1 Funciones y sus graficas

Definición. Una función es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama dominio de la función. Al conjunto de todos los números posibles de salida se llama rango (codominio).

Definición Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D exactamente un elemento y de E.

Definición El dominio de cualquier función polinomial es todo los reales $(-\infty, \infty)$

Definición El dominio de una función racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ es todo valor x tal que $g(x) \neq 0$

Definición El dominio de una función irracional $\sqrt[n]{g(x)}$ con n par es todo valor x tal que $g(x) \geq 0$

Definición El dominio de una función exponencial es $(-\infty, \infty)$

Definición El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0, \infty)$

Definición. El rango de f es el subconjunto de R de E formado por todos los posibles valores de $f(x)$ para x en D.

Transformaciones de funciones, c>0

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación
$y = f(x) + c$	Se desplaza c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	Se desplaza c unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$	Se desplaza c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	Se desplaza c unidades hacia la izquierda
$y = -f(x)$	Se refleja con respecto al eje x
$y = f(-x)$	Se refleja con respecto al eje y
$y = cf(x),\ c > 1$	Alarga verticalmente alejándose del eje x por el factor c
$y = cf(x),\ c < 1$	Contrae verticalmente hacia el eje x por el factor c

1.1 Función lineal

$f(x) = mx + b$

m=pendiente

b=intersepto(cruce con el eje y)

Ejemplo 1.- Sea $f(x) = 2x - 4$, encuentre

a) $f(3)$

b) la pendiente

c) el cruce con el eje x.

d) el cruce con el eje y.

e) si se realiza la evaluación en $f(x-2)$ la gráfica se desplaza hacia

f) encuentre su dominio

g) encuentre el rango

Solución

a) $f(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$

b)$m = 2$

c) $2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2} = 2$

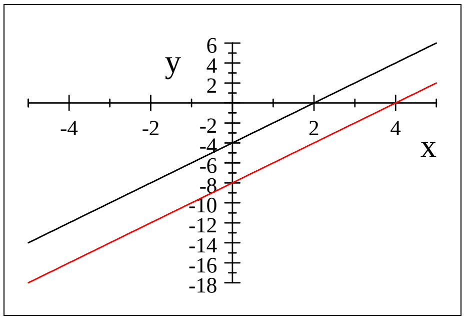
$(2, 0)$

d) $f(0) = 2(0) - 4 = -4$

$(0, -4)$

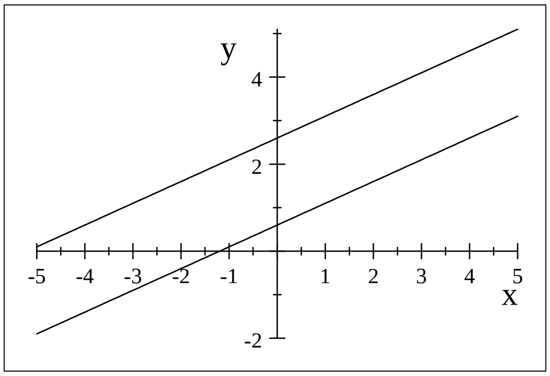
e) Se desplaza a la deracha

$f(x) = 2x - 4$



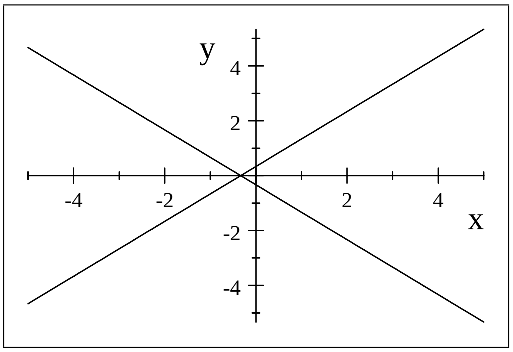
f) $D = (-\infty, \infty)$
g) $R = (-\infty, \infty)$

Ejemplo 2.- $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$
a) $f(2)$
b) la pendiente
c) el cruce con el eje x.
d) el cruce con el eje y.
e) si se realiza $f(x) + 2$ la gráfica se desplaza hacia
f) encuentre su dominio
g) encuentre el rango
Solución
a)
$f(2) = \frac{1}{2}(2) + \frac{3}{5} = \frac{2}{2} + \frac{3}{5} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$
b)$m = \frac{1}{2}$
c)$\frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = 0$
$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{5}$
$1x = -\frac{3}{5}(2)$
$x = -\frac{6}{5}$
$\left(-\frac{6}{5}, 0\right)$
d) $\left(0, \frac{3}{5}\right)$
e) Se desplaza hacia arriba
$\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$



f) $D = (-\infty, \infty)$
g) $R = (-\infty, \infty)$

3.- $f(x) = -x - \frac{1}{3}$



a) $f(2)=\frac{1}{2}(2)+\frac{3}{5}=\frac{2}{2}+\frac{3}{5}=\frac{10+6}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$
b) $\frac{1}{2}$
c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x+\frac{3}{5} &= 0\\ \frac{1}{2}x &= -\frac{3}{5}\\ x &= -\frac{3}{5}(2)\\ x &= -\frac{6}{5}\\ &\left(-\frac{6}{5},0\right)\end{aligned}$$

d)$f(0)=\frac{1}{2}(0)+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$
$\left(0,\frac{3}{5}\right)$
e) la grafica de la función se encuentra desplazada $\frac{3}{5}$ unidades hacia arriba del origen.

1.1.1 Función de costo, ingreso y utilidades lineales

Una función de costo especifica el costo C como una función de la cantidad de artículos x. En consecuencia, $C(x)$ es el costo de x artículos. Una función costo de la forma

$$C(x)=mx+b$$

se llama función costo lineal. La cantidad mx se llama **costo variable**, y la ordenada al origen b se llama **costo fijo.** La pendiente m es el **costo marginal** y mide el incremento en costo por cada unidad.

El **ingreso** que resulta de una o más transacciones comerciales es el pago total recibido y que a veces se le llama **ingreso bruto.** Si $R(x)$ es el ingreso por vender x artículos al precio de m también se puede llamar **ingreso marginal.**

La **utilidad,** por otro lado, es el ingreso neto, o sea lo que queda de los ingresos después de restar los costos. Si la utilidad depende en forma lineal de cantidad de artículos, la pendiente m se llama **utilidad marginal.** La utilidad, el ingreso y el costo se relacionan con la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} Utilidad &= Ingreso-Costo\\ U &= I-C\end{aligned}$$

Si la utilidad es negativa, por ejemplo $-\$500$, se denomina **pérdida** (en este caso de \$500). El **equilibrio** quiere decir no obtener utilidades, ni tener pérdidas. De esta forma, el equilibrio se alcanza cuando

$$U=0$$

o bien

$$I=C$$

El **punto de equilibrio** es la cantidad x de artículos a la cual se presenta el equilibrio.

1.1.2 Función oferta y demanda

Función demanda

Una ecuación de demanda, o función de demanda expresa la demanda q, que es la cantidad de artículos demandados, como una función del precio unitario p, de cada artículo. Una función lineal de demanda tiene la forma

$$q(p)=mp+b$$

Interpretación de m

La pendiente m, por lo general negativa, mide el cambio de la demanda por unidad de cambio en el precio. Así, por ejemplo, si p se mide en dólares y q en ventas mensuales, y si $m=-400$, entonces cada aumento de \$1 en el precio por artículo causará una baja en las ventas de 400 artículos por mes.

Interpretación de b

La ordenada al origen b, expresa la demanda si los artículos se regalaran.

Función de oferta y precio de equilibrio

Una ecuación de oferta, o función de oferta, expresa la oferta q (cantidad de artículos que un proveedor desea vender) como una función del precio unitario p (el precio por artículo). Una función lineal de oferta tiene la forma

$$q(p) = mp + b$$

El caso normal es aquel en el que la oferta aumenta a medida que aumenta el precio unitario; en consecuencia m suele ser positiva.

Se dice que la oferta y la demanda están en **equilibrio** cuando son iguales, Los valores correspondientes de p y de q se llaman **precio de equilibrio** y **demanda de equilibrio**, respectivamente. Para obtener el precio de equilibrio se iguala la demanda a la oferta y se despeja el precio unitario p. Para obtener la demanda de equibrio, se evalúa la función de demanda (u oferta) con el precio de equilibrio.

Ejemplo.1 Los Taxis Rayo cobran a \$1 el banderazo, las cifras se dan en dólares, más \$2 por kilometro.

a) Calcule el costo C de un viaje de x kilómetros

$C = CF + CV = 1 + 2x$

b) Con el resultado anterior calcule el costo de un viaje de 40 kilómetros.

$C(40) = 1 + 2(40) = 1 + 80 = 81$

c) ¿Cuál es el costo del segundo kilómetro? ¿Y el del décimo kilómetro?

$C(2) = 1 + 2(2) = 5$
$C(10) = 1 + 2(10) = 21$

Ejemplo 2. Suponga que los bonos de una empresa con mala reputación pierden valor a razón de 10 000 pesos cada día a partir de hoy, estime cuanto valdran los bonos dentro de 7 días si hoy valen 120 000 pesos.
$C = 120000 - 10000x$
$C(7) = 120000 - 10000(7) = 50\,000$

Ejemplo 3. El costo diario (incluyendo los costos de operación) de fabricar x camisetas es $C(x) = 8x + 100$ y los ingresos obtenidos por vender x camisetas es $R(x) = 10x$, entonces la utilidad diaria que resulta de fabricar y vender x camisetas es?¿Determine la cantidad de equilibrio?.
$U = I - C$
$U = 10x - (8x + 100) = 10x - 8x - 100$
$U = 2x - 100 = 0$
$2x = 100$
$x = \frac{100}{2} = 50$

1.1.3 Ecuación punto pendiente

La pendiente de una función lineal es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una función lineal a partir de de dos puntos conocidos esta dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ejemplo. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 7)$ y $(-3, 2)$
$m = \frac{2-7}{-3-1} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$
$y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$
$y - 7 = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$
$y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + 7$
$y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + \frac{28}{4}$
$y = \frac{5}{4}x + \frac{23}{4}$

Ejemplo. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5, -2)$ y $(-3, 7)$
$m = \frac{7+2}{-3-5} = -\frac{9}{8}$
$y + 2 = -\frac{9}{8}(x - 5)$
$y + 2 = -\frac{9}{8}x + \frac{45}{8}$
$y = -\frac{9}{8}x + \frac{45}{8} - 2 = -\frac{9}{8}x + \frac{29}{8}$

Ejemplo 9. El gerente de una fábrica de refrigeradores observa que el lunes la empresa fabricó 30 refrigeradores a un costo de \$ 25 000 y el martes fabricó 40 a un costo de \$30 000.

a) Encuentre una función lineal de costo basada en estos datos. ¿Cuál es el costo fijo diario, y cuál es el costo marginal?

$y = x$
$c = x$
$m = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1} = \frac{30000-25000}{40-30} = 500$
$C - 25000 = 500\,(x - 30)$
$C - 25000 = 500x - 15000$
$C = 500x - 15000 + 25000$
$C = 500x + 10000$
$CF = 10000$
$C_{mg} = 500$

b) Si la empresa vende sus refrigeradores a \$1500 cada uno. ¿Cuál es la función ingreso?

$I = pq$
$I = 1500x$
c)¿Cuál es la función de utilidad? ¿Cuántos refrigeradores debe vender esa empresa, por día, para alcanzar el equilibrio?
$U = I - C$
$U = 1500x - (500x + 10000)$
$U = 1500x - 500x - 10000$
$U = 1000x - 10000 = 0$
$1000x = 10000$

$x = \frac{10000}{1000} = 10$

Ejemplo 5. Usted es el dueño de Club Salud y ha venido cobrando \$600 por la membresía anual. No está contento con la respuesta: en el club sólo hay un promedio de 10 nuevos socios por mes. Para remediar lo anterior, decide bajar la membresía a \$500 y observa que de esta manera se incrementan los nuevos socios en un promedio de 16 cada mes.

a) Suponiendo que la oferta q sea el promedio de nuevos socios por mes exprese a q como una función lineal de cuota anual p de membresía
$y = x$
$y = variable\ dependiente = q$
$x = variable\ independiente = p$
$m = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}$
$m = \frac{16-10}{500-600} = -\frac{3}{50}$
$q - 10 = -\frac{3}{50}\,(p - 600)$
$q - 10 = -\frac{3}{50}p + 36$
$q = -\frac{3}{50}p + 36 + 10 = -\frac{3}{50}p + 46$
b) Con la ecuación de oferta pronostique cuántos nuevos socios ingresarían al mes si baja el costo de la membresía a \$350.
$q\,(350) = -\frac{3}{50}\,(350) + 46 = 25$

1.2 Función cuadrática

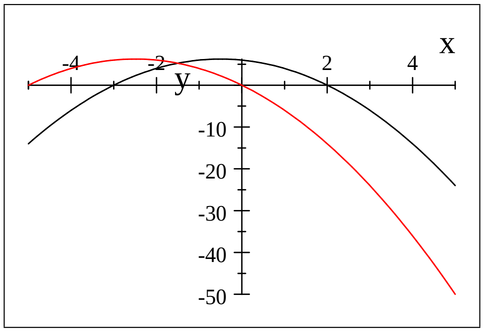
$f\,(x) = ax^2 + bx + c$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola.
1.- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, abre hacia abajo.
2.- El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
3.- La intersección y es c.
4.- La intersección x es $f\,(x) = 0$
Ejemplo. Sea $f\,(x) = -x^2 - x + 6$
a) La parabola abre hacia arriba o hacia abajo
b) Donde se encuentra el vertice
c) Si se realiza $f\,(x + 3)$ hacia donde se desplaza la gráfica
d) Donde ocurre la intersección con el eje y
e) Donde ocurre la intersección con el eje x
f) Encuentre el dominio
g) Encuentre el rango

Solución
a)
La parábola abre hacia arriba

b)
$x=-\frac{b}{2a}$
$x=-\frac{-1}{2(-1)}=-\frac{-1}{-2}=-\frac{1}{2}$
$y=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+6$
$\quad=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+6$
$\quad=-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{24}{4}$
$\quad=\frac{25}{4}$
vertice $\left(-\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$

c) Se desplaza hacia la izquierda
$f(x)=-x^2-x+6$

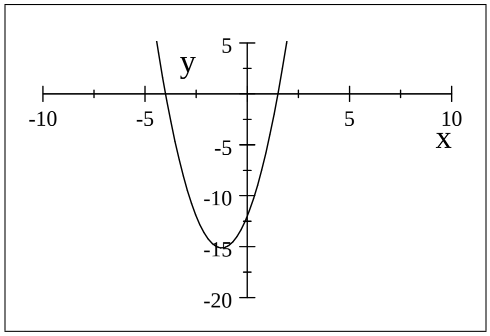


d)6
$(0,6)$
e)$-x^2-x+6=0$
$-\left(x^2+x-6\right)=0$
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$x=-3 \quad x=2$
$(-3,0) \qquad (2,0)$

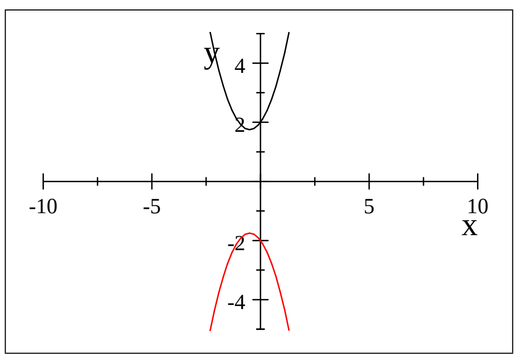
f) $D=(-\infty,\infty)$
g)$R=\left(-\infty,\frac{25}{4}\right]$
Ejemplo. Sea $f(x)=2x^2+5x-12$
a) La parabola abre hacia arriba o hacia abajo
b) Donde se encuentra el vertice
c) Si se realiza $f(x)+3$ hacia donde se desplaza la gráfica
d) Donde ocurre la intersección con el eje y
e) Donde ocurre la intersección con el eje x
f) Encuentre el dominio
g) Encuentre el rango

a) La parábola abre hacia arriba
b)
$x=-\frac{b}{2a}$
$x=\frac{-5}{2(2)}=-\frac{5}{4}=-1.25$
$2\left(-\frac{5}{4}\right)^2+5\left(-\frac{5}{4}\right)-12=-\frac{121}{8}=-15.125$
vertice=$(-1.25,-15.125)$

c)Se desplaza hacia arriba
d) -12
$(0,-12)$
e)
$2x^2+5x-12=0$
x=$\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4(2)(-12)}}{2(2)}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{4}$
$x=\frac{-5\pm11}{4}$
$x_1=\frac{-5+11}{4}=1.5 \qquad x_2=\frac{-5-11}{4}=-4$
$(1.5,0) \qquad (-4,0)$



f) $D = (-\infty, \infty)$
g) $R = [-15.125, \infty)$
Ejemplo 3. Sea $f(x) = x^2 + x + 2$
a) La parabola abre hacia arriba o hacia abajo
b) Donde se encuentra el vertice
c) Si se realiza $-f(x)$ hacia donde se desplaza la gráfica
d) Donde ocurre la intersección con el eje y
e) Donde ocurre la intersección con el eje x
f) Encuentre el dominio
g) Encuentre el rango
a) Hacia arriba
b)
$x = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
$y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{7}{4}$ vertice $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$
c) Se refleja con el eje x
$x^2 + x + 2$



d) 2
$(0, 2)$
e)
$x^2 + x + 2 = 0$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ no tiene solución
no existe cruce con x
f) $D = (-\infty, \infty)$
g) $R = \left[\frac{7}{4}, \infty\right)$

Ejemplo. La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1000 - 20q$, donde p es el precio por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que máximiza el ingreso total del productor y determine este ingreso.

$I = (precio)\,(cantidad)$
$I = pq$
$I = (1000 - 20q)\,q$
$I = 1000q - 20q^2$

Dado que el valor de $a = -20$ para nuestra función cuadrática es menor que cero la parabola abre hacia abajo, por lo que el valor máximo se encuentra en el vertice.

$q = -\frac{1000}{2(-20)} = \frac{-1000}{-40} = 25$
$p = 1000\,(25) - 20\,(25)^2 = 12\,500$

$(25, 12500)$

Lo anterior se interpreta que el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de \$125 000, el cual ocurre en un nivel de producción de 250 unidades.

2 Funciones exponenciales y logaritmicas

2.1 Propiedades de la función exponencial

La propiedades de una función exponencial son las siguientes

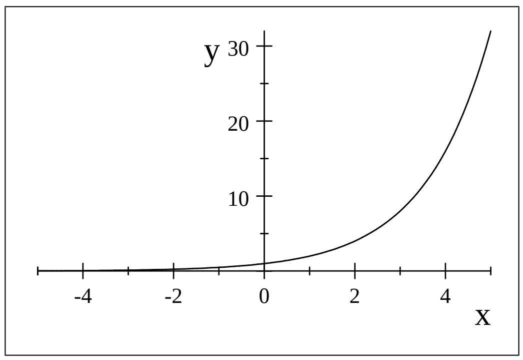
1.- La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene intersección y $(0,1)$. No hay intersección x.

2.- Si $b > 1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha. Si $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha.

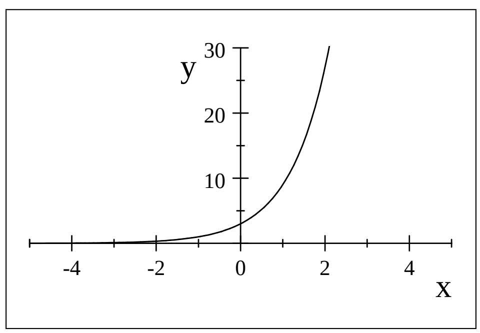
3.- Si $b > 1$, la gráfica se acerca al eje x conforme x se vuelve más y más negativa. Si $0 < b < 1$,la gráfica se acerca al eje x conforme x se vuelve más y más positiva.

2.2 Gráfica de una función exponencial

Ejemplo. $f(x) = 2^x$

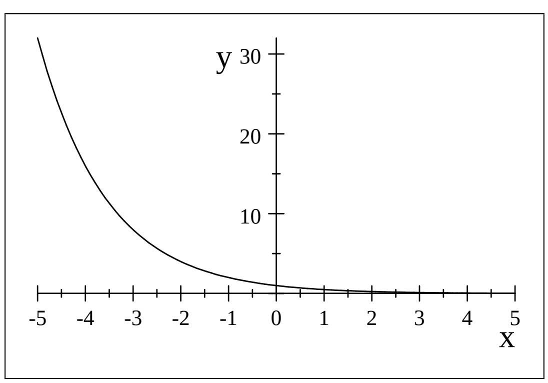


Ejemplo. $f(x) = 3^{x+1}$



$f(-2) = 3^{-2+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3} = .33333$
$f(-1) = 3^{-1+1} = 1$
$f(0) = 3^{0+1} = 3$
$f(1) = 3^{1+1} = 3^2 = 9$
$f(2) = 3^{2+1} = 27$

Ejemplo. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Ejemplo. Considere que cierta acción para un producto económico tiene un valor estimado mediante la siguiente función $f(t) = e^{2.5t}$ encuentre cuanto es el valor de la acción para el segundo año.

$f(2) = e^{2.5(2)} = 148.41$

2.3 Monto compuesto S

El monto compuesto S del capital P al final de n años a una tasa de r compuesta anualmente está dada por

$$S = P(1+r)^n$$

La ecuación anterior no sólo puede aplicarse al aumento de dinero, sino también a otros tipos de crecimiento, como al de la población.

2.3.1 Interés compuesto

$$\text{interés compusto}=S-P$$

Ejemplo. Suponga que se invierten \$1000 durante 10 años al 6% compuestoo anualmente. a) Encuentre el monto compuesto, b) Encuentre el interés compuesto.

a)
$P = 1000$
$r = 0.06$
$n = 10$
$S = 1000(1+0.06)^{10} \approx 1790.85$
b)

$$\begin{aligned} \text{interés compusto} &= S - P \\ &= 1790.85 - 1000 \\ &= 790.85 \end{aligned}$$

Ejemplo 6. La población de un pueblo de 10 000 habitantes crece a razón de 2% anual. Encuentre la población dentre de tres años.
$P(t) = 10000(1+0.02)^3 \approx 10612$

2.4 Propiedades de los logaritmos

Definición. Sea a un número real positivo diferente de 1. El logaritmo de x con base a está definido por

$$\log_a x = y \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y. Y donde a es llamado base.

Las siguientes propiedades generales se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

Propiedad de $\log_a x$
$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$
$\log_a a^x = x$
$a^{\log_a x} = x$

Definición de logaritmo común

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{para toda } x > 0$$

Definición de logaritmo natural

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para toda } x > 0$$

Propiedades de los logaritmos
Si u y v denotan números reales positivos, entonces

$$\begin{aligned} (1)\ \log_a(uv) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\ (2)\ \log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a(u) - \log_a(v) \\ (3)\ \log_a(u^c) &= c\log_a u \quad \text{para todo número real } c \end{aligned}$$

Formula cambio de base

$$\log_b u = \frac{\ln u}{\ln b}$$

2.5 Ecuaciones logaritmicas y exponenciales

Ejemplo. Resuelva la ecuación $\log_6(4x-5) = \log_6(2x+1)$

$6^{\log_6(4x-5)} = 6^{\log_6(2x+1)}$

$4x - 5 = 2x + 1$

$4x - 2x = 1 + 5$

$2x = 6$

$x = 3$

Ejemplo. Resuelva la ecuación $\log_4(5+x) = 3$

$4^{\log_4(5+x)} = 4^3$

$5 + x = 64$

$x = 64 - 5 = 59$

Ejemplo. Resuelva la ecuación $\log_3(2+x) = 2$

$3^{\log_3(2+x)} = 3^2$

$2 + x = 9$

$x = 7$

Ejemplo Resuelva la ecuación $\log_4(x+10) = \log_4(x+8)$

$x + 10 = x + 8$

$0 = -2$

no existe solución

Ejemplo Resuelva la ecuación $\log_7(x-5) = \log_7(6x)$

$x - 5 = 6x$

$x - 6x = 5$

$-5x = 5$

$x = -1$

no tiene solución

Ejemplo. Despeje t usando logaritmo con base a si $2a^t = 5$

$2a^t = 5$

$a^t = \frac{5}{2}$

$\log_a(a^t) = \log_a\left(\frac{5}{2}\right)$

$t = \log_a\left(\frac{5}{2}\right)$

Ejemplo. Despeje t usando logaritmo con base a

$k = h - ca^{t/2}$.

$k - h = -ca^{t/2}$

$\frac{k-h}{-c} = a^{t/2}$

$\log_a\left(\frac{k-h}{-c}\right) = \log_a\left(a^{t/2}\right)$

$\log_a\left(\frac{k-h}{-c}\right) = \frac{t}{2}$

$2\log_a\left(\frac{k-h}{-c}\right) = t$

Ejemplo. Despeje t usando logaritmo con base a si $A = Ba^{ct} + D$

$A - D = Ba^{ct}$

$\frac{A-D}{B} = a^{ct}$

$\log_a\left(\frac{A-D}{B}\right) = \log_a\left(a^{ct}\right)$

$\log_a\left(\frac{A-D}{B}\right) = ct$

$\frac{\log_a\left(\frac{A-D}{B}\right)}{c} = t$

Encuentre el valor de x

a) $3^x = 21$

$\log_3(3^x) = \log_3(21)$

$x = \log_3(21)$

$x = \frac{\ln(21)}{\ln(3)} = \ln(21) \div \ln(3) = 2.7712$

b) $2^{-x} = 8$

$\log_2(2^{-x}) = \log_2(8)$

$\log_2(2^{-x}) = \log_2\left(2^3\right)$

$-x = 3$

$x = -3$

c) $4^{2x-3} = 16$

$2^{2(2x-3)} = 2^4$

$\log_2\left(2^{2(2x-3)}\right) = \log_2\left(2^4\right)$

$2\left(2x-3\right)=4$
$4x-6=4$
$4x=10$
$x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
d)$3^{x}=9^{2x+1}$
$3^{x}=3^{2(2x+1)}$
$\log_{3}\left(3^{x}\right)=\log_{3}\left(3^{2(2x+1)}\right)$
$x=2\left(2x+1\right)$
$x=4x+2$
$-3x=2$
$x=-\frac{2}{3}$
e) $2^{2x}=8^{x+1}$
$2^{2x}=\left(2^{3}\right)^{x+1}$
$2^{2x}=2^{3x+3}$
$2x=3x+3$
$2x-3x=3$
$-x=3$
$x=-3$

e) $e^{2x-3}=40$
$\ln\left(e^{2x-3}\right)=\ln\left(40\right)$
$2x-3=\ln\left(40\right)$
$2x=\ln\left(40\right)+3$
$x=\frac{\ln(40)+3}{2}=3.3444$
$\left(\ln\left(40\right)+3\right)\div 2$
$\ln\left(x\right)=\log_{e}\left(x\right)$
Ejemplo. Exprese en términos de logaritmos de x,y,z o w.
a) $\log_{a}\left(\frac{x^{3}w}{y^{2}z^{4}}\right)$

$=3\log_{a}\left(x\right)+\log_{a}\left(w\right)-2\log_{a}\left(y\right)-4\log_{a}\left(z\right)$
b) $\log\left(\frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}\right)$
$=\frac{1}{3}\log\left(z\right)-\log\left(x\right)-\frac{1}{2}\log\left(y\right)$

c) $\ln\sqrt[4]{\frac{x^{7}}{y^{5}z}}$

Ejemplo. Exprese como un logaritmo
a) $\frac{1}{3}\log_{a}\left(x^{2}-1\right)-\log_{a}y-4\log_{a}z=\log_{a}\left(\frac{\left(x^{2}-1\right)^{1/3}}{yz^{4}}\right)$
b) $\log_{3}\left(2z\right)-\log_{3}x=\log_{3}\left(\frac{2z}{x}\right)$
c) $5\log_{a}x-\frac{1}{2}\log_{a}\left(3x-4\right)-3\log_{a}\left(5x+1\right)$
$=\log_{a}\left(\frac{x^{5}}{(3x-4)^{1/2}(5x+1)^{3}}\right)$
Ejemplo. La ecuación de demanda para un producto es $p=12^{1-0.1q}$. Utilice logarirmos para expresar q en términos de p.
$\log_{12}\left(p\right)=\log_{12}\left(12^{1-0.1q}\right)$
$\log_{12}\left(p\right)=1-0.1q$
$\log_{12}\left(p\right)+1=-0.1q$
$\frac{\log_{12}(p)+1}{-0.1}=q$

3 Dominio

Ejemplo. Encuentre el dominio de $f\left(x\right)=5$
$D=\left(-\infty,\infty\right)$
Ejemplo. Encuentre el dominio de $f\left(x\right)=x^{2}-3x+1$
$D=\left(-\infty,\infty\right)$
Ejemplo. Encuentre el dominio de $f\left(x\right)=x^{3}+2x-100$
$D=\left(-\infty,\infty\right)$

Ejemplo. Encuentre el dominio de $f(x) = \pi$
$D = (-\infty, \infty)$
Ejemplo. Encuentre el dominio de $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$
$x^2 - 4 \neq 0$
$x^2 \neq 4$
$x \neq \sqrt{4}$
$x \neq \pm 2$
$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$
Ejemplo. Encuentre el dominio de $f(x) = \frac{1}{3x-12}$
$3x - 12 \neq 0$
$3x \neq 12$
$x \neq \frac{12}{3} = 4$
$D = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$
Ejemplo. Encuentre el dominio de $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-6}$
$x^2 - x - 6 \neq 0$
$(x-3)(x+2) \neq 0$
$x \neq 3 \quad x \neq -2$
$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$
Ejemplo. Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
$x^2 - 1 \geq 0$
$x^2 \geq 1$
$x \geq \pm 1$
$D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Ejemplo. Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{81 - x^2}$
$81 - x^2 \geq 0$
$-x^2 \geq -81$
$x^2 \leq 81$
$x \leq \pm 9$
Ejemplo. Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 18}$
$x^2 + 3x - 18 \geq 0$
$(x+6)(x-3)$
$x = -6 \quad x = 3$
$(-\infty, -6) \qquad (-6, 3) \quad (3, \infty)$
$(-7)^2 + 3(-7) - 18 = 10$
$(0)^2 + 3(0) - 18 = -18$
$(4)^2 + 3(4) - 18 = 10$
$D = (-\infty, -6) \cup \ (3, \infty)$
Ejemplo. Determine el dominio $f(x) = \ln(2x - 5)$
$2x - 5 > 0$
$2x > 5$
$x > \frac{5}{2}$
$D = (\frac{5}{2}, \infty)$

4 Operaciones con funciones

Terminología	Valor de la función
Suma $f+g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
diferencia $f-g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
producto fg	$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$
cociente $\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Ejemplo. Hallar los valores de función $f+g, f-g, fg$,f/g y $(f/g)(2)$ Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^3$,
$f + g = 3x - 2 + x^3$
$f - g = 3x - 2 - x^3$
$fg = (3x-2)\left(x^3\right) = 3x^4 - 2x^3$
$f/g = \frac{3x-2}{x^3}$
$g/f = \frac{x^3}{3x-2} = \frac{2}{9}x + \frac{8}{27(3x-2)} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{27}$
$(f/g)(2) = \frac{3(2)-2}{(2)^3} = \frac{6-2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ejemplo. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$, encuentre $(f+g)(3), (f-g)(3), (fg)(3)$ y $(f/g)(3)$
$(f+g)(x) = x + 3 + x^2$
$(f+g)(3) = 3 + 3 + 3^2 = 15$
$(f-g)(x) = x + 3 - x^2$
$(f-g)(3) = 3 + 3 - (3)^2 = -3$
$(fg)(x) = (x+3)x^2 = x^3 + 3x^2$
$fg(3) = 3^3 + 3(3)^2 = 54$
$f/g(x) = \frac{x+3}{x^2}$
$f/g(3) = \frac{3+3}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
Ejemplo. Si $f(x) = -x^2$ y $g(x) = 2x - 1$, encuentre $(f+g)(3), (f-g)(3), (fg)(3)$ y $(f/g)(3)$
$(f+g)(x) = \left(-x^2 + 2x - 1\right)$
$(f+g)(3) = -(3)^2 + 2(3) - 1 = -4$
$(f-g)(x) = -x^2 - (2x-1) = -x^2 - 2x + 1$
$(f-g)(3) = -(3)^2 - 2(3) + 1 = -14$
$fg(x) = -x^2(2x-1)$
$fg(3) = -(3)^2(2(3)-1) = -9(6-1) = -9(5) = -45$
$\frac{f}{g}(x) = \frac{-x^2}{2x-1}$
$\frac{f}{g}(3) = \frac{-(3)^2}{2(3)-1} = \frac{-9}{6-1} = \frac{-9}{5} = -\frac{9}{5}$
Ejemplo 4 Hallar $f+g, f-g, fg$ y f/g. Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x+1$
$f + g = \sqrt{4-x^2} + 3x + 1$
$f - g = \sqrt{4-x^2} - 3x - 1$
$fg = \sqrt{4-x^2}(3x+1)$
$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1}$
Ejemplo. Hallar $f+g, f-g, fg$ y f/g. Si $f(x) = \sqrt{x+5}$ y $g(x) = \sqrt{x+5}$,
$f + g = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+5} = 2\sqrt{x+5}$
$f - g = \sqrt{x+5} - \sqrt{x+5} = 0$
$fg = \left(\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{x+5}\right) = \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = x + 5$
$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}} = 1$
Ejemplo. Hallar $f+g, f-g, fg$ y f/g. Si $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ y $g(x) = \frac{x}{x+5}$
$f + g = \frac{x}{x+5} + \frac{2x}{x-4} = \frac{x^2-4x+2x^2+10x}{(x+5)(x-4)} = \frac{3x^2+6x}{x^2+x-20}$
$g - f = \frac{x}{x+5} - \frac{2x}{x-4} = \frac{x^2-4x-2x^2-10x}{(x+5)(x-4)} = \frac{-x^2-14x}{x^2+x-20}$
$gf = \left(\frac{x}{x+5}\right)\left(\frac{2x}{x-4}\right) = \frac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$
$\frac{g}{f} = \frac{\frac{x}{x+5}}{\frac{2x}{x-4}} = \frac{x(x-4)}{2x(x+5)} = \frac{x-4}{2(x+5)}$

4.1 Operación composición

La **función compuesta** $f \circ g$ de dos funciones f y g está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$, encuentre $(f \circ g)(x), (g \circ f)(x), (f \circ f)(x), (g \circ g)(x)$ y $f(g(2))$
$(f \circ g)(x) = (3x+5)^2 - 1$
$(g \circ f)(x) = 3\left(x^2 - 1\right) + 5 = 3x^2 - 3 + 5 = 3x^2 + 2$
$(f \circ f)(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1$
$(g \circ g)(x) = 3(3x+5) + 5 = 9x + 15 + 5 = 9x + 20$

$f(g(2)) = (f \circ g)(2) = (3(2)+5)^2 - 1 = (6+5)^2 - 1 = (11)^2 - 1 = 120$

Ejemplo. Si $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x^2 - 4$,Hallar
a)$(f \circ g)(x) = \left(x^2-4\right)^2 + x^2 - 4 = x^4 - 2\left(x^2\right)(4) + 4^2 + x^2 - 4$
$= x^4 - 8x^2 + 16 + x^2 - 4$
$= x^4 - 7x^2 + 12$
b)$(f \circ g)(1) = (1)^4 - 7(1)^2 + 12 = 6$

5 Limites

1. $\lim\limits_{x\to 3} 2x = 2(3) = 6$
2. $\lim\limits_{t\to 1/3} (5t-7) = 5\left(\frac{1}{3}\right) - 7 = -\frac{16}{3}$
3. $\lim\limits_{r\to 9} \frac{4r-3}{11} = \frac{4(9)-3}{11} = 3$
4. $\lim\limits_{x\to -6} \frac{x^2+6}{x-6} = \frac{(-6)^2+6}{-6-6} = \frac{36+6}{-12} = \frac{42}{-12} = -\frac{7}{2}$
5. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^2-5z-4}{z^2+1} = \frac{0-0-4}{0+1} = \frac{-4}{+1} = -4$
6. $\lim\limits_{y\to 15} \sqrt{y+3} = \sqrt{15+3} = \sqrt{18}$
7. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}(1) = 1$
8. $\lim\limits_{x\to -1} (20) = 20$

6 Limites mediante manipulación algebraica

1. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3+3t^2}{t^3-4t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2(t+3)}{t^2(t-4)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{(t+3)}{(t-4)} = \frac{0+3}{0-4} = \frac{3}{-4}$
   $= -\frac{3}{4}$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x-1) = -1-1$
   $= -2$
3. $\lim\limits_{t\to 2} \frac{t-4}{t^2-4} = \frac{t-4}{(t+4)(t-4)} = \lim\limits_{t\to 2} \frac{1}{t+4} = \frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}$
4. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^2+8x+15} = \frac{\left(x^2+9\right)\left(x^2-9\right)}{(x+3)(x+5)} = \frac{\left(x^2+9\right)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+5)}$
   $\frac{\left(x^2+9\right)(x-3)}{(x+5)} = \frac{\left((-3)^2+9\right)(-3-3)}{(-3+5)}$
   $\frac{(9+9)(-6)}{2} = \frac{(18)(-6)}{2} = 9(-6) = -54$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+2)^2-4}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(x^2+4x+4\right)-4}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+4x+4-4}{x}$
   $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+4)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x+4) = 4$
6. $\lim\limits_{v\to 2} \frac{v^3-8}{v^4-16} = \lim\limits_{v\to 2} \frac{(v-2)\left(v^2+2v+4\right)}{(v^2-4)(v^2+4)} = \lim\limits_{v\to 2} \frac{(v-2)\left(v^2+2v+4\right)}{(v-2)(v+2)(v^2+4)} = \lim\limits_{v\to 2} \frac{\left(v^2+2v+4\right)}{(v+2)(v^2+4)}$
   $\frac{\left(2^2+2(2)+4\right)}{(2+2)(2^2+4)} = \frac{4+4+4}{(4)(4+4)} = \frac{12}{4(8)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

7 Limites al $\pm\infty$

Dado el siguiente limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, se tienen las siguientes estrategias para resolver este tipo de limites

1. Si el grado de $f(x)$ es igual al grado $g(x)$ el limite es el cociente de los coeficientes dominantes
2. Si el grado de $f(x) <$ que el grado de $g(x)$ el limite es igual a cero
3. Si el grado de $f(x) >$ que el grado de $g(x)$ el limite es $\pm\infty$ dependiendo de los signos del numerador y denominador. Se manipula algebraicamente dividiendo tanto el numerador como el denominador por la x dominante del denominador, simplificando y luego evaluando el limite.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - x^2 + x - 2\right) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-2x^3 + 9x\right) = \infty$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-2x^2+x\right)=-\infty$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^4-2x+1\right)=-\infty$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^7-2}{x^3+3}=\frac{x^7}{x^3}=x^4=\infty$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^9-2}{x^3+3}=\frac{x^9}{x^3}=x^6=\infty$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2}{x^4+3}=0$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+2}{x^4+6}=\frac{1}{1}=1$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^{10}+2x^3}{3x^{10}+6x}=\frac{7}{3}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^{10}+2x^3}{-3x^{10}+6x}=\frac{4}{3}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{(x-5)^3}=0$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\frac{1}{8}$

7.1 Discontinuidades

Ejemplo. $f(x)=\frac{1}{x}$
$x=0$
Ejemplo. $f(x)=\frac{1}{x-3}$
$x-3=0$
$x=3$
Ejemplo. $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$
$x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$
$x=1 \quad x=3$
la función es continua en $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$
la función es discontinua en $x=3, x=1$
Ejemplo. $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+2x-8}$
$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$
la función es continua en $(-\infty,-4)\cup(-4,2)\cup(2,\infty)$
la función es discontinua en $x=-4, x=2$
Ejemplo. $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$
$x^2-4x+3=0$
$(x-3)(x-1)=0$
$x-3=0 \quad x-1=0$
$x=3 \qquad x=1$
$D=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$

8 Derivación

8.1 Definición formal de derivada

La recta secante a una curva es aquella que pasa por dos punto de esta.Si quisieramos obtener la pendiente de la curva secante partimos de

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

a partir del dibujo tenemos como $x_1=x,\ x_2=x+h,\ y_1=f(x),\ y_2=f(x+h)$

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$$

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cociente en diferencia

ahora para obtener la pendiente de una recta que sea tangente a la curva $f(x)$ partimos del hecho de que la recta tangente a una curva es aquella que solo pasa por un punto de la curva, así partiendo de la tengente a la secante si hacemos que el incremento h sea muy pequeño obtendremos la pendiente de la recta tangente esto es

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejemplo Calcule el cociente en diferencia y la derivada de $f(x)=c$ donde c es una constante.
$f(x)=c$
$f(x+h)=c$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Ejemplo Calcule el cociente en diferencia y la derivada de $f(x)=x$
$f(x)=x$
$f(x+h)=x+h$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Ejemplo Calcule el cociente en diferencia y la derivada de $f(x)=x^2$
$f(x)=x^2$
$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Ejemplo Calcule el cociente en diferencia y la derivada de $f(x)=x^3$
$f(x)=x^3$
$f(x)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2\end{aligned}$$

9 Reglas de derivación

Formulas $\frac{d}{dx}k=0$ $\quad\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ $\quad\frac{d}{dx}(kf(x))=k\frac{d}{dx}f(x)$

1. $f(x)=x$
$f'(x)=1$
2. $f(x)=x^2$
$f'(x)=2x$
3. $f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^2$
4. $f(x)=x^{20}$
$f'(x)=20x^{19}$
5. $f(x)=x^{1/2}$
$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$
6. $f(x)=x^{1/4}$
$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-3/4}$
7. $f(x)=x^{2/3}$
$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}$
8. $f(x)=x^{-5/7}$
$f'(x)=-\frac{5}{7}x^{-12/7}$
9. $f(x)=x^{4/3}$
$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}$
10. $f(x)=5\pi$
$f'(x)=0$

11. $f(x) = 20e$ **12.** $f(x) = \ln 2$

$f'(x) = 0$ $f'(x) = 0$

13. $f(x) = e^{-5}$ **14.** $f(x) = 5x^{-5}$

$f'(x) = 0$ $f'(x) = -25x^{-6}$

15. $f(x) = 7x^7$ **16.** $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/5}$

$f'(x) = 49x^6$ $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)x^{-3/5} = \frac{3}{5}x^{-3/5}$

17. $f(x) = \frac{7}{4}x^{4/7}$ **18.** $f(x) = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}x^{-2}$

$f'(x) = 1x^{-3/7}$ $f'(x) = \frac{-2}{2}x^{-3} = -x^{-3}$

19. $f(x) = \frac{6}{5x^{1/8}} = \frac{6}{5}\ x^{-1/8}$ **20.** $f(x) = \frac{9}{x^4} = 9x^{-4}$

$f'(x) = -\frac{6}{40}x^{-9/8}$ $f' = -36x^{-5}$

$= -\frac{3}{20}x^{-9/8}$

Formula $\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$

1. $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3$

$f' = 3x^2 + \frac{4}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 3x^2 + 2x^3 - \frac{3}{4}x^2$

2. $f(x) = x^{-1/3} - 5x^5 + x^{-3}$

$f' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} - 25x^4 - 3x^{-4}$

3. $f(x) = 5x^{7/4} - \frac{2}{3}x^{3/2} + 4$

$f' = \frac{35}{4}x^{3/4} - x^{1/2}$

4. $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} - 4x - \frac{1}{x^3} = \frac{2}{5}x^{5/2} - 4x - x^{-3}$

$f' = x^{3/2} - 4 + 3x^{-4}$

5. $\frac{x^{1/2}}{3} + 2x^{-2} + 3x^{-1/2} = \frac{1}{3}x^{1/2} + 2x^{-2} + 3x^{-1/2}$

$f' = \frac{1}{6}x^{-1/2} - 4x^{-3} - \frac{3}{2}x^{-3/2}$

$= \frac{1}{6x^{1/2}} - \frac{4}{x^3} - \frac{3}{2x^{3/2}}$

Formula $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}du$ donde u es una función compuesta

1. $f(x) = (x+3)^2$

$f'(x) = 2(x+3)(1) = 2x + 6$

2. $f(x) = 25\left(x^2 - 5x\right)^3$

$f'(x) = 75\left(x^2 - 5x\right)^2(2x - 5) = (150x - 375)\left(x^2 - 5x\right)^2$

3. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5x - 4} = \frac{1}{2}(5x - 4)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{4}(5x - 4)^{-1/2}(5) = \frac{5}{4}(5x - 4)^{-1/2}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 7}}{25} = \frac{1}{25}\left(3x^2 - 7\right)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{50}\left(3x^2 - 7\right)^{-1/2}(6x) = \frac{6x}{50}\left(3x^2 - 7\right)^{-1/2}$

5. $f(x) = \frac{d}{dx}(5x - 3)^{-1/3} = -\frac{5}{3(5x-3)^{\frac{4}{3}}}$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^5 - 9x^{1/3}}} = \left(4x^5 - 9x^{1/3}\right)^{-1/2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(4x^5 - 9x^{1/3}\right)^{-3/2}\left(20x^4 - 3x^{-2/3}\right)$

Formulas $\frac{d}{dx}e^u = e^u du$ y $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{du}{u}$

1. $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x(1) = e^x$

2. $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x}(2)$

3. $f(x) = e^{3x}$

$f'(x) = e^{3x}(3)$

4. $f(x) = e^{7x}$

$f'(x) = e^{7x}(7)$

5. $f(x) = e^{-4x^2}$

$f'(x) = e^{-4x^2}(-8x)$

6. $f(x) = \frac{3}{8}e^{-9x^3}$

$f'(x) = \frac{3}{8}e^{-9x^3}\left(-27x^2\right) = \frac{-81}{8}x^2e^{-9x^3}$

Formula $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{du}{u} = \frac{u'}{u}$

1. $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

2 $f(x) = 4\ln 3x$

$f'(x) = 4\left(\frac{3}{3x}\right) = 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$

3. $f(x) = \frac{2}{3}\ln\frac{2}{x} = \frac{2}{3}\ln\left(2x^{-1}\right)$

$f\ '(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{-2x^{-2}}{2x^{-1}}\right) = \frac{2}{3}\left(-1x^{-2+1}\right) = \frac{-2}{3}x^{-1}$

4. $f(x) = \ln(4x-3)$

$f\ '(x) = \frac{4}{4x-3}$

5. $f(x) = \ln\left(3-7x^2\right)$

$f\ '(x) = \frac{-14x}{3-7x^2}$

Formula $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + v'u$

1. $(x+2)(x+3)$

$f\ '(x) = (1)(x+3) + (1)(x+2)$

$= x+3+x+2 = 2x+5$

2. $\frac{d}{dx}\left(x^3-4x\right)\left(2x^4-5x^3\right)$

$f\ '(x) = \left(3x^2-4\right)\left(2x^4-5x^3\right) + \left(8x^3-15x^2\right)\left(x^3-4x\right)$

$= 6x^6 - 15x^5 - 8x^4 + 20x^3 + 8x^6 - 32x^4 - 15x^5 + 60x^3$

$= 14x^6 - 30x^5 - 40x^4 + 80x^3$

3. $\frac{d}{dx}\left(x^2-3\right)\left(x^3+4\right) = 5x^4 - 9x^2 + 8x$

$f\ '(x) = (2x)\left(x^3+4\right) + \left(3x^2\right)\left(x^2-3\right)$

$= 2x^4 + 8x + 3x^4 - 9x^2$

$= 5x^4 - 9x^2 + 8x$

4. $\frac{d}{dx}\left(x^2-5x\right)^2(2x-3)$

$f\ '(x) = 2\left(x^2-5x\right)(2x-5)(2x-3) + 2\left(x^2-5x\right)^2$

$= \left(2x^2-10x\right)(2x-5)(2x-3) + 2\left(x^4-10x^3+25x^2\right)$ $= \left(4x^3-10x^2-20x^2+50x\right)(2x-3) + 2\left(x^4-10x^3+25x^2\right)$

$= 8x^4 - 12x^3 - 60x^3 + 90x^2 + 100x^2 - 150x + 2x^4 - 20x^3 + 50x^2$

$= 10x^4 - 92x^3 + 240x^2 - 150x$

Formula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu'-uv'}{v^2}$

1. $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

$f\ '\ (x) = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x+3}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2x}{2x^3-3}\right) = \frac{-2x^4-8x^3-6x-6}{(2x^3-3)^2}$

$f\ '(x) = \frac{\left(2x^3-3\right)(2x+2)-\left(x^2+2x\right)\left(6x^2\right)}{(2x^3-3)^2}$

$= \frac{4x^4+4x^3-6x-6-6x^4-12x^3}{(2x^3-3)^2} = \frac{-2x^4-8x^3-6x-6}{(2x^3-3)^2}$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-4}{2x+4}\right) = \frac{4}{(x+2)^2}$

$\frac{(2x+4)(2)-(2x-4)(2)}{(2x+4)^2} = \frac{4x+8-4x+8}{(2x+4)^2} = \frac{16}{(2x+4)^2}$

$= \frac{16}{(2(x+2))^2} = \frac{16}{2^2(x+2)^2} = \frac{16}{4(x+2)^2}$

$= \frac{4}{(x+2)^2}$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-3}{x^2-2}\right)$

$= \frac{\left(x^2-2\right)-(x-3)(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{x^2-2-2x^2+6x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2+6x-2}{(x^2-2)^2}$

5. $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-5x-2}{x^3+2x}\right) \frac{-x^4+10x^3+8x^2+4}{(x^3+2x)^2}$

$\frac{\left(x^3+2x\right)(2x-5)-\left(x^2-5x-2\right)\left(3x^2+2\right)}{(x^3+2x)^2}$

$\frac{2x^4-5x^3+4x^2-10x-3x^4-2x^2+15x^3+10x+6x^2+4}{(x^3+2x)^2} = \frac{-x^4+10x^3+8x^2+4}{(x^3+2x)^2}$

6. $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{e^x}\right) = \frac{1}{x}\left(e^{-x} - x(\ln x)e^{-x}\right)$

$\frac{e^x\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x(e^x)}{(e^x)^2}$

7. $\ln\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^2+3}}\right) = \frac{1}{2}\left[3\ln x - \ln\left(x^2+3\right)\right]$

$f\ '(x) = \frac{1}{2}\left[3\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+3}\right]$

Formulas $\frac{d}{dx}a^u = a^u(\ln a)u'$ y $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{u'}{u\ln a}$ donde u es una función no constante

1. $y = 2^{2x^2-x}$

$y' = 2^{2x^2-x}(\ln 2)(4x-1)$

2. $y = \frac{5^{2x^2}}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}5^{2x^2}$

$y' = \frac{1}{\ln 5}\left[5^{2x^2}\ln(5)(4x)\right]$

3. $y = \frac{6^{5x^2-3}}{2} = \frac{1}{2}6^{5x^2-3}$

$y' = \frac{1}{2}\left(6^{5x^2-3}\ln 6\,(10x)\right)$

4. $y = \log_3\left(5x^2+3\right)$

$y' = \frac{10x}{(5x^2+3)\ln 3}$

5. $y = \log_7\left(7x^{-3}-2x\right)$

$y' = \frac{-21x^{-4}-2}{(7x^{-3}-2x)\ln 7}$

6.$y = \log_5\left(\frac{1}{x}-x^{-2}\right) = \log_5\left(x^{-1}-x^{-2}\right)$

$y' = \frac{-x^{-2}+2x^{-3}}{(x^{-1}-x^{-2})\ln 5}$

9.0.1 REGLA DE LA CADENA

1. Sea $u = \sqrt{3y}$ y $y = 2x^3+1$ encuentre $\frac{du}{dx}$

$u = \sqrt{3\left(2x^3+1\right)}$

$u' = \frac{1}{2}\left(6x^3+3\right)^{-1/2}\left(18x^2\right)$

$u' = 9x^2\left(6x^3+3\right)^{-1/2}$

2. Sea $u = 5\sqrt{y^2+1}$ y $y = \sqrt{x}$ encuentre $\frac{du}{dx}$

$u = 5\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}$

$u = 5\sqrt{x+1}$

$u' = \frac{5}{2}\left(x+1\right)^{-1/2}$

3. Sea $w = \frac{1}{2v+1}$ y $v = \frac{1}{2s}$ encuentre $\frac{dw}{ds}$

$w = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2s}\right)+1} = \frac{1}{\frac{1}{s}+1} = \frac{1}{\frac{1+s}{s}} = \frac{s}{1+s}$

$w = \frac{(1+s)(1)-s(1)}{(1+s)^2} = \frac{1+s-s}{(1+s)^2} = \frac{1}{(1+s)^2}$

4. Encuentre $\frac{du}{dx}$ si $u = \left(y^2+2\right)^2$ y $y = \sqrt{x^2-3}$

$u = \left(\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+2\right)^2$

$u = \left(x^2-3+2\right)^2$

$u = \left(x^2-1\right)^2$

$u' = 2\left(x^2-1\right)(2x) = 4x^3-4x$

10 Analisis marginal

10.1 Costo marginal

La función de **costo marginal** es la derivada $C'(x)$ de la función costo $C(x)$. Mide la tasa de cambio del costo respecto a x. Las unidades del costo marginal son las del costo por artículo. Se interpreta a $C'(x)$ como el costo aproximado de producir un artículo más.

Costo promedio dada una función de costo C, el costo promedio de los x primeros artículos está dada por

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

El costo promedio y el costo marginal expresan información distinta, pero relacionada. El costo promedio es el costo, por artículo en la fabricación de los primeros artículos, mientras que el costo marginal expresa el costo (aproximado) de fabricar un artículo más a partir de la primera cantidad producida.

Ejemplo 1. Suponga que el costo en dólares por fabricar reproductores de CD portátiles se expresa con

$$C(x) = 150000 + 20x - 0.0001x^2$$

donde x es la cantidad de reproductores fabricados. Calcule la función costo marginal $C'(x)$ y úsela para estimar el costo de fabricar el 50001 reproductor de CD.

$C' = 20 - 0.0002x$

$C'(50001) = 20 - 0.0002(50001) = 9.999\,8$

Ejemplo 2 Si la ecuacion del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}$$

Encuentre la función de costo marginal ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

$\bar{C} = \frac{C(x)}{x}$

$x\bar{C} = C$

$q\bar{c} = \left(0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right) q$

$C = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000$

$C' = 0.0003q^2 - 0.04q + 5$

$C'(50) = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75$

Lo anterior significa que cuando la produccion aumenta en una unidad mas apartir de 50 el costo de producir esa unidad mas es 3.75.

Ejemplo 3. Para el caso de la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por $x = 50, x = 100$ y $x = 150$

$C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$

$C'(50) = 0.003(50)^2 - 0.6(50) + 40 = 17.5$

$C'(100) = 0.003(100)^2 - 0.6(100) + 40 = 10.0$

$C'(150) = 0.003(150)^2 - 0.6(150) + 40 = 17.5$

Ejemplo 4. Si la función de costo promedio de una mercancía es $\bar{c}(x) = x^2 - 9x + 33 + \frac{30}{x}$ encuentre el costo marginal.

$C(x) = x\bar{c} = x\left(x^2 - 9x + 33 + \frac{30}{x}\right) = x^3 - 9x^2 + 33x + 30$

$C'(x) = 3x^2 - 18x + 33$

10.2 Ingreso marginal

Ejemplo 1. Si la función de ingreso está dada por

$$R(x) = 10x - 0.01x^2$$

en donde x es el número de artículos vendidos, determine el ingreso marginal. Evalúe el ingreso marginal cuando $x = 200$

$R' = 10 - 0.02x$

$R'(200) = 10 - 0.02(200) = 6.0$

$R' = 10 - 0.02x$

$R'(200) = 10 - 0.02(200) = 6$

Ejemplo 2. Determine el ingreso marginal cuando $q = 300$ si la ecuación de demanda es $q = 1000 - 100p$. Recuerde que $I = pq$.

$q = 1000 - 100p$

$q - 1000 = -100p$

$\frac{q-1000}{-100} = p$

$-\frac{q}{100} + 10 = p$

$I = \left(-\frac{q}{100} + 10\right) q = -\frac{q^2}{100} + 10q$

$I = -\frac{1}{100}q^2 + 10q$

$I' = -\frac{2}{100}q + 10 = -\frac{1}{50}q + 10$

$I'(300) = -\frac{1}{50}(300) + 10 = 4$

Ejemplo.3 Suponga que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por¿cuál es la función de ingreso marginal?

$I = 2q$

$I' = 2$

Calcule ingreso marginal cuando q=20

$I'(20) = 2$

Ejemplo.4 Si la ecuación de la demanda del producto de un fabricante es

$$p = \frac{100}{q+5}$$

donde p está en dólares, encuentre la función de ingreso marginal y evalúela cuando $q = 45$.

$I = \left(\frac{100}{q+5}\right) q = \frac{100q}{q+5}$

$I' = \frac{(q+5)(100) - 100q(1)}{(q+5)^2} = \frac{100q + 500 - 100q}{(q+5)^2} = \frac{500}{(q+5)^2}$

$I' = \frac{500}{(45+5)^2} = 0.2$

Esto ultimo significa que por cada unidad vendida por encima de 45 se tiene 0.2 de ingreso adicional.

Ejemplo 5. Suponga que el fabricante de un producto sabe que dada la demanda de este producto, su ingreso está dado por

$$R(x) = 1500x - 0.02x^2, \quad 0 \leq x \leq 1000$$

donde x es el número de unidades vendidas y $R(x)$ está en dólares.

a) Encuentre el ingreso marginal en $x = 500$

b) Encuentre el cambio en el ingreso generado por el incremento en las ventas 500 a 501 unidades

c) Encuentre la diferencia entre el ingreso marginal encontrado en a) y el cambio en el ingreso marginal encontrado en b)

a) $R' = 1500 - 0.04x$

$R'(500) = 1500 - 0.04(500) = 1480$

b) $R(500) = 1500(500) - 0.02(500)^2 = 745000$

$R(501) = 1500(501) - 0.02(501)^2 = 746479.98$

$746479.98 - 745000 = 1479.98$

10.2.1 Utilidad marginal

Ejemplo 1. La ecuación de demanda de cierto artículo es

$$p + 0.1x = 80$$

y la función de costo es

$$C(x) = 5000 + 20x$$

calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso de que se produzcan y vendan 400 unidades.

$U = I - C$

$p = 80 - 0.1x$

$I = (80 - 0.1x)x = 80x - 0.1x^2$

$U = 80x - 0.1x^2 - (5000 + 20x) = -0.1x^2 + 60x - 5000$

$U' = -0.2x + 60$

$U'(150) = -0.2(150) + 60 = 30$

$U'(400) = -0.2(400) + 60 = -20$

10.3 Ecuación de la recta tangente a una curva

1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 - 3$ en el punto $(2, 5)$

$f\,' = 4x$

$f\,'(2) = 4(2) = 8 = m = pendiente$

$y - y_0 = m(x - x_0)$ $ecuación\ punto - pendiente$

$y - 5 = 8(x - 2)$

$y - 5 = 8x - 16$

$y = 8x - 16 + 5 = 8x - 11$

$f(x) = 3(1)^2 - 2 = 1$

2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x-3}$ en el punto $(4, 1)$

$f\,' = \frac{1}{2}(x-3)^{-1/2}$

$f\,'(4) = \frac{1}{2}(4-3)^{-1/2} = \frac{1}{2}(1)^{-1/2} = \frac{1}{2} = m$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4)$

$y - 1 = \frac{1}{2}x - 2$

$y = \frac{1}{2}x - 2 + 1 = \frac{1}{2}x - 1$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 5x + 4$ en $x = -1$

$f(-1) = 5(-1) + 4 = -1$

$(-1, -1)$

$f\,' = 5$

$f\,'(-1) = 5 = m$

$y - (-1) = 5(x - (-1))$

$y + 1 = 5(x + 1)$

$y + 1 = 5x + 5$

$y = 5x + 4$

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ cuando $x=\frac{1}{2}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$
$\left(\frac{1}{2},4\right)$
$f\ '=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$
$f\ '\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{-2}{\frac{1}{8}}=-16=m$
$y-4\ =-16\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$y-4=-16x+8$
$y=-16x+8+4=-16x+12$

10.4 Derivadas de orden superior

Primera derivada	$f'=f'(x)=\frac{d}{dx}$
Segunda derivada	$f''=f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}$
Tercera derivada	$f'''=f'''(x)=\frac{d^3}{dx^3}$
$\vdots$	$\vdots$
Derivada e-nesima	$f^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}$

Encuentre $f\ '''(x)$
1. $f(x)=3x^2-5x+3$
$f\ '=6x-5$
$f\ ''=6$
$f\ '''=0$
2. $f(x)=x^{1/2}-1$
$f\ '(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$
$f\ ''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$
$f\ '''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$
3. $f(x)=e^{2x}$ $\qquad \frac{d}{dx}e^u=e^u du$
$f\ '(x)=e^{2x}(2)=2e^{2x}$
$f\ ''(x)=2e^{2x}(2)=4e^{2x}$
$f\ '''(x)=4e^{2x}(2)=8e^{2x}$
4. $f(x)=\ln x$ $\quad \frac{d}{dx}\ln u=\frac{du}{u}$
$f\ '(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$
$f\ ''(x)=-x^{-2}$
$f\ '''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$

10.5 Valores extremos (valor máximo, valor mínimo)

Definición.
Valor crítico. Un valor interior del dominio de una función f donde f' es cero o no está definida es un punto crítico de f.

$$f\ '(c)=0$$

1. $g(t)=-t^2-3t+3$
$g\ '(t)=-2t-3=0$
$-2t=3$
$t=-\frac{3}{2}$ **valor crítico**
$g\left(-\frac{3}{2}\right)=-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\left(-\frac{3}{2}\right)+3=\frac{21}{4}$
entonces el punto crítico es $\left(-\frac{3}{2},\frac{21}{4}\right)$
Corolario.
Función creciente, función decreciente. Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b)

1. Si $f'(x)>0$ en cada punto $x\in(a,b)$, entonces f es creciente en $[a,b]$
2. Si $f'(x)<0$ en cada punto $x\in(a,b)$, entonces f es decreciente en $[a,b]$

$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ $\qquad$ $\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$ *decreciente*

$g'(-2)=-2(-2)-3=1$ *creciente* $\qquad$ $g'(0)=-2(0)-3=-3$

Prueba de la primera derivada para extremos locales

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f, y que f es diferenciable en todo punto de algún intervalo que contiene a c, excepto posiblemente en el mismo c. Moviendonos a lo largo de c de izquierda a derecha,

1. Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene mínimo local (relativo) en c
2. Si f' cambia de positivo a negativo en c, entonces f tiene máximo local (relativo) en c
3. Si f' no cambia de signo en c (esto es, f' es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c), entonces f' no tiene extremo local en c.

$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ $\qquad$ $\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$

$g'(-2)=-2(-2)-3=1$ $\qquad$ $g'(0)=-2(0)-3=-3$

tiene máximo local en $\left(-\frac{3}{2},\frac{21}{4}\right)$

Teorema. Prueba de la segunda derivada para extremos locales

Supongamos que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a $x=c$.

1. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0, f$ tiene un máximo local en $x=c$
2. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0, f$ tiene un mínimo local en $x=c$
3. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)=0$, la prueba falla. La función f puede tener un máximo local, mínimo local, o ninguno de ellos.

Prueba de la segunda derivada para concavidad

Sea $y=f(x)$ dos veces diferenciable en un intervalo I.

1. Si $f''>0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba
2. Si $f''<0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia abajo

Definición. Punto de inflexión

Un punto donde la gráfica de una función tiene recta tangente y la concavidad cambia es un punto de inflexión

$$f''(c)=0$$

$g''(x)=-2=0$

no tiene punto de inflexión

Método del intervalo cerrado

Para hallar los valores máximos y mínimos absolutos de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a,b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a,b)
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

11 Valores extremos (valor máximo, valor mínimo)

En los siguientes ejercicios:

a) Halle los intervalos de crecimiento o decremento

b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales

c) Identifique los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión

1. $y=-2x^3+6x^2-3$

$y'=-6x^2+12x=0$

$-6x^2+12x=0$

$6x(-x+2)=0$

$6x=0 \qquad -x+2=0$

$x=0 \qquad x=2$ $\quad$ valores criticos

Criterio de la primera derivada

$(-\infty,0)\quad(0,2)\quad(2,\infty)\quad nota:$ evaluar en la derivada
$\quad -\qquad\quad +\qquad -$
creciente $(0,2)$
decreciente $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
si el cambio es de menos a mas es minimo
minimo en $x=0$
si el cambio es de mas a menos es maximo
maximo en $x=2$
$Nota:$ existe punto de inflexión si la segunda derivada no es una función constante
Punto de inflexión
$y''=-12x+12=0$
$x=1$ punto de inflexión
$(-\infty,1)\quad(1,\infty)$
$\quad +\qquad\quad -$
concava hacia arriba $(-\infty,1)$
concava hacia abajo $(1,\infty)$
Criterio de la segunda derivada para máximo y mínimo
$y''=-12x+12$
evaluar en los valores criticos
$y''(0)=12>0$ minimo en x=0
$y''(2)=-12<0$ maximo en x=2
3. $f(x)=2x^3-3x^2-12x$
$f'=6x^2-6x-12=0$
$6\left(x^2-x-2\right)=0$
$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$
$x=2\quad x=-1$
$(-\infty,-1)\quad(-1,2)\quad(2,\infty)$
$\quad +\qquad\quad -\qquad\quad +$
decreciente$(-1,2)$
creciente $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$
maximo en $x=-1$
minimo en $x=2$
$f''=12x-6$
$f''(-1)=12(-1)-6=-18<0$ maximo
$f''(2)=12(2)-6=18>0$ minimo
punto de inflexión
$f''=12x-6=0$
$x=\frac{1}{2}$
$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\quad\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
$\quad -\qquad\quad +$
concava hacia abajo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$
concava hacia arriba $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
4. $h(q)=-q^3+2q^2$
$h'=-3q^2+4q=0\quad\rightarrow\quad q(-3q+4)=0$
$q=0\qquad -3q+4=0\quad\rightarrow\quad q=\frac{4}{3}$
$(-\infty,0)\quad\left(0,\frac{4}{3}\right)\quad\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ creciente en$\left(0,\frac{4}{3}\right)$
$\quad -\qquad\quad +\qquad\quad -$ decreciente en $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},\infty\right)$
maximo en $x=\frac{4}{3}$ minimo en $x=0$
$h''=-6q+4$
$h''(0)=4>0$ minimo
$h''\left(\frac{4}{3}\right)=-6\left(\frac{4}{3}\right)+4=-8+4=-4<0$ maximo
$h''=-6q+4=0\rightarrow q=\frac{2}{3}$
$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\quad\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ concava hacia arriba $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$
$\quad +\qquad\quad -$ concava hacia abajo $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
3. $y=x^2-4x+3$
$y'=2x-4=0$
$x=2$

$(-\infty,2)\quad(2,\infty)$

$-$ $+$
creciente en $(2, \infty)$
decreciente en $(-\infty, 2)$
minimo en x=2
$y'' = 2$
$y''(2) = 2 \ > 0$ minimo
concava hacia arriba $(-\infty, \infty)$

11.1 Valores maximos y minimos absolutos

En los siguientes ejercicios halle los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado

1. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5 \quad [0, 3]$
$f' = 6x - 12 = 0$
$x = 2$
$f(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 5 = 5$ max *en* $x = 0$
$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 5 = -7$ min *en* $x = 2$
$f(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 5 = -4$

2. $f(q) = q^3 - 3q + 1 \quad [0, 3]$
$f' = 3q^2 - 3 = 0$
$q^2 = \frac{3}{3} = 1$
$q = \sqrt{1} = \pm 1$
$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1$
$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$ min en x=1
$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$ max en x=3
3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \quad [-2, 3]$
$f' = 6x^2 - 6x - 12 = 0$
$6\left(x^2 - x - 2\right) = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x - 2)(x + 1) = 0$
$x = 2 \quad x = -1$
$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1 = -3$
$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = 8\,\text{max}$
$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1 = -19\,\text{min}$
$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 1 = -8$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \quad [-1, 4]$
$f' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$
$3(x - 1)(x - 3) = 0$
$x = 1 \quad x = 3$
$f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) + 2 = -14$
$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 2 = 6$
$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 2 = 2$
$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 9(4) + 2 \quad = 6$
5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \quad [-2, 3]$
$f' = 4x^3 - 4x = 0$
$4x\left(x^2 - 1\right) = 0$
$4x = 0 \qquad x^2 - 1 = 0$
$x = 0 \qquad x^2 = 1$
$x = \pm 1$
$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 11$
$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 3 = 2$
$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 3 = 3$
$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 3 = 2$
$f(3) = (3)^4 - 2(3)^2 + 3 = 66$

12 Aplicaciones

Ejemplo. Sea la siguiente función de utilidad $2q^3 - 105q^2 + 1500q$ determine donde la función tiene maximo,minimo o ninguno de ellos

$u' = 6q^2 - 210q + 1500 = 0$
$6\left(q^2 - 35q + 250\right) = 0$
$q^2 - 35q + 250 = 0$
$(q-10)(q-25) = 0$

$q = 10 \quad q = 25$
$(-\infty, 10)$ $(10, 25)$

$6(0)^2 - 210(0) + 1500 = 1500$ $6(11)^2 - 210(11) + 1500 = -84$
$(25, \infty)$
$6(26)^2 - 210(26) + 1500 = 96$
máximo en 10 mínimo en 25

12.1 Aplicaciones de máximos y mínimos

12.1.1 Maximización del ingreso

Carriolas, S.A. fabrica andaderas. De acuerdo con la investigación de mercado, se estima que si se establece el precio de una andadera en p dólares, la empresa podrá vender $q = 300\ 000 - 10p^2$ andaderas por año. ¿Qué precio producirá el ingreso anual máximo?

$I = p\left(300\ 000 - 10p^2\right) = 300000p - 10p^3$
$I' = 300000 - 30p^2 = 0$
$-30p^2 = -300000$
$p^2 = \frac{-300000}{-30} = 10\,000$
$p = \pm\sqrt{10000} = \pm 100 = 100$

$(-\infty, 100)$ $(100, \infty)$
$300000 - 30(0)^2 = 300000$ $300000 - 30(101)^2 = -6030$

$I'' = -60p$
$I'' = -60(100) = -6000$ Máximo en 100

12.1.2 Maximización de una utilidad

Ejemplo 1 Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

$U = I - C$
$I = 6x$
$U = 6x - \left(1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3\right)$
$U = 6x - 1000 - 6x + 0.003x^2 - 10^{-6}x^3$
$U = -1000 + 0.003x^2 - 10^{-6}x^3$
$U' = 0.006x - 10^{-6}(3)x^2 = 0$
$x\left(0.006 - 10^{-6}(3)x\right) = 0$
$x = 0 \qquad 0.006 - 10^{-6}(3)x = 0$
$x = \frac{-0.006}{-10^{-6}(3)} = 2000$
$U'' = 0.006 - 10^{-6}(6)x$
$U''(0) = 0.006 - 10^{-6}(6)(0) = 0.006$ Minimo en $x = 0$
$U''(2000) = 0.006 - 10^{-6}(6)(2000) = -0.006$ Maximo en $x = 2000$

Ejemplo 2. El costo de producir x artículos por semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

En el caso del artículo en cuestión, el precio en que x artículos puede venderse por semana está dado por la ecuación de demanda

$$p = 12 - 0.0015x$$

Determine el precio y el volumen de ventas en que la utilidad es máxima

12.2 Elasticidad de la demanda

Definición.

Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, **la elasticidad puntual de la demanda,** denotada por la letra griega $\eta\,(eta)$, en (q, p) está dada por

$$\eta = \eta(q) = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{p}{q}}{p'}$$

Hay tres categorias de elasticidad:

1) Cuando $|\eta| > 1$, la demanda es **elástica. Un aumento en el precio causa que el ingreso disminuya**

2) Cuando $|\eta| = 1$, la demanda tiene **elasticidad unitaria. Un aumento en el precio no causa cambio en el ingreso**

3) Cuando $|\eta| < 1$, la demanda es **inelástica.Un aumento en el precio provoca que el ingreso aumente**

12.2.1 Determinación de la elasticidad puntual de la ecuación de la demanda

Ejemplo La función de demanda de cierto producto es $p = 10 - 0.2\sqrt{q}$, donde x unidades son vendidas a un precio p cada una. Utilice la elasticidad de la demanda para determinar si un aumento en el precio aumentará o disminuirá el ingreso total si la demanda es: a) 900 unidades; b) 1600 unidades.

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\frac{10-0.2\sqrt{q}}{q}}{-0.2\left(\frac{1}{2}q^{-1/2}\right)} = -\frac{\frac{10-0.2\sqrt{q}}{q}}{\frac{0.2}{2q^{1/2}}} = -\frac{2q^{1/2}\left(10-0.2\sqrt{q}\right)}{0.2q} \\
&= -\frac{20\sqrt{q}-0.4q}{0.2q} = -\frac{100}{\sqrt{q}} + 2 \\
\frac{100}{\sqrt{900}} &= -3.333\,3 + 2 = -1.333
\end{aligned}$$

Example 1 *Determine la elasticidad puntual de la ecuación de demanda*

$$p = \frac{k}{q} \text{ donde } k > 0 \text{ y } q > 0$$

Solution 2 *tenemos la formula de elasticidad*

$$\eta(q) = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$$

sustituyendo la ecuación de la demanda

$$\eta(q) = \frac{\frac{\frac{k}{q}}{q}}{\frac{dp}{dq}}$$

$$= \frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}}$$

$$= \frac{k\left(q^2\right)}{q^2(-k)}$$

$$= -1$$

12.2.2 Funcion de la forma q(p)

Si tenemos una función q de p, calculamos la elasticidad de la siguiente forma

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

lo que nos ayuda a calcular la elasticidad si tenemos una funcion $q\left(p\right)$

La formula enterior tambien la podemos ver de la siguiente manera

$$\eta = p\frac{q'}{q}$$

esta ultima formula nos dice que la elasticidad es igual al precio multiplicado por la tasa relativa de cambio de la cantidad

12.2.3 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Ejemplo Determine la elasticidad de la demanda si $q = 500\left(10 - p\right)$ para los valores

$$a)p = 2 \quad b)p = 5 \quad c)p = 6$$

Ejemplo Suponga que la ecuación de la demanda es $q = 20000 - 2p$ de cierto artículo. A partir de ella determine la elasticidad de la demanda cuando $a)p = 2000 \quad b)p = 8000 \quad c)5000$.

Example 3 *Determine la eslasticidad puntual de la ecuación de demanda*

$$q = p^2 - 40p + 400 \text{ donde } q > 0$$

Solution 4 *Aqui tenemos a q como una función de p con lo que tenemos que utilizar la formula*

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

la deriva de q es

$$\acute{q} = 2p - 40$$

asi sustituyendo tanto q como $\acute{q}$ tenemos

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{p}{p^2 - 40p + 400}\left(2p - 40\right) \\ &= \frac{2p\left(p - 20\right)}{\left(p - 20\right)^2} \\ &= \frac{2p}{\left(p - 20\right)}\end{aligned}$$

13 Integración indefinida

Formula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

1.- $\int x^8 dx = \frac{x^{8+1}}{8+1} + c = \frac{x^9}{9} + c$

2.- $\int 5x^{24} dx = \frac{1}{5}x^{25} + c$

3.- $\int 5x^{-7} dx = -\frac{5}{6x^6} + c$

4.-$\int \frac{z^{-3}}{3} dz = -\frac{1}{6z^2} + c$

5.-$\int \frac{2}{x^{10}} dx = \int 2x^{-10} dx = 2\left[\frac{x^{-9}}{-9}\right] = -\frac{2}{9x^9} + c$

6.- $\int \frac{7}{x^4} dx = -\frac{7}{3x^3} + c$

7.-$\int \frac{1}{t^{7/4}} dt = \int t^{-7/4} dt = \frac{t^{-3/4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}t^{-3/4} + c = -\frac{4}{3t^{3/4}} + c$

Formula $\int \left(f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right) dx = \int f\left(x\right) dx \pm \int g\left(x\right) dx$

$\int \left(5 - 2w - 6w^2\right) dw$

$\int \left(3t^2 - 4t + 5\right) dt$

$\int \left(1 + t^2 + t^4 + t^6\right) dt$

$\int \frac{z^4+10z^3}{2z^2}dz = \int \left(\frac{z^2}{2}+5z\right)dz = \frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+5\frac{z^2}{2}+c = \frac{z^3}{6}+\frac{5z^2}{2}+c$

$\int \frac{x^4-5x^2+2x}{5x^2}dx$

$\int \frac{\left(x^3+1\right)^2}{x^2}dx$
$Formula\ \int kdx = kx+c$
$\int (7+e)\,dx = (7+e)\,x+c$
$\int \left(5-2^{-1}\right)dz = \left(5-2^{-1}\right)z+c$

14 Integrales por sustitución o cambio de variable

1. $\int (5x-3)^8\,dx$
Solución
debido a que tenemos un polinomio elevado a una potencia la tecnica usar es

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

a esta formula se le llama regla de la potencia general, para poder emplearla hacemos

$$\begin{aligned} u &= 5x-3 \\ du &= 5dx \end{aligned}$$

para poder aplicar el método el termino du debe estar contenido en la integral, para este ejemplo no lo esta asi que tenemo que hacer una manipulación algebraica

$$\frac{5}{5}\int (5x-3)^8\,dx$$

ahora introducimos a la integral la constante 5

$$\frac{1}{5}\int (5x-3)^8\,(5dx)$$

con lo que du esta completo, ahora hacemos la sutitución para que se parezca a la formula de la potencia general tomando en cuenta que $du = (5dx)$

$$\frac{1}{5}\int u^8 du$$

integrando se tiene

$$\frac{1}{5}\left[\frac{u^9}{9}\right]+c$$

$$\frac{u^9}{45}+c$$

regresando a la variable original

$$\frac{(5x-3)^9}{45}+c$$

y este el resultado de la integral.
2.$\int (x-6)^3\,dx$
Solución
sea

$$\begin{aligned} u &= x-6 \\ du &= dx \end{aligned}$$

el termino u (diferencial) esta completo. Por lo que la sustitución es

$$\int u^3 du$$

resolviendo

$$\frac{u^4}{4}+c$$

regresando a la variable original

$$\frac{(x-6)^4}{4}+c$$

3.$\int (8x-1)\left(4x^2-x\right)^2 dx$

Solución

Como estrategia se toma el polinomio que este elvado a mayor potencia, por lo que

$$\begin{aligned} u &= 4x^2-x \\ du &= (8x-1)\,dx \end{aligned}$$

como esta completo el diferencial solo reacomodamos terminos

$$\int \left(4x^2-x\right)^2 (8x-1)\,dx$$

así la sustitución tomando en cuenta que $du=(8x-1)\,dx$ es

$$\int u^2 du$$

resolviendo

$$\frac{u^3}{3}+c$$

regresando a la variable x

$$\frac{\left(4x^2-x\right)^3}{3}+c$$

4.$\int \left(x^2-x\right)\left(2x^3-3x^2\right)^2 dx$

Solución

sea

$$\begin{aligned} u &= 2x^3-3x^2 \\ du &= \left(6x^2-6x\right)dx \\ &= 6\left(x^2-x\right)dx \end{aligned}$$

el diferencial no esta completo por lo que tenemos que agregar una constante conveniente esto es

$$\frac{6}{6}\int \left(x^2-x\right)\left(2x^3-3x^2\right)^2 dx$$

introduciendo el 6 que hace falta adentro de la integral y reacomodando se tiene

$$\frac{1}{6}\int \left(2x^3-3x^2\right)^2 \left[6\left(x^2-x\right)\right] dx$$

por lo que la sutitución tomando en cuenta que $du=\left[6\left(x^2-x\right)\right]dx$ se hace como sigue

$$\frac{1}{6}\int u^2 du$$

integrando

$$\frac{1}{6}\left[\frac{u^3}{3}\right]+c$$

$$\frac{u^3}{18}+c$$

regresando a la variable x

$$\frac{\left(2x^3-3x^2\right)^3}{18}+c$$

5.$\int 5x\left(2x^2-3\right)^5 dx$

Solución

sea

$$\begin{aligned} u &= 2x^2 - 3 \\ du &= (4x)\, dx \end{aligned}$$

no esta completo du por lo que primero sacamos de la integral el termino constante que sobra

$$5 \int x \left(2x^2 - 3\right)^5 dx$$

ahora agregamos el termino adecuado para completar el diferencial

$$5 \left[\frac{4}{4} \left[\int x \left(2x^2 - 3\right)^5 dx\right]\right]$$

introduciendo el cuatro que hace falta dentro la integral y reacomodando

$$5 \left[\frac{1}{4} \int \left(2x^2 - 3\right)^5 (4xdx)\right]$$

$$\frac{5}{4} \int \left(2x^2 - 3\right)^5 (4xdx)$$

asi la sustitución tomando en cuenta que $du = (4xdx)$ es

$$\frac{5}{4} \left[\int u^5 du\right]$$

resolviendo

$$\frac{5}{4} \left[\frac{u^6}{6}\right] + c$$

$$\frac{5u^6}{24} + c$$

regresando a la variable x

$$\frac{5 \left(2x^2 - 3\right)^5}{24} + c$$

6.$\int \frac{4}{(3x-2)^2} dx$
Solución
tomando

$$\begin{aligned} u &= 3x - 2 \\ du &= 3dx \end{aligned}$$

como el cuatro no es parte del diferencia se saca de la integral

$$4 \int \frac{dx}{(3x-2)^2}$$

para completar el diferencial agregamos

$$4 \left[\frac{3}{3} \left[\int \frac{dx}{(3x-2)^2}\right]\right]$$

reacomodando se tiene

$$4 \left[\frac{1}{3} \left[\int \frac{3dx}{(3x-2)^2}\right]\right]$$

$$\frac{4}{3} \int \frac{3dx}{(3x-2)^2}$$

ahora por leyes de los exponentes la integral la podemos ver como

$$\frac{4}{3} \int (3x-2)^{-2} (3dx)$$

asi hacemos la sustitución tomando en cuenta que $du = (3dx)$

$$\frac{4}{3}\int u^{-2}du$$

resolviendo la integral

$$\frac{4}{3}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]+c$$

reescribiendo

$$\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]+c$$

$$-\frac{4}{3u}+c$$

regresando a la variable x

$$-\frac{4}{3\left(3x-2\right)}+c$$

$$-\frac{4}{9x-6}+c$$

7. $\int 5x^2\sqrt{5x^3+2}dx$
Solución
sean

$$\begin{aligned} u &= 5x^3+2 \\ du &= \left(15x^2\right)dx \\ &= 3\left(5x^2\right)dx \end{aligned}$$

el termino du no esta completo para completarlo hacemos

$$\frac{3}{3}\left[\int 5x^2\sqrt{5x^3+2}dx\right]$$

reacomodando y reescribiendo

$$\frac{1}{3}\int\left(5x^3+2\right)^{1/2}\ \left(3\left(5x^2\right)dx\right)$$

asi la sustitución tomando en cuenta que $du = \left(3\left(5x^2\right)dx\right)$

$$\frac{1}{3}\int u^{1/2}du$$

integrando se tiene

$$\frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]+c$$

simplificanco

$$\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]+c$$

$$\frac{2}{9}u^{3/2}+c$$

y finalmente en terminos de x

$$\frac{2}{9}\left(5x^3+2\right)^{3/2}+c$$

8.$\int\left(24x^3-9\right)\left(2x^4-3x\right)dx$
Solución
En este caso se puede ver que en el termino $24x^3-9$ tiene como termino común un 3 por lo que lo factorizamos

$$\int 3\left(8x^3-3\right)\left(2x^4-3x\right)dx$$

$$3\int\left(8x^3-3\right)\left(2x^4-3x\right)dx$$

ahora tomamos como u el polinomio con mayor grado esto es

$$\begin{aligned} u &= 2x^4 - 3x \\ du &= \left(8x^3 - 3\right) dx \end{aligned}$$

como el número tres no es parte del diferencial lo sacamos de la integral

$$3 \int \left(8x^3 - 3\right) \left(2x^4 - 3x\right) dx$$

reacomodamos

$$3 \int \left(2x^4 - 3x\right) \left[\left(8x^3 - 3\right) dx\right]$$

hacemos la sustitución tomando en cuenta que $du = \left[\left(8x^3 - 3\right) dx\right]$

$$3 \int u du$$

integramos

$$3 \frac{u^2}{2} + c$$

y para la variable x el resultado es

$$\frac{3}{2} \left(2x^4 - 3x\right)^2 + c$$

9. $\int e^{2x} dx$
Solución
La formula a aplicar es $\int e^u du = e^u + c$
En la formula tenemos u por lo que tenemos que identificar quien u en nuestro ejemplo esto es

$$\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2dx \end{aligned}$$

por lo que el diferencial no es esta completo, completarlo hacemos

$$\frac{2}{2} \int e^{2x} dx$$

introduciendo el 2 faltante se tiene

$$\frac{1}{2} \int e^{2x} (2dx)$$

asi por sustitución tenemos

$$\frac{1}{2} \int e^u du$$

resolviendo

$$\frac{1}{2} e^u + c$$

en terminos de x

$$\frac{1}{2} e^{2x} + c$$

10. $\int e^{-3x} dx$
Solución
Recordando que $\int e^u du = e^u + c$
tomamos

$$\begin{aligned} u &= -3x \\ du &= -3dx \end{aligned}$$

por lo que para completar el diferencial hacemos

$$\frac{-3}{-3} \left[\int e^{-3x} dx\right]$$

$$\frac{1}{-3}\left[\int e^{-3x}\ (-3dx)\right]$$
$$-\frac{1}{3}\left[\int e^{-3x}\ (-3dx)\right]$$

ahora sustituimos tanto u como du

$$-\frac{1}{3}\int e^{u}du$$

y resolviendo se tiene

$$-\frac{1}{3}e^{u}+c$$

y para la variable x se tiene

$$-\frac{1}{3}e^{-3x}+c$$

11.$\int 4e^{x/5}dx$
Solución
Primero sacamos la constante de la integral

$$4\int e^{x/5}dx$$

ahora tomamos

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{5} \\ du &= \frac{1}{5}dx \end{aligned}$$

para completar el diferencial se tiene

$$4\left[\frac{5}{5}\int e^{x/5}dx\right]$$
$$4\left[\frac{5}{1}\int e^{x/5}\left(\frac{dx}{5}\right)\right]$$
$$4\left[5\int e^{x/5}\left(\frac{dx}{5}\right)\right]$$

ahora haciendo la sustitución de $u=\frac{x}{5}$ y $du=\frac{dx}{5}$

$$4\left[5\int e^{u}du\right]$$
$$20\int e^{u}du$$

integrando se tiene

$$20e^{u}+c$$

regresando a la variable x

$$20e^{x/5}+c$$

12. $\int \frac{dx}{x}$
Solución
aqui tomamos

$$\begin{aligned} u &= x \\ du &= dx \end{aligned}$$

haciendo la sustitución en la integral se tiene

$$\int \frac{du}{u}$$

la formula para resolver esta integral es

$$\int \frac{du}{u}=\int u^{-1}du=\ln|u|+c$$

entonces aplicando la formula tenemos

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

y para la variable x

$$\ln|x| + c$$

13. $\int \frac{dx}{x+1}$
Solución
aqui tomamos

$$\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= dx \end{aligned}$$

haciendo la sustitución en la integral se tiene

$$\int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

y para la variable x

$$\ln|x+1| + c$$

14.$\int \frac{7}{x+3} dx$
Solución
aqui tomamos

$$\begin{aligned} u &= x+3 \\ du &= dx \end{aligned}$$

como el 7 no forma parte del diferecial puede salir de la integral

$$7 \int \frac{dx}{x+3}$$

ahora hacemos la sustitución de u y de du

$$7 \int \frac{du}{u}$$

resolviendo

$$7 \ln|u| + c$$

y para la variable x

$$7 \ln|x+3| + c$$

y este resultado por la propiedad

$$a \ln u = \ln u^a$$

se puede reescribir de la siguiente manera

$$\ln \left|(x+3)^7\right| + c$$

15. $\int \frac{2x}{x^2+9} dx$
Solución
Verificamos si el diferencial esta completo

$$\begin{aligned} u &= x^2+9 \\ du &= (2x)\, dx \end{aligned}$$

reacomodando la integral

$$\int \frac{(2x)\, dx}{x^2+9}$$

con lo que se ve que esta completo el diferencial así la sustitución es

$$\int \frac{du}{u}$$

resolviendo

$$\ln |u| + c$$

y para la variable x

$$\ln \left| x^2 + 9 \right| + c$$

16. $\int \frac{x^2+1}{2x^3+6x} dx$

Solución

Verificamos si el diferencial esta completo

$$\begin{aligned} u &= 2x^3 + 6x \\ du &= \left(6x^2 + 6\right) dx \end{aligned}$$

factorizando en du

$$du = 6\left(x^2 + 1\right) dx$$

para completar el diferencial hacemos

$$\frac{6}{6} \int \frac{x^2 + 1}{2x^3 + 6x} dx$$

reagrupando

$$\frac{1}{6} \int \frac{6\left(x^2 + 1\right) dx}{2x^3 + 6x}$$

haciendo la sustitución de u y de du

$$\frac{1}{6} \int \frac{du}{u}$$

resolviendo

$$\frac{1}{6} \ln |u| + c$$

y para la variable x

$$\frac{1}{6} \ln \left| 2x^3 + 6x \right| + c$$

y utilzando la porpiedad

$$a \ln u = \ln u^a$$

se tiene

$$\ln \left| \left(2x^3 + 6x\right)^{1/6} \right| + c$$

Formula $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c$

1.-$\int 2^{3x} dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\ln 2} 2^{3x}\right] + c = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + c$
$= \frac{2^{3x}}{\ln 2^3} + c$
$= \frac{2^{3x}}{\ln 8} + c$

2.-$\int 3^{2x-1} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ln 3} 3^{2x-1}\right] + c$

$= \frac{3^{2x-1}}{2 \ln 3} = \frac{3^{2x-1}}{\ln 3^2} = \frac{3^{2x-1}}{\ln 9}$

$u = 2x - 1$
$du = 2dx$

3.-$\int x \left(5^{3x^2+2}\right) dx = \frac{1}{6} \frac{1}{\ln 5} 5^{3x^2+2}$

15 Integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1.-$\int x e^x dx$

Solución

Para aplicar este método se tiene que verificar primero si se puede completar el diferencial para ello tomamos como u la x del exponente de la exponencial

$$\begin{aligned} u &= x \\ du &= dx \end{aligned}$$

debido a que no solo se pueden agregar constantes para completar el diferencial no podemos completar en este caso el diferencial, para resolver esta integral utlizamos el método de integración por partes.

Para el método de integración por partes necesitamos identificar dos partes u y dv. El termino que tomamos como u es aquel que al derivar se simplifique más y lo demás lo consideramos como dv.Para el ejemplo tomamos

$$u = x \text{ y } \; dv = e^x dx$$

la parte que tomamos como u se deriva y la parte que tomamos como dv se integra esto es

$u = x$ $\quad$ $dv = e^x dx$
$du = dx$ $\quad$ $\int dv = \int e^x dx$
$v = e^x$

estos resultados se sustituyen en la formula

$$uv - \int v du$$

$$xe^x - \int e^x dx$$

con lo que resta resolver $\int e^x dx$

$$\int e^x dx = e^x$$

por lo que el resultado final es

$$xe^x - e^x + c$$

2.- $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

Solución

Verificando si podemos completar el diferencial como primer método a aplicar se tiene

$$u = \sqrt{x} \to du = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

de lo que vemos que $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ no esta dentro de la integral y como es un termino variable no podemos agregarlo recordando que solo se pueden agregar constantes.

De forma similar si tomamos

$$u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx$$

el termino $\frac{1}{x}$ no forma parte de la integral y no lo podemos agregar por lo que el método de sustitución no se puede aplicar.

Como estrategia para utilizar el método de integración por partes se toma

$$u = \ln x \text{ y } dv = x dx$$

derivando u e integrando dv se tiene

$u = \ln x$ $\quad$ $dv = x dx$
$du = \frac{1}{x} dx$ $\quad$ $\int dv = \int x dx$
$v = \frac{x^2}{2}$

sustituyendo en la formula

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{x} dx$$

simplificando

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{2} \ln x - \int \left(\frac{x^2}{2x} \right) dx \\ &\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \end{aligned}$$

integrando

$$\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

y el resultado es

$$\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

15.1 Método tabular para forma x por e^x de la integración por partes

Como método alternativo para el caso de x por e^x se tiene el método tabular mismo que se aplica de la siguiente manera para el ejemplo 1

1.-$\int xe^x dx$

tomando $u=x$ y como $dv=e^x$ hacemos los siguiente

u y sus derivadas		dv y sus integrales
x	$+$	e^x
1	$-$	e^x
0	$+$	e^x

multiplicando siguiendo las flechas tenemos

$$(x)\,e^x-(1)\,e^x$$

simplificando

$$xe^x-e^x$$

y el resultado final es

$$xe^x-e^x+c$$

2.- $\int xe^{x^2}dx$

verificando si el diferencial esta completo tomamos como $u=x^2$ y su derivada es

$$du=2xdx$$

reagrupando dentro de la integral tenemos

$$\int e^{x^2}\,(xdx)$$

podemo ver que para que du este completo le falta un 2 para ello hacemos

$$\frac{2}{2}\int e^{x^2}\,(xdx)$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,(2xdx)$$

haciendo el cambio de variable se tiene

$$\frac{1}{2}\int e^u du$$

y resolviendo

$$\frac{1}{2}e^u+c$$

para finalizar sustituimos el valor de $u=x^2$

$$\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

3.-$\int x^2e^{2x}dx$

Solución

Del ejemplo anterior $u=x$ y $du=dx$ con lo que dentro de la integral sobra x^2 y no la podemos sacar de la integral asi que el método a amplear es el método de por partes, en este caso podemos utilizar el método tabular

u y sus derivadas		dv y sus derivadas
x^2 $\longrightarrow$	$+$	e^{2x}
$2x$ $\longrightarrow$	$-$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2 $\longrightarrow$	$+$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$-$	$\frac{1}{8}e^{2x}$

multiplicando en el sentido de las fechas se tiene

$$x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-2x\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)+2\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right)$$

simplificando

$$\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{2x}{4}e^{2x}+\frac{2}{8}e^{2x}$$
$$\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$$

y para finalizar

$$\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

16 Fracciones parciales

Descripción general del método

El éxito al escribir una función racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ como una suma de fracciones parciales depende de dos cosas:

- El grado de $f(x)$ debe ser menor que el grado de $g(x)$. Esto es, la fracción debe ser propia. Si no es así, divida $f(x)$ entre $g(x)$ y trabaje con el residuo.
- Debemos conocer los factores de $g(x)$. En teoría, cualquier polinomio con coeficientes reales puede escribirse como un producto de factores lineales con coeficientes reales y factores cuadráticos con coeficientes reales. En la práctica, puede ser dificil obtener estos factores.

Ejemplo 1

División de polinomios

$\int \frac{x^2+3x+1}{x+3}dx$

El primer intento por resolver esta integral es emplear el método de sustitución recordando que tomamos como

$$u=x^2+3x+1$$

derivando tenemos

$$du=2x+3$$

con lo que vemos que el no podemos completar du, debido a que la función racional que presenta la integral es una fracción impropia esto porque la función del numero es de mayor grado que de la del denominador, para simplificar la expresión se tiene que realizar la división de polinomios. Para empezar con la división tomamos la x con mayor exponente tanto del numerador como denominador y la dividimos esto es

$$\frac{x^2}{x}=x$$

este resultado lo colocamos en el cociente de la división y multiplicamos por divisor como sigue

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \cline{2-2} x+3 & \quad x^2+3x+1 \\ & -x^2-3x \end{array}$$

el resultado de la división se coloca por debajo del dividendo cambiandole el signo a todo el resultado. Ahora hacemos la suma de terminos semejantes

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+3 & x^2+3x+1 \\ & -x^2-3x \\ \hline & \qquad\quad 1 \end{array}$$

debido a que al hacer la suma quedo como resultado un polinomio de menor grado que el del divisor la división ha finalizado y el resultado se expresa como sigue

$$x+\frac{1}{x+3}$$

de manera que la integral pedida la podemos reescribir como sigue
$\int \frac{x^2+3x+1}{x+3}dx = \int \left(x+\frac{1}{x+3}\right)dx = \int xdx + \int \left(\frac{1}{x+3}\right)dx$
resolviendo se tiene
$\int xdx = \frac{x^2}{2}$
y para
$\int \left(\frac{1}{x+3}\right)dx$
tomamos como $u = x+3 \rightarrow du = dx$ por lo que la integral por sustitución se resuelve
$\int \left(\frac{1}{x+3}\right)dx = \int \left(\frac{1}{u}\right)du = \ln u$
$= \ln(x+3)$
por lo que el resultado de la integral es

$$\frac{x^2}{2}+\ln(x+3)+c$$

Ejemplo 2
Factores lineales distintos
Evalue $\int \frac{x+4}{(x-3)(x+2)}dx$
La función a integrar es una fracción propia para simplificarla usaremos el método de fracciones parciales. La descomposición en fracciones parciales tiene la forma
$\frac{x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$
del lado derecho de la igualdad se resuelve la suma de fracciones
$\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$
asi nuestra igualdad queda
$\frac{x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$
como los denominadores son iguales tambien los numeradores lo deben ser para que se cumpla la igualdad esto es

$$x+4 = A(x+2)+B(x-3)$$

como estrategia tomamos $x=-2$ para que $(x+2)$ se haga cero, con lo que tenemos

$$\begin{aligned} -2+4 &= A(-2+2)+B(-2-3) \\ 2 &= A(0)+B(-5) \\ 2 &= -5B \\ \frac{2}{-5} &= B \\ -\frac{2}{5} &= B \end{aligned}$$

para encontrar el valor de A tomamos el valor de $x=3$ para que $(x-3)$ se haga cero

$$\begin{aligned} 3+4 &= A(3+2)+B(3-3) \\ 7 &= A(5)+B(0) \\ 7 &= 5A \\ \frac{7}{5} &= A \end{aligned}$$

estos resultados los sustituimos en nuestra descomposición
$\frac{x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2} = \frac{\frac{7}{5}}{x-3}+\frac{-\frac{2}{5}}{x+2} = \frac{7}{5(x-3)}-\frac{2}{5(x+2)}$

con lo que ahora la integral a resolver es
$\int \left(\frac{7}{5(x-3)} - \frac{2}{5(x+2)} \right) dx$
reescribimos
$\frac{7}{5} \int \frac{dx}{(x-3)} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2}$
resolvemos ambas integrales
para
$\frac{7}{5} \int \frac{dx}{(x-3)}$ se tiene
$u = x - 3 \rightarrow du = dx$
asi la integral queda como
$\frac{7}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{7}{5} \ln u = \frac{7}{5} \ln (x-3)$
y para $\frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2}$ se tiene
$u = x + 2 \rightarrow du = dx$
asi la integral queda como

$$-\frac{2}{5} \int \frac{du}{u} = -\frac{2}{5} \ln u = -\frac{2}{5} \ln (x+2)$$

por lo que el resultado de nuestra integral es

$$\frac{7}{5} \ln (x-3) - \frac{2}{5} \ln (x+2) + c$$

Ejemplo 3
Factores lineales distintos
$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx$

La función a integrar es una fracción propia para simplificarla usaremos el método de fracciones parciales. La descomposición en fracciones parciales tiene la forma
$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$
hacemos la suma de fracciones del lado derecho
$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$
asi tenemos que
$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$
para que ambos lados sean iguales los numeradores deben de ser iguales esto es
x^2+4x+1=A$(x+1)(x+3)$+B$(x-1)(x+3)$+C$(x-1)(x+1)$
como estrategia para resolver esta ecuación tomamos $x = -1$
$(-1)^2$+4(-1)+1=A$(-1+1)(-1+3)$
+B$(-1-1)(-1+3)$
+C$(-1-1)(-1+1)$
$1 - 4 + 1 = A(0)(2) + B(-2)(2) + C(-2)(0)$
$-2 = A(0) - 4B + C(0)$
$-2 = -4B$
$\frac{-2}{-4} = B$
$\frac{1}{2} = B$
para encontrar el valor de A sustituimos $x = 1$
$(1)^2 + 4(1) + 1 = A(1+1)(1+3) + B(1-1)(1+3)$
$+C(1-1)(1+1)$
$1 + 4 + 1 = A(2)(4) + B(0)(4) + C(0)(2)$
$6 = 8A + B(0) + C(0)$
$6 = 8A$
$\frac{6}{8} = A$
$\frac{3}{4} = A$
para encontrar el valor de C sustituimos $x = -3$
$(-3)^2 + 4(-3) + 1 = A(-3+1)(-3+3) + B(-3-1)(-3+3)$
$+C(-3-1)(-3+1)$
$9 - 12 + 1 = A(-2)(0) + B(0)(-4) + C(-4)(-2)$
$-2 = A(0) + B(0) + C(8)$
$-2 = 8C$
$\frac{-2}{8} = C$
$-\frac{1}{4} = C$
con lo que

$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}=\frac{\frac{3}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}$
$=\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4(x+3)}$
así
$\int\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx=\int\left(\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4(x+3)}\right)dx$
$=\int\frac{3}{4(x-1)}dx+\int\frac{1}{2(x+1)}dx-\int\frac{1}{4(x+3)}dx$
$=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}$
resolviendo $\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)}$ tenemos
$u=x-1\rightarrow du=dx$
$\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)}=\frac{3}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{3}{4}\ln u$
$=\frac{3}{4}\ln(x-1)$
resolviendo $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$ tenemos
$u=x+1\rightarrow du=dx$
$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln u$
$=\frac{1}{2}\ln(x+1)$
resolviendo $-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}$ tenemos
$u=x+3\rightarrow du=dx$
$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{4}\ln u$
$=-\frac{1}{4}\ln(x+3)$
sumando los resultados de las tres integrales se tiene como resultado final
$\frac{3}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x+3)+c$

17 Integral definida

1.-$\int_2^3(4-x)\,dx=4x-\frac{x^2}{2}\ |_2^3=4(3)-\frac{(3)^2}{2}-\left(4(2)-\frac{(2)^2}{2}\right)=\frac{3}{2}$

2.-$\int_1^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\ |_1^2=\frac{(2)^4}{4}-\frac{(1)^4}{4}=\frac{15}{4}$

3.-$\int_2^3\frac{1}{x}dx=\ln x\ |_2^3=\ln(3)-\ln(2)$

4.-$\int_0^1 e^xdx=e^x\ |_0^1=e-e^0=e-1$

5.-$\int_{-1}^3\left(3x^2-x+6\right)dx=x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\ |_{-1}^3$
$(3)^3-\frac{1}{2}(3)^2+6(3)-\left((-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2+6(-1)\right)$
$=48$

6.-$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^{1/2}}=\frac{1}{4}\int u^{-1/2}du=\frac{1}{4}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]$
$\frac{1}{4}\left[2u^{1/2}\right]=\frac{2}{4}u^{1/2}=\frac{1}{2}\left(1+x^4\right)^{1/2}\ |_0^1$

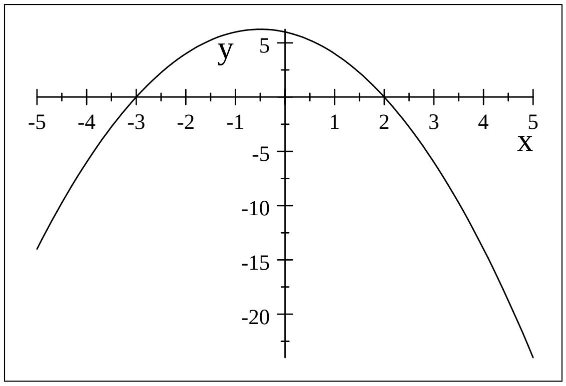
$\frac{1}{2}\left(1+(1)^4\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\left(1+(0)^4\right)^{1/2}$
$\frac{1}{2}(2)^{1/2}-\frac{1}{2}(1)^{1/2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}=0.207\,11$
$u=1+x^4$
$du=4x^3dx$

$3\left(2^{4/3}\right)=3\left(2^{3/3}2^{1/3}\right)=62^{1/3}=6\sqrt[3]{2}$

7.-$\int_0^1 e^{3t}dt=\frac{1}{3}e^{3t}\ |_0^1=\frac{1}{3}\left(e^{3(1)}-e^{3(0)}\right)$
$=\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}$

18 Área

Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=6-x-x^2$ y el eje x.

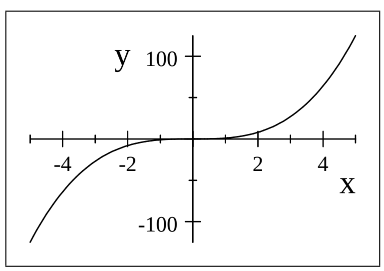


$6-x-x^2=0$
$-\left(x^2+x-6\right)=0$
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$x=-3 \quad x=2$
$\int_{-3}^{2}\left(6-x-x^2\right)dx=(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\mid_{-3}^{2}$
$6(2)-\frac{(2)^2}{2}-\frac{(2)^3}{3}-\left(6(-3)-\frac{(-3)^2}{2}-\frac{(-3)^3}{3}\right)$
$12-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+18+\frac{9}{2}-\frac{27}{3}=\frac{125}{6}$ unidades cuadradas

2.-Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=6-x-x^2$,el eje x y las curvas $x=-1$ y $x=1$
$6-x-x^2=0$
$-\left(x^2+x-6\right)=0$
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$x=-3 \quad x=2$
$\int_{-1}^{1}\left(6-x-x^2\right)dx=(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\mid_{-1}^{1}$

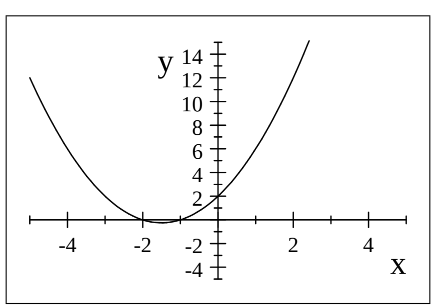
$6(1)-\frac{(1)^2}{2}-\frac{(1)^3}{3}-\left(6(-1)-\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\frac{34}{3}$
3.-Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=6-x-x^2$,el eje x y las curvas $x=-1$ y $x=3$

$\int_{-1}^{2}\left(6-x-x^2\right)dx-\int_{2}^{3}\left(6-x-x^2\right)dx=\frac{49}{3}$
4.- Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=x^3$ y el eje x, entre $x=-1$ y $x=2$



$-\int_{-1}^{0}x^3dx+\int_{0}^{2}x^3dx$
$-\frac{x^4}{4}\mid_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\mid_{0}^{2}=-\frac{0}{4}-\left(-\frac{(-1)^4}{4}\right)+\frac{(2)^4}{4}-\frac{0}{4}$

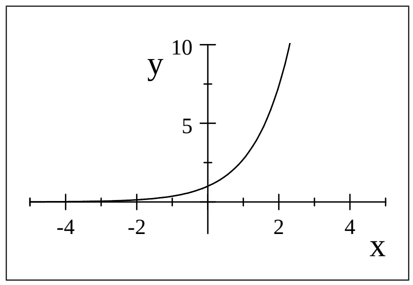
$=\frac{1}{4}+\frac{16}{4}=\frac{17}{4}$ Unidades cuadradas
4.- Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=x^2+3x+2$, el eje x y las rectas $x=-2$ y $x=1$.



$x^2+3x+2=0$
$(x+2)(x+1)=0$
$x=-2 \quad x=-1$

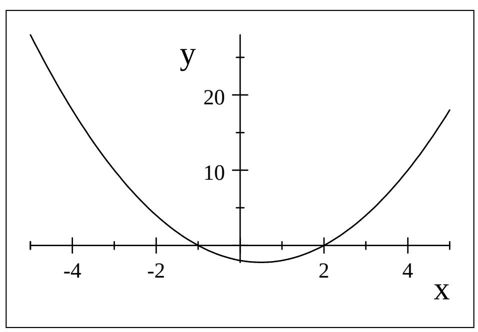
$-\int_{-2}^{-1}\left(x^2+3x+2\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(x^2+3x+2\right)dx=$
$-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)_{-1}^{1}=$
$-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{3(-1)^2}{2}+2(-1)-\left(\frac{(-2)^3}{3}+\frac{3(-2)^2}{2}+2(-2)\right)\right)=\frac{1}{6}$
$+\left(\frac{(1)^3}{3}+\frac{3(1)^2}{2}+2(1)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{3(-1)^2}{2}+2(-1)\right)\right)=\frac{14}{3}$
$=\frac{1}{6}+\frac{14}{3}=\frac{29}{6}$

5.-Encuentre el área de la región entre la curva $y=e^x$ y el eje x entre $x=1$ y $x=2$.

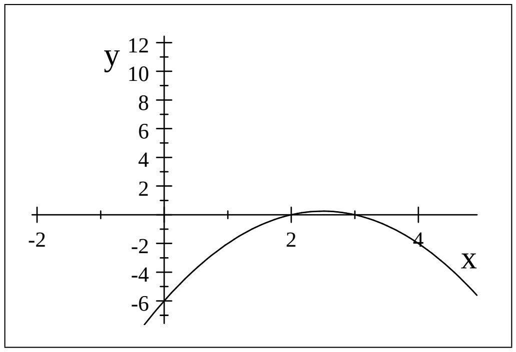


$\int_1^2 e^x dx = e^x \mid_1^2 = e^2 - e^1 = 4.6708$

6.- Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=x^2-x-2$ y la recta $y=0$ (el eje x) entre $x=-2$ y $x=2$.

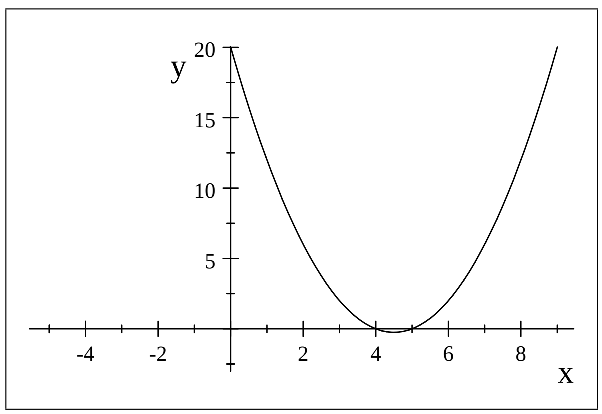


$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$
$x=2 \quad x=-1$
$\int_{-2}^{-1}\left(x^2-x-2\right)dx-\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx=$
$\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)_{-2}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)_{-1}^{2}$
$\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}-2(-2)\right)\right)=\frac{11}{6}$
$-\left(\frac{(2)^3}{3}-\frac{(2)^2}{2}-2(2)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right)\right)=\frac{9}{2}$
$\frac{11}{6}+\frac{9}{2}=\frac{19}{3}$
7.- Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=-x^2+5x-6$ y el eje x



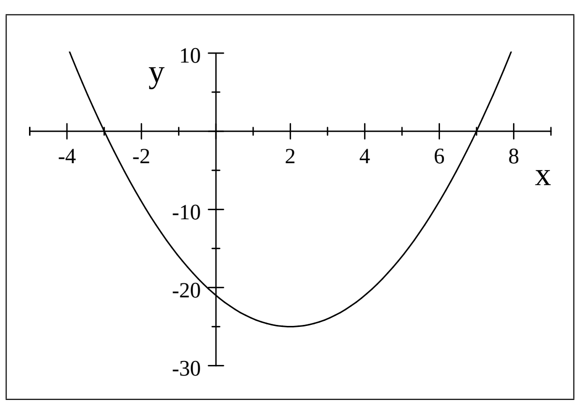
$-x^2+5x-6=0$
$-\left(x^2-5x+6\right)=0$
$x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$
$x=2 \quad x=3$
$\int_2^3 \left(-x^2+5x-6\right)dx == \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x\right)_2^3$
$-\frac{(3)^3}{3}+\frac{5(3)^2}{2}-6(3)=-\frac{9}{2}$
$-\left(-\frac{(2)^3}{3}+\frac{5(2)^2}{2}-6(2)\right)=\frac{14}{3}$
$\frac{14}{3}-\frac{9}{2}=\frac{1}{6}$

7.- Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=x^2-9x+20$,el eje x y las lineas $x=1$ y $x=2$



$x^2-9x+20=0$
$(x-4)(x-5)=0$
$x=4 \quad x=5$
$\int_1^2 \left(x^2-9x+20\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+20x\right)_1^2$
$\left(\frac{(2)^3}{3}-\frac{9(2)^2}{2}+20(2)\right)=\frac{74}{3}$
$-\left(\frac{(1)^3}{3}-\frac{9(1)^2}{2}+20(1)\right)=-\frac{95}{6}$
$=\frac{74}{3}-\frac{95}{6}=\frac{53}{6}$

8.- Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=x^2-4x-21$,el eje x y las lineas $x=-1$ y $x=1$

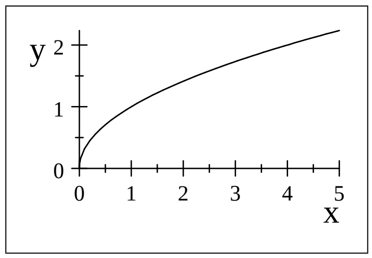


$x^2 - 4x - 21 = 0$
$(x+3)(x-7) = 0$
$x = -3 \quad x = 7$

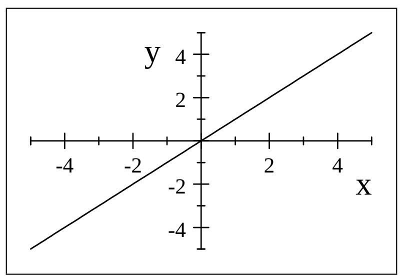
$-\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 4x - 21\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 21x\right)_{-1}^{1}$
$\left(\frac{(1)^3}{3} - 2(1)^2 - 21(1)\right) = -\frac{68}{3}$
$-\left(\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 21(-1)\right) = -\frac{56}{3}$
$= -\left(-\frac{68}{3} - \frac{56}{3}\right) = \frac{124}{3}$

19 |Área entre curvas

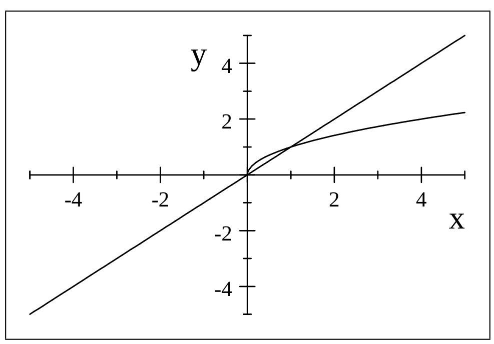
Ejemplo 1. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.
La gráfica de $y = \sqrt{x}$ es:



y la gráfica de $y = x$ es:



de forma de la gráfica combinada es



Ahora para encontrar los cruces de las gráficas igualamos las funciones

$$\sqrt{x} = x$$

para resolver la ecuación resultante elevamos al cuadrado toda la ecuación

$$\left(\sqrt{x} = x\right)^2$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x}\right)^2 &= x^2 \\ x &= x^2 \\ 0 &= x^2 - x \\ 0 &= x(x-1) \end{aligned}$$

de lo anterior hacemos

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x - 1 = 0$$

con lo que tenemos

$$x = 0 \text{ y } x = 1$$

estos valores son los limites para calcular el área pedida. La forma en que estructuramos la integral es la función que se encuentra mas arriba en el gráfico. Una forma de averiguar cual es la función que se encuentra mas arriba es evaluar en un punto dentro de la región que se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$ esto es para $y = \sqrt{x}$

$$\sqrt{0.5} = 0.707\,11$$

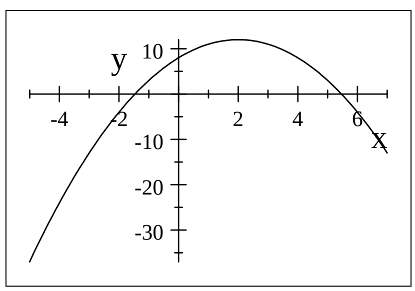
y para $y = x$

$$(.5) = .5$$

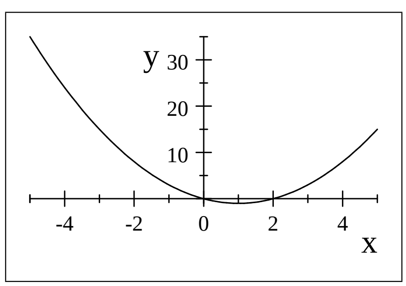
el valor mayor nos indica cual es la función que se encuentra más arriba, para nuestro caso es $0.707\,11$, que correponde a $y = \sqrt{x}$. Así nuestra integral la planteamos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right) dx &= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \mid_0^1 \\
&= \frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{(1)^2}{2} - \left(\frac{2}{3}(0)^{3/2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 0 \\
&= \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

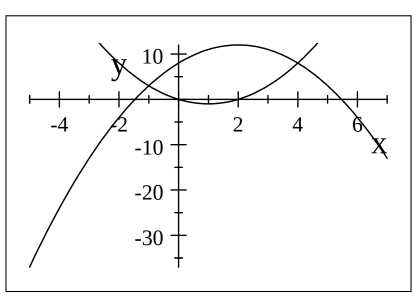
Ejemplo 2. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.
La gráfica de $y = 4x - x^2 + 8$



y la gráfica de $y = x^2 - 2x$



y la región solicitada es



Para encontrar donde se cruzan las funciones hacemos

$$4x - x^2 + 8 = x^2 - 2x$$

ahora resolvemos la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - 2x - 4x + x^2 - 8 \\
0 &= 2x^2 - 6x - 8 \\
0 &= 2\left(x^2 - 3x - 4\right) \\
\frac{0}{2} &= x^2 - 3x - 4 \\
0 &= x^2 - 3x - 4 \\
0 &= (x-4)(x+1)
\end{aligned}$$

de lo cual igualamos cada parentesis a cero

$$\begin{aligned}
(x-4) &= 0 \quad \text{y} \qquad (x+1) = 0 \\
x &= 4 \quad \text{y} \qquad x = -1
\end{aligned}$$

estos resultados son nuestros limites de integración. Ahora de manera adicional averiguamos cual función se encuentra por encima de la otra para esto evaluamos en un valor entre $x = -1$ y $x = 4$ las dos curvas de nuestro problema

para $y = 4x - x^2 + 8$ tenemos

$$y(0) = 4(0) - (0)^2 + 8 = 8$$

y para $y = x^2 - 2x$

$$y(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$$

el resultado mayor representa cual es la curva que se encuentra arriba. Así para plantear la integral hacemos la curva que se encuentra arriba menos la que se encuentra abajo

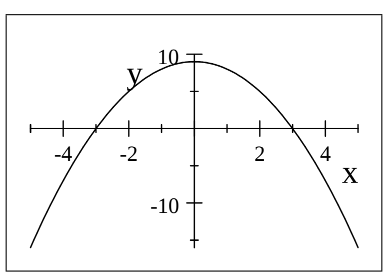
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} \left(4x - x^2 + 8 - \left(x^2 - 2x\right)\right) dx &= \int_{-1}^{4} \left(4x - x^2 + 8 - x^2 + 2x\right) dx \\
&= \int_{-1}^{4} \left(6x - 2x^2 + 8\right) dx \\
&= 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 8x \,\Big|_{-1}^{4}
\end{aligned}$$

evaluando los limites tenemos

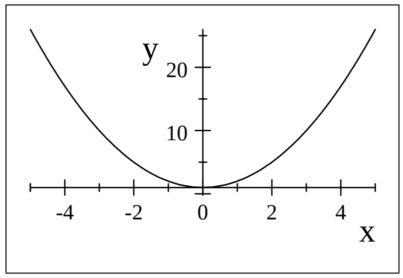
$$3(4)^2 - \frac{2}{3}(4)^3 + 8(4) - \left(3(-1)^2 - \frac{2}{3}(-1)^3 + 8(-1)\right) = \frac{125}{3}$$

Ejemplo 3. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$.

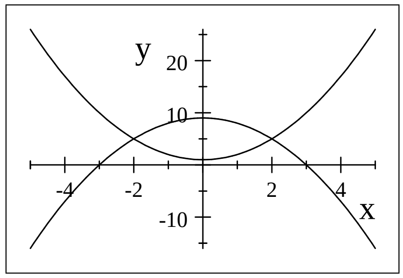
Graficando $y = 9 - x^2$ tenemos



y $y = x^2 + 1$



y la región limitada por las curvas es



$$
\begin{gathered}
9 - x^2 = x^2 + 1 \\
0 = x^2 + 1 - 9 + x^2 \\
0 = 2x^2 - 8 \\
0 = 2\left(x^2 - 4\right) \\
0 = x^2 - 4 \\
0 = (x+2)(x-2) \\
x = 2 \quad x = -2
\end{gathered}
$$

$9 - x^2$ tomar $x = 0 \to 9$
$x^2 + 1 \to 1$

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \left(9 - x^2 - \left(x^2 + 1\right)\right) dx &= \int_{-2}^{2} \left(9 - x^2 - x^2 - 1\right) dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right) dx
\end{aligned}
$$

$$\left(8x - \tfrac{2x^3}{3}\right)_{-2}^{2}$$

$$8(2) - \tfrac{2(2)^3}{3} - \left(8(-2) - \tfrac{2(-2)^3}{3}\right) = \tfrac{64}{3}$$

Ejemplo 4. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.
Igualando las ecuaciones tenemos

$$9 - x^2 = x^2 + 1$$

resolviendo

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 + 1 + x^2 - 9 \\
0 &= 2x^2 - 8 \\
0 &= 2\left(x^2 - 4\right) \\
0 &= x^2 - 4 \\
0 &= (x+2)(x-2)
\end{aligned}
$$

igualando cada parentesis a cero tenemos

$$
\begin{aligned}
x + 2 &= 0 \text{ y } x - 2 = 0 \\
x &= -2 \quad x = 2
\end{aligned}
$$

como los limites que tenemos del problema son $x = 0$ y $x = 3$, de los cruces que se encontraron solo se considera $x = 2$ que cae dentro de la región $[0, 3]$, el siguiente paso es averiguar que curva se encuentra por encima de la otra para ello consideramos las regiones que se forman con nuestros tres valores $x = 0, x = 2$ y $x = 3$.

Para la region entre $[0,2]$ evaluamos en $x=1$, por lo que para $y=9-x^2$ se tiene

$$9-(1)^2=9-1=8$$

y para $y=x^2+1$

$$(1)^2+1=1+1=2$$

por lo que en la región de $[0,2]$ la función que se encuentra arriba es $y=9-x^2$. Para la región $[2,3]$ tomamos el valor de 2.5 de manera que para $y=9-x^2$

$$9-(2.5)^2=9-6.25=2.75$$

y para $y=x^2+1$

$$(2.5)^2+1=6.25+1=7.25$$

por lo que el area se calcula de la siguiente manera

$$\begin{gathered}
\int_0^2 \left(9-x^2-\left(x^2+1\right)\right)dx+\int_2^3 \left(x^2+1-\left(9-x^2\right)\right)dx \\
\int_0^2 \left(9-x^2-x^2-1\right)dx+\int_2^3 \left(x^2+1-9+x^2\right)dx \\
\int_0^2 \left(8-2x^2\right)dx+\int_2^3 \left(2x^2-8\right)dx \\
8x-\frac{2}{3}x^3 \quad \Big|_0^2+\frac{2}{3}x^3-8x\ \Big|_2^3
\end{gathered}$$

evaluando se tiene

$$\begin{aligned}
&= 8(2)-\frac{2}{3}(2)^3-\left(8(0)-\frac{2}{3}(0)^3\right)+\frac{2}{3}(3)^3-8(3)-\left(\frac{2}{3}(2)^3-8(2)\right) \\
&= \frac{46}{3}
\end{aligned}$$

Encuentre el área de la región limitada para la curva $y^2=4x$ y $y=3$ y $x=0$.

20 Aplicaciones de la integral

20.1 Integración con condiciones iniciales

Si se conoce la razón de cambio, f', de la función f, entonces la función f misma es una antiderivada de f.

Si f debe tener cierto valor para un valor particular de x, es posible determinar el valor C y así determinar especificamente $f(x)$.

Problema con condición inicial

Ejemplo 1.

Si y es una función de x tal que $y'=8x-4$ y $y(2)=5$ encuentre $y(4)$

Solución

Aqui la condición inicial es $y(2)=5$, para encontrar y tenemos que integrar y'

$$\begin{aligned}
\int y' &= \int (8x-4)\,dx \\
y &= \int (8x-4)\,dx \\
y &= 8\frac{x^2}{2}-4x \\
y &= 4x^2-4x+c
\end{aligned}$$

$$y(2)=4(2)^2-4(2)+c=5$$

$$\begin{aligned}
16-8+c &= 5 \\
8+c &= 5 \\
c &= 5-8
\end{aligned}$$

$$c = -3$$

Así

$$y = 4x^2 - 4x - 3$$

Ahora $y\left(4\right)$

$$y\left(4\right) = 4\left(4\right)^2 - 4\left(4\right) - 3$$

$$= 45$$

Ejemplo 2. Dado que $y\,'' = x^2 - 6, y'\left(0\right) = 2$ y $y\left(1\right) = -1$, encuentre y.

$$\begin{aligned}
\int y\acute{} &= \int \left(x^2 - 6\right) dx \\
y' &= \frac{x^3}{3} - 6x + c \\
y'\left(0\right) &= \frac{0}{3} - 6\left(0\right) + c = 2 \\
c &= 2 \\
y' &= \frac{x^3}{3} - 6x + 2 \\
\int y' &= \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) \\
y &= \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 2x \\
&= \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + c \\
y\left(1\right) &= \frac{\left(1\right)^4}{12} - 3\left(1\right)^2 + 2\left(1\right) + c = -1 \\
&= \frac{1}{12} - 3 + 2 + c = -1 \\
&= \frac{1}{12} - 1 + c = -1 \\
c &= -1 + 1 - \frac{1}{12} \\
c &= -\frac{1}{12} \\
y &= \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Solución

Para evaluar la primera condición necesitamos encontrar $y\acute{}$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(x^2 - 6\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x + c$$

utilizando la condición inicial $y'\left(0\right) = 2$

$$y'\left(0\right) = \frac{\left(0\right)^3}{3} - 6\left(0\right) + c = 2$$

$$c = 2$$

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2$$

ahora para evaluar la segunda condición tenemos que obtener y

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2 \right) dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + c$$

Evaluamos la segunda condición $y(1) = -1$

$$y(1) = \frac{(1)^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + c = -1$$

$$y(-1) = \frac{1}{12} - 3 + 2 + c = -1$$

$$= c = -1 + \frac{11}{12}$$

$$c = -\frac{1}{12}$$

Así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

Ejemplo 3. Ingreso y educación

Algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona de un grupo urbano particular con x años de evaluación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Estimaron que la razón a la que el ingreso cambia respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2} \quad 4 \leq x \leq 16$$

donde $y = 28720$ cuando $x = 9$.

$y(9) = 28720$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{dx} &= \int \left(100x^{3/2}\right) \\
y &= 100\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + c \\
y &= 100\left(\frac{2}{5}\right)x^{5/2} + c \\
&= 40x^{5/2} + c \\
y(9) &= 40(9)^{5/2} + c = 28720 \\
&= 40\left((9)^{1/2}\right)^5 + c = 28720 \\
&= 40(3)^5 + c = 28720 \\
&= 40(243) + c = 28720 \\
&= 9720 + c = 28720 \\
&= c = 28720 - 9720 \\
c &= 19000 \\
y &= 100\left(\frac{2}{5}\right)x^{5/2} + 19000
\end{aligned}$$

Primero calculamos y

$$y = \int \frac{dy}{dx} = \int 100x^{3/2} dx$$

$$y = 100\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + c$$

$$y = 100\left(\frac{2}{5}\right)x^{5/2} + c$$

$$y = 40x^{5/2} + c$$

Ahora busquemos el valor de c con la condición inicial $y\left(9\right) = 28720$

$$y\left(9\right) = 40\left(9\right)^{5/2} + c = 28720$$

$$c = 28720 - 40\left(243\right)$$

$$c = 19000$$

con lo que y es

$$y = 40x^{5/2} + 19000$$

20.2 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal.

Ejemplo 4.

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2$$

encuentre la función de demanda.

Solución

Recordando que $r = pq$, $p = \frac{r}{q}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dr}{dq} &= \int \left(2000 - 20q - 3q^2\right) \\
r &= 2000q - 10q^2 - q^3 + c \\
r\left(0\right) &= 2000\left(0\right) - 10\left(0\right)^2 - \left(0\right)^3 + c = 0 \\
c &= 0 \\
r &= 2000q - 10q^2 - q^3 \\
p &= \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q} \\
p &= 2000 - 10q - q^2
\end{aligned}$$

Por lo que primero calculamos r y despues p.

$$r = \int \frac{dr}{dq} = \int \left(2000 - 20q - 3q^2\right) dq$$

$$= 2000q - 10q^2 - q^3 + c$$

La condición inicial aqui es cuando no se ha vendido nada y por tanto no hay ingreso esto es $r = 0, q = 0$.

$$0 = 2000\left(0\right) - 10\left(0\right)^2 - \left(0\right)^3 + c$$

$$c = 0$$

con lo que r es

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3$$

multiplicando ambos lados por $\frac{1}{q}$ se obtendra la función de demanda

$$\frac{r}{q} = p = 2000 - 10q - q^2$$

20.3 Determinación del costo a partir del costo marginal

Ejemplo 5.

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de $4000. (Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado). Si la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001\left(0.002q^2 - 25q\right) + 0.2$$

donde c es el costo total (en dólares) de producir q libras de producto por semana, encuentre el costo de producir 10 000 lb en 1 semana.

Para obtener c integramos

$$c(q) = \int \left[0.000001\left(0.002q^2 - 25q\right) + 0.2\right] dq$$

$$= 0.000001\left(0.002\frac{q^3}{3} - 25\frac{q^2}{2}\right) + 0.2q + c$$

como los costos fijos son constantes la condición inicial es $q = 0$, $c = 4000$, o $c(0) = 4000$.

$$c(0) = 0.000001\left(0.002\frac{(0)^3}{3} - 25\frac{(0)^2}{2}\right) + 0.2(0) + c = 4000$$

$$c = 4000$$

Ahora encontramos el costo de producir 10 000 lb

$$\begin{aligned} c(10000) &= 0.000001\left(0.002\frac{(10000)^3}{3} - .25\frac{(10000)^2}{2}\right) + 0.2(10000) + 4000 \\ &= 5416.7 \end{aligned}$$

20.4 Determinación de un cambio en los valores funcionales por medio de la integral definida.

Ejemplo 6

La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2$$

Si la producción actual es q=80 unidades por semana, ¿cuánto incrementar la producción a unidades por semana?

Solución

$$\int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)\, dq$$

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right)|_{80}^{100} \\ &= \left(0.3q^2 + 2q\right)|_{80}^{100} \\ &= 0.3(100)^2 + 2(100) - \left(0.3(80)^2 + 2(80)\right) \\ &= 0.3(10000) + 200 - (0.3(6400) + 160) \\ &= 3000 + 200 - 1920 - 160 \\ &= 1120 \end{aligned}$$

Lo anterior significa que si ce aumenta la porducción de 80 a 100 el costo incremento en 1120.

Ejemplo 7

Una empresa de telefonía celular le ofrece a usted una innovadora tarifa de precios. Cuando haga una llama, el costo marginal del $n-$ésimo minuto de la llamada es

$$c(t) = \frac{20}{t + 100}$$

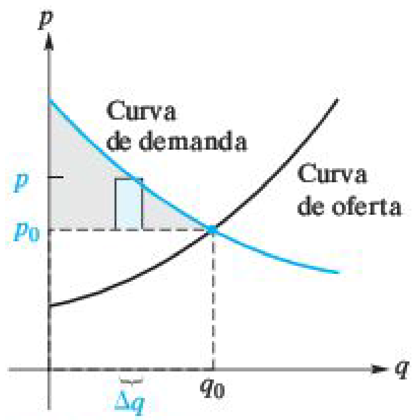
dólares por minuto. Si hace una llamada del celular que dura 60 minutos, ¿cuanto más le costará?

Solución

Se necesita calcular

$$\begin{aligned}
\int_0^{60} \frac{20}{t+100} dt &= (20 \ln |t+100|)_0^{60} \\
&= 20 \ln |60+100| - 20 \ln |0+100| \\
&= 20 \ln |160| - 20 \ln |100| \\
&= 101.5 - 92.103 \\
&= 9.397
\end{aligned}$$

20.5 Excedentes de los consumidores y de los productores

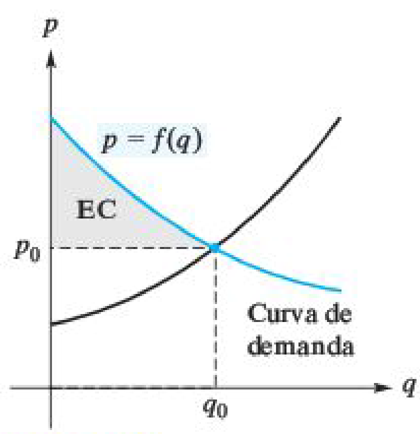


Beneficio a los consumidores para Δq unidades.

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] \, dq$$

ó

$$EC = \int_0^{q_0} [D - p_0] \, dq$$



Excedente de los consumidores.

$$\int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] \, dq$$

ó

$$\int_0^{q_0} [p_0 - O]\, dq$$

Ejemplo 1.

La función de demanda para un producto es

$$p = f(q) = 100 - 0.05q$$

donde p es el precio por unidad (en dólares para q unidades. La función de oferta es

$$p = g(q) = 10 + 0.1q$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo el equilibrio de mercado.

Solución

Primero determinamos el equilibrio

$$100 - 0.05q = 10 + 0.1q$$

agrupando terminos

$$\begin{aligned} 100 - 10 &= 0.1q + 0.05q \\ 90 &= 0.15q \end{aligned}$$

despejando q

$$\begin{aligned} \frac{90}{0.15} &= q \\ 600 &= q \end{aligned}$$

este resultado es q_0, para encontrar el valor p_0 sustituimos en alguna de nuestras funciones

$$10 + 0.1(600) = 70 = p_0$$

así la formual para el excendente del consumidor es

$$\int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\, dq = \int_0^{600} (30 - 0.05q)\, dq$$

resolviendo tenemos

$$\left(30q - \frac{0.05q^2}{2}\right) |_0^{600} = \left(30q - 0.025q^2\right) |_0^{600}$$

evaluando

$$\begin{aligned} &= 30(600) - 0.025(600)^2 - \left(30(0) - 0.025(0)^2\right) \\ &= 18000 - 0.025(360000) - 0 \\ &= 18000 - 9000 \\ &= 900 \end{aligned}$$

y para el excedente del productor se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{600} (70 - (10 + 0.1q))\, dq &= \int_0^{600} (70 - 10 - 0.1q)\, dq \\ &= \int_0^{600} (60 - 0.1q)\, dq \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} 60q - \frac{0.1q^2}{2} &\quad |\ {}_0^{600} \\ 60q - 0.05q^2 &\quad |\ {}_0^{600} \end{aligned}$$

evaluando

$$
\begin{aligned}
&= 60\,(600) - 0.05\,(600)^2 - \left(60q - 0.05\,(0)^2\right) \\
&= 36000 - 0.05\,(360000) - 0 \\
&= 36000 - 18000 \\
&= 18000
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.
La ecuación de demanda para un producto es

$$q = f(q) = \frac{90}{p} - 2$$

y la ecuación de oferta es $q = g(p) = p - 1$.Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio de mercado.
Solución
Dado que para nuestra formula del EC la variable que se encuentra despejada es p desjeremos p de las ecuaciones de demanda y oferta, para la demanda

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{90}{p} - 2 \\
q + 2 &= \frac{90}{p} \\
p\,(q+2) &= 90 \\
p &= \frac{90}{q+2}
\end{aligned}
$$

y para la oferta

$$
\begin{aligned}
q &= p - 1 \\
q + 1 &= p
\end{aligned}
$$

asi nuestras nuevas ecuaciones son para la demanda $p = \frac{90}{q-2}$ y para la oferta $p = q + 1$. Para determinar el equilibrio hacemos

$$\frac{90}{q+2} = q + 1$$

despejando

$$
\begin{aligned}
90 &= (q+1)\,(q+2) \\
90 &= q^2 + 3q + 2 \\
0 &= q^2 + 3q + 2 - 90 \\
0 &= q^2 + 3q - 88
\end{aligned}
$$

para resolver esta ecuación cuadratica utilizaremos la ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4\,(1)\,(-88)}}{2\,(1)} \\
q &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2} \\
q &= \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{2} \\
q &= \frac{-3 \pm 19}{2} \\
q_1 &= \frac{-3 + 19}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\
q_2 &= \frac{-3 - 19}{2} = \frac{-22}{2} = -11
\end{aligned}
$$

Para fines economicos solo nos interesa el valor positivo y es $q_0 = 8$ y con este valor determinamos p_0 sutituyendo en alguna de nuestras ecuaciones

$$(8) + 1 = 9 = p_0$$

asi el EC es

$$\begin{aligned} EC &= \int_0^8 \left(\frac{90}{q+2} - 9\right) dq \\ &= 90 \ln |q+2| - 9q \mid_0^8 \\ &= 90 \ln |8+2| - 9(8) - (90 \ln |0+2| - 9(0)) \\ &= 90 \ln |10| - 72 - 90 \ln |2| + 0 \\ &= 90(2.3026) - 72 - 90(0.69315) \\ &= 207.23 - 72 - 62.384 \\ &= 72.846 \end{aligned}$$

y el EP

$$\begin{aligned} EP &= \int_0^8 (9 - (q+1))\, dq \\ &= \int_0^8 (9 - q - 1)\, dq \\ &= \int_0^8 (8 - q)\, dq \\ &= \left(8q - \frac{q^2}{2}\right) \mid_0^8 \\ &= 8(8) - \frac{(8)^2}{2} - \left(8(0) - \frac{(0)^2}{2}\right) \\ &= 64 - \frac{64}{2} - 0 \\ &= 64 - 32 \\ &= 32 \end{aligned}$$

21 Valor promedio de una función

El promedio o la media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Ejemplo.1

Una cuenta de ahorro en la Unión de Crédito Popular paga 3% de interés de capitalización anual y al final del año se obtiene un bono de 1% del saldo promedio de la cuenta durante el año. Si usted deposita 10 000 dórales al inicio del año ¿qué valor promedio tendrá la cuenta y un bono por qué cantidad obtiene?

Solución

Para resolver el problema se toma en cuenta la formula de capitalización

$$S = Pe^{rt}$$

misma que da como resultado el valor total después de t años de inversión inicial de P compuesta continuamente (creciemiento exponencial) a una tasa anual r.

Para nuestro problema $P = 10000$ y $r = 0.03$ por lo que

$$S = 10000e^{0.03t}$$

por lo que el valor promedio de la cuenta se calcula

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 \left(10000e^{0.03t}\right) dt \\
&= \frac{10000}{0.03} e^{0.03t} \mid_0^1 \\
&= 333333.33 e^{0.03t} \mid_0^1 \\
&= 333333.33 e^{0.03(1)} - 333333.33 e^{0.03(0)} \\
&= 343484.84 - 333333.33 \\
&= 10151.51
\end{aligned}$$

este resultado es el saldo promedio. Para encontrar el bono hacemos

$$0.01\,(10151.51) = 101.52$$

Ejemplo 2

Una inversión de \$3000 gana a una tasa anual de 5% compuesto continuamente. Despues de t años.Encuentre el valor promedio a dos años.

Solución

La función de crecimiento es

$$S = 3000e^{0.05t}$$

ahora integrando

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-0}\int_0^2 \left(3000e^{0.05t}\right) dt &= \frac{1}{2}\left[\frac{3000}{0.05}e^{0.05t}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[60000e^{0.05(2)} - \left(60000e^{0.05(0)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}[66310 - 60000] \\
&= \frac{1}{2}(6310) \\
&= 3155
\end{aligned}$$

22 Algebra lineal

22.1 Dimension de una matriz

Determine la dimensión de las siguientes matrices

1.- $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

la matriz tiene dos renglones y dos columnas por lo que su dimensión es 2×2

2.- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

la matriz tiene tres renglones y dos columnas por lo que su dimensión es 3×2

3.- $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

la matriz tiene dos renglones y tres columnas por lo que su dimensión es 2×3

4.- $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

la matriz tiene tres renglones y una columna por lo que su dimensión es 3×1

5.- $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

la matriz tiene un renglon y tres columnas por lo que su dimensión es 1×3

Ejercicios

Dimensión de una matriz

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ dimensión=

$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ dimensión= $\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dimensión=

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dimensión= $\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ dimensión=

22.2 Suma de matrices

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ encuentre $A + B$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+8 \\ 4-1 & 5-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & -2 \\ -1 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ encuentre $A + B$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & -2 \\ -1 & -6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 4+6 & 5-3 \\ 7+1 & 9+4 & -2-2 \\ -1+0 & -6+1 & 7-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 10 & 2 \\ 8 & 13 & -4 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de suma de matrices

1.- $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2.- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

23 Multiplicación por un escalar

1.-Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ determine $2A$

Solución

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(2) & (2)(-4) \\ 2(2) & (2)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.-Sea $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ determine $5B$

Solución

$$5B = 5\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5)(-3) & (5)(2) & (5)(1) \\ (5)(0) & (5)(1) & (5)(-3) \\ (5)(1) & (5)(4) & (5)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 5 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

3.- Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ Determine $3A - 5B$

Solución

$$3A - 5B = 3\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -27 \\ 1 & -17 \end{bmatrix}$$

4.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ y Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ Determine $2A + 4B$

Solución

$$
\begin{aligned}
2A+4B &= 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \\ 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 16 & -4 & 4 \\ -12 & 8 & 16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 18 \\ 26 & -10 & 8 \\ -10 & 10 & 28 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejercicios multiplicación por un escalar

1.- Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ realice $3B-2A$

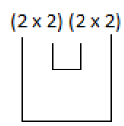
2.- Sean $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ realice $5B-3A$

24 Multiplicación

1. Sean $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ realice AB y BA.

Solución

Primero verificamos la dimensión de las matrices, la dimensión de $A = 2\times 2$ y la dimensión de $B = 2\times 2$, acomodamos las dimensiones para asegurarnos que se pueda realizar la multiplicación



los dos numeros que quedan en el centro de nuestra agrupación deben conincidir para poder realizar la multiplicación, y los números que quedaron a los extremos dan como resultado la matriz resultante de la multplicación a realizar. Para este ejemplo dado que los numeros centrales son 2 y 2 si se puede realizar la multiplicación que se pide y como resultado se obtendra una matriz de 2×2.

La operación multiplicación se realiza renglon por columna como acontinuación de muestra

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -28 & 29 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2)(0)+(1)(-4) & (-2)(5)+(1)(2) \\ (3)(0)+(7)(-4) & (3)(5)+(7)(2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0-4 & -10+2 \\ 0-28 & 15+14 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -28 & 29 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (0)(-2)+(5)(3) & (0)(1)+(5)(7) \\ (-4)(-2)+(2)(3) & (-4)(1)+(2)(7) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+15 & 0+35 \\ 8+6 & -4+14 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 15 & 35 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.- Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ realice AB

$$
\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 9-2 & 3+0 \\ 18-4 & 6+0 \end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$$

3.- Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ realice AB

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2+0 & -3-2 \\ 6+0 & 9-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

4.- Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ realice AB

$$\underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3-6+0 & 2-4-2 & 1-3+0 \\ 6+18+0 & 4+12-1 & 2+9+0 \\ 0-6+0 & 0-4+0 & 0-3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 24 & 15 & 11 \\ -6 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

5.- Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ realice AB

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 14 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

6.- Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ realice AB

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 33 \\ 12 \end{bmatrix}$$

25 Transpuesta $\quad A^T \quad o \quad A'$

B=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

26 Determinante de 2x2 $\quad \det A = |A|$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Calcule el determinante de las siguientes matrices

1.- $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = (-3)(-2) - (2)(0)$

$= (6) - (0) = 6$

2.- $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (-2)(1) - (-1)(4)$

$= -2 - (-4) = -2 + 4$

$= 2$

3.- $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (2)(-1) - (1)(-2)$

$= (-2) - (-2)$

$= -2 + 2 = 0$

Ejercicios

1.- $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 22$

2.- $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 7$

3.- $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -11$

27 Determinante 3x3

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = iae - ibd - cge - afh + bfg + cdh$$

1.- $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Para evitar emplear la formula anterior podemos expandir las primeras dos columnas como sigue

$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ahora consideramos las siguientes diagonales

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} -3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

multiplicamos las diagonales y las sumamos

$(1)(-2)(-1) + (-1)(4)(-3) + (1)(2)(0) = 2 + 12 + 0 = 14$

este resultado lo multiplicamos por $-$ como regla por lo que el resultado es -14

seguimos con las siguientes diagonales

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} -3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

multiplicamos estas diagonales

$(-3)(-2)(1) + (0)(4)(1) + (-1)(2)(-1) = (6) + 0 + 2$

$= 6 + 2 = 8$

este resultado se queda asi. Por ultimo sumamos los resultados

$$-14 + 8 = -6$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = -(2 + 12 + 0) + 6 + 2 + 0 = -6$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, determinant: -6
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, determinant: -8

28 Matriz identidad

Para matrices de dimensión de dos por dos la matriz identidad es
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Para matrices de dimensión de tres por tres la matriz identidad es
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28.1 Resolución de un sistema de ecuaciones mediante Gauss-Jordan

28.2 Formas generales de una matriz de 2x2 y 3x3

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Ejemplo 1
Encuentre la solución si existe del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -8 \\ 3x + 4y &= -5 \end{aligned}$$

, Solution is: $[x = 1, y = -2]$
Primero reescribimos el sistema como una matriz de coeficientes
$\begin{matrix} 2 & 5 & -8 \\ 3 & 4 & -5 \end{matrix}$
ahora lo que tenemos que hacer es mediante manipulación algebraica llegar a la matriz identidad de 2x2, para ello empezamos diviendo el primer renglon por 2 para convertir la posición a_{11} en 1
$\begin{matrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{matrix}$
ahora con el uno que se encuentra en la posición a_{11} hacemos un cero en la posición a_{21}, con la indicación $-3R_1 + R_2 = R_2$
con lo que tomamos el renglon 1 y lo multiplicamos por -3
$-3R_1 = -3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{-15}{2} & 12 \end{bmatrix}$
y esto se lo sumamos al renglon 2
$\begin{bmatrix} -3 & \frac{-15}{2} & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & 7 \end{bmatrix}$
este resultado es el nuevo renglon 2 con lo que tenemos
$\begin{matrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 7 \end{matrix}$
ahora en la posición a_{22} se tiene que hacer un 1 para ello multiplicamos el renglon 2 por el reciproco del número que se encuentra en la posición 2 esto es $-\frac{2}{7}R_2 = R_2$
$-\frac{2}{7}R_2 = -\frac{2}{7} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
asi la matriz queda como
$\begin{matrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$
como último paso se tiene que hacer cero en la posición a_{12} para ello hacemos $-\frac{5}{2}R_2 + R_1 = R_1$
$-\frac{5}{2}R_3 = -\frac{5}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$
y sumamos a R_1
$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
así nuestra matriz queda de la siguiente manera
$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$
asi nuestra solución es $x = 1$ y $y = -2$

Ejemplo 2
Encuentre la solución si existe del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 0 \\ x + 5y &= -8 \end{aligned}$$

primero escribimos la matriz de coeficientes
$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$
ahora podemos intercambiar los renglones para que en la posición a_{11} nos quede un 1
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$
sigue hacer un cero en la posición a_{21} para ello planteamos $-3R_1 + R_2 = R_2$
$-3R_1 = -3 \begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 & 24 \end{bmatrix}$
$-3R_1 + R_2 = \begin{bmatrix} -3 & -15 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 24 \end{bmatrix}$
con lo que la matriz ahora queda
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & -8 & 24 \end{bmatrix}$
sigue hacer un uno en la posición a_{22} dividiendo entre -8 el renglon dos esto es $-\frac{1}{8}R_2 = R_2$
$-\frac{1}{8}R_2 = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
así la matriz ahora se ve como
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
por último resta hacer cero en la posición a_{12} y la indicación es $-5R_2 + R_1 = R_1$
$-5R_2 = -5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$
$-5R_2 + R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
con esto la matriz final es
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
y las soluciones al sistema son $x = 7$ y $y = -3$.
Encuentre la solución si existe del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 4x + 4y &= 9 \end{aligned}$$

, No solution found.
Encuentre la solución si existe del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -4 \\ 8x + 20y &= -16 \end{aligned}$$

, Solution is: $\left[x = -\frac{5}{2}y - 2\right]$
Encuentre la solución si existe del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 4 \\ 5x - y + z &= 10 \\ x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 5y - z &= -9 \\ 5x - 2y + 3z &= 17 \\ 4x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 5y - z &= -9 \\ 5x - 2y + 3z &= 17 \\ 4x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ y-z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ y-3z &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre la solución si existe del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= -8 \\ 3x+y-z &= 3 \\ x-2y-5z &= 5 \end{aligned}$$

29 Matriz inversa A^{-1}

Ejemplo 1.

Cacule la matriz inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Para verificar si la matriz tiene inversa primero calculamos $\det A$

$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6 = -2$

para que una matriz tenga inversa el determinante debe ser diferente de cero, para nuestro caso el determinante fue -2 por lo tanto si tiene matriz inversa.

Para calcular la matriz inversa existen dos métodos.

Método 1 por eliminación gaussiana

El primer paso es añadirle a nuestra matriz la matriz identidad como sigue

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora comenzamos la eliminación, dado que la posición a_{11} ya es un uno, sigue hacer un cero en la posición a_{21} para ello hacemos $-3R_1 + R_2 = R_2$

$-3R_1 = -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$-3R_1 + R_2 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = R_2$

así nuestra nueva matriz es

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

ahora sigue hacer un uno en la posición a_{22} para eso planteamos $-\frac{1}{2}R_2 = R_2$

$-\frac{1}{2}R_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

con lo que nuestra matriz ahora se ve

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

por último paso se tiene que hacer un cero en la posición a_{12} con la indicación $-2R_2 + R_1 = R_1$

$-2R_2 = -2\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$-2R_2 + R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

nuestra última matriz queda como sigue

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

la parte

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ es la matriz inversa

así $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Comprobación

$AA^{-1} = I$

donde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-2)+2\left(\frac{3}{2}\right) & 1(1)+2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 3(-2)+4\left(\frac{3}{2}\right) & 3(1)+4\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método 2

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[adj(A)]$

$adj(A)$ =adjunta de A

si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la $adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Para nuestro ejemplo ya calculamos $\det A = -2$ asi que para aplicar la formula de la inversa necesitamos calcular su adjunta

nuestra matriz es

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

esta respuesta es la misma que al resolver con eliminación gaussiana.

30 Aplicaciones

Ejemplo. Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para cinco casas estilo rústico, siete estilo moderno y 12 estilo colonial.

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Las materias primas que se utilizan en cada tipo de casa son acero,madera, vidrio, pintura y mano de obra.

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
Rústico	5	20	16	7	17
Moderno	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

El contratista desea calcular la cantidad de cada materia prima necesaria para satisfacer todos sus periodos.

$$\begin{aligned} QR &= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo. Del ejemplo anterior suponga que el contratista le interesa conocer los costos que tendrá que pagar por estos materiales. Suponga que el acero cuesta \$2500 por unidad, la madera \$1200 por unidad y el vidrio, la pintura y la mano de obra cuestan \$800, \$150 y \$1500 por unidad, respectivamente.

Solución

Los datos se pueden agrupar en un vector columna de costo

$$C = \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Para calcular el costo de cada tipo de casa multiplicamos

$$
\begin{aligned}
RC &= \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 75\,850 \\ 81\,550 \\ 71\,650 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

El costo total de la materia prima para todas las casas está dado por

$$
Q\,(RC) = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75\,850 \\ 81\,550 \\ 71\,650 \end{bmatrix} = [1809\,900]
$$

Ejemplo. a) Tres inversionistas I_1, I_2, I_3, poseen cada uno de ellos cierto número de porciones de cuatro acciones, S_1, S_2, S_3 y S_4, de acuerdo con la matriz A. La matriz B contiene el valor presente V de cada porción de cada acción. Encuentre AB e interprete el significado de sus elementos.

inversionistas

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \quad A = & \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 10 \\ 100 & 50 & 40 & 40 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Acciones

$$
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \quad B = \begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.8 \\ 42.75 \end{bmatrix}
$$

b) La matriz C contiene el cambio en el valor de cada sección durante la última semana. Encuentre AC e interprete el significado de sus elementos.

Acciones

$$
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \quad C = \begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix}
$$

Solución

a)

Como A es una matriz de 3x4 y B es una matriz de 4x1, el producto AB es una matriz de 3x1:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.8 \\ 42.75 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6432.\,25 \\ 6659.0 \\ 10754.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

El primer elemento del producto AB, 6432.25, representa el valor total que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones.

b)

$$
\begin{aligned}
AC &= \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7.\,25 \\ 61.0 \\ 53.0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

El primer elemento del producto AC, -7.25, indica que el valor que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones bajo \$7.25 en la última semana.

Ejemplo. Una empresa dispone de 27.200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Despues de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A,B,C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, y la cantidad para el curso C debe ser 4, ¿cuántos empleados siguen cada curso?