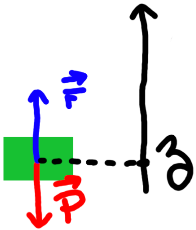
Modèle simple d'un contrôleur d'altitude de drone : Stabilité du système

Projet recherche

January 11, 2021

Proportionnel dérivé

Le modèle du drone est le suivant :



$$\begin{cases} \dot{z} = v_z \\ m\dot{v_z} = F - mg \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon = e - z \\ F = K_p\epsilon + K_d\dot{\epsilon} + K \end{cases}$$

On choisit K tel que si $\epsilon = 0$, $\dot{\epsilon} = 0$ alors $\dot{v_z} = 0$. On a donc $K = mg$.

Analyse de la fonction transfert H(s)

Transformée de Laplace :

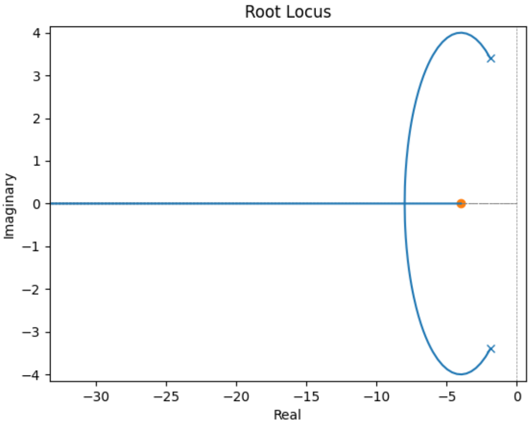
$$ms^2 Z(s) = (K_p + K_d s)E(s) - (K_p + K_d s)Z(s)$$

$$(K_p + K_d s + ms^2)Z(s) = (K_p + K_d s)E(s)$$

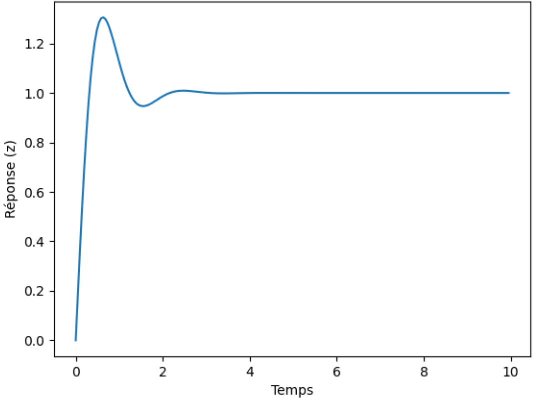
$$H(s) = Z(s)/E(s) = \frac{K_p + K_d s}{K_p + K_d s + ms^2}$$

Il faut que les pôles de la fonction transfert soient à partie réelle strictement négative pour que le système soit stable.

Analyse de la fonction transfert : lieu des racines



Analyse de la fonction transfert : réponse à un échelon



Analyse par l'équation de Lyapunov

Soit $x = \begin{bmatrix} z \\ v_z \end{bmatrix}$. L'entrée e du système est ici égale à un échelon de 1.

$\dot{x} = Ax + B$, avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_p}{m} & -\frac{K_d}{m} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_p}{m} \end{bmatrix}$.

On peut se ramèner à $\dot{y} = Ay$ en utilisant $y = x + c$ avec $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On cherche à résoudre l'équation de Lyapunov : $A^t P + PA + Q = 0$.
Si $P > 0$ et $Q > 0$ alors le système est asymptotiquement stable.
Pour $Q = I_2 > 0$, on a :

$$P[0, 0] = 0.265712 > 0$$

$$P[0, 0] * P[1, 1] - P[0, 1]^2 = 0.31649798400000007 > 0$$

Nous avons donc $P > 0$ et donc le système est asymptotiquement stable.

Analyse par l'équation de Lyapunov

Nous avons $P > 0$, le système est asymptotiquement stable.

En effet :
A est stable car il existe une fonction de Lyapunov $V : x \rightarrow x^t Px$ définie positive et telle que $-\dot{V} : x \rightarrow -\nabla VAx = x^t Qx$ est aussi définie positive.