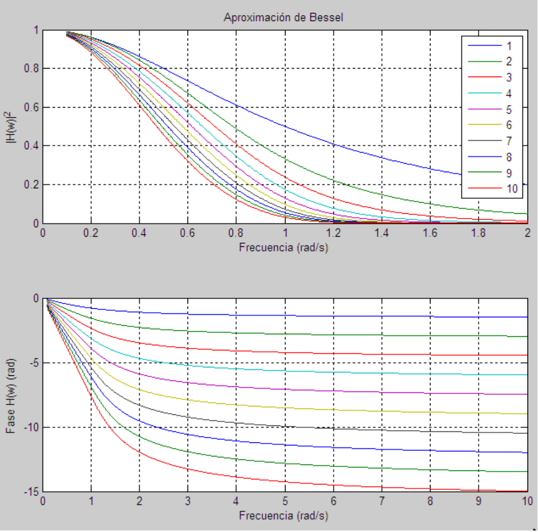
$$H(s) = \frac{k}{B_n(s)}$$

$$B_1(s) = s + 1$$

$$B_2(s) = s^2 + 3s + 1$$

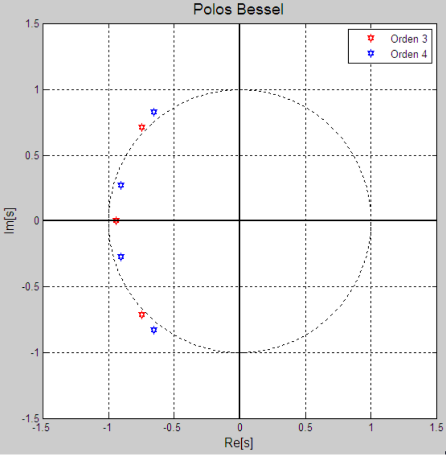
$$B_n(s) = (2n-1)\,B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s)$$

Bessel


Aproximación de Bessel
|H(w)|^2
Frecuencia (rad/s)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Fase H(w) (rad)
Frecuencia (rad/s)

Bessel

Ubicación de los polos:



Conceptos Generales

Muchas secuencias $x[n]$ admiten una representación mediante la integral de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) e^{j\theta n}\, d\theta$$

Siendo:

$$X\left(e^{j\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\theta n}$$

Bibliografía