

Cadenas de Markov

Dra. Valeria Soto Mendoza

Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Coahuila

5 de febrero de 2020



- 1 Introducción
- 2 Cadenas de Markov
- 3 Probabilidades de transición
- 4 Diagramas de estados
- 5 Cálculo de las probabilidades de transición de n pasos
- 6 Clasificación de estados en una cadena de Markov
- 7 Propiedades de estado estable (largo plazo)
- 8 Tiempos de primera pasada
- 9 Estados absorbentes

Definición

Un **proceso estocástico** es una colección indexada de variables aleatorias X_t , donde el índice t toma valores de un conjunto T dado.

- T se considera el conjunto de enteros no negativos.
- X_t representa una característica de interés cuantificable en el tiempo t .

Por ejemplo, X_t puede representar los niveles de inventario al final de la semana t .

Un proceso estocástico tiene la siguiente estructura:

Definición

*La condición actual del sistema puede estar en una de $M + 1$ categorías mutuamente excluyentes llamadas **estados**.*

Por notación, estos estados se etiquetan $0, 1, 2, \dots, M$.

La variable aleatoria X_t representa el **estado del sistema** en el tiempo t , y sus únicos valores posibles son $0, 1, \dots, M$.

El sistema se observa en puntos del tiempo dados, etiquetados $t = 0, 1, 2, \dots$;

de esta forma, los procesos estocásticos $X_t = X_0, X_1, X_2, \dots$ proporcionan una representación matemática de la forma en que evoluciona la condición del sistema a través del tiempo.

Definición

A este tipo de procesos se le conocen como **procesos estocásticos de tiempo discreto con espacio de estados finito**.

El clima en la ciudad de Saltillo puede cambiar con rapidez de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana esté seco es de 0,8 si hoy está seco, pero es de sólo 0,6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

La evolución del clima día tras día en Saltillo es un proceso estocástico. Si se comienza en algún día inicial (etiquetado como día 0), el clima se observa cada día t , para $t = 0, 1, 2, \dots$. El estado del sistema en el día t puede ser:

Estado 0 = El día t es seco.

Estado 1 = El día t es lluvioso.

Así, para $t = 0, 1, 2, \dots$, la variable aleatoria X_t toma los valores,

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{si día } t \text{ es seco} \\ 1, & \text{si día } t \text{ es lluvioso} \end{cases}$$

El proceso estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \dots$ proporciona una representación matemática de la forma en que evoluciona el clima en Saltillo a través del tiempo.

Una cadena de Markov tiene la siguiente propiedad:

Definición

Se dice que un proceso estocástico X_t tiene la **propiedad markoviana** si $P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$, para $t = 0, 1, \dots$ y toda sucesión $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$.

Esto significa que la probabilidad condicional de cualquier “evento” futuro dados cualquier “evento” pasado y el estado actual $X_t = i$, es *independiente* de los eventos pasados y sólo depende del estado actual del proceso.

Definición

Un proceso estocástico $X_t (t = 0, 1, \dots)$ es una **cadena de Markov** si presenta la **propiedad markoviana**.

En el ejemplo del clima recuerde que la evolución del clima día tras día en la ciudad se ha formulado como un proceso estocástico $\{X_t\} (t = 0, 1, 2, \dots)$

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{si día } t \text{ es seco} \\ 1, & \text{si día } t \text{ es lluvioso} \end{cases}$$

y

$$P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 0\} = 0,8,$$

$$P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 1\} = 0,6$$

Como estas probabilidades no cambian si también se toma en cuenta la información del clima antes del día de hoy (*día t*),

$$P\{X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0\} = P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 0\}$$

$$P\{X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1\} = P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 1\}$$

$$P\{X_{t+1} = 1 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0\} = P\{X_{t+1} = 1 | X_t = 0\}$$

$$P\{X_{t+1} = 1 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1\} = P\{X_{t+1} = 1 | X_t = 1\}$$

Definición

Las probabilidades condicionales $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$ de una cadena de Markov se llaman **probabilidades de transición** (de un paso).

Si para cada i y j ,

$$P\{X_{t+1} = j, X_t = i\} = P\{X_1 = j, X_0 = i\}, \text{ para toda } t = 1, 2, \dots,$$

entonces se dice que las probabilidades de transición (de un paso) son **estacionarias**.

Tener probabilidades de transición estacionarias implica que las probabilidades de transición no cambian con el tiempo.

La existencia de **probabilidades de transición (de un paso) estacionarias** también implica que, para cada i, j y n ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$P\{X_{t+n} = j, X_t = i\} = P\{X_n = j, X_0 = i\}, \text{ para toda } t = 0, 1, \dots,$$

Estas probabilidades condicionales se llaman **probabilidades de transición de n pasos**.

La notación simplificada de las probabilidades de transición estacionarias, es la siguiente

$$p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\},$$
$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}.$$

Las probabilidades de **transición de n pasos $p_{ij}^{(n)}$** son simplemente la probabilidad condicional de que el sistema se encuentre en el estado j exactamente después de n pasos (unidades de tiempo), dado que comenzó en el estado i en cualquier tiempo t .

Como las $p_{ij}^{(n)}$ son probabilidades condicionales, deben ser no negativas y, como el proceso debe hacer una transición a algún estado, deben satisfacer las siguientes propiedades

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } j; n = 0, 1, 2, \dots,$$

y

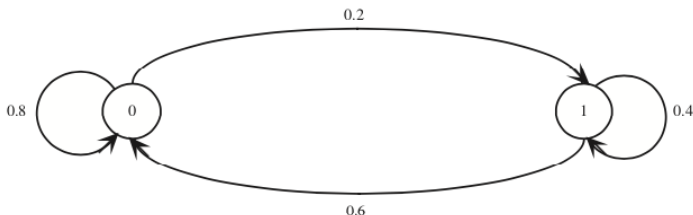
$$\sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} = 1 \text{ para toda } i; n = 0, 1, 2, \dots,$$

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición de n pasos es la *matriz de transición de n pasos*

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & M \\ p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Observe que la probabilidad de transición en un renglón y columna dados es la de la transición del estado en ese renglón al estado en la columna. Cuando $n = 1$, el superíndice n no se escribe y se hace referencia a ésta como una **matriz de transición**.

La matriz de transición se puede representar de forma gráfica mediante un diagrama donde los nodos (círculos) representan los dos estados posibles del sistema, mientras que las flechas muestran las transiciones posibles de un estado a otro. Cada una de las probabilidades de transición se escribe junto a la flecha correspondiente.



En el ejemplo del clima que se presentó anteriormente, recuerde que la evolución del clima día tras día en la ciudad de Saltillo se ha formulado como un proceso estocástico $X_t (t = 0, 1, 2, \dots)$ donde

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si día } t \text{ es seco} \\ 1 & \text{si día } t \text{ es lluvioso} \end{cases}$$

$$P[X_{t+1} = 0 | X_t = 0] = 0,8,$$

$$P[X_{t+1} = 0 | X_t = 1] = 0,6$$

Como estas probabilidades no cambian, si también se toma en cuenta la información del clima antes del día de hoy (día t),

$$P[X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0] = P[X_{t+1} = 0 | X_t = 0]$$

$$P[X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1] = P[X_{t+1} = 0 | X_t = 1]$$

para $t = 0, 1, \dots$ y toda sucesión k_0, k_1, \dots, k_{t-1} . Estas ecuaciones también deben cumplirse si $X_{t+1} = 0$ se reemplaza con $X_{t+1} = 1$. (La razón es que los estados 0 y 1 son mutuamente excluyentes y son los únicos estados posibles; por ende, las probabilidades de los dos estados deben sumar 1.) Por lo tanto, el proceso estocástico tiene la *propiedad markoviana*, lo que lo convierte en una cadena de Markov.

Si se usa la notación correspondiente, las probabilidades de transición (de un paso) son:

$$p_{00} = P[X_{t+1} = 0 | X_t = 0] = 0,8,$$

$$p_{10} = P[X_{t+1} = 0 | X_t = 1] = 0,6$$

para toda $t = 1, 2, \dots$, por lo que éstas son las probabilidades de transición estacionarias. Además

$$p_{00} + p_{01} = 1 \text{ entonces } p_{01} = 1 - 0,8 = 0,2,$$

$$p_{10} + p_{11} = 1 \text{ entonces } p_{11} = 1 - 0,6 = 0,4$$

Por lo tanto, la matriz de transición es:

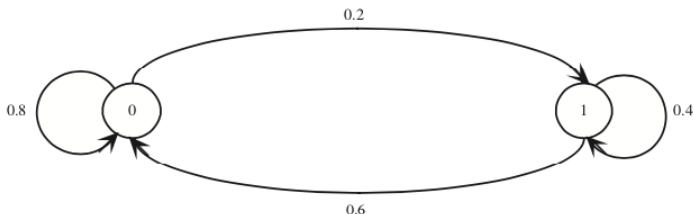
$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Estado} & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Estado} & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

donde estas probabilidades de transición se refieren a la transición del estado del renglón al estado de la columna. Tenga en mente que el estado 0 hace referencia a un día seco, mientras que el estado 1 significa que el día es lluvioso, así que estas probabilidades de transición proporcionan la probabilidad del estado del clima el día de mañana, dado el estado del clima del día de hoy.

La matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

y el diagrama de estados asociado se muestra a continuación:



Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proporcionan un método para calcular las probabilidades de transición de n pasos:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}, \quad \text{para toda } i = 0, 1, \dots, M,$$
$$j = 0, 1, \dots, M,$$
$$\text{y cualquier } m = 1, 2, \dots, n-1,$$
$$n = m+1, m+2, \dots$$

Estas ecuaciones simplemente señalan que al ir del estado i al estado j en n pasos, el proceso estará en algún estado k después de exactamente m ($< n$) pasos. Así, $p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$ es sólo la probabilidad condicional de que, si comienza en el estado i , el proceso vaya al estado k después de m pasos y después al estado j en $n - m$ pasos. Por lo tanto, al resumir estas probabilidades condicionales sobre todos los estados posibles k se debe obtener $p_{ij}^{(n)}$.

Los casos especiales de $m = 1$ y $m = n - 1$ conducen a las expresiones

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}$$

y

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(n-1)} p_{kj},$$

para todos los estados i y j .

Estas expresiones permiten que las probabilidades de transición de n pasos se puedan obtener a partir de las probabilidades de transición de un paso de manera **recursiva**.

Entonces, la matriz de probabilidades de transición de n pasos \mathbf{P}^n se puede obtener al calcular la n -ésima potencia de la matriz de transición de un paso \mathbf{P} .

Las probabilidades de transición de uno o de n pasos son probabilidades *condicionales*; por ejemplo, $P\{X_n = j | X_0 = i\} = p_{ij}^{(n)}$. Se supone que n es lo suficientemente pequeña como para que estas probabilidades todavía no sean las del estado estable. En este caso, si se desea la probabilidad *incondicional* $P\{X_n = j\}$, es necesario que se especifique la distribución de probabilidad del estado inicial, o sea, $p\{X_0 = i\}$ para $i = 0, 1, \dots, M$. Entonces

$$P\{X_n = j\} = P\{X_0 = 0\}p_{0j}^{(n)} + P\{X_0 = 1\}p_{1j}^{(n)} + \dots + P\{X_0 = M\}p_{Mj}^{(n)}$$

Matrices de transición de n pasos (ejemplo: Clima)

En el caso del ejemplo del clima que se presentó previamente, ahora se usarán las fórmulas anteriores para calcular las diferentes matrices de transición de n pasos a partir de la matriz de transición \mathbf{P} (de un paso). Para iniciar, la matriz de transición de dos pasos es:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,72 & 0,28 \end{bmatrix}$$

Así, si el clima está en el estado 0 (seco) en un día particular, la probabilidad de estar en el estado 0 dos días después es 0.76, por lo que la probabilidad de estar en el estado 1 (lluvia) es 0.24. En forma similar, si el clima está en el estado 1 ahora, la probabilidad de estar en el estado 0 dos días después es 0.72 mientras que la probabilidad de estar en el estado 1 es 0.28.

Matrices de transición de n pasos (ejemplo: Clima)

Las probabilidades del estado del clima tres, cuatro o cinco días a futuro también se pueden leer de la misma forma a partir de las matrices de transición de tres, cuatro y cinco pasos que se calculan a continuación.

$$P^{(3)} = P^3 = P \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,72 & 0,28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,752 & 0,248 \\ 0,744 & 0,256 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = P^4 = P \cdot P^3 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,752 & 0,248 \\ 0,744 & 0,256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,749 & 0,251 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = P^5 = P \cdot P^4 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,749 & 0,251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Matrices de transición de n pasos (ejemplo: Clima)

$$P^{(5)} = P^5 = P \cdot P^4 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,749 & 0,251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Definición

*Observe que la matriz de transición de cinco pasos tiene la interesante característica de que los dos renglones poseen elementos idénticos. Ello refleja el hecho de que la probabilidad del clima que está en un estado particular es en esencia independiente del estado del clima cinco días antes. Por lo tanto, las probabilidades de cualquier renglón de esta matriz de transición de cinco pasos se denominan **probabilidades del estado estable** de la cadena de Markov.*

Clasificación de estados en una CM

Conceptos y definiciones

Definición

Se dice que el estado j es **accesible** desde el estado i si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna $n \geq 0$.

Definición

Si el estado j es accesible desde el estado i y el estado i es accesible desde el estado j , entonces se dice que los estados i y j se **comunican**.

En general,

- 1 Cualquier estado se comunica consigo mismo (porque $p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i | X_0 = i\} = 1$).
- 2 Si el estado i se comunica con el estado j , entonces el estado j se comunica con el estado i .
- 3 Si el estado i se comunica con el estado j y éste con el estado k ,

Clasificación de estados en una CM

Conceptos y definiciones

Definición

*Como resultado de estas propiedades de comunicación se puede hacer una partición del espacio de estados en clases separadas, donde se dice que dos estados que se comunican pertenecen a la misma **clase** (una clase puede consistir en un solo estado).*

Definición

*Si existe sólo una clase, es decir, si todos los estados se comunican, se dice que la cadena de Markov es **irreducible**.*

Clasificación de estados en una CM

Conceptos y definiciones

Con frecuencia es útil saber si un proceso que comienza en un estado regresará alguna vez a él. La siguiente es una posibilidad.

Definición

*Un estado se llama estado **transitorio** si, después de haber entrado a este estado, el proceso nunca regresa a él. Por consiguiente, el estado i es transitorio si y sólo si existe un estado j ($j \neq i$) que es accesible desde el estado i , pero no viceversa, esto es, el estado i no es accesible desde el estado j .*

Así, si el estado i es transitorio y el proceso visita este estado, existe una probabilidad positiva (quizá incluso de 1) de que el proceso se moverá al estado j y nunca regresará al estado i . En consecuencia, un estado transitorio será visitado sólo un número finito de veces.

Clasificación de estados en una CM

Conceptos y definiciones

Cuando se inicia en el estado i , otra posibilidad es que el proceso definitivamente regrese a ese estado.

Definición

*Se dice que un estado es **recurrente** si, después de haber entrado a este estado, el proceso definitivamente regresará a ese estado. Por consiguiente, un estado es recurrente si y sólo si no es transitorio.*

Como un estado recurrente será visitado de nuevo después de cada visita, podría ser visitado un número infinito de veces si el proceso continuara por siempre.

Clasificación de estados en una CM

Conceptos y definiciones

Si el proceso entra en cierto estado y permanece en él al siguiente paso, se considera un regreso a ese estado. En consecuencia, el siguiente tipo de estado se considera un tipo especial de estado recurrente.

Definición

*Un estado se llama estado **absorbente** si, después de haber entrado ahí, el proceso nunca saldrá de él. Por consiguiente, el estado i es un estado absorbente si y sólo si $p_{ij} = 1$.*

La recurrencia es una propiedad de clase. Es decir, todos los estados de una clase son recurrentes o son transitorios.

En una cadena de Markov de estado finito, no todos los estados pueden ser transitorios. Entonces, todos los estados de una cadena de Markov de estado finito irreducible son recurrentes.

Suponga que un proceso de Markov tiene la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc} & \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}$$

Observe lo siguiente:

- el estado 2 es absorbente (y, por lo tanto, recurrente), porque si el proceso entra en él, nunca sale;
- el estado 3 es transitorio porque una vez que el proceso se encuentra en él, existe una probabilidad positiva de nunca regresar;
- la probabilidad de que el proceso vaya del estado 3 al estado 2 en el primer paso es $\frac{1}{3}$. Si el proceso está en el estado 2, permanece en ese estado;
- cuando el proceso deja el estado 4, nunca vuelve;
- los estados 0 y 1 son recurrentes.

Otra propiedad útil de las cadenas de Markov es la de *periodicidad*.

Definición

El **periodo** de un estado i se define como el entero $t (t > 1)$ si $p_{ii}^{(n)} = 0$ para todos los valores de n distintos de $t, 2t, 3t, \dots$, y t es el entero más grande con esta propiedad.

Definición

Si existen dos números consecutivos s y $s + 1$ tales que el proceso puede encontrarse en el estado i en los tiempos s y $s + 1$, se dice que el estado tiene periodo 1 y se llama **aperiódico**.

Igual que la recurrencia es una propiedad de clase, se puede demostrar que la periodicidad también lo es. Esto es, si el estado i de una clase tiene periodo t , todos los estados de esa clase tienen periodo t .

Es posible que una cadena de Markov tenga tanto una clase de estados recurrentes como una de estados transitorios donde las dos clases tienen diferentes periodos mayores que 1.

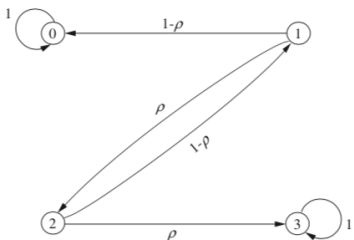
Definición

*En una cadena de Markov de estado finito, los estados recurrentes aperiódicos se llaman **ergódicos**. Se dice que una cadena de Markov es ergódica si todos sus estados son ergódicos.*

Propiedades de periodicidad (ejemplo: Juego)

Suponga que un jugador tiene 1 dólar y que cada jugada gana 1 dólar con probabilidad $p > 0$ o pierde 1 dólar con probabilidad $1 - p > 0$. El juego termina cuando el jugador acumula 3 dólares o cuando quiebra. Este modelo es una cadena de Markov en la que los estados representan la fortuna del jugador, esto es, 0, 1, 2 o 3 dólares,

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|cccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



- ¿Cuántas clases hay?
- Si se calcula $p_{ii}^{(n)}$ para toda n , se observará que:
 - y se observa que $p_{ii}^{(n)} = 0$ para n impar
 - al comenzar en el estado 1, es posible que el proceso entre al estado 1 sólo en los tiempos $2, 4, \dots$, en cuyo caso se dice que el estado 1 tiene periodo 2.
 - el proceso siempre toma dos pasos para regresar al estado 1 hasta que el proceso es absorbido en cualquiera de los estados 0 o 3.
- ¿Qué sucede con el estado 2?
 - el estado 2 tiene periodo 2 porque está en la misma clase que el estado 1.

Para una cadena de Markov irreducible ergódica el $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente de i . Aún más,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0.$$

donde las π_j satisfacen de manera única las siguientes **ecuaciones de estado estable**:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, \dots, M.$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

Las π_j se llaman **probabilidades de estado estable** de la cadena de Markov. El término *probabilidad de estado estable* significa que la probabilidad de encontrar el proceso en cierto estado, por ejemplo j , después de un número grande de transiciones tiende al valor π_j , y es independiente de la distribución de probabilidad inicial definida para los estados.

También se puede interpretar las π_j como *probabilidades estacionarias* (que no deben confundirse con las probabilidades de transición estacionarias) en el siguiente sentido. Si la probabilidad inicial de encontrarse en estado j está dada por π_j (esto es, $P\{X_0 = j\} = \pi_j$) para toda j , entonces la probabilidad de encontrar el proceso en el estado j en el tiempo $n = 1, 2, \dots$ también está dada por π_j (es decir, $P\{X_n = j\} = \pi_j$).

Probabilidades de estado estable (ejemplo: Clima)

Para el ejemplo del clima se obtuvo la siguiente matrix de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de estado estable

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, \dots, M.$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

se convierten en:

$$\pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10},$$

$$\pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11},$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1.$$

Probabilidades de estado estable (ejemplo: Clima)

Ecuaciones de estado estable:

$$\pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10},$$

$$\pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11},$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1.$$

- Para la primera ecuación se intuye que, en el estado estable, la probabilidad de quedar en el estado 0 después de la siguiente transición debe ser igual a:
 - 1 la probabilidad de estar en el estado 0 ahora y luego permanecer en el estado 0 después de la siguiente transición más
 - 2 la probabilidad de estar en el estado 1 ahora y luego hacer la transición al estado 0.
- La lógica de la segunda ecuación es la misma, sólo que está en términos del estado 1.
- La tercera ecuación sólo expresa el hecho de que las probabilidades de estos estados mutuamente excluyentes deben sumar 1.

Probabilidades de estado estable (ejemplo: Clima)

Echándole números a las ecuaciones de estado estable, se tiene que:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} \Rightarrow \pi_0 = 0,8\pi_0 + 0,6\pi_1, \text{ así } 0,2\pi_0 = 0,6\pi_1, \\ \pi_1 &= \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} \Rightarrow \pi_1 = 0,2\pi_0 + 0,4\pi_1, \text{ así } 0,6\pi_1 = 0,2\pi_0, \\ &1 = \pi_0 + \pi_1.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0,25, \\ \pi_1 &= 0,75.\end{aligned}$$

Estas probabilidades son las mismas probabilidades que las que se obtuvieron en cada renglón de la matriz de cinco pasos que se calculó previamente para este ejemplo.

Si i y j son estados recurrentes que pertenecen a clases distintas, entonces

$$p_{ij}^{(n)} = 0, \text{ para toda } n.$$

Este resultado es una consecuencia de la definición de clase. De manera similar, si j es un estado transitorio, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \text{ para toda } i.$$

De este modo, la probabilidad de encontrar el proceso en un estado transitorio después de un número grande de transiciones tiende a cero.

Anteriormente se estudió las cadenas de Markov de estado finito irreducible cuyos estados son ergódicos (recurrentes y aperiódicos). Si se relaja el requerimiento de que los estados sean aperiódicos, entonces el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

puede no existir. Este resultado es en extremo importante para calcular el costo promedio a largo plazo por unidad de tiempo asociado a una cadena de Markov.

Suponga que se incurre en un costo (u otra función de penalización) $C(X_t)$ cuando el proceso se encuentra en el estado X_t en el tiempo t , para $t = 0, 1, 2, \dots$. Observe que $C(X_t)$ es una variable aleatoria que toma cualquiera de los valores $C(0), C(1), \dots, C(M)$ y que la función $C(\cdot)$ es independiente de t . El costo promedio esperado en el que se incurre a lo largo de los primeros n periodos está dado por la expresión

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right]$$

el **costo promedio esperado por unidad de tiempo** (a largo plazo), está dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right] = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j)$$

Con frecuencia es conveniente poder hacer afirmaciones en términos de probabilidades sobre el número de transiciones que hace el proceso al *ir del estado i al estado j por primera vez*. Este lapso se llama **tiempo de primera pasada** al ir del estado i al estado j .

Cuando $j = i$, este tiempo de primera pasada es igual al número de transiciones hasta que el proceso regresa al estado inicial i . En este caso, el tiempo de primera pasada se llama **tiempo de recurrencia** del estado i .

En general, los tiempos de primera pasada son variables aleatorias. Las distribuciones de probabilidad dependen de las probabilidades de transición del proceso.

En particular, $f_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de que el tiempo de primera pasada del estado i al j sea igual a n . Para $n > 1$, este tiempo de primera pasada es n si la primera transición es del estado i a algún estado k ($k \neq j$) y después el tiempo de primera pasada del estado k al estado j es $n - 1$. Por lo tanto, estas probabilidades satisfacen las siguientes relaciones recursivas:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$f_{ij}^{(2)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(1)},$$

$$\vdots$$

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)},$$

Entonces, la probabilidad de un tiempo de primera pasada del estado i al j en n pasos, se puede calcular de manera recursiva a partir de las probabilidades de transición de un paso.

Para i y j fijas, las f_{ij} son números no negativos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

Esta suma puede ser estrictamente menor que 1, lo que significa que un proceso que al iniciar se encuentra en el estado i puede no alcanzar nunca el estado j .

Cuando la suma sí es igual a 1, las $f_{ij}^{(n)}$ (para $n = 1, 2, \dots$) pueden considerarse como una distribución de probabilidad de la variable aleatoria, el tiempo de primera pasada.

Aunque puede ser tedioso calcular $f_{ij}^{(n)}$ para toda n , es relativamente sencillo obtener el tiempo esperado de primera pasada del estado i al estado j . Sea μ_{ij} esta esperanza, que se define como

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty, & \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}, & \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \end{cases}$$

Siempre que $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$, μ_{ij} satisface, de manera única, la ecuación

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}$$

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}$$

Esta ecuación reconoce que la primera transición desde el estado i puede ser al estado j o a algún otro estado k . Si es al estado j , el tiempo de primera pasada es 1. Dado que la primera transición es a algún estado $k (k \neq j)$, lo que ocurre con probabilidad p_{ik} , el tiempo esperado de primera pasada condicional del estado i al estado j es $1 + \mu_{kj}$. Cuando se combinan estos hechos, y se suman todas las posibilidades de la primera transición, se llega a esta ecuación.

En el caso de μ_{ij} con $j = i$, μ_{ii} es el número esperado de transiciones hasta que el proceso regresa al estado inicial i , y se llama **tiempo esperado de recurrencia** del estado i . Después de obtener las probabilidades de estado estable $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$, los tiempos esperados de recurrencia se calculan de inmediato como

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, M.$$

Un estado k se llama estado absorbente si $p_{kk} = 1$, de manera que una vez que la cadena llega al estado k permanece ahí para siempre.

Si k es un estado absorbente y el proceso comienza en el estado i , la probabilidad de llegar en algún momento a k se llama **probabilidad de absorción** al estado k , dado que el sistema comenzó en el estado i . Esta probabilidad se denota por f_{ik} .

Si existen dos o más estados absorbentes en una cadena de Markov y es evidente que el proceso será absorbido en uno de estos estados, es deseable encontrar estas probabilidades de absorción. En particular, si el estado k es un estado absorbente, el conjunto de probabilidades de absorción f_{ik} satisface el sistema de ecuaciones:

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^M p_{ij} f_{jk}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, M.$$

sujeta a las condiciones

$$f_{kk} = 1$$
$$f_{ik} = 0, \text{ si el estado } i \text{ es recurrente e } i \neq K$$

Las probabilidades de absorción son importantes en las caminatas aleatorias. Una caminata aleatoria es una cadena de Markov con la propiedad de que, si el sistema se encuentra en el estado i , entonces en una sola transición, o bien permanecerá en i o se moverá a uno de los dos estados inmediatamente adyacentes a i . Por ejemplo, la caminata aleatoria con frecuencia se usa como modelo para situaciones que incluyen juegos de azar.

Suponga que dos jugadores (A y B), con 2 dólares cada uno, aceptan seguir jugando y apostar 1 dólar cada vez hasta que uno de ellos quiebre. La probabilidad de que A gane una apuesta es $\frac{1}{3}$, por lo que la probabilidad de que gane B es $\frac{2}{3}$. El número de dólares que tiene el jugador A antes de cada apuesta (0, 1, 2, 3 o 4) proporciona los estados de una cadena de Markov con la matriz de transición siguiente:

$$P = \begin{array}{c|ccccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Si se inicia en el estado 2, la probabilidad de absorción al estado 0 (A pierde todo su dinero) se puede obtener al resolver para f_{20} a partir del sistema de ecuaciones visto anteriormente,

$f_{00} = 1$ (puesto que el estado 0 es un estado absorbente)

$$f_{10} = \frac{2}{3}f_{00} + \frac{1}{3}f_{20},$$

$$f_{20} = \frac{2}{3}f_{10} + \frac{1}{3}f_{30},$$

$$f_{30} = \frac{2}{3}f_{20} + \frac{1}{3}f_{40},$$

$f_{40} = 0$ (puesto que el estado 4 es un estado absorbente)

De este sistema de ecuaciones se obtiene que

$$f_{20} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}f_{20} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}f_{20} \right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}f_{20}$$

que se traduce a $f_{20} = \frac{4}{5}$ como la probabilidad de absorción en el estado 0

De manera similar, la probabilidad de que A termine con 4 dólares (B quiebre) cuando comienza con 2 dólares (estado 2) se obtiene al obtener f_{24} del sistema de ecuaciones,

$f_{04} = 0$ (puesto que el estado 0 es un estado absorbente)

$$f_{14} = \frac{2}{3}f_{04} + \frac{1}{3}f_{24},$$


$$f_{24} = \frac{2}{3}f_{14} + \frac{1}{3}f_{34},$$

$$f_{34} = \frac{2}{3}f_{24} + \frac{1}{3}f_{44},$$

$f_{44} = 1$ (puesto que el estado 4 es un estado absorbente)

De aquí se obtiene

$$f_{24} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}f_{24} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}f_{24} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9}f_{24} + \frac{1}{9}$$

de manera que $f_{24} = \frac{1}{5}$ es la probabilidad de absorción en el estado 4. 

- ① Taha, H. A. Investigación de operaciones. Pearson Educación.
- ② Hillier, F. S., Lieberman, G. J., & Osuna, M. A. G. Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.