Inventarios

Dra. Valeria Soto Mendoza

Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas
Facultad de Sistemas
Universidad Autónoma de Coahuila

18 de marzo de 2020

Contenido

Costo de ordenar

El **costo de ordenar** o fabricar una cantidad z (ya sea mediante compra o producción de esa cantidad) se puede representar por una función $c(z)$.

$$\begin{aligned} c(z) &= \text{costo de ordenar } z \text{ unidades} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ K + cz & \text{si } z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde K = costo fijo o de preparación y c = costo unitario.

La constante K incluye el costo administrativo de ordenar o, cuando se fabrica, el costo del trabajo de preparación para poner en marcha la producción.

Costo de mantener inventario

El costo de mantener inventario (a veces llamado costo de almacenar) representa los costos asociados con el almacenamiento del inventario hasta que se vende o se usa. Este costo incluye el costo del capital invertido, espacio, seguros, protección e impuestos atribuibles al almacenamiento. Desde otra perspectiva, se puede evaluar de manera continua o por periodo. En este caso puede ser una función de la cantidad máxima que se guarda durante un periodo, de la cantidad promedio en el almacén o de la **cantidad en inventario al final del periodo**.

Costo por faltantes

El costo por faltantes (a veces llamado costo de demanda insatisfecha) surge cuando la cantidad que se requiere de un bien (demanda) es mayor que el inventario disponible.

- con faltantes, la demanda excesiva no se pierde, sino que queda pendiente hasta que se pueda satisfacer con el siguiente re-abastecimiento normal.
- sin faltantes, si ocurre un exceso de demanda sobre el inventario disponible, el distribuidor no puede esperar a la siguiente entrega normal para re-abastecer el inventario:
  - el exceso de demanda se satisface mediante un envío prioritario
  - no se cumpla con toda la demanda porque las órdenes fueron canceladas.

Ingreso

El **ingreso** puede o no incluirse en el modelo.

- Si se supone que el mercado establece tanto el precio como la demanda de un producto y por ello ambos factores están fuera del control de la compñía, el rendimiento sobre las ventas (si se cumple la demanda) es independiente de la política de inventarios de la compañía y puede dejarse fuera
- si no se incluye en el modelo, entonces la pérdida del ingreso debe incluirse en el costo de penalización por faltantes siempre que la empresa no pueda cumplir con esa demanda y se pierda la venta.
- Lo que es más, aun en el caso de que se permitan faltantes, debe incluirse el costo del retraso en el ingreso dentro del costo por faltantes.

Valor de rescate

El **valor de rescate** o salvamento de un producto es el valor de un artículo sobrante cuando no se requiere más del inventario. Para la empresa, el valor de rescate representa el valor de desecho del artículo, quizá a través de una venta con descuento. El negativo del valor de rescate se llama costo de recuperación. Si existe un costo asociado al hecho de poder deshacerse de un artículo, el costo de recuperación puede ser positivo. Se supondrá que cualquier costo de recuperación se incorpora al costo de mantener.

Tasa de descuento

La **tasa de descuento** toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Cuando una empresa compromete capital en inventarios, no puede usarlo para otros fines.

En problemas que tienen un horizonte de planeación corto, puede suponerse que la tasa de descuento es igual a 1 (y puede despreciarse) puesto que el valor corriente de 1 dólar no cambia mucho en este corto tiempo. Sin embargo, en los problemas con horizontes lejanos debe incluirse el factor de descuento.

Tiempo de entrega

El **tiempo de entrega**, que es el lapso que transcurre desde que se coloca una orden de re-abastecimiento (ya sea por compra o producción) hasta la recepción de los bienes. Si el tiempo de entrega es siempre el mismo (*fijo*), el re-abastecimiento se puede programar justo cuando se desea.

Clasificación de los modelos de inventarios

- Según la **demanda**:
  - **determinísticos**, si se conoce la demanda del periodo.
  - **estocásticos** según si se trata de una variable aleatoria que tiene una distribución de probabilidad conocida.
- Según la forma en que se **revisa** el inventario:
  - revisión **continua**, se hace un pedido en el momento en que el inventario baja del punto de reorden especificado.
  - revisión **periódica** se verifica el nivel del inventario en intervalos discretos.

Modelo de lote económico (EOQ)

La situación de inventarios más común que enfrentan los fabricantes, distribuidores y comerciantes es que los niveles de inventarios se reducen con el tiempo y después se re-abastecen con la llegada de nuevas unidades.

Una representación de esta situación es el modelo del lote económico o modelo EOQ (*economic order quantity*).

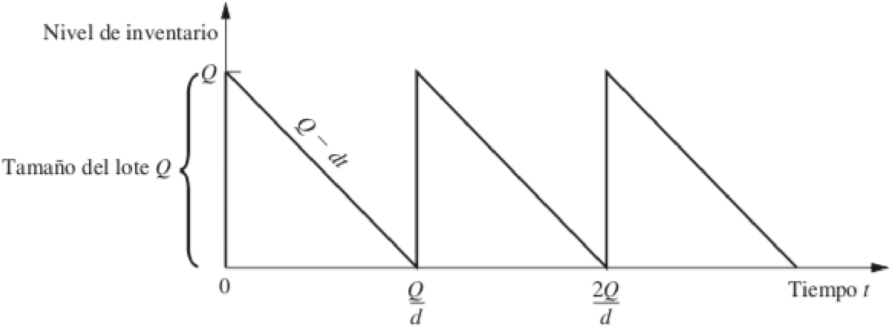
Se supone que los artículos bajo consideración se sacarán en forma continua a una tasa constante conocida denotada por d; es decir, la demanda es de d unidades por unidad de tiempo. También se supone que el inventario se re-abastece (al producir u ordenar) un lote de tamaño fijo (Q unidades), donde las Q unidades llegan juntas en el tiempo deseado. En el caso del modelo EOQ básico los únicos costos que se consideran son

$$K = \text{ costo de preparación para ordenar un lote,}$$
$$c = \text{ costo unitario de producir o comprar cada unidad,}$$
$$h = \text{ costo de mantener el inventario por unidad, por unidad de tiempo.}$$

El objetivo consiste en determinar con qué frecuencia y en qué cantidad se debe re-abastecer el inventario de manera que se minimice la suma de estos costos por unidad de tiempo.

Modelo de lote económico (EOQ)

A continuación se describe el patrón de los niveles de inventario que resulta al comenzar en el tiempo 0 si se produce u ordena un lote de Q unidades, con el fin de aumentar el inventario inicial de 0 a Q y repetir el proceso cada vez que el inventario desciende hasta 0.



Modelo EOQ básico

El modelo EOQ básico tiene los siguientes supuestos:

1. Se conoce la tasa de demanda de d unidades por unidad de tiempo.
2. La cantidad ordenada (Q) para re-abastecer el inventario llega de una sola vez cuando se desea, es decir, cuando el nivel del inventario baja hasta 0.
3. No se permiten faltantes.

En cuanto al supuesto 2, es común que transcurra un lapso desde que se coloca una orden hasta el momento en que se recibe. El tiempo entre colocar una orden y recibirla se conoce como **tiempo de entrega**. El nivel de inventario en el que se coloca la orden se llama **punto de re-orden**.

$$\text{Punto de re-orden} = (\text{tasa de demanda}) \times (\text{tiempo de entrega})$$

El supuesto 2 asume de manera implícita un tiempo de entrega *constante*.

Modelo EOQ básico

El tiempo entre re-abastecimientos consecutivos del inventario se conoce como *ciclo*.

El costo total por unidad de tiempo T se obtiene a partir de los siguientes componentes:

$$\text{Costo de producir u ordenar por ciclo} = K + cQ$$

El nivel de inventario promedio durante un ciclo es $(Q + 0)/2 = Q/2$ unidades, y el costo correspondiente es $hQ/2$ por unidad de tiempo. Como la longitud del ciclo es Q/d,

$$\text{Costo de mantener inventario por ciclo} = \frac{hQ^2}{2d}$$

Por lo tanto,

$$\text{Costo total por ciclo} = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}$$

por lo que el costo total por unidad de tiempo es

$$T = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}}{Q/d} = \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hQ}{2}$$

Modelo EOQ básico

El valor de Q que minimiza $T(Q^*)$, se encuentra al establecer la primera derivada igual a cero (y al observar que la segunda derivada es positiva), de donde se obtiene

$$-\frac{dK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

de manera que

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}},$$

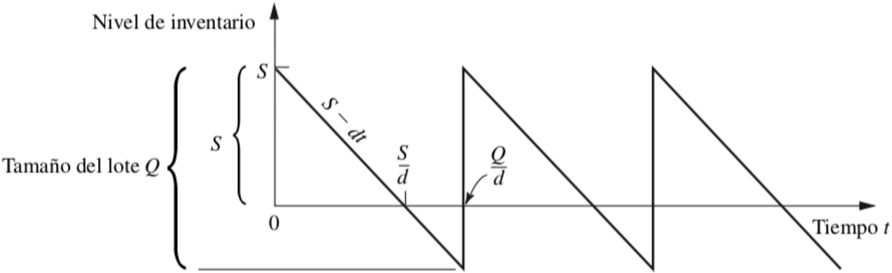
que es la bien conocida fórmula EOQ^2 (fórmula de la raíz cuadrada.) El tiempo de ciclo correspondiente, sea t^*, es

$$t^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}$$

Modelo EOQ con faltantes

El **modelo EOQ con faltantes planeados** permite faltantes planeados. Esto es útil administrativamente, en donde el requisito más importante es que los clientes, en general, estén dispuestos a aceptar un retraso razonable en la recepción de sus pedidos si es necesario. Se sustituye sólo el tercer supuesto del modelo básico EOQ por el siguiente:

3. Ahora se permiten faltantes planeados. Cuando ocurre un faltante, los clientes afectados esperan que el producto esté nuevamente disponible. Sus órdenes pendientes se satisfacen de inmediato cuando llega la cantidad ordenada para re-abastecer el inventario.



Sea

$$p = \text{ costo de faltantes por unidad que falta por unidad de tiempo que falta,}$$
$$S = \text{ nivel de inventario justo después de recibir un lote de Q unidades,}$$
$$Q - S = \text{ faltante en inventario justo antes de recibir un lote de Q unidades.}$$

Modelo EOQ con faltantes

$$\text{Costo de producir u ordenar por ciclo} = K + cQ$$

$$\text{Costo de mantener el inventario por ciclo} = \frac{hS}{2}\frac{S}{d} = \frac{hS^2}{2d}$$

$$\text{Costo de faltantes por ciclo} = \frac{p(Q-S)}{2}\frac{Q-S}{d} = \frac{p(Q-S)^2}{2d}$$

$$\text{Costo total por ciclo} = K + cQ + \frac{hS^2}{2d} + \frac{p(Q-S)^2}{2d}$$

$$\text{Costo total por unidad de tiempo} = T = \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

Modelo EOQ con faltantes

$$\text{Longitud óptima del ciclo } = t^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

$$\text{El faltante máximo es } = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2dK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

$$\text{La fracción del tiempo en que no existen faltantes es } = \frac{S^*/d}{Q^*/d} = \frac{p}{p+h}$$

Cuando el valor de p o de h se hace mucho más grande que el otro, las cantidades anteriores se comportan de manera intuitiva. En particular, cuando $p \to \infty$ con h constante (los costos por faltantes dominan), $Q^* - S^* \to 0$ mientras que tanto Q^* como t^* convergen a sus valores dados en el modelo EOQ básico. Aunque el modelo actual permite faltantes, $p \to \infty$ implica que no vale la pena tenerlos.
Por otro lado, cuando $h \to \infty$ con p constante (de manera que dominan los costos de mantener inventario), $S^* \to 0$. Por ello, tener $h \to \infty$ hace que no sea económico tener niveles de inventario positivos, con lo que cada nuevo lote de Q^* unidades no va más allá de eliminar los actuales faltantes de inventario.

Modelo EOQ con descuentos por cantidad

Cuando se especificaron las componentes de costos, los modelos anteriores suponen que el costo por unidad de un artículo es el mismo sin importar la cantidad que compone el lote. En realidad, este supuesto da como resultado que las soluciones óptimas sean independientes del costo unitario. El **modelo EOQ con descuentos por cantidad** sustituye ese supuesto con el siguiente:

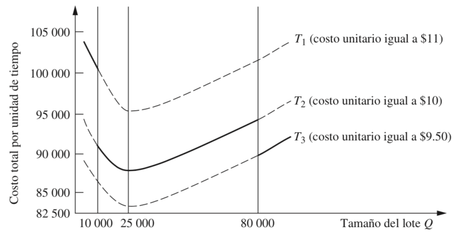
4. El costo unitario de un artículo depende de la cantidad de unidades que integren el lote. En particular, se proporciona un incentivo para colocar una orden grande al cambiar el costo unitario de cantidades pequeñas por un costo unitario menor en lotes más grandes y quizá un costo unitario todavía más pequeño para lotes aún más grandes.

Modelo EOQ con descuentos por cantidad

El costo total por unidad de tiempo T_j, si el costo de producción es c_j, está dado por:

$$T_j = \frac{dK}{Q} + dc_j + \frac{hQ}{2}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots$$

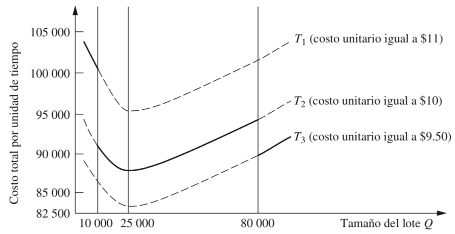
Modelo EOQ con descuentos por cantidad



El procedimiento para encontrar la solución se resume a continuación:

1. En el caso de cada costo unitario disponible c_j, use la fórmula del modelo EOQ para calcular la cantidad óptima de ordenar Q_j^*.

2. En el caso de cada c_j donde Q_j^* se encuentra dentro del intervalo factible de cantidades por ordenar para c_j, calcule el costo total correspondiente por unidad de tiempo T_j.



El procedimiento para encontrar la solución se resume a continuación:

3. En el caso de cada c_j donde Q_j^* no está dentro del intervalo factible, determine la cantidad por ordenar Q_j que se encuentra en el punto terminal más cercano a Q_j^*. Calcule el costo total por unidad de tiempo T_j para Q_j y c_j.

4. Compare las T_j que obtuvo para todas las c_j y elija la T_j mínima. Después seleccione la cantidad por ordenar Q_j que obtuvo en los pasos 2 o 3 que proporciona esta T_j mínima.

Modelo determinístico con revisión periódica

El análisis de la sección anterior exploró el modelo del lote económico (EOQ). Los resultados obtenidos se basan en el supuesto de que la tasa de demanda es constante. Cuando este supuesto se relaja, es decir, cuando se permite que varíen las cantidades que deben retirarse del inventario de un periodo a otro, la *fórmula EOQ* ya no asegura una solución de costo mínimo.

Modelo determinístico con revisión periódica

En un modelo de revisión periódica deben planearse cuánto producir/ordenar (si es necesario) los siguientes n periodos para re-abastecer el inventario al principio de cada uno de éstos. (La orden de re-abastecer el inventario puede requerir la compra de las unidades o su producción; esto último es lo más común cuando se aplica el presente modelo, por lo que se usará el término producir las unidades.) Las demandas en los respectivos periodos son conocidas (pero no son las mismas en todos los periodos) y se denotan por

$$r_i = \text{ demanda en el periodo } i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Estas demandas se deben satisfacer a tiempo. No se tiene un inventario inicial, pero hay tiempo para hacer una entrega al principio del periodo 1.

Modelo determinístico con revisión periódica

Los costos incluidos en este modelo son:

> $K =$ costo de preparación para producir u ordenar artículos para re-abastecer el inventario al inicio del periodo,
>
> $c =$ costo unitario de producir/ordenar cada artículo,
>
> $h =$ costo de mantener en inventario cada artículo que queda al final del periodo.

El objetivo es minimizar el costo total durante los n periodos. Esto se logra si se pasan por alto los costos fijos y se minimiza el costo total variable de n periodos.

Modelo determinístico con revisión periódica

La clave para desarrollar un algoritmo eficiente para encontrar una política óptima de inventarios (o de manera equivalente, un programa de producción óptimo) para el modelo anterior está basada en la siguiente observación sobre la naturaleza de una política óptima.

Una política óptima (programa de producción) produce sólo cuando el nivel de inventario es cero.

Esta caracterización de las políticas óptimas se puede usar para identificar las políticas que no son óptimas. Además, como este enfoque implica que las únicas opciones para la cantidad producida al principio del periodo i son $0, r_i, r_i + r_{i+1}, \ldots,$ o $r_i + r_{i+1} + \cdots + r_n$ se puede explotar para obtener un algoritmo eficiente relacionado con el enfoque de programación dinámica determinística.

Modelo determinístico con revisión periódica

En particular, defina

C_i = costo total de una política óptima para los periodos $i, i+1, \ldots, n$ cuando el periodo i se inicia con inventario cero (antes de producir), para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Al usar el enfoque de programación dinámica y resolver hacia atrás periodo por periodo, los valores de C_i se pueden encontrar mediante el cálculo primero de C_n, después de C_{n+1}, etc. Así, una vez calculados $C_n, C_{n+1}, \ldots, C_{i+1}$, se puede encontrar C_i a partir de la *relación recursiva*:

$$C_i = \underset{j=i,i+1,\ldots,n}{\text{mínimo}} \{C_{j+1} + K + h[r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \cdots + (j-i)r_j]\},$$

Modelo determinístico con revisión periódica

$$C_i = \underset{j=i,i+1,\ldots,n}{\text{mínimo}} \{ C_{j+1} + K + h[r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \cdots + (j-i)r_j] \}$$

donde j se puede interpretar como un índice que denota el (final del) periodo cuando el inventario llega a cero por primera vez después de producir al principio del periodo i. En el tiempo que transcurre entre periodo i al periodo j, el término con coeficiente h representa el costo total de mantener en ese intervalo. Cuando $j = n$, el término $C_{n+1} = 0$. El valor de j que minimiza indica que si el nivel de inventario en realidad llega a cero al iniciar el periodo i, entonces la producción en el periodo i debe cubrir toda la demanda desde el periodo i hasta este periodo j.

El algoritmo para resolver este modelo consiste en esencia en obtener $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1$ por turno. Para $i = 1$, el valor de j que minimiza indica que la producción en el periodo 1 debe cubrir la demanda hasta el periodo j, y la segunda producción será en el periodo $j+1$. Para $i = j+1$, el nuevo valor de j que minimiza señala el tiempo que la segunda producción cubre la demanda, y así hasta el final.

La aplicación de este algoritmo es mucho más rápida que el enfoque completo de programación dinámica. Igual que en ésta, es necesario determinar $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_2$ antes de obtener C_1, pero el número de cálculos es mucho menor y el número de cantidades posibles de producción se reduce en forma significativa.

Modelo estocástico con revisión continua

Los modelos de inventarios estocásticos están diseñados para analizar sistemas de inventarios donde existe una gran incertidumbre sobre las demandas futuras.
Es común que un sistema de inventarios de revisión continua de un producto específico se base en dos números críticos:

$$R = \text{punto de re-orden.}$$
$$Q = \text{cantidad por ordenar.}$$

Una política de inventarios basada en estos dos números críticos es sencilla:

Política de inventarios: *siempre que el nivel de inventario de un producto llegue a R unidades, se coloca una orden de Q unidades para re-abastecerlo*.

Con frecuencia, esta política se llama política de punto de re-orden, cantidad por ordenar, o **política (R, Q)**.

Modelo estocástico con revisión continua

Supuestos del modelo:

1. Cada aplicación se refiere a un solo producto.
2. El nivel de inventario está bajo *revisión continua*, por lo que su valor actual se conoce.
3. Debe usarse una política (R, Q), por lo cual las únicas decisiones que deben tomarse son las selecciones de R y Q.
4. Existe un *tiempo de entrega* entre la colocación de una orden y la recepción de la cantidad ordenada. Este tiempo de entrega puede ser fijo o variable.
5. La *demanda* para retirar unidades del inventario y venderlas (o usarlas de otro modo) durante este tiempo de entrega es incierta. Sin embargo, se conoce (o se puede estimar) la distribución de probabilidad de la demanda.

Supuestos del modelo:

6. Si ocurren faltantes antes de recibir la orden, el exceso de demanda queda *pendiente*, de manera que estos faltantes se satisfacen cuando llega la orden.
7. Se incurre en *costo de preparación* (K) cada vez que se coloca una orden.
8. Excepto por este costo fijo, el costo de la orden es proporcional a la cantidad Q.
9. Se incurre en un *costo de mantener* (h) por cada unidad en inventario por unidad de tiempo.
10. Cuando ocurren faltantes, se incurre en cierto *costo por faltantes* (p) por cada unidad que falta por unidad de tiempo hasta que se satisface la demanda pendiente.

Modelo estocástico con revisión continua

El enfoque más directo para elegir Q en el este modelo es usar la fórmula para el modelo EOQ con faltantes planeados:

$$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

donde d es ahora la demanda *promedio* por unidad de tiempo, y K, h y p están definidos en los respectivos supuestos 7, 9 y 10.

Esta Q será sólo una aproximación de la cantidad óptima que se debe ordenar según el modelo actual. Sin embargo, no se dispone de una fórmula para determinar el valor exacto de esa cantidad, por lo que se necesita una aproximación.

Modelo estocástico con revisión continua

Un enfoque común para elegir el punto de re-orden R se basa en el nivel deseado de servicio al cliente que tenga la administración. Por lo tanto, el punto inicial es obtener una decisión administrativa con respecto al nivel de servicio deseado.

El nivel de servicio se puede definir de varias maneras en este contexto, como se describe a continuación:

1. Probabilidad de que ocurra un faltante entre la colocación de la orden y la recepción del pedido.
2. Número promedio de faltantes por año.
3. Porcentaje promedio de la demanda anual que se satisface de inmediato (sin faltantes).
4. Retraso promedio para satisfacer las órdenes pendientes cuando ocurre un faltante.
5. Retraso promedio global para satisfacer las órdenes (donde el retraso sin faltantes es 0).

La medida 1 tal vez es la más conveniente para usarla como medida principal, por lo que se examinará este caso. Se denotará el nivel de servicio deseado, de acuerdo con esta medida, por L; entonces

$$L = \text{probabilidad deseada por la administración de que no ocurran faltantes en el lapso entre colocar una orden y recibirla.}$$

Si se usa la medida 1 se tiene que trabajar con la distribución de probabilidad estimada de la siguiente variable aleatoria.

$$D = \text{demanda durante el tiempo de entrega para satisfacer una orden.}$$

Por ejemplo, con una distribución uniforme, la fórmula para elegir el punto de re-orden R es sencilla.

> Si la distribución de probabilidad de D es una distribución uniforme en el intervalo de a a b, establezca
>
> $$R = a + L(b - a),$$
>
> porque entonces
>
> $$P(D \leq R) = L.$$
>
> Como la media de la distribución es
>
> $$E(D) = \frac{a+b}{2}$$

Modelo estocástico con revisión continua

La cantidad de **inventario de seguridad** (el nivel de inventario *esperado justo* antes de que la cantidad ordenada se reciba) que proporciona el punto de re-orden R es

$$\begin{aligned}\text{Inventario de seguridad} &= R - E(D) = a + L(b-a) - \frac{a+b}{2} \\ &= \left(L - \frac{1}{2}\right)(b-a)\end{aligned}$$

Cuando la distribución de la demanda es diferente a una distribución uniforme, el procedimiento para encontrar R es similar.

Procedimiento general para elegir R con la medida 1 de nivel de servicio:

1. Seleccionar L.
2. Despejar R tal que $P(D \leq R) = L$.

Por ejemplo, suponga que D tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2. Dado el valor de L, se puede usar la tabla de distribución normal para determinar el valor de R. En particular, sólo se necesita encontrar el valor de K_{1-L} en esta tabla y después sustituirlo en la siguiente fórmula para calcular R:

$$R = \mu + K_{1-L}\sigma$$

La cantidad de inventario de seguridad $= R - \mu = K_{1-L}\sigma$.
De aquí se obtiene que el inventario de seguridad $= 0{,}675\sigma$.

Modelo estocástico de un solo periodo para productos perecederos

Cuando se elige el modelo de inventarios que se debe usar para un producto dado, debe distinguirse entre dos tipos de productos. Uno de ellos es un **producto estable**, que conservará sus ventas en forma indefinida, por lo que no hay una fecha establecida para agotar el inventario.

El otro tipo, por el contrario, es un **producto perecedero**, que se puede tener en inventario sólo un periodo limitado antes de que no se pueda vender.

Como el problema general que se analiza se ajusta a este ejemplo, por tradición este problema ha recibido el nombre de **problema del voceador**. Sin embargo, siempre se ha reconocido que el modelo se aplica a otros productos perecederos.

Modelo estocástico de un solo periodo para productos perecederos

1. Publicaciones periódicas, como revistas y periódicos.
2. Flores que vende una florería.
3. La elaboración de comida fresca preparada en un restaurante.
4. Frutas y vegetales que se venden en un supermercado.
5. Árboles de Navidad.
6. Ropa de temporada, como abrigos de invierno, donde las piezas que quedan al final de la temporada deben venderse con un gran descuento para tener espacio para la siguiente estación.
7. Tarjetas de felicitación de temporada.
8. Bienes de moda que pronto estarán fuera de uso.
9. Automóviles nuevos al final del año que corresponde al modelo.
10. Cualquier producto de rápida obsolescencia.
11. Refacciones vitales que deben producirse durante la última corrida de producción de cierto modelo de un producto (como un avión) para usarse cuando se requiera durante la vida útil del modelo.
12. Las reservaciones en una línea aérea para un vuelo específico, puesto que los asientos dispo- nibles en el vuelo representan el inventario de un producto perecedero (no se pueden vender una vez que despega el avión).

Modelo estocástico de un solo periodo para productos perecederos

Supuestos del modelo:

1. Cada aplicación incluye un solo producto perecedero.
2. Cada aplicación incluye un solo periodo porque el producto no se puede vender después.
3. No obstante, será posible disponer de las unidades del producto que queden al final del periodo, quizá incluso con *valor de rescate* por las unidades.
4. Puede haber algún inventario inicial al comienzo de este periodo, denotado por $I =$ inventario inicial.

Modelo estocástico de un solo periodo para productos perecederos

Supuestos del modelo:

5. La única decisión que debe tomarse es el número de unidades que es necesario ordenar (para compra o bien para producción) de manera que se pueden colocar en el inventario al principio del periodo. Así

$$\begin{aligned} Q &= \text{ cantidad por ordenar,} \\ S &= \text{ nivel de inventario después de recibir esta orden} \\ &= I + Q. \end{aligned}$$

Dado I, será conveniente usar S como la variable de decisión del modelo, la cual determina entonces de manera automática $Q = S - I$.

Modelo estocástico de un solo periodo para productos perecederos

Supuestos del modelo:

6. La *demanda* para retirar unidades del inventario y venderlas (o para algún otro propósito) durante el periodo es una variable aleatoria D. Sin embargo, se conoce la distribución de probabilidad de D (o al menos se puede estimar).
7. Después de eliminar el ingreso si se satisface la demanda (puesto que ésta es independiente de la decisión S), el objetivo se convierte en minimizar el costo total esperado, cuyos componentes son

$$\begin{aligned}
K &= \text{costo de preparación para comprar o producir el lote completo de unidades,}\\
c &= \text{costo unitario de comprar o producir cada unidad,}\\
h &= \text{costo de mantener cada unidad que queda al final del periodo}\\
&\quad \text{(incluye el costo de almacenar menos el valor de rescate),}\\
p &= \text{costo por faltantes por unidad de demanda no satisfecha}\\
&\quad \text{(incluye el ingreso perdido y el costo de la pérdida de imagen ante el cliente).}
\end{aligned}$$

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

La decisión sobre el valor de S, la cantidad de inventario que se debe adquirir, depende en gran medida de la distribución de probabilidad de la demanda D. Quizá sea deseable superar la demanda esperada, pero tal vez sin alcanzar la demanda máxima posible. Es necesario una compensación entre

1. el riesgo de una escasez que implica incurrir en costos por faltantes y
2. el riesgo de tener un excedente e incurrir en costos de desperdicio por ordenar y almacenar unidades en exceso.

Este objetivo se logra mediante la minimización del valor esperado (en el sentido estadístico) de las sumas de estos costos.

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

La cantidad vendida está dada por

$$\min\{D, S\} = \begin{cases} D, & \text{si } D < S \\ S, & \text{si } D \geq S \end{cases}$$

En consecuencia, si la demanda es D y se almacena S, el costo en que se incurre está dado por

$$C(D, S) = cS + p\max\{0, D - S\} + h\max\{0, S - D\}$$

Como la demanda es una variable aleatoria [con distribución de probabilidad $P_D(d)$], este costo también es una variable aleatoria. El costo esperado está dado por $C(S)$, donde

$$\begin{aligned} C(S) = E[C(D,S)] &= \sum_{d=0}^{\infty} (cS + p\,\text{máx}\{0, d-S\} + h\,\text{máx}\{0, S-d\})P_D(d) \\ &= cS + \sum_{d=S}^{\infty} p(d-S)P_D(d) + \sum_{d=0}^{S-1} h(S-d)P_D(d) \end{aligned}$$

La función $C(S)$ depende de la distribución de probabilidad de D. Con frecuencia es difícil encontrar una representación de ella, en particular cuando la demanda tiene un gran número de valores posibles. Por ello, muchas veces esta variable aleatoria discreta se aproxima por una variable aleatoria continua. Esta aproximación casi siempre conducirá a un valor muy cercano a la cantidad óptima de inventario.

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

En el caso de esta variable aleatoria D, sea $f(x)$ = función de densidad de probabilidad de D y $F(d)$ = función de distribución acumulada (FDA) de D, de manera que

$$F(d) = \int_0^d f(x)dx.$$

Cuando se selecciona un nivel de inventario por ordenar S, la FDA $F(d)$ se convierte en la probabilidad de que no ocurrirá un faltante antes de que termine el periodo. Esta probabilidad se conoce como el **nivel de servicio** que proporciona la cantidad que se ordenará.

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

El costo esperado C(S) correspondiente se expresa como

$$\begin{aligned} C(S) = E[C(D,S)] &= \int_0^\infty C(x,S) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty (cS + p \max\{0, x - S\}) + h \max\{0, S - x\}) f(x) dx \\ &= cS + \int_S^\infty p(x - S) f(x) dx + \int_0^S h(S - x) f(x) dx \end{aligned}$$

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

El nivel de inventario óptimo S^* es el valor que satisface

$$F(S^*) = \frac{p - c}{p + h}$$

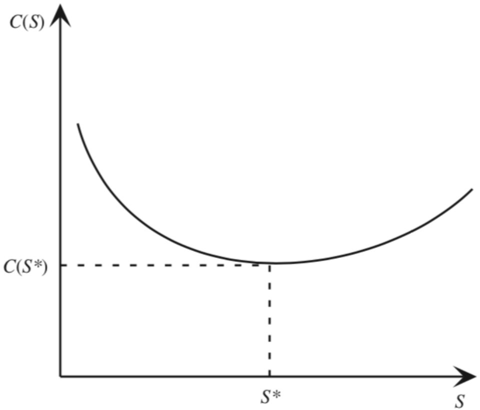
donde

$$\begin{aligned}
p - c &= \text{costo unitario de ordenar menos} = C_{\text{menos}} \\
&= \text{disminución de la ganancia debida a que no se ordena una unidad que se pudo} \\
&\quad\ \text{haber vendido durante ese periodo} \\
c + h &= \text{costo unitario de ordenar más} = C_{\text{más}} \\
&= \text{disminución de la ganancia debida por ordenar una unidad que no se pudo} \\
&\quad\ \text{vender durante ese periodo}
\end{aligned}$$

$$\text{Nivel de servicio óptimo} = \frac{C_{\text{menos}}}{C_{\text{menos}} + C_{\text{más}}}$$

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

Gráfica de $C(S)$, costo esperado según el modelo estocástico de un solo periodo de productos perecederos como una función de S (el nivel de inventario cuando la cantidad por ordenar $Q = S - I$ se recibe al comienzo del periodo), dado que el inventario inicial es $I = 0$ y el costo de preparación es $K = 0$.



Análisis del modelo sin inventario inicial $(I = 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

Si se supone que D es una variable aleatoria discreta con distribución acumulada

$$F(d) = \sum_{n=0}^{d} P_D(n),$$

se obtiene un resultado similar en la cantidad óptima por ordenar. En particular, la cantidad óptima por ordenar, S^*, es el entero más pequeño tal que

$$F(S^*) \geq \frac{p-c}{p+h}.$$

Siempre que la demanda tenga una distribución exponencial con una valor esperado de λ, S^* se puede obtener a partir de la relación

$$S^* = -\lambda \ln \frac{c+h}{p+h}.$$

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I > 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

Ahora considere el caso en el que $I > 0$, es decir, que existen I unidades en inventario dentro del periodo pero antes de recibir una orden por cierta cantidad, $Q = S - I$. Sea

$$\overline{C}(S) = \text{costo esperado del modelo para cualquier valor de } I \text{ y } K,$$
$$\text{dado que } S \text{ es el nivel de inventario que se obtiene cuando se recibe la}$$
$$\text{cantidad ordenada al inicio del periodo}$$

Entonces el objetivo es escoger una $S \geq I$ para

$$\underset{S \geq I}{Minimizar}\,\overline{C}(S)$$

$$C(S) = \text{costo esperado del modelo, dado S, cuando } I = 0 \text{ y } K = 0.$$

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I > 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

Con $K = 0$,

$$\overline{C}(S) = c(S - I) + \int_S^{\infty} p(x - S)f(x)dx + \int_0^S h(S - x)f(x)dx$$

En consecuencia, $\overline{C}(S)$ es idéntico a $C(S)$ excepto por el primer término. Por lo tanto,

$$\overline{C}(S) = C(S) - cI$$

Como I es constante, esto significa que $\overline{C}(S)$ alcanza su mínimo en el mismo valor de S^* que para $C(S)$. Sin embargo, como S debe estar restringia a $S \geq I$, si $I > S^*$ indica que $\overline{C}(S)$ se minimizaría cuando $S \geq I$ al establecer $S = I$ (al no colocar una orden). Lo que produce la siguiente política de inventarios:

Análisis del modelo sin inventario inicial $(I > 0)$ sin costo de preparación $(K = 0)$

Política óptima de inventarios con $I > 0$ y $K = 0$

$$\text{Si } I < S^*, \text{ se ordena } S^* - I \text{ para subir el nivel de inventario a } S^*$$
$$\text{Si } S \geq S^*, \text{ no se ordena,}$$

donde S^* de nuevo satisface

$$F(S^*) \geq \frac{p - c}{p + h}.$$

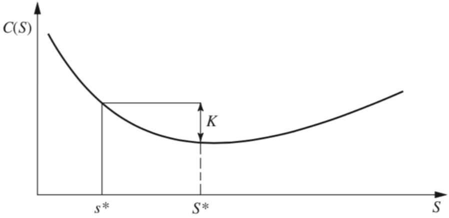
Análisis del modelo con costo de preparación $(K > 0)$

Ahora considere que se incurre en un costo de preparación $K > 0$ por comprar o producir el lote completo de unidades que se ha ordenado y cualquier valor del inventario inicial $(I \geq 0)$.
Con $K > 0$, el costo esperado $\overline{C}(S)$, dado el valor de la variable de decisión S ,es

$$\begin{aligned}
\overline{C}(S) &= K + c(S - I) + \int_S^\infty p(x - S)f(x)dx + \int_0^S h(S - x)f(x)dx \text{ si se ordena} \\
&= K + C(S) - cI \\
\overline{C}(S) &= \int_S^\infty p(x - S)f(x)dx + \int_0^S h(S - x)f(x)dx \text{ si no se ordena} \\
&= C(I) - cI
\end{aligned}$$

Como I es una constante, el término cI en ambas expresiones se puede pasar por alto para propósitos de minimizar $C(S)$ cuando $S \geq I$.

Análisis del modelo con costo de preparación $(K > 0)$



$$C(s^*) = K + C(S^*)$$

Por lo tanto,

si $I < s^*$, entonces $C(S^*) < K + C(I)$,
por lo que se debe ordenar con $S = S^*$;

si $I \geq s^*$, entonces $C(S) \leq K + C(I)$
para cualquier $S \geq I$,
así que no se debe ordenar

Análisis del modelo con costo de preparación $(K > 0)$

En otras palabras, si el inventario inicial I es menor que s^*, entonces el gasto que implica el costo de preparación K no tiene sentido porque al subir el nivel de inventario hasta S^* (cuando se ordena $S - I$) se reducirá el costo restante esperado en más de K cuando se compara con la opción de no ordenar. Sin embargo. Si $I > s^*$, se hace imposible recobrar el costo de preparación K independientemente de la cantidad que se ordene. (Si $I = s^*$, al incurrir en el costo de preparación K para ordenar $S^* - s^*$ se reducirá el costo restante esperado en la misma cantidad, por lo cual no existe razón para ordenar.) Lo anterior conduce a la siguiente política de inventarios:

Análisis del modelo con costo de preparación $(K > 0)$

Política de inventarios óptima con $I \geq 0$ y $K > 0$

$$\begin{aligned} &\text{Si } I < s^*, \quad \text{ordenar } S^* - I \text{ para subir el nivel del inventario a } S^*. \\ &\text{Si } I^* \geq s^*, \quad \text{no ordenar.} \end{aligned}$$

Este tipo de política es conocida como **política (s, S)**, la cual tiene un uso extendido en la industria.
La política (s, S) también se emplea con frecuencia cuando se aplican modelos estocásticos de revisión periódica a *productos estables*, de manera que se deben considerar periodos múltiples. En este caso resulta algo más complicado encontrar la política de inventarios óptima dado que es posible que los valores de s y S sean diferentes en periodos distintos.

Análisis del modelo con costo de preparación $(K > 0)$

Solución aproximada de política óptima cuando la demanda presenta una distribución exponencial.

Dada una distribución exponencial con una media de $1/\alpha$, la función de densidad de probabilidad $f(x)$ y la FDA $F(x)$ son:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha e^{-\alpha x}, \qquad \text{para } x \geq 0, \\
F(x) &= 1 - e^{-\alpha x}, \qquad \text{para } x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Después de hacer una serie de cálculos se tiene que la aproximación deseada de s^* es:

$$s^* \cong S^* - \sqrt{\frac{2K}{\alpha(c+h)}}$$

Referencias

1. Taha, H. A. Investigación de operaciones. Pearson Educación.
2. Hillier, F. S., Lieberman, G. J., & Osuna, M. A. G. Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.