Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Investigación de operaciones

Mario Alberto Gutiérrez Carrales
maario_r7@hotmail.com

Agosto-Diciembre 2021

Temas

1. Introducción a la programación matemática
2. Programación lineal (PL)
   1. Continua
      1. Modelación
      2. Métodos de solución
         a. Método grafico
         b. Método simplex
         c. Método de las 2 fases
      3. Análisis de dualidad
      4. Análisis de sensibilidad
   2. Entera (PE)
      1. Modelación
      2. Métodos de solución
         1. Método grafico
         2. Algoritmos heurísticos
         3. Algoritmos para problemas de redes

Definición de la programación matemática

La *programación matemática* u optimización matemática es una rama de la investigación de operaciones cuyo objetivo es representar un problema de toma de decisiones mediante elementos matemáticos tales como funciones, ecuaciones y desigualdades.

Relaciones

$2x = x + 5$ $\quad$ $5x < 10 - x$

La idea es optimizar una función sujeta a recursos o limitantes las cuales están dadas por materia prima, dinero o tiempo.

Estructura matemática de un problema de PM

La estructura de un problema de programación matemática es como se muestra en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\ x \in S \subset \Re^n. \end{cases}$$

Estructura matemática de un problema de PM

Más ejemplos …

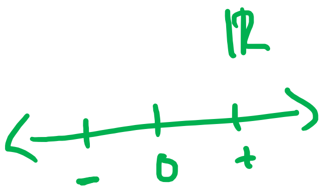
P_1 :

$$\max f(x, y) = 2x + y$$
$$sa$$
$$x + y \leq 10 \quad R_1$$
$$-4x + 6y \geq 5 \quad R_2$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

→ como si fueran restricciones

P_2 :

$$\min f(x, y, z) = x - y + z$$
$$sa$$
$$x + z \leq 10$$
$$2x - 3y + 4z$$
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$



Metodología de modelación y aspectos importantes. Modelación

¿Cuál es la tarea del tomador de decisiones?

Un problema matemático de programación matemática posee parámetros o datos y en base a estos valores el tomador de decisiones debe:

- Proponer variables de decisión.
- Modelar un objetivo.
- Modelar limitantes y/o capacidades.
- Describir la naturaleza de las variables de decisión.
- Encontrar una solución para dicho problema.
- Interpretar la solución encontrada.

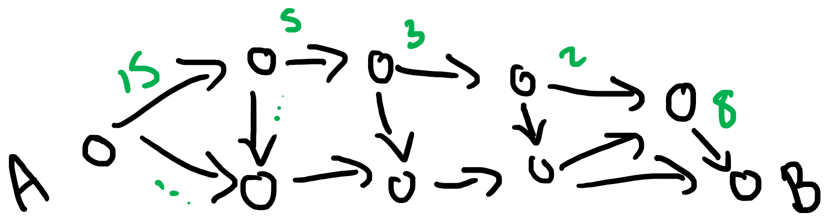
Descripción

Problema

Modelo
mat.

Solución

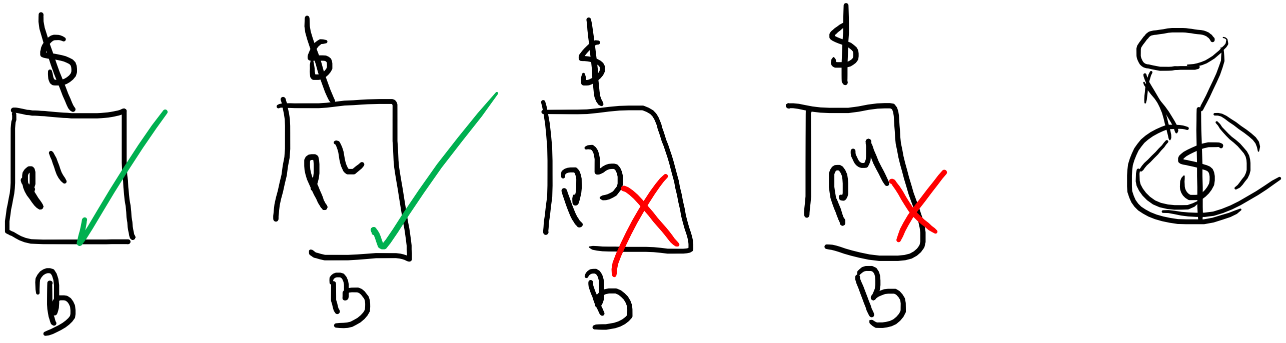
Proyecto
de
PM



Metodología de modelación y aspectos importantes. Modelación

Componentes y consideraciones en los modelos de programación lineal

- **Variables de decisión**: Deben cuantificar de manera precisa las decisiones que se tomaran
- ✓ **Función objetivo**: Maximizar o minimizar la función que establece un objetivo.
- **Restricciones**: Pueden ser múltiples y cada una tiene su propia relación de (des)igualdad.
- ✓ **Naturaleza de las variables**: Dependiendo de la situación que se esté modelando.



x_1: Cantidad de sillas a producir

$$\begin{cases} x_1 \le 7 & \text{"a lo más"} \\ x_1 = 10 & \text{"exactamente"} \\ x_1 \ge 5 & \text{"al menos"} \end{cases}$$

Metodología de modelación y aspectos importantes. Solución

Los casos posibles para el espacio de soluciones son:

- Espacio de soluciones
  - Infactible
  - Factible
    - Acotado
    - No acotado

$F(x)=10x$

$y=10x$

P_1: Max $\boxed{10x}$

Sa $\boxed{1 \le x \le 10}$

$x \in \mathbb{R}$

100

10

1 10

x

1 10

$\boxed{[1,10]}$

P_3: Max $10x$

Sa $\boxed{x \geq 2}$

$x \in \mathbb{R}$.

2

$\Rightarrow$ Hay almenos una sol. (P_1, P_3)

$\Downarrow$ No hay ninguna sol! (P_2)

Si se puede "encerrar" (P_1)

No se puede "encerrar" (P_3)

P_2: Max $10x$

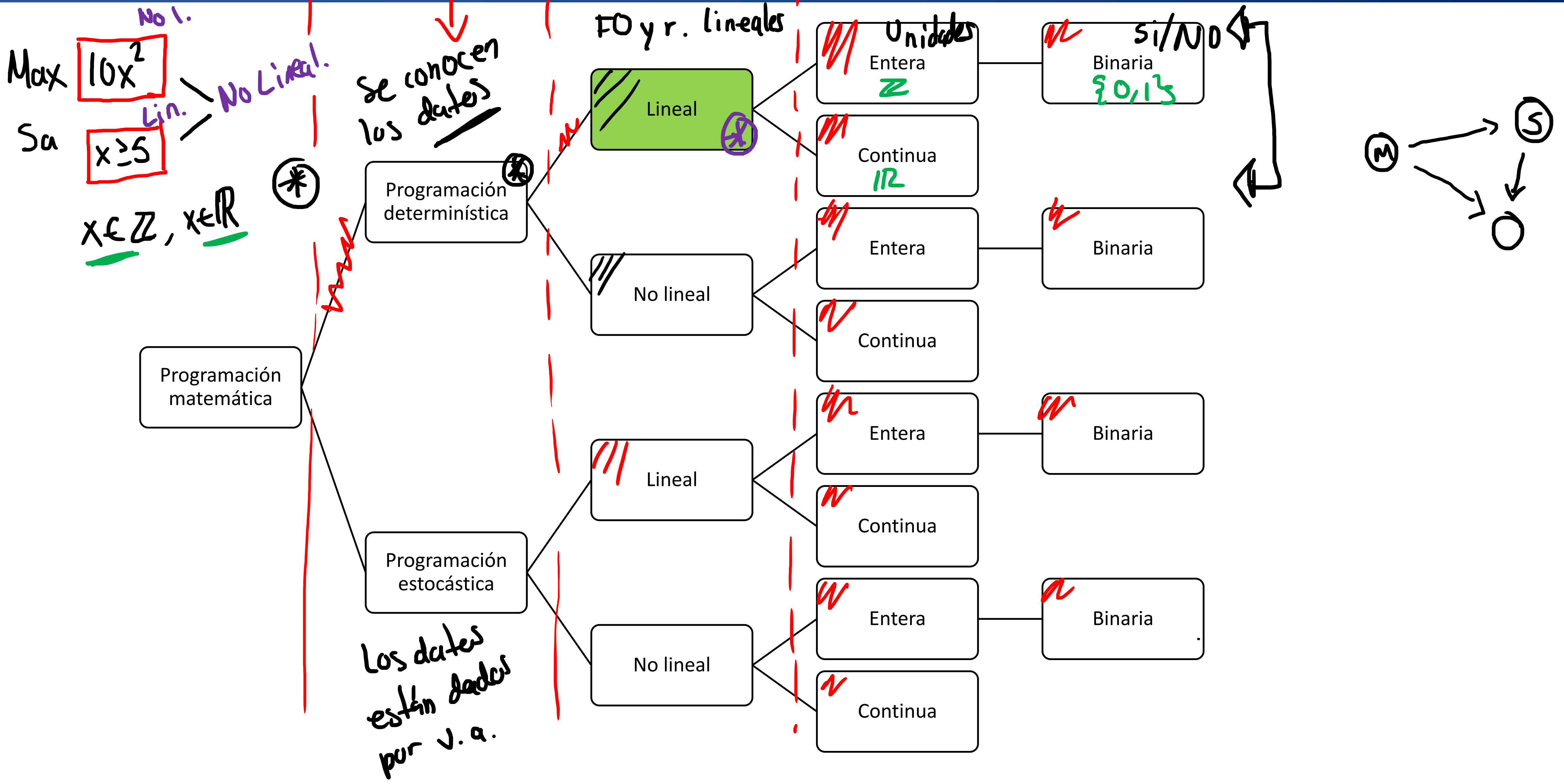
Sa $\boxed{\begin{array}{l} x \geq 5 \quad (R_1) \\ x < 3 \quad (R_2) \end{array}}$

$x \in \mathbb{R}$

3 5

$\boxed{\phi}$

Clasificación de la PM



Clasificación de la PM

Ejemplos de modelos de programación matemática

PLC

P_1:
$$\begin{aligned} &\max 2x + y \\ &sa \\ &x + y \leq 10 \\ &x, y \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

- ✓ *Problema de maximización*
- ✓ *Función objetivo y restricciones lineales*
- ✓ *Variables continuas*

PLE

P_2:
$$\begin{aligned} &\min \boxed{x - 4y} \\ &sa \\ &\boxed{x + y = 10} \\ &x, y \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Lineal

- ✓ *Problema de minimización*
- ✓ *Función objetivo y restricciones lineales*
- ✓ *Variables enteras*

PNLB

P_3:
$$\begin{aligned} &\max 5x^2 - 2y \\ &sa \\ &x + y \geq 10 \\ &x, y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

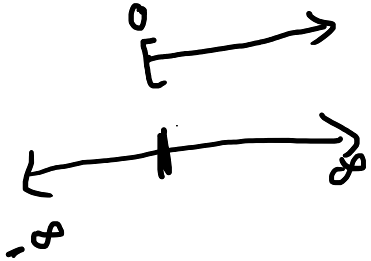
- ✓ *Problema de maximización*
- ✓ *Función objetivo y restricciones lineales*
- ✓ *Variables binarias*

restricciones

El tipo de programación se conoce por la función objetivo y el dominio de las variables de decisión

Programación lineal

La programación lineal continua o también llamada simplemente programación lineal es aquella en donde las variables de decisión toman valores en el conjunto $[0, \infty)$ y a su vez, la función objetivo y las restricciones están dadas por expresiones lineales.



$(-\infty, \infty)$

Programación lineal. Modelación

Problema de producción de quesos

Un vendedor de quesos desea saber la cantidad de kilogramos de queso suizo y mozzarella que debe producir para maximizar sus ganancias. Para la producción de los quesos debe utilizar leche tipo A y tipo B. Siendo que en su inventario tiene 6 litros de leche tipo A y 10 litros de leche tipo B, además se sabe que para producir un kilogramo de queso suizo se requieren 1.2 litros de leche tipo A y 1.6 de leche tipo B, mientras que para producir un kilogramo de queso mozzarella necesita 0.8 y 1.4 litros de leche tipo A y B, respectivamente.

El kilogramo de queso suizo se vende a $5 y el de queso mozzarella a $3.8.

$1.2(3)+0.8(3)=3.6+2.4$

Modele el problema utilizando programación matemática

$$\begin{cases} A = 1.2x_1+0.8x_2 \\ B = 1.6x_1+1.4x_2 \end{cases}$$

		R		FO
QS	QM	LA	LB	G
3	3	6	9	26.4
2	5	4.4	$\boxed{10.2}$ *	29
x_1	x_2	A	B	$5x_1+3.8x_2$

Programación lineal

1. Variables de decisión

x_1 : Cantidad de kg. de queso suizo a producir

x_2 : Cantidad de kg. de queso mozzarella a producir

2. Función objetivo

$$\text{Max } 5x_1 + 3.8x_2$$ // Maximizar ganancias

3. Restricciones

$$1.2x_1 + 0.8x_2 \leq 6$$ // Inventario LA

$$1.6x_1 + 1.4x_2 \leq 10$$ // Inventario LB

} Inventario

4. Naturaleza de las variables

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in [0, \infty)$$

Programación lineal. Modelación

Problema de optimizar una dieta (1era parte)

* Problema
* Modelo matemático
* Método de solución
* Conclusión

Un comedor desea diseñar un menú para sus comensales a costo mínimo, pero proporcionando al menos 2000 calorías de energía, 55 gramos de proteína y 800 miligramos de calcio. Para ello se dispone de los siguientes productos con sus características:

	Información por cada unidad de producto			
	Energía (cal.)	Proteína (gr)	Calcio (mg)	Precio ($)
Pan	110	4	2	10
Pollo	205	32	12	85
Huevo	+ 160	+ 13	+ 54	30
Leche	160	8	285	20
Tarta	420	4	22	75
Papas	260	14	80	72

Programación lineal. Modelación

Problema de optimizar una dieta (2da parte)

Además, se precisa que en el menú propuesto no se incluyan más de 4 unidades de pan, ni mas de 3 de pollo, ni mas de 2 de huevo, ni mas de 8 de leche, ni mas de 2 de tarta, ni mas de 2 papas.

Obtener el modelo matemático para este problema.

	Pan	Pollo	Huevo	Leche	Tarta	Papas	Ene.	Prot.	Calc.	$	F
S1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x
S2	1	1	1	1	1	1	1315	75	457	292	x
S3	2	1	2	1	2	1	2005	96	533	407	x
S4											
S6	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$110x_1+205x_2+160x_3+160x_4 \dots$	$4x_1+32x_2+13x_3+\dots$	$2x_1+12x_2+54x_3+\dots$	$10x_1+85x_2+30x_3+\dots$	Depende

Programación lineal

1. Variables de decisión

x_1: Unidades de pan en el platillo
x_2: Unidades de pollo en el platillo
x_3: " " huevo " "
x_4: " " leche " "
x_5: " " tarta " "
x_6: " " papas

2. Función objetivo

Min $10x_1 + 85x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 75x_5 + 72x_6$

// Min costos

3. Restricciones

E * $110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$

P * $4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$

C * $2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$

$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 3$
$x_3 \leq 2$
$x_4 \leq 8$
$x_5 \leq 2$
$x_6 \leq 2$

4. Naturaleza de las V.

Programación lineal. Método grafico

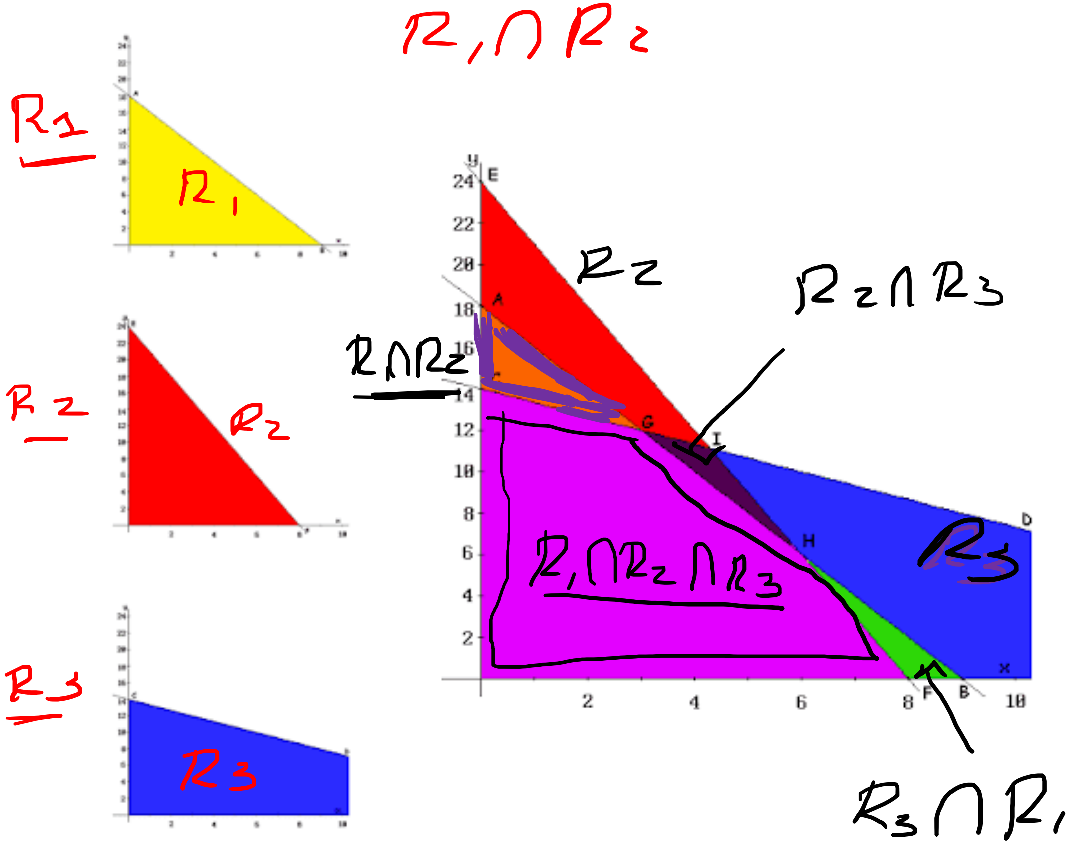
El **método grafico** es una herramienta matemática para obtener la solución óptima a un problema de programación lineal en la cual se tienen dos variables de decisión
continua

Cada restricción representa una región en el plano cartesiano, al graficar todas las restricciones se determina la región en la que todos los puntos satisfacen las restricciones. A esta región se le conoce como **región factible (Ω)**

$\max F(x,y) = 2x + 3y$

SA

$$\left\{ \begin{array}{l} R1 \longrightarrow 2x - y = 5 \\ R2 \longrightarrow 3x + y \geq 10 \\ R3 \longrightarrow 5x - 2y \leq 15 \end{array} \right\}$$



Programación lineal. Método grafico

$x < 5$

$x + 5y = 20 \rightarrow x = 0,\ y = 4$
$y = 0,\ x = 20$

Regiones en el plano cartesiano

1) $x \leq 5$

4) $x + 5y \leq 20$ ①
$x \geq 0$ ②

$y \leq \frac{20 - x}{5}$

$y \leq 4 - \frac{1}{5}x$

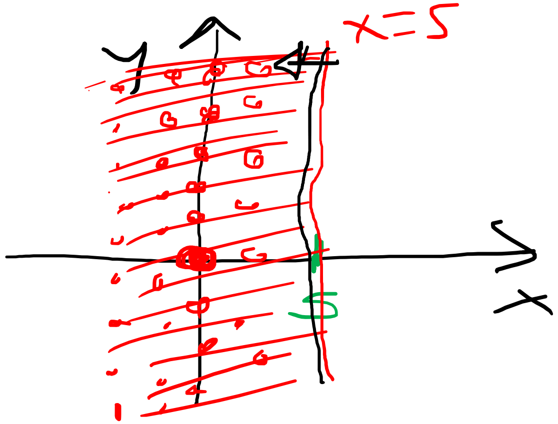
$y = 4 - \frac{1}{5}x$

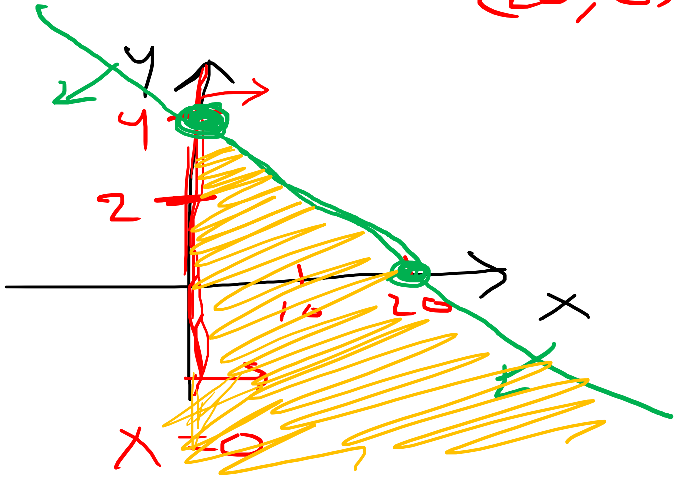
2) $x + 2y < 5$

5) $x + y \leq 5$
$x, y \geq 0$

(0,4)
(20,0)

3) $2x + 2y \geq 10$





Programación lineal. Método grafico

$5x + 2y = 10$

Regiones en el plano cartesiano

$5x + 2y \leq 10$

1. Considerar la igualdad
2. Determinar las intersecciones con los ejes
   a) $y=0$, determinamos la int con el eje x
   b) $x=0$, determinamos la int con el eje y
3. Tomar un punto de cualquiera de las dos regiones en que se divide el plano y verificar si cumple la desigualdad

Programación lineal. Método grafico

Pasos del método grafico

El método grafico consiste esencialmente en dos pasos:

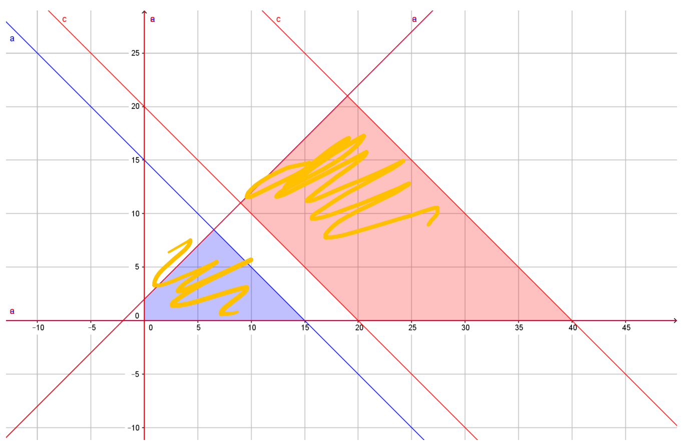
1. Determinar la región factible.
2. Determinar la solución óptima utilizado el teorema fundamental de la programación matemática.

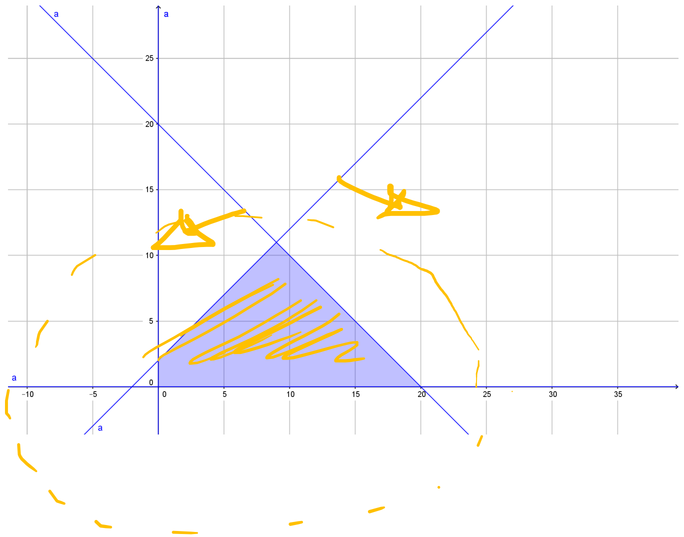
Programación lineal. Método grafico

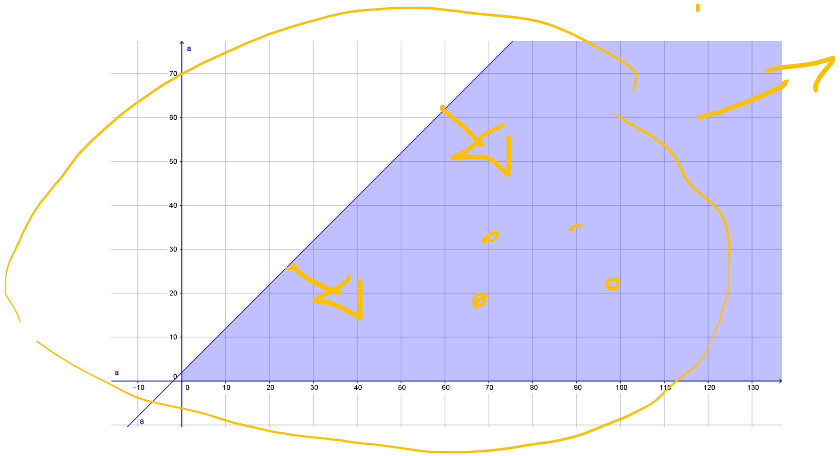
$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ x+y \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y \geq 5 \\ x-y \leq 15 \end{cases}$$

$$x+y \geq 10$$







Infactible

Acotado

No acotado

Programación lineal. Método grafico

1. Determinar la región factible del siguiente problema lineal

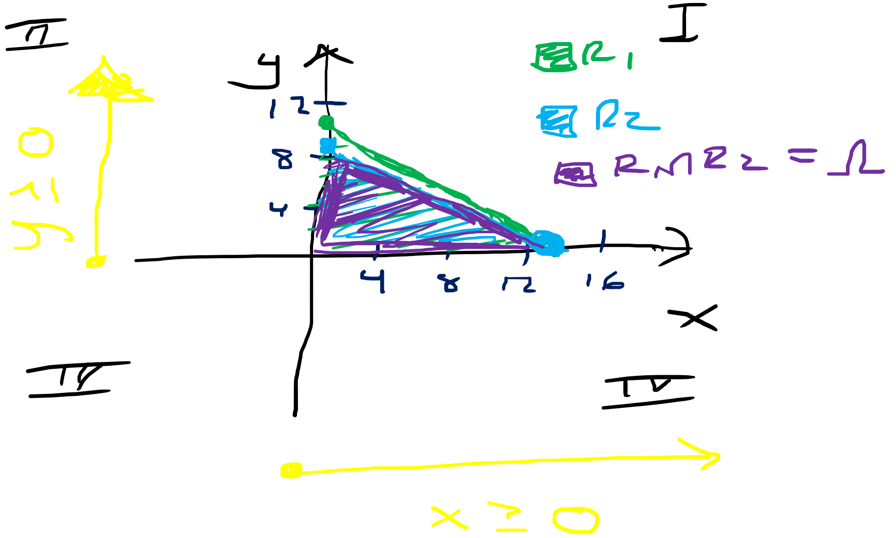
Max 4.5x + 5y

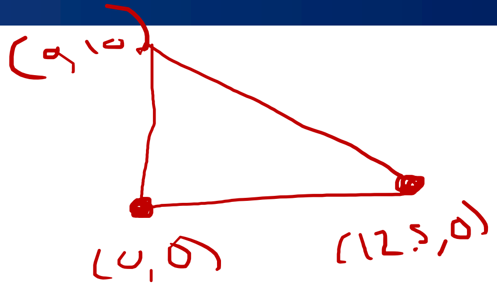
Sujeto a

$6x + 7y \leq 75$ R_1

$4x + 5y \leq 50$ R_2

$x, y \geq 0$





- Para R_1:

  Considerar igualdad

  $6x + 7y = 75$

  Intersecciones con ejes

  si $y = 0$, $x = 12.5$ (12.5, 0)

  si $x = 0$, $y = 10.71$ (0, 10.71)

- Para R_2:

  Considerar igualdad

  $4x + 5y = 50$

  Intersecciones con los ejes

  si $y = 0$, $x = 12.5$ (12.5, 0)

  si $x = 0$, $y = 10$ (0, 10)

Programación lineal. Método grafico

2. Determinar la región factible del siguiente problema lineal

Max 8x + 10y

Sujeto a

$$x + 2y \leq 20$$

$$x + y \leq 15$$

$$x, y \geq 0$$

Programación lineal. Método grafico

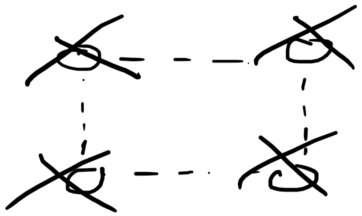
Teorema fundamental de la programación lineal

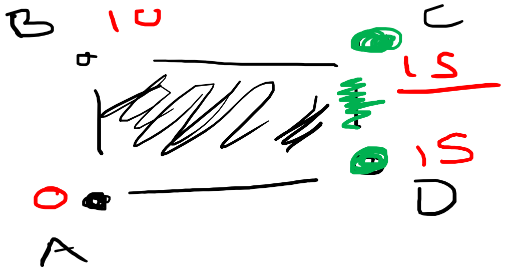
Si un problema de programación lineal (min o max) tiene región factible no vacía, entonces, si existe el óptimo de la función objetivo, se encuentra en un vértice de la región factible.

Notas:

- Si una función alcanza el valor óptimo en dos vértices adyacentes de la región factible, entonces alcanza también dicho valor óptimo en todos los puntos del segmento que une a ambos vértices.
- Si la región factible no contiene los puntos que conforman su perímetro entonces no tiene solución óptima.

$x \leq 5$





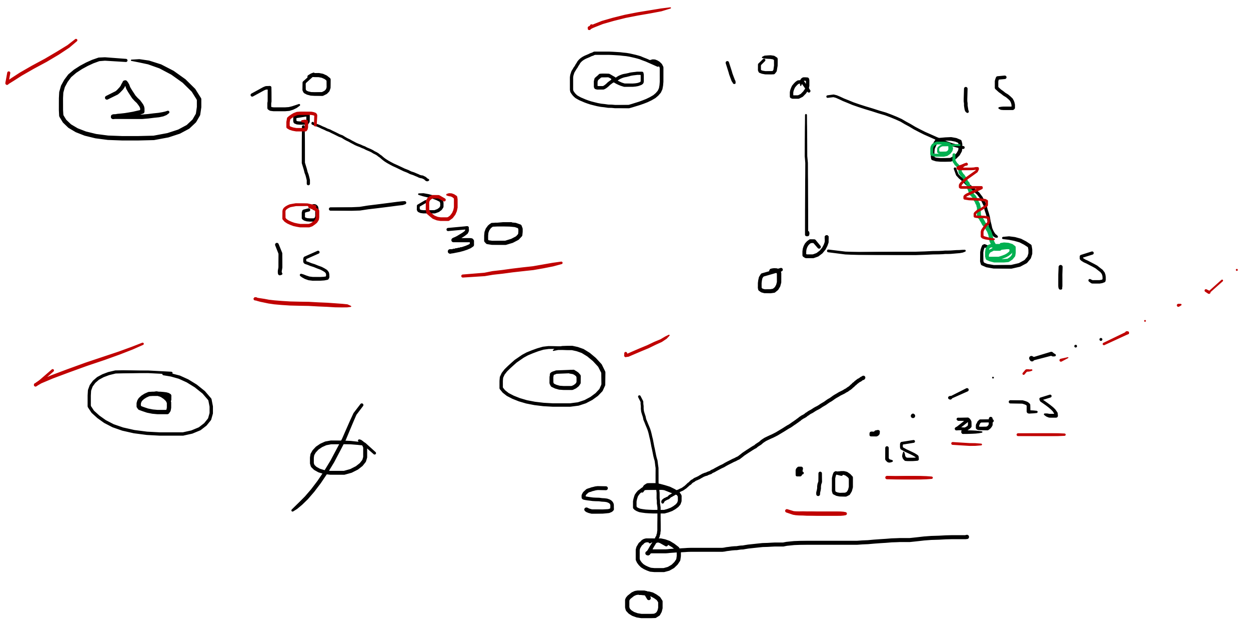
$f(x,y) = 2x + y$

Programación lineal. Método grafico

Número de soluciones óptimas

Existen tres opciones para la cantidad de soluciones optimas que puede poseer un problema lineal:

1. Con solución óptima
   a) Una
   b) Múltiples (infinitas)
2. Sin solución óptima



Programación lineal. Método grafico

Dada la región factible (ya encontrada) del problema lineal, determine su solución optima

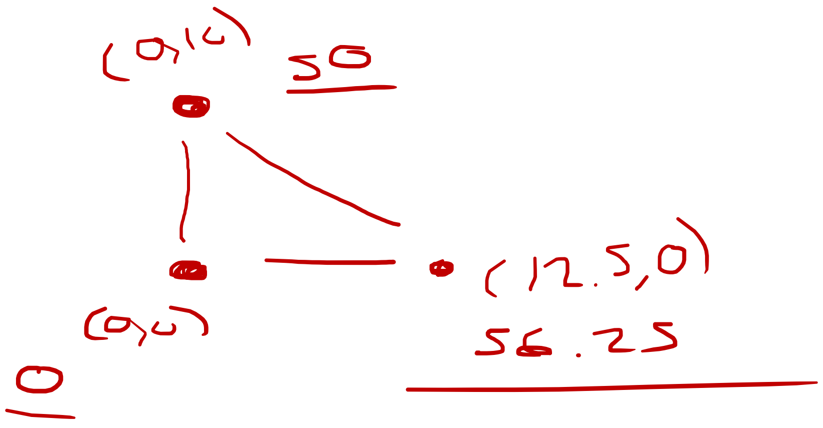
Max 4.5x + 5y

Sujeto a

$6x + 7y \leq 75$

$4x + 5y \leq 50$

$x, y \geq 0$



Vertice	Valor objetivo
(0,0)	0
(0,10)	50
(12.5,0)	56.25

La sol. óptima es (x,y) = (12.5, 0) con valor óptimo de 56.25

Programación lineal. Método grafico

Dada la región factible (ya encontrada) del problema lineal, determine su solución optima

Max 8x + 10y

Sujeto a

$x + 2y \leq 20$

$x + y \leq 15$

$x, y \geq 0$

Programación lineal. Método grafico

Modele matemáticamente los siguientes problemas y obtenga la solución optima mediante el método grafico.

1. Una confitería es famosa por su dos especialidades de tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima. la tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8 €. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €. En el almacén les quedaban 10 kilos de azúcar y 120 huevos. Maximizar ganancias.

I L
2 1
x_1 x_2

2. Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg. Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranajas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

Beneficio : 66€
Producción: 200 kg. A, 500 kg. B

I Modelo
1) v.d.d
2) FO
3) R
4) N d v

II. Método grafico
1) Ω
2) Evaluar vértices y determinar sol. ópt.
3) Concluir

III. Conclusión gral.

Zafiro, Alan Ossiel, Blanca Janeth.

Programación lineal. Método grafico

I. Modelo matemático

1. Variables de decisión

x_1: Cantidad de tartas imperiales a prod.
x_2: Cantidad de tartas de lima a prod.

2. Función objetivo

Max $z(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2$ // Max ganancias

3. Restricciones

R_1: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 10$ // Inv. azúcar

R_2: $8x_1 + 8x_2 \leq 120$ // Inv huevos

4. Naturaleza de las variables
$x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

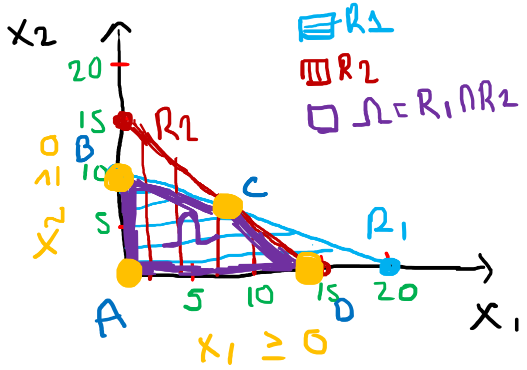
Nota: Para utilizar el método grafico asumimos que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

II. Método grafico

1. Región factible

Para R_1,
a) $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 10$
b) Int: $(0, 10), (20, 0)$

Para R_2,
a) $8x_1 + 8x_2 = 120$
b) Int: $(15, 0), (0, 15)$



2. Tipo de región

Ω es factible y acotado

3. Solución optima

Vertice	V. objetivo
$A = (0,0)$	$z(A) = 0$
$B = (0,10)$	$z(B) = 100$
* $C = (10,5)$	$z(C) = 130$
$D = (15,0)$	$z(D) = 120$

4. Conclusión

S.O: $(x_1, x_2) = (10, 5)$
V.O: $z(x_1, x_2) = 130$

III. Conclusión general

La confitería debe producir 10 tartas imperiales y 5 de lima para obtener una ganancia maxima de 130.

Programación lineal. Método grafico

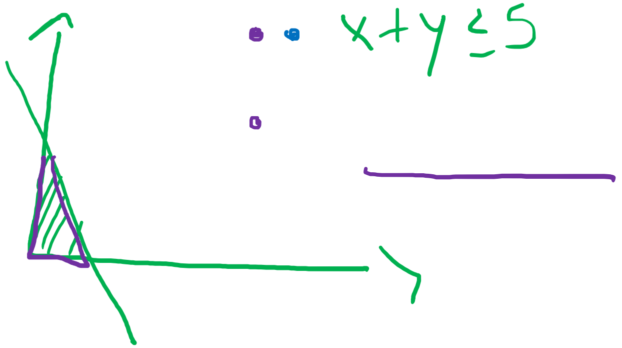
rest. red.

Si se quita no afecta la región factible.

6 - 52   10   5   42

1. Representar la región factible Ω
2. Mencionar que tipo de región factible es: (acotada, no acotada o infactible)
3. Decir si el modelo matemático contiene una restricción redundante
4. Determinar la solución optima y valor optimo.

$x+y \leq 5$



① Min $-5x-5y$

s.a
$$3x+5y \leq 30$$
$$x+5y \leq 20$$
$$x,y \geq 0$$

② Max $4x+7y$

s.a
$$3x+10y \leq 3000$$
$$6x+5y \leq 3000$$
$$x \leq 400$$
$$y \leq 400$$
$$x,y \geq 0$$

③ Max $x+y$

s.a
$$5x+8y \geq 4000$$
$$2x+y \geq 400$$
$$x,y \geq 0$$

④ Max $2X_1+3X_2$

s.a
$$X_1+X_2 \geq 5$$
$$6X_1+2X_2 \geq 12$$
$$X_1,X_2 \geq 0$$

⑤ Min $2x+3y$

s.a
$$x+y \geq 6$$
$$2x+y \geq 10$$
$$x,y \geq 0$$

⑥ Min $5x+3y$

s.a
$$x+y \leq 10$$
$$3x+2y \leq 15$$
$$x,y \geq 0$$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

Notación matricial de un problema de programación lineal (PPL)

$$obj\ Z = c^T x$$
$$sujeto\ a$$
$$Ax\ R\ b$$
$$x \in \Omega.$$

Donde:

obj: Objetivo que opera sobre una función (Maximizar o minimizar)
c: vector de costos los cuales definen la función objetivo
A: Matriz de coeficientes de las restricciones
x: Variables de decisión
R: Vector de relaciones sobre Ax y b
b: Vector de números no negativos
Ω: Región factible

$\min\ z = 2x + y$

Sa

$x + y \leq 5$
$-x + 4y \geq 10$
$x, y \geq 0$

$\min\ z = (2\ \ 1)\ \vec{x}$

$$\begin{array}{cccc} A & x & R & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \vec{x} & \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\vec{x} \geq 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x + y \leq 5 \longleftrightarrow -x - y \geq -5$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

Dado que un PPL puede plantearse de diferentes formas, para unificar su análisis, es conveniente transformarlo en lo que normalmente se le llama forma estándar. A veces, esta transformación se utiliza antes de resolver el PPL y encontrar el óptimo.

La forma estándar asociada a un PPL tiene la siguiente forma.

Forma estándar de un PPL

min

$$\min Z = c^T x$$
$$\text{sujeto a}$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

$-2x + y = -3$

$2x - y = 3$

$2x + y = 5$

$x - y = 4$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

Ejemplo

Problema de programación lineal en forma estándar

P_1: $\min Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$
$sujeto\ a$

$x_1 + x_2 = 2$
$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$

0

SI

Problema de programación lineal en forma no estándar

P_2: $\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$
$sujeto\ a$

$x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1 - 2x_3 \leq 6$
$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$

NO

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

Transformaciones válidas de un PPL

Para poder brindarle la forma estándar a un PPL es necesario aplicar transformaciones o propiedades válidas, las cuales se enfocan en:

- Objetivo →
- Relaciones de restricción
- Naturaleza de las variables

① $\text{Max } z \longleftrightarrow \boxed{\text{Min}}$?

② $2x_1 + x_2 \leq 5 \longleftrightarrow$ ______ $=$ __ ?

③ $2x_1 - 3x_2 \geq 3 \longleftrightarrow$ ______ $=$ _ ?

④ $x_1 \leq 0 \longleftrightarrow \boxed{}$

⑤ x_1 irrestricta $(x_1 \in \mathbb{R}) \longleftrightarrow$

$2x_1 + x_2 - 5 = 0$ Idea

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

Transformaciones válidas de un PPL (objetivo)

- $\max = -\min$

$\max z \longleftrightarrow \min -z$

Transformaciones válidas de un PPL (restricciones)

- Si $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n \leq b$,
  $\Rightarrow \exists\ x_{n+1} \geq 0\ tal\ que\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n + x_{n+1} = b$
- Si $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n \geq b$,
  $\Rightarrow \exists\ x_{n+1} \geq 0\ tal\ que\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n - x_{n+1} = b$

$x^4 + 4x^2 + 4 = 0 \quad x^2 = y$

Transformaciones válidas de un PPL (naturaleza de las variables)

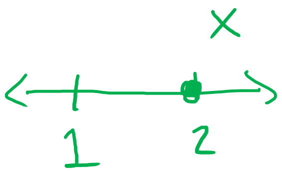
- Si $x \leq 0$, $\Rightarrow y = -x \geq 0$
- Si $x\ es\ irrestricta$, $\Rightarrow x = x^+ - x^-, donde\ x^+ y\ x^- \geq 0$

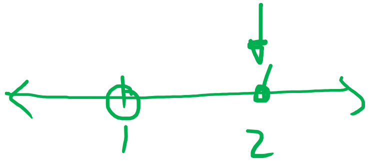
Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

P_1: $\max x$
sujeto a
$1 \le x \le 2$

$\longleftrightarrow$

P_2: $\min -x$
sujeto a
$1 \le x \le 2$

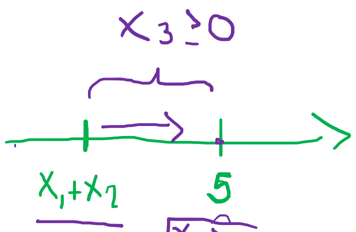




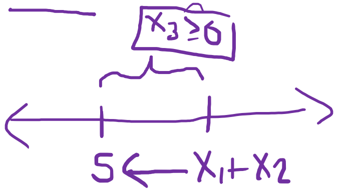
si $x=1$ $\quad -x=-1$
si $x=2$ $\quad -x=-2$

$\max z = 2x_1 - x_2$
$\min -z = -2x_1 + x_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{x_1 + x_2}\ \le 5 \\ \\ x_1 + x_2 \ge 5 \end{array} \right.$$



$x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$x_3 \ge 0$



$x_1 + x_2 - x_3 = 5$, $x_3 \ge 0$

$10 = 15 - 5$

$21 = 25 - 4$

$\min x$
sujeto a
$x \le 2$
$\boxed{x \le 0}$ $\longrightarrow$ $y = -x$

min $-y$
sa $-y \le 2$
$y \ge 0$

$\min x$
sujeto a
$x \le 2$
$x \in \mathbb{R}$ (irrestricta)

$x = x_1 - x_2$
$x_1, x_2 \ge 0$

min $x_1 - x_2$
sa $x_1 - x_2 \le 2$
$x_1, x_2 \ge 0$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

Transformar el siguiente PPL en su forma estándar

$\boldsymbol{P_1}$: $\max 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ libre}$$

$\boldsymbol{P_2}$: max $5x_1 + x_2 - x_3$

SA

$$x_1 + x_3 \leq 7$$
$$9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-7x_2 + 4x_3 \geq 14$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3, 4$$

Viernes 10 | Sep

$\boldsymbol{P_3}$: max $4x_1 - 5x_2$

SA

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\boldsymbol{P_4}$: $\min -3x + 2y$

sujeto a

$$x + 2y \leq 5$$
$$2x + y \leq 15$$
$$x, y \geq 0$$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

$z(x_1,x_2,x_3)=$

$\boldsymbol{P_1}: \max 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0, x_3\ libre$$

P_1^E : $\min -z(x_1,x_2,x_3) = -(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)$

S.a.

$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 3$$
$$x_1, x_2, x_4, x_5 \geq 0,\ x_3\ libre$$

$x_3 = x_6 - x_7$

$-x_3 = x_7 - x_6$

$x_3 = x_6 - x_7,\ x_6, x_7 \geq 0$

P_1^E : $\min -z(x_1,x_2,x_3) = -2x_1 + 3x_2 - 5x_6 + 5x_7$

Sa

$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$3x_1 + x_2 - x_5 - x_6 + x_7 = 3$$

$$x_i \geq 0,\ \forall i \in \overline{1,7} \setminus \{3\}$$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

P_2: max $5x_1 + x_2 - x_3$

SA

$x_1 + x_3 \le 7$

$9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$

$-7x_2 + 4x_3 \ge 14$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3,4$

P_2^E : min $-5x_1 - x_2 + x_3$

SA

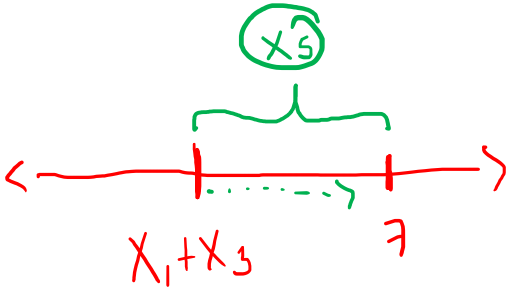
$x_1 + x_3 + x_5 = 7$

$9x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$

$-7x_2 + 4x_3 - x_6 = 14$

$x_j \ge 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$x_1 + x_3 \le 7$



$\underbrace{(x_1+x_3) + x_5}\ = 7$

Si $x_1 + x_3 < 7$

$\Rightarrow x_5 > 0$

Si $x_1 + x_3 = 7$

$\Rightarrow x_5 = 0$

Si $x_1 + x_3 \le 7$

$\Rightarrow \boxed{x_5 \ge 0}$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

$$
\begin{array}{lll}
P_3: & \max & 4x_1 - 5x_2 \\
 & \text{SA} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
 & & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & & x_1 + 4x_2 \geq 2 \\
 & & x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
P_3^E: & \min & -4x_1 + 5x_2 \\
 & \text{Sa} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
 & & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\
 & & x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\
 & & x_1 + 4x_2 - x_6 = 2 \\
 & & x_j \geq 0,\ j \in \{1, \dots, 6\}
\end{array}
$$

Programación lineal continua. Álgebra de la programación lineal

P_4: $\min -3x + 2y$
sujeto a
$x + 2y \leq 5$
$2x + y \leq 15$
$x, y \geq 0$

P_4^E: min $-3x+2y$

Sa $x+2y+z \quad = 5$
$2x+y \quad +r = 15$
$x,y,z,r \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Si se tiene un sistema de ecuaciones lineales, digamos $Ax = b$.

¿Cuáles son los posibles casos para la solución?

Sol. única
Sol. infinitas
Sin sol.

¿Cómo sabemos si tiene solución?

* Sistema cuadrado $(Cv = Ce)$
* Determinante (Distinto de 0)

$$P: \min z$$

Sa

$$\boxed{Ax = b}$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ec 1} \\ \text{Ec 2} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{2 \times 4} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{4 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$-x_1 + 4x_2 = 8$$

$$Ax = b$$

$$(A^{-1} \cdot A)x = A^{-1} \cdot b$$

$$I \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$x = A^{-1} b$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \\ x_2 = \end{array}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\operatorname{adj}(A)]^t$$

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Similitud entre programación lineal y algebra lineal

$m+1, m+2, \ldots, n$

$1 \; 2 \ldots m \ldots n$

$1, 2, \ldots, m$

$m \times m$

$\boxed{n > m}$

Programación lineal

$$A_{mxn}x_{nx1} = b_{mx1}$$

Algebra lineal

$$A_{nxn}x_{nx1} = b_{nx1}$$
$$x_{nx1} = A_{nxn}^{-1}b_{nx1}$$

Si A es invertible

Solución: “Ignorar” la cantidad de variables necesarias para inducir un sistema de orden cuadrado y de esta manera aplicar la teoría de algebra lineal

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Retomando la forma estándar del problema de programación lineal

$$
\begin{aligned}
&P\colon\ \min -3x + 2y\\
&sujeto\ a\\
&x + 2y \le 5\\
&2x + y \le 15\\
&x, y \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P^E:\ \min\ -3x+2y\\
&\text{Sa}\quad x+2y+z = 5\\
&\qquad 2x+y+r = 15\\
&\qquad x,y,z,r \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
P^{E,M}:\ \min\ \begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\r\end{pmatrix}
$$

$$
\text{Sa}\quad \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}
$$

$$\vec{x} \ge 0$$

Ignorar $\equiv$ Hacer 0.

1) $x = y = 0$
2) $z, r = 0$
3) $y, z = 0$

Sistema reducido

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$$

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Ejercicio. Dar valores de 0 a todas las combinaciones de las variables para analizar las soluciones al sistema de ecuaciones.

x y z r

min $-3x+2y$

¿Cuántas combinaciones posibles hay?
Combinación de las variables totales en las variables a ser cero.

$\binom{4}{2}$ ← total ← las que hay que hacer 0

En este ejemplo $m=2$, $n=4$ (ec, var) hay 6 combinaciones

¿Qué representa la solución obtenida? las intersecciones de todas las rectas

combinación	variables a ignorar	sistema reducido	sol. sistema reducido	Sol. pE	sol. p (x)	Factible	F.O
1	x, y	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}z\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\\15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	R1 ✓ R2 ✓ N ✓ ✓	0
2	x, z	$\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\25/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5/2\\0\\25/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5/2\end{pmatrix}$	R1 ✓ R2 ✓ N ✓ ✓	5
3	x, r	$\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$	$(\ )=(\ )$	$(\ )=(\ )$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}$	R1 X R2 N X	
4	y, z	$\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$	R1 ✓ R2 ✓ N ✓	-15
5	y, r				$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15/2\\0\end{pmatrix}$	R1 X R2 N X	
6	z, r				$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25/3\\-5/3\end{pmatrix}$	R1 R2 N X X	

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

$$\min \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

SA

R_1 $\quad x + 2y \leq 5$

R_2 $\quad 2x + y \leq 15$

R_3 $\quad x \geq 0$

R_4 $\quad y \geq 0$

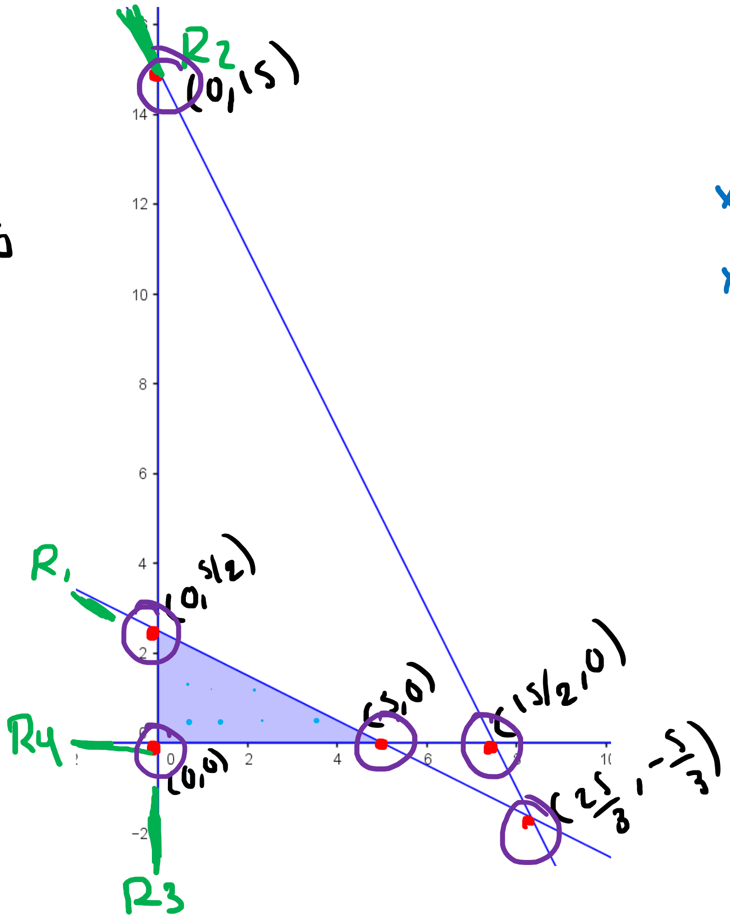
Igualdades

$x + 2y = 5$

$2x + y = 15$

$x = 0$

$y = 0$



En el sistema A	Resultado	Interpretación	Factible
$x=y=0$	$(0,0)$	$R_3 \cap R_4$	✓
$x=z=0$	$(0,5/2)$	$R_3 \cap R_1$	✓
$x=w=0$	$(0,15)$	$R_3 \cap R_2$	✗
$y=z=0$	$(5,0)$	$R_4 \cap R_1$	✓
$y=w=0$	$(\frac{15}{2},0)$	$R_4 \cap R_2$	✗
$z=w=0$	$(\frac{25}{3},\frac{-5}{3})$	$R_1 \cap R_2$	✗

$R_1 \longleftrightarrow z$

$R_2 \longleftrightarrow w$

$R_3 \longleftrightarrow x$

$R_4 \longleftrightarrow y$

Cuidado. A cada solución obtenida le corresponde un vértice de las intersecciones entre las rectas, pero no todos son factibles.

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Determine la solución optima para el problema $\boldsymbol{P}$. Primero obtenga la forma estándar del problema en su forma matricial, de valores de 0 a las variables necesarias y construya una tabla con la información correspondiente.

$\boldsymbol{P}: \max 3x_1 + x_2 + 2x_3$

Sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

P^E : min $-3X_1 - X_2 - 2X_3$

Sa

$2X_1 + 3X_2 + X_3 + X_4 = 10$
$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_5 = 10$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

total v.ah.0 $c(5,2)$

Considerando el sistema de ecuaciones (en su forma matricial) del P^E.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2×5

combinaciones

• num: $c(5,3) = \frac{5!}{2!3!} = 10$

1) $X_1 = X_2 = X_3 = 0$
2) $X_1 = X_2 = X_4 = 0$
3) $X_1 = X_2 = X_5 = 0$
4) $X_1 = X_3 = X_4 = 0$
5) $X_1 = X_3 = X_5 = 0$
6) $X_1 = X_4 = X_5 = 0$
7) $X_2 = X_3 = X_4 = 0$
8) $X_2 = X_3 = X_5 = 0$
9) $X_2 = X_4 = X_5 = 0$
10) $X_3 = X_4 = X_5 = 0$

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Combinación	Variables a ignorar (a hacer 0)	sistema reducido	Sol. al sistema reducido	Sol. de P^E	Sol. de P	¿Factible?	F.O.
1		$\underbrace{(\ )}_{2\times 2}(\ )=(\ )$					
2							
⋮							
10							

B. Tadeo T. C.

Nathalie R.

Victor L.

Alexia G.

+2

*Nota:

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Variables que toman el valor de cero	Sistema	Solución para las variables del sistema	Solución para todas las variables	Solución para las variables originales	Factibilidad	Función objetivo
x_1, x_2, x_3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$(0\ \ 0\ \ 0\ \ 10\ \ 10)$	$(0\ \ 0\ \ 0)$	Si	0
x_1, x_2, x_4	$\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$	$(0\ \ 0\ \ 10\ \ 0\ \ 0)$	$(0\ \ 0\ \ 10)$	No	-
x_1, x_2, x_5	$\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/3\\20/3\end{pmatrix}$	$(0\ \ 0\ \ 10/3\ \ 20/3\ \ 0)$	$(0\ \ 0\ \ 10/3)$	Si	$20/3 \approx 6.66$
x_1, x_3, x_4	$\begin{pmatrix}3 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_2\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/3\\10/3\end{pmatrix}$	$(0\ \ 10/3\ \ 0\ \ 0\ \ 10/3)$	$(0\ \ 10/3\ \ 0)$	Si	$10/3 \approx 3.33$
x_1, x_3, x_5	$\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$	$(0\ \ 5\ \ 0\ \ -5\ \ 0)$	$(0\ \ 5\ \ 0)$	No	-
x_1, x_4, x_5	$\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20/7\\10/7\end{pmatrix}$	$(0\ \ 20/7\ \ 10/7\ \ 0\ \ 0)$	$(0\ \ 20/7\ \ 10/7)$	Si	$40/7 \approx 5.71$
x_2, x_3, x_4	$\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$	$(5\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 5)$	$(5\ \ 0\ \ 0)$	Si	15
x_2, x_3, x_5	$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-10\end{pmatrix}$	$(10\ \ 0\ \ 0\ \ -10\ \ 0)$	$(10\ \ 0\ \ 0)$	No	-
x_2, x_4, x_5	$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$	$(4\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 0)$	$(4\ \ 0\ \ 2)$	Si	16
x_3, x_4, x_5	$\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\end{pmatrix}$	$(-10\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$	$(-10\ \ 10\ \ 0)$	No	-

Programación lineal continua. Generalización del método grafico, interpretación de soluciones

Modelación — Var. — Desventajas

Método grafico. — 2, 3 — $n \geq 4$ no es posible graficar

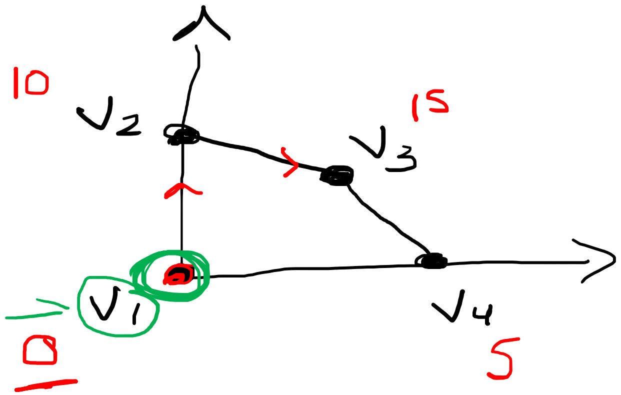
1er p — Método algebraico — $n \in \mathbb{N}$ — *numero de combinaciones *tardado

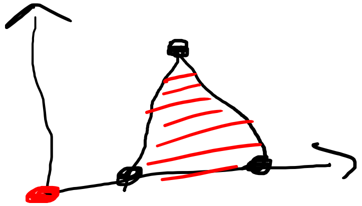
Método simplex tabular — $n \in \mathbb{N}$

Método de las 2 fases.

$V_1 \to V_2 \to V_3$

0   10 $\boxed{15}$





max $x_1 + 2x_2$

(naturalezas)
* Dualidad
* Sensibilidad
(cambios)

$e^y - x = 0$

$x = e^y$

$y = \ln(x)$