m	0.028
k_1	$2.130295e-11$
k_2	$1.032633e-6$
k_3	$5.484560e-4$
Scale	1000
Base	36000
K_{pz}	2
K_{iz}	0.5
K_{pv}	25
K_{iv}	15
K_p	25000
K_i	15000

Table 1: Constantes physiques du Crazyflie

1 Premier système

Soit une commande z_c, le quadricoptère est contrôlé par deux PI. En ajoutant deux nouveaux état u_1 et u_2 représentant respectivement les intégrales $\int(2(z_c - z) + 0.5\int(z_c - z)dt - v_z)dt$ et $\int(z_c - z)dt$ et en introduisant les nouvelles constantes $K_p = \text{Scale} * K_{pv}$ et $K_i = \text{Scale} * K_{iv}$ on obtient :

$$\begin{cases} \dot{z} = v_z \\ \dot{v_z} = \frac{4k_1}{m} * PWM^2 + \frac{4k_2}{m} * PWM + \frac{4k_3}{m} - g \\ \dot{u_1} = 2(z_c - z) + 0.5u_2 - v_z \\ \dot{u_2} = z_c - z \end{cases}$$
$$PWM = K_p\dot{u_1} + K_i u_1 + \text{Base}$$

Afin d'avoir une altitude centrée en zéro, nous allons soustraire z_c à z ($z' = z - z_c$) :

$$\begin{cases} \dot{z'} = v_z \\ \dot{v_z} = \frac{4k_1}{m} * PWM^2 + \frac{4k_2}{m} * PWM + \frac{4k_3}{m} - g \\ \dot{u_1} = -2z' + 0.5u_2 - v_z \\ \dot{u_2} = -z' \end{cases}$$
$$PWM = K_p\dot{u_1} + K_i u_1 + \text{Base}$$

Je numérise les constantes :

$$\begin{cases} \dot{z'} = v_z \\ \dot{v_z} = 4/0.028(2.130295 * 10^{-11}PWM^2 + 1.032633 * 10^{-6}PWM + 5.484560 * 10^{-4}) - 9.81 \\ \dot{u_1} = -2z' + 0.5u_2 - v_z \\ \dot{u_2} = -z' \end{cases}$$
$$PWM = 25000\dot{u_1} + 15000u_1 + 36000$$

C'est donc le premier système.

2 Second système

Afin de linéariser les équations, j'applique l'expansion de Taylor au premier ordre proche de l'équilibre ($\Delta = actuel - \acute{e}quilibre$). On peut supposer que l'altitude à l'équilibre est l'altitude en commande ie

$z_e = z_c$:

$$\begin{cases} \Delta\dot{z} = \Delta v_z \\ \Delta\dot{v_z} = \frac{8k_1}{m} * PWM_e * \Delta PWM + \frac{4k_2}{m} * \Delta PWM \\ \Delta\dot{u_1} = -2\Delta z + 0.5\Delta u_2 - \Delta v_z \\ \Delta\dot{u_2} = -\Delta z \\ \Delta PWM = K_p \Delta\dot{u_1} + K_i \Delta u_1 \end{cases}$$

Ainsi, en manipulant les équations :

$$\begin{cases} \Delta\dot{z} = \Delta v_z \\ \Delta\dot{v_z} = (\frac{8k_1}{m} * PWM_e + \frac{4k_2}{m}) * (-K_p(2\Delta z - 0.5\Delta u_2 + \Delta v_z) + K_i \Delta u_1) \\ \Delta\dot{u_1} = -2\Delta z + 0.5\Delta u_2 - \Delta v_z \\ \Delta\dot{u_2} = -\Delta z \\ \Delta PWM = -K_p(2\Delta z - 0.5\Delta u_2 + \Delta v_z) + K_i \Delta u_1 \end{cases}$$

Si on note x le vecteur $[z\ v_z\ u_1\ u_2]^t$, $\Delta x = [\Delta z\ \Delta v_z\ \Delta u_1\ \Delta u_2]^t$ et $\Delta\dot{x} = [\Delta\dot{z}\ \Delta\dot{v_z}\ \Delta\dot{u_1}\ \Delta\dot{u_2}]^t$ alors nous avons :

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = A * \Delta x \\ \Delta PWM = B * \Delta x \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18.771099 & -9.3855495 & 5.6313297 & 4.69277475 \\ -2 & -1 & 0 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -50000 & -25000 & 15000 & 12500 \end{bmatrix}$$