Théorie

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série convergente de somme S. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire $S = S_N + R_N$ avec

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n, \qquad R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n,$$

et la propriété que $S_N \to S$ (ou de façon équivalente, $R_N \to 0$) quand $N \to \infty$.

Dans les applications, on s'intéresse à la valeur numérique de S que l'on cherche à obtenir avec une précision suffisante. Concrètement, cela signifie que l'on se donne une tolérance à l'erreur $\varepsilon > 0$ et que l'on cherche à produire un nombre $\tilde{S} \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$|S - \tilde{S}| < \varepsilon.$$

Puisque R_N tend vers 0, nous savons que $|R_N| = |S - S_N| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang et il est donc tentant de prendre $\tilde{S} := S_N$ avec N suffisamment grand. Reste qu'en pratique il faudra également évaluer explicitement S_N et cela peut aussi entraîner des erreurs numériques.

En résumé : pour obtenir une approximation ε-proche $\tilde{S}$ de S, on va typiquement

1) déterminer une valeur de N (démontrablement) suffisamment grande pour que $|S - S_N| < \varepsilon_1$;
2) puis calculer numériquement une approximation $\tilde{S}$ de la somme partielle S_N satisfaisant $|S_N - \tilde{S}| < \varepsilon_2$;

avec $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$, de façon à pouvoir ainsi garantir que

$$|S - \tilde{S}| \leqslant |S - S_N| + |S_N - \tilde{S}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon.$$

Dans Sage, les calculs sont effectués par défaut avec des « nombres réels » représentés par des mantisses de 53 bits, donnant typiquement [1] une précision de l'ordre de

$$2^{-53} \approx 10^{-16}$$

qui sera amplement suffisante ici pour considérer que ε_2 est négligeable devant ε_1 et nous permettre de nous concentrer sur ce dernier via une majoration du reste R_N.

Exercice 1

Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$.

a) En utilisant le fait que $R_N = 1/2^N$ (n'est-ce pas ?) : quelle valeur de N doit-on prendre pour commettre, en remplaçant S par S_N, une erreur d'au plus $\varepsilon = 10^{-6}$? Évaluer cette somme partielle à l'aide d'une boucle effectuant les additions répétées.

b) Représenter graphiquement (par exemple avec `list_plot`) la suite des sommes partielles jusqu'au rang trouvé en a). Commentez !

Exercice 2

On peut montrer que la série alternée convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ a pour somme $\cos(1)$.

a) En admettant le fait que, pour cette série, on a $|R_N| \leqslant \frac{1}{(2N+2)!}$: combien de termes doit-on prendre dans la somme pour obtenir une approximation de $\cos(1)$ valable à $\varepsilon = 10^{-6}$ près ?

1. La réalité est un peu plus délicate puisque la précision obtenue dépend de l'ordre de grandeur des quantités manipulées.

b) En n'utilisant que des opérations élémentaires, obtenir une telle approximation − *puis* comparez avec `cos(1.)` pour vérifier sa validité.

Exercice 3

On considère la *série harmonique alternée* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) En admettant que $|R_N| \leqslant \frac{1}{N+1}$, calculer une approximation de sa somme valable à $\varepsilon = 10^{-6}$ près. Reconnaissez-vous cette valeur ?

b) D'après vous, combien de temps serait nécessaire avec cette méthode pour la calculer à une précision $\varepsilon = 10^{-12}$? (`%%time` en début de cellule permet d'afficher le temps d'exécution de celle-ci) Comparez avec la série de la question précédente.

Exercice 4

La *fonction zêta de Riemann* est la fonction qui associe à chaque $\alpha > 1$ la somme $\zeta(\alpha)$ de la série convergente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}.$$

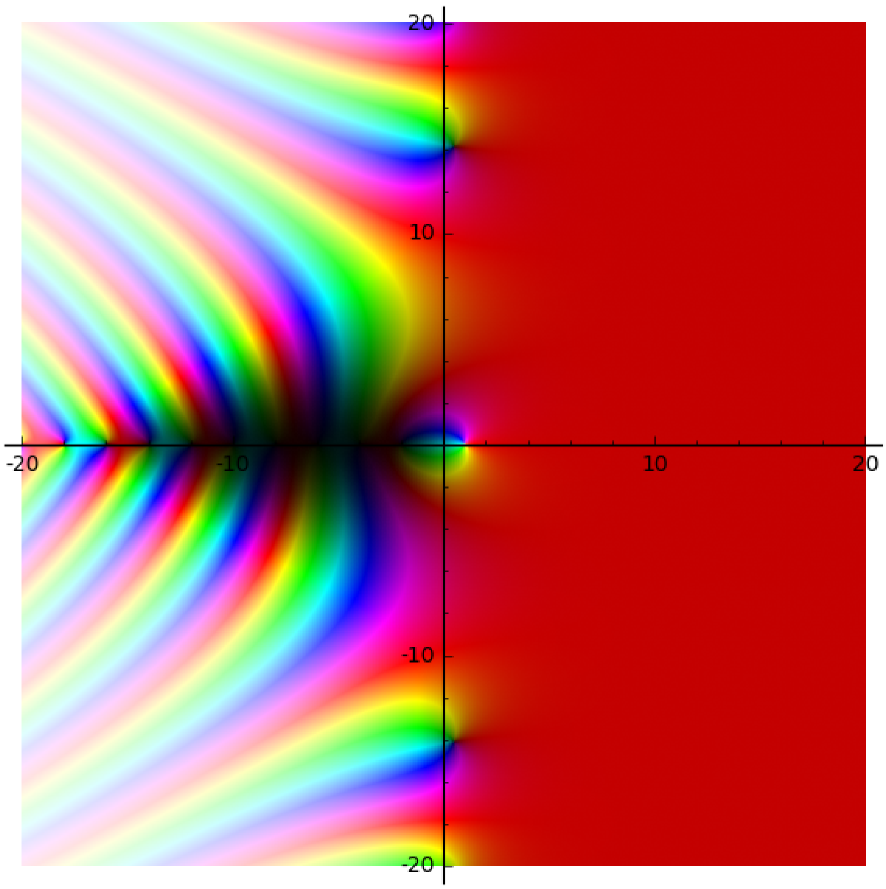
a) En comparant le reste de la série à l'aire sous $y = 1/x^\alpha$ à partir d'une certaine abscisse, établir l'inégalité

$$\left|\zeta(\alpha) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

En déduire le nombre N de termes nécessaires pour obtenir une estimation de $\zeta(\alpha)$ à une précision ε donnée.

b) Donner une estimation numérique de $\zeta(2 + \frac{m}{12})$, où m est le numéro de votre mois de naissance.

c)* Sauriez-vous conjecturer une formule pour la valeur exacte de $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$?



`complex_plot(zeta, (-20,20), (-20,20))`