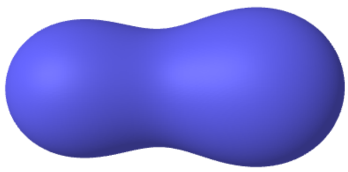
Nous allons dans cette séance explorer différentes méthodes permettant d'approximer numériquement le volume d'un solide $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, *i.e.* l'intégrale triple

$$\mathrm{vol}(\mathcal{S}) = \iiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}V.$$

Pour fixer les idées, nous prendrons pour $\mathcal{S}$ la région cacahuétoïdale définie par l'inégalité :

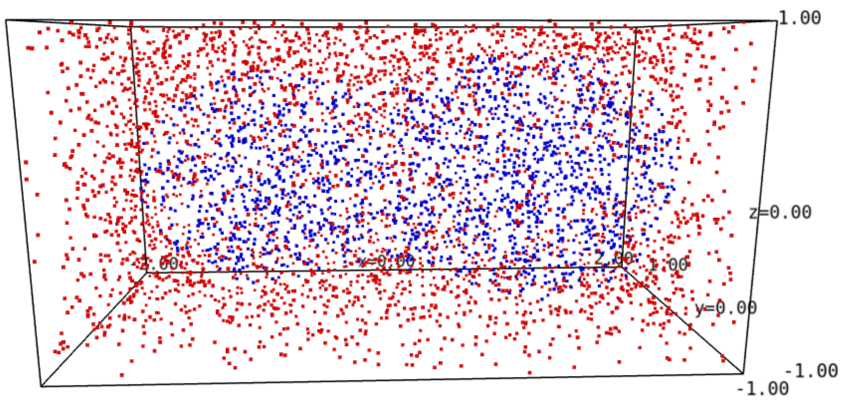
$$f(x,y,z) \leqslant 0 \qquad \text{avec} \qquad f(x,y,z) = \left((0{,}05-x)^2 + y^2 + z^2 + 1\right)^2 - 5x^2 - 2.$$



A) Monte-Carlo, pt. 1

En l'absence de quelque chose de mieux à faire, on peut toujours (comme dans la vie) jouer à des jeux de hasard, à savoir ici : tirer aléatoirement un certain nombre n de points à l'intérieur d'un pavé $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{S}$ et déterminer le nombre m de ces points tombant dans $\mathcal{S}$; son volume peut alors vraisemblablement être approchée par la quantité

$$\frac{m}{n} \cdot \mathrm{vol}(\mathcal{P}).$$



Implémenter numériquement cette méthode en définissant une fonction `MC3D`(n) renvoyant une estimation du volume de $\mathcal{S}$ obtenue en générant n points aléatoires, puis porter sur un graphe les estimations obtenues en fonction de n pour observer comment elles évoluent. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette méthode ?

B) Monte-Carlo, pt. 2

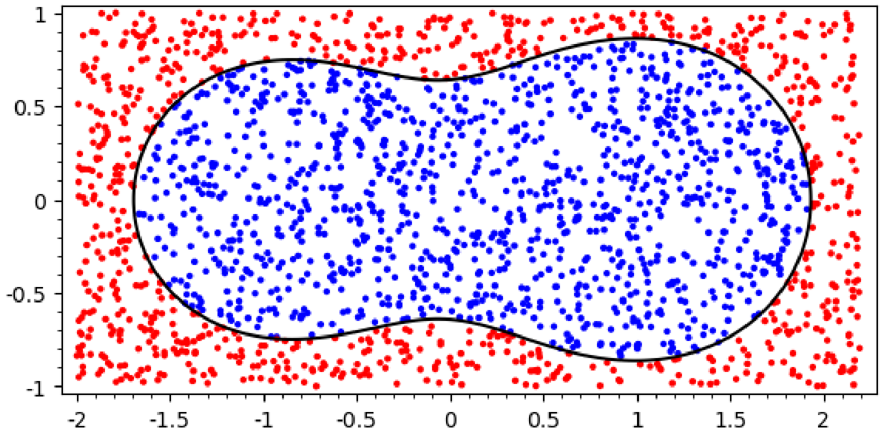
On sait qu'en effectuant un découpage en bâtonnets verticaux, on peut calculer $\mathrm{vol}(\mathcal{S})$ comme l'intégrale double

$$\iint_{\mathcal{D}} g \,\mathrm{d}A,$$

où $\mathcal{D}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $z = 0$ et g est une fonction appropriée que vous préciserez. Par analogie avec la méthode précédente : une fois choisi un rectangle $\mathcal{R}$ incluant $\mathcal{D}$, on génère n points P_i au hasard dans $\mathcal{R}$ et on approxime vol($\mathcal{S}$) par

$$\frac{\text{aire}(\mathcal{R})}{n} \sum_i g(P_i),$$

où la somme est prise sur les indices i pour lesquels $P_i \in \mathcal{D}$.



Définir une nouvelle fonction MC2D(n) implémentant cette méthode. Comment se compare-t-elle à la précédente ? Assurez-vous de la cohérence de vos réponses entre elles.

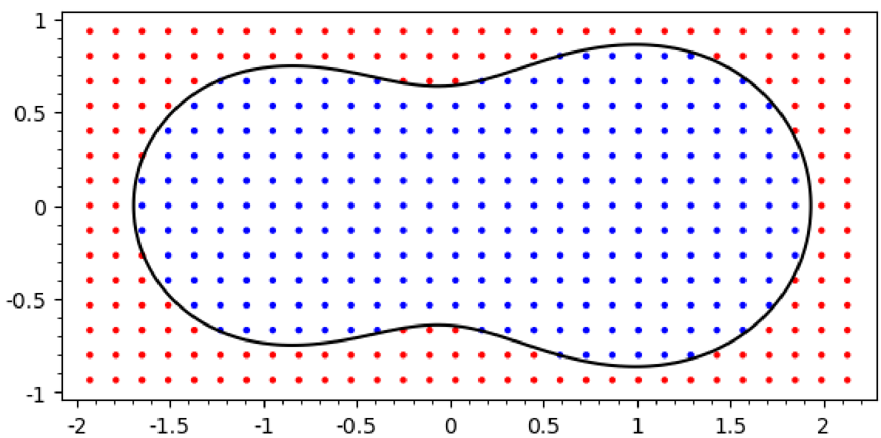
C) Maillage rectangulaire (sommes de Riemann)

Voici une façon de procéder un peu plus systématique : on divise $\mathcal{R}$ en m parties égales selon l'axe des x, et en n parties égales selon l'axe des y, obtenant ainsi mn sous-rectangles $\mathcal{R}_{ij}$.

On peut alors approximer le volume de $\mathcal{S}$ par

$$\frac{\text{aire}(\mathcal{R})}{mn} \sum_{i,j} g(P_{ij}),$$

où P_{ij} désigne le centre du rectangle $\mathcal{R}_{ij}$ lorsqu'il est à l'intérieur de $\mathcal{D}$.



Implémenter cette méthode dans une fonction Riemann(m, n) et en observer numériquement la convergence quand $m, n \to \infty$. (On pourra prendre par exemple $m = 2n$ pour simplifier.)