Soit $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ une intégrale impropre convergente de valeur I. On supposera ici que pour tout $X \in [a, +\infty[$, f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a, X]$, de sorte que l'on peut écrire $I = F(X) + R(X)$ avec

$$F(X) := \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow I, \qquad R(X) := \int_X^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } X \longrightarrow +\infty.$$

Puisque le reste $R(X)$ tend vers 0, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$ nous aurons $|R(X)| < \varepsilon$ pour x suffisamment grand ; l'erreur commise en approximant I par la valeur de $F(X)$ est donc inférieure à ε à partir de ce moment.

En pratique, la tolérance ε nous est spécifiée et c'est à nous de trouver une valeur de X suffisamment grande pour garantir que $|R(X)| < \varepsilon$, la plupart du temps en passant par une majoration du reste.

Remarque : On utilisera ici les intégrales numériques de Sage, *e.g.*

```
numerical_integral(sin(x)/x, 0, pi)  # (valeur, précision)
```

On peut donc définir une primitive en tant que fonction (au sens pythonesque, et non symbolique, du terme) en faisant quelque chose comme

```
def F(X):
  return numerical_integral(sin(x)/x, 0, X)[0]
```

qu'on peut tout de même `plot`ter avec, par exemple, `plot(F, (-pi,pi))`.

Exercice 1

Considérons

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(notez qu'il n'y a pas de souci à se faire en $x = 0$ car la fonction à intégrer y est prolongeable par continuité).

a) Porter sur un même graphe les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $X \mapsto F(X)$ et discuter de ce que vous pouvez conjecturer par rapport à la convergence de l'intégrale impropre.

b) Pour cette intégrale impropre, on peut montrer que

$$|R(X)| \leqslant \frac{2}{(n+1)\pi} \qquad \text{avec } n = \left\lfloor \frac{X}{\pi} \right\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Utiliser ceci pour obtenir une approximation de I précise à 10^{-3} près. Votre réponse est-elle cohérente avec vos observations en a) ? Reconnaissez-vous cette valeur ?

Exercice 2

a) Mêmes questions avec $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$, $|R(X)| \leqslant \displaystyle\int_X^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \arctan X$.

b) Cette fois avec $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $|R(X)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-X^2}$.

c) Qu'en est-il de $I := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x$?

Discutez des ressemblances et différences entre ces quatre cas.

Exercice 3

Considérons la fonction, définie par une intégrale impropre (convergente n'est-ce pas ?)

$$G(\alpha) := \int_0^{\infty} x^{\alpha}\, e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha \geqslant 0.$$

Pour des petites valeurs de α (disons, $0 \leqslant \alpha \leqslant 10$), on peut raisonnablement dire que

$$G(\alpha) \approx \int_0^{40} x^{\alpha}\, e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Utilisez cette approximation pour tracer le graphe de G sur $[0, 10]$. Reconnaissez-vous les valeurs prises par G lorsque α est entier ?