

# Soluciones de la Ecuación de Laplace

1<sup>st</sup> Kenneth Aldana

Departamento de física

Universidad del Valle de Guatemala  
Guatemala, Guatemala,  
ald18435@uvg.edu.gt

2<sup>nd</sup> Santiago Galicia

Departamento de física

Universidad del Valle de Guatemala  
Guatemala, Guatemala,  
gal18483@uvg.edu.gt

3<sup>rd</sup> Emilio Gordillo

Departamento de física

Universidad del Valle de Guatemala  
Guatemala, Guatemala,  
gor18062@uvg.edu.gt

**Resumen**—El potencial eléctrico es una cantidad importante en la electrostática y su uso se ha extendido en diferentes áreas prácticas debido a la sencillez de su medición, posee un carácter escalar que facilita su utilización y cálculos, por lo que conocer el potencial dentro de un cuerpo resulta de gran interés para cualquier ingeniero.

Para lograr esto, en el documento se presenta las soluciones generales por el método de separación de variables de la ecuación de Laplace para 3 sistemas de coordenadas, para culminar cada sección, al final de cada sistema se presenta la solución de Laplace en diferentes condiciones.

## I. INTRODUCCIÓN

Laplace(1749-1827) fue un astrónomo, matemático y físico francés desarrollo cosas como la continuación de la mecánica newtoniana, la transformada de Laplace, y dio a conocer los fundamentos de la ecuación que lleva su nombre en honor. La ecuación de Laplace es tan importante y usada en la electrostática que la mayoría de cosas de electrostática se recae en el estudio de la ecuación de Laplace ya que el potencial eléctrico es la magnitud medible principal, en la antigüedad esta ecuación fue usada como control, a pesar de que se conocía su importancia, no se tomaba como algo totalmente importante en mejorar una red geodésica. Esta ecuación tan importante viene dada por una deducción de la ecuación de Poisson pero en un espacio libre de cargas. Se realizaron las variantes en distintas coordenadas de la ecuación de Laplace, se realizaron un total de 6 distintas variantes, 3 en coordenadas cartesianas, 2 en coordenadas esféricas y 1 en coordenadas cilíndricas, para cada sistema de coordenadas se dedujo la solución general mediante separación de variables, las simulaciones de cada problema se recrearon mediante la herramienta Matlab con su versión mas reciente y mediante un plot se generaron las gráficas correspondientes de potencial y de campo eléctrico, entre otras.

## II. OBJETIVOS

### II-A. Generales

- Deducir la ecuación de Laplace para coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.
- Visualizar e interpretar las simulaciones de las soluciones de la ecuación de Laplace.

### II-B. Específicos

- Implementar de manera adecuada la herramienta gráfica para visualizar el potencial y el campo eléctrico obtenidos de las soluciones de la ecuación de Laplace.
- Comprobar las propiedades de la ecuación de Laplace.

## III. MARCO TEÓRICO

Pierre Laplace fue un importante actor dentro de las matemáticas y físicas, desarrollo importantes cosas, en distintos ámbitos, estos siendo astronomía, matemática y física, nació en Francia en 1749 y murió en el mismo país en 1827, benefició grandemente mediante publicaciones como la Teoría analítica de las probabilidades en 1812 y exposición del sistema del mundo en 1796, así mismo benefició a la electrostática brindando la ecuación que lleva su nombre en honor. [1]

La ecuación de Laplace es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico.

La ecuación de Laplace abarca mucho, dado que, como se aplica a todos los casos en los cuales la densidad de carga volumétrica es cero, asegura que cualquier configuración concebible de electrodos o conductores produce un campo para el cual  $\nabla^2\phi = 0$ . Todos estos campos son diferentes, con distintos valores de potencial y diferentes razones de cambio espaciales, sin embargo para cada una de ellas  $\nabla^2\phi = 0$ . Puesto que todo campo (si  $\rho_v = 0$ ) satisface la ecuación de Laplace, parece imposible esperar que se pueda invertir el procedimiento y usar tal ecuación para encontrar un campo específico en el que se tenga interés. Sí puede lograrse, sólo que para ello se requiere más información, y la ecuación de Laplace debe resolverse sujeta a ciertas condiciones de frontera tales que permitan que el problema se desarrolle. [4]

.

Dado que el potencial es una función escalar, este enfoque tiene ventajas con respecto a tratar de calcular el campo eléctrico directamente. [5] Una vez que se ha calculado el potencial, se puede calcular el campo eléctrico tomando el gradiente del potencial.

## IV. DISEÑO EXPERIMENTAL

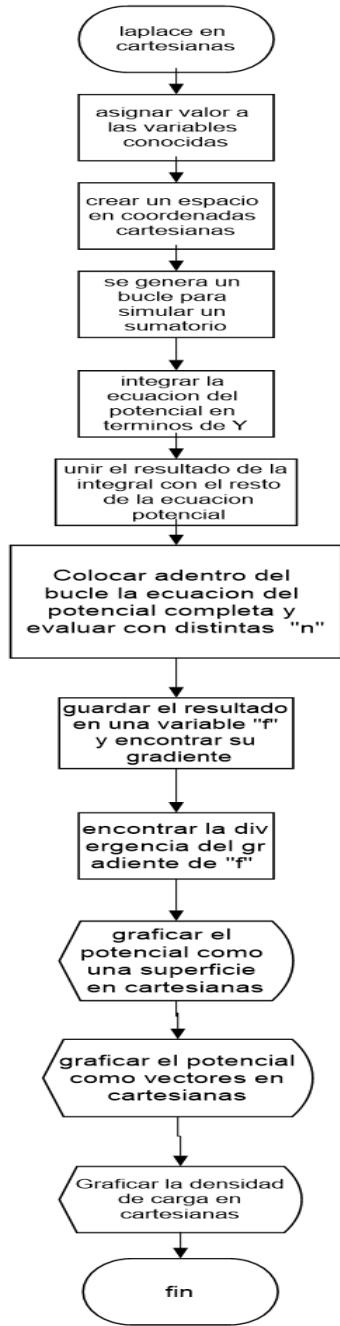
Para crear la simulación y visualizar el potencial eléctrico, el campo eléctrico y las densidades de carga se utilizo la

herramienta Matlab en su versión R2020a

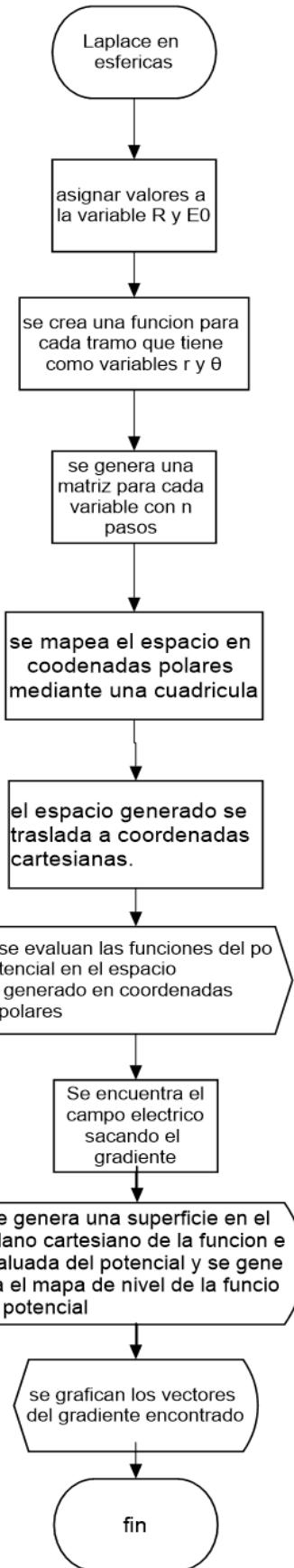
Para todas las simulaciones se genera un espacio en las coordenadas indicadas por cada problema, luego se ingresa la solución de la ecuación de Laplace encontrada al programa, se prueba dentro del espacio la ecuación y se guarda en una variable, si es necesario se transforma la ecuación de coordenadas polares a coordenadas cartesianas; por último se gráfica el potencial como una función de la forma  $Z = f(x, y)$ .

A continuación se encuentran los diagramas de flujo de la programación que conllevo la simulación.

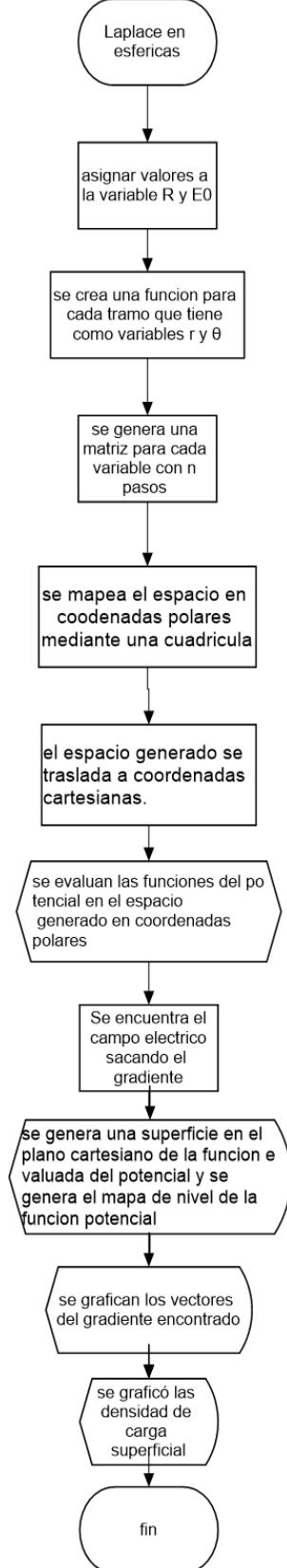
- Programación en coordenadas cartesianas:



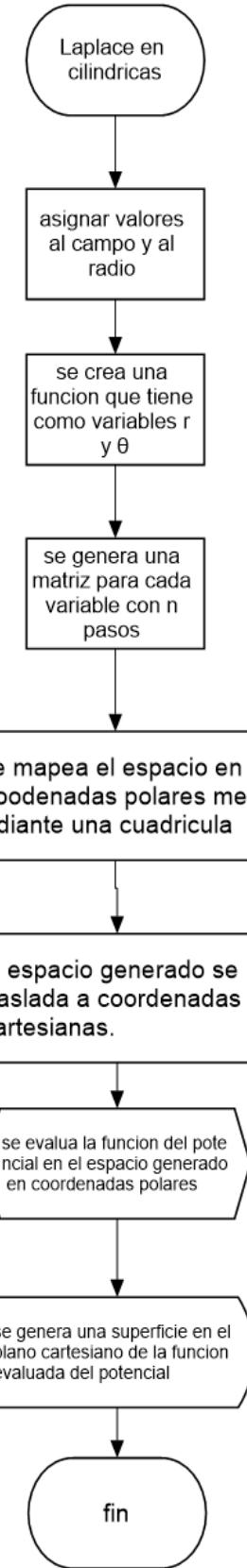
- Programación en coordenadas esféricas No.1:



■ Programación en coordenadas esféricas No.2:



■ Programación en coordenadas cilíndricas:



## V. ECUACIONES

Para Laplace en coordenadas rectangulares:

Solución general (dos dimensiones):

$$Q(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(ky) + D \sin(ky)) \quad (1)$$

Solución general (tres dimensiones):

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= (A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x))(C \cos(\eta y) + \\ &D \sin(\eta y))(E e^{\sqrt{(\nu)^2 + (\eta)^2} z} + F e^{-\sqrt{(\nu)^2 + (\eta)^2} z}) \end{aligned} \quad (2)$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (3)$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (5)$$

$$\delta_\eta\phi_{in} - \delta_\eta\phi_{out} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (7)$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8)$$

### V-A. Abreviaturas y acrónimos

- in = adentro de
- out = afuera de
- mid = en medio de
- $\vec{E}$  = campo eléctrico
- $\phi$  = potencial eléctrico
- $\sigma$  = densidad de carga superficial
- $\epsilon_0$  = magnitud de la constante Épsilon sub cero.

### V-B. Unidades

En todos los cálculos se utilizaron unidades del sistema internacional de medidas.

A continuación se describen algunos de ellos:

- Campo Eléctrico: Volt por metro: ( $\frac{V}{m}$ )
- Potencial Eléctrico: Volt: (V)
- Densidad de carga superficial: Coulomb por metro: ( $\frac{C}{m}$ )

## VI. RESULTADOS

### VI-A. Figuras

En anexos se encuentra un apartado para las gráficas de los campos eléctricos difíciles de observar.

## LAPLACE EN COORDENADAS RECTANGULARES EJERCICIO 1.1

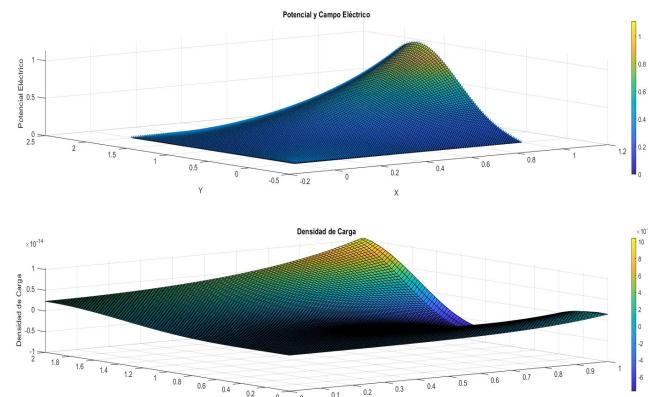


Figura 1. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga para  $n = 2$

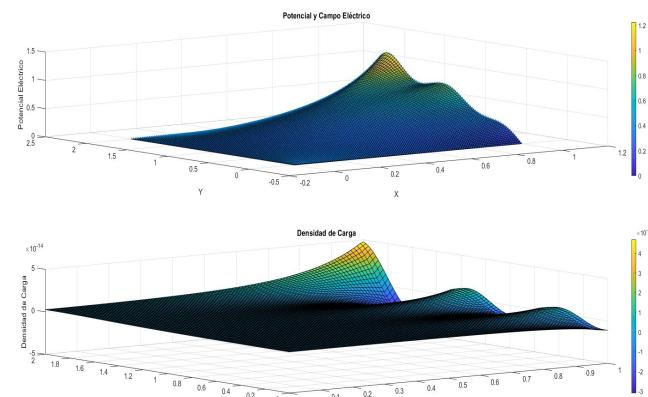


Figura 2. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 5$

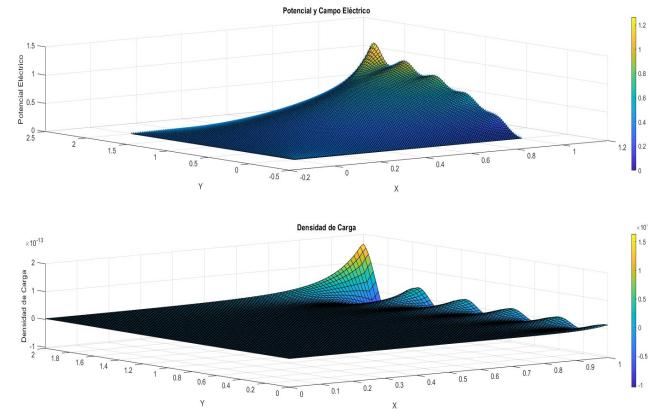


Figura 3. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 10$

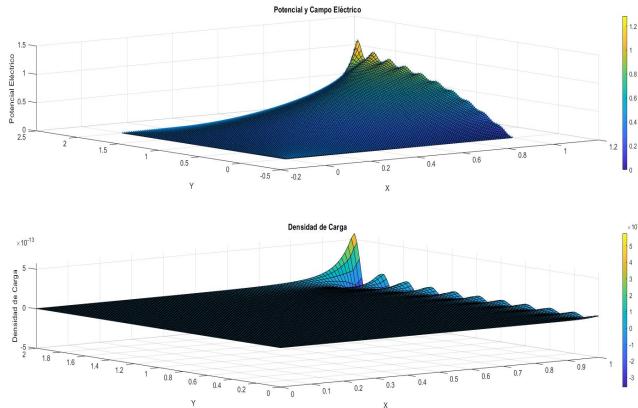


Figura 4. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 20$

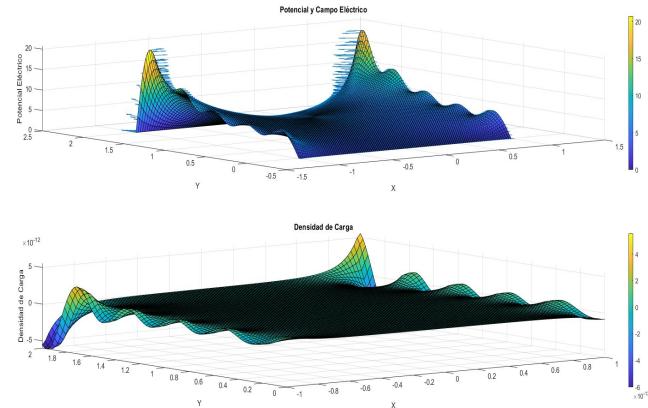


Figura 7. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 10$

### EJERCICIO 1.2

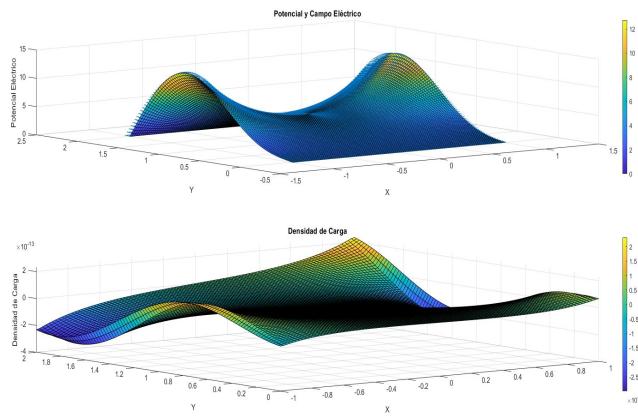


Figura 5. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga para  $n = 2$

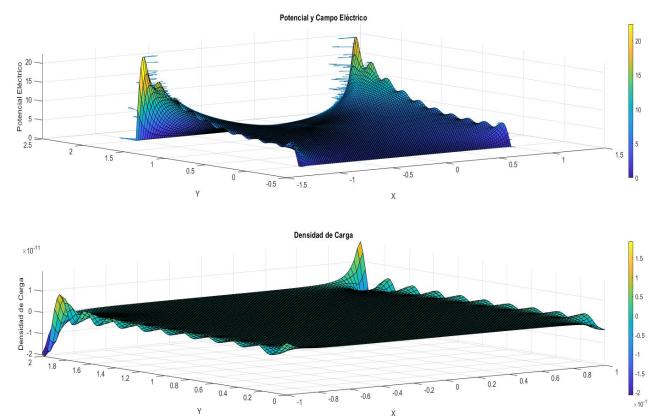


Figura 8. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 20$

### EJERCICIO 2.1

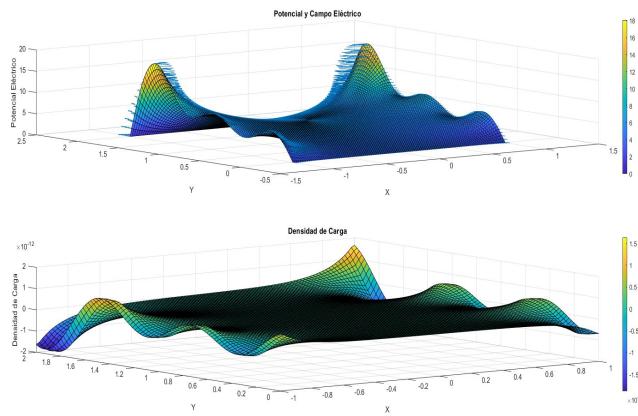


Figura 6. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 5$

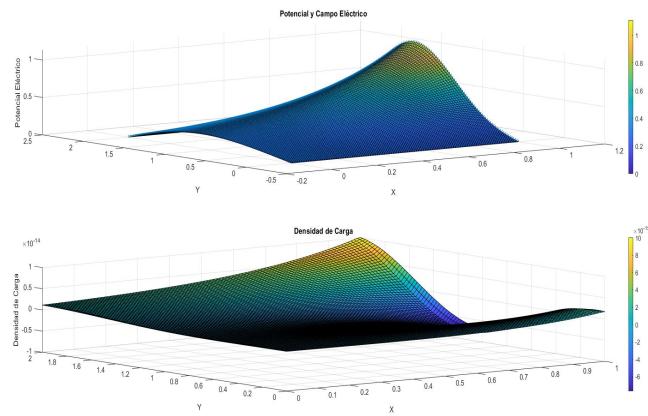


Figura 9. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga para  $n = 2$

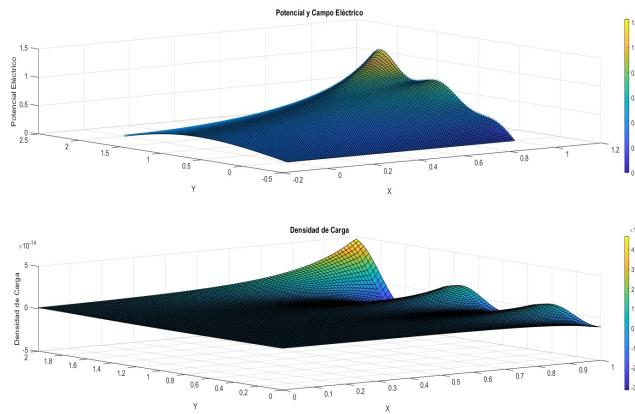


Figura 10. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 5$

## EJERCICIO 2.2

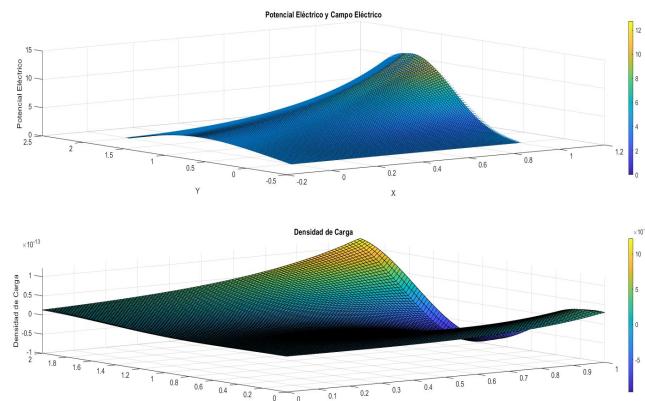


Figura 13. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga para  $n = 2$

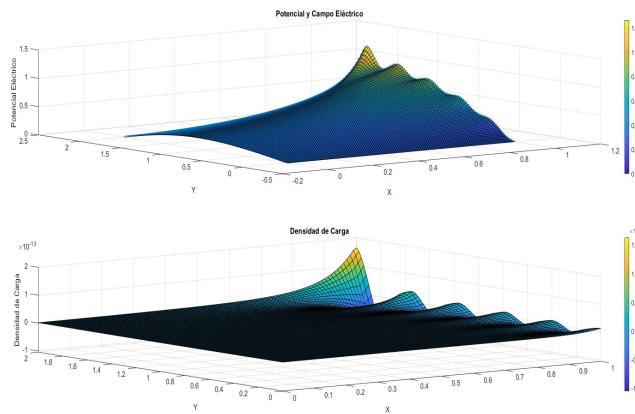


Figura 11. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 10$

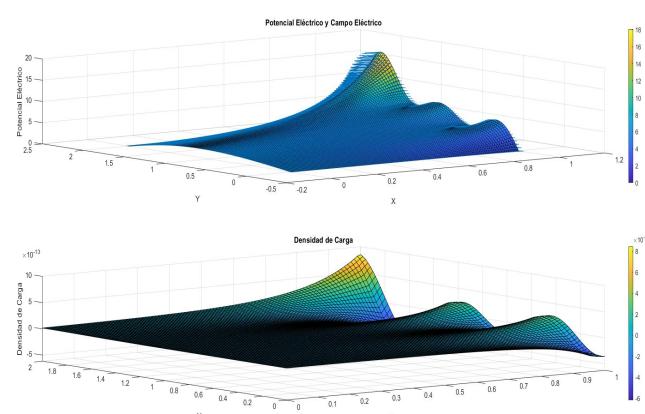


Figura 14. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 5$

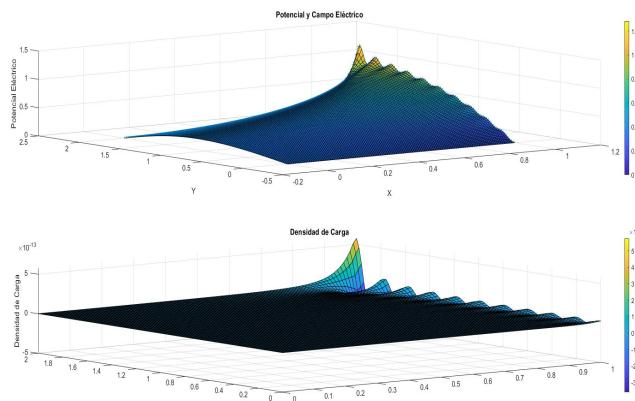


Figura 12. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 20$

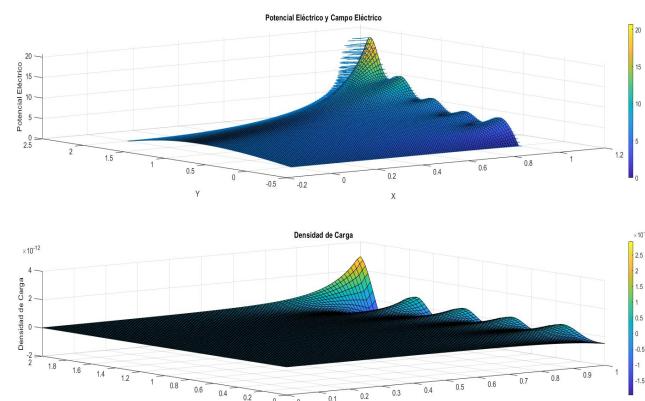


Figura 15. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 10$

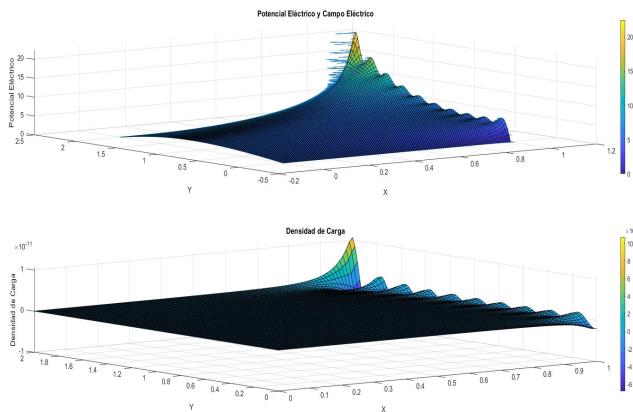


Figura 16. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 20$

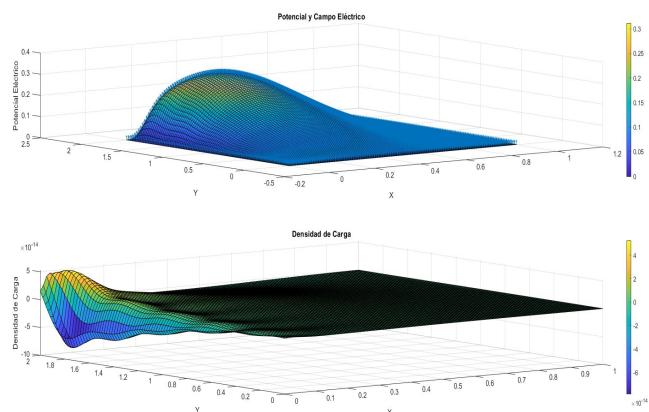


Figura 19. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 10$

### EJERCICIO 3

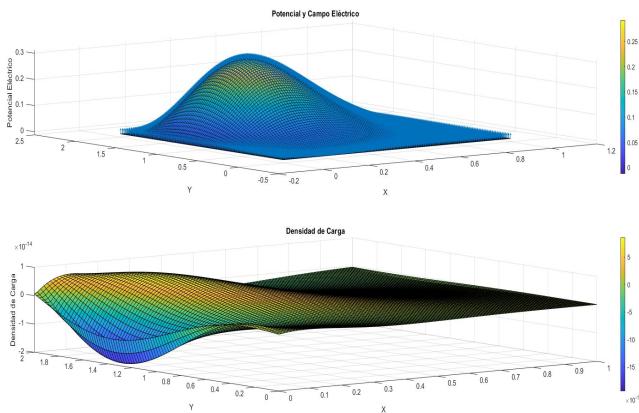


Figura 17. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga para  $n = 2$

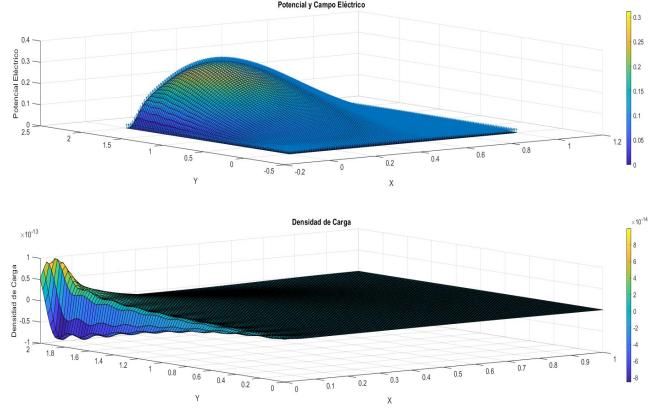


Figura 20. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 20$

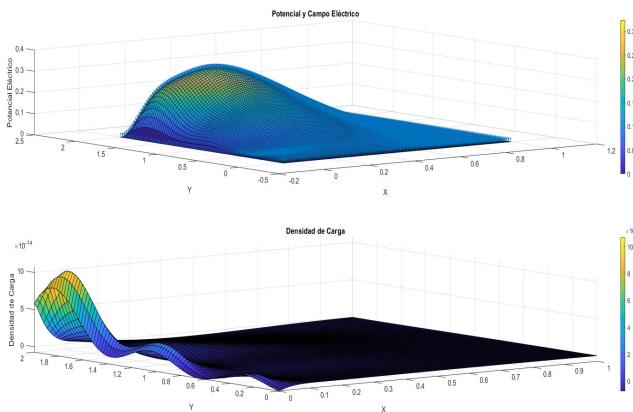


Figura 18. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 5$

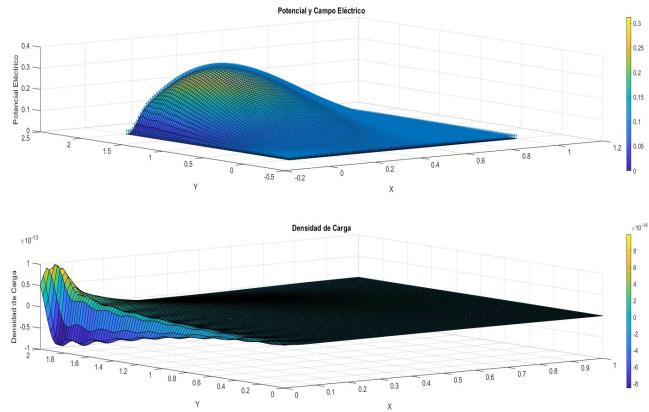


Figura 21. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 20$

## VII. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS EJERCICIO 1

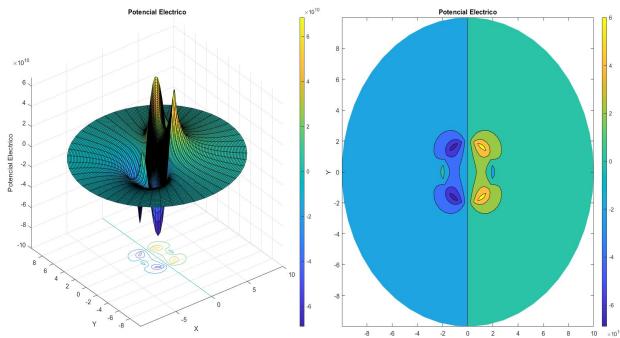


Figura 22. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga

### EJERCICIO 2

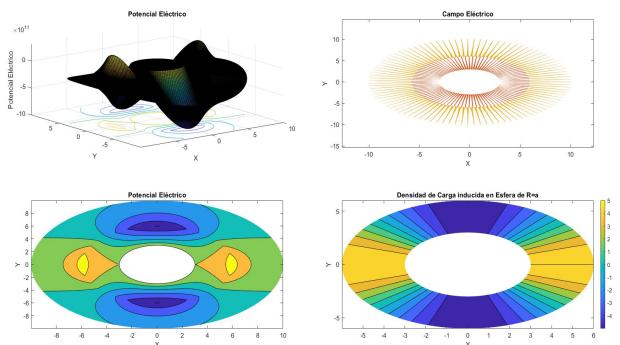


Figura 23. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga

### LAPLACE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS EJERCICIO 1

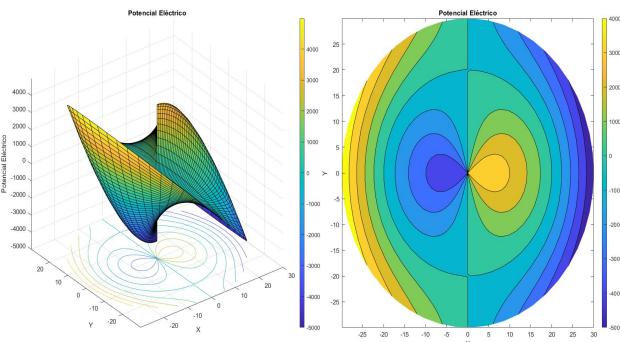


Figura 24. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga

Para la sección de coordenadas rectangulares como lo muestran las figuras de los potenciales y campos eléctricos para  $n = 2$  se puede ver que las gráficas no presentan una gran cantidad de ondulaciones o perturbaciones en la superficie de las gráficas, pero cuánto más grande era la  $n$ , los potenciales y campos presentaban mayor ondulación y variaciones, esto nos dice que este patrón de picos dependen de las funciones del potencial en una barrera. Ahora en el caso de la densidad superficial se puede ver que únicamente el plano que no estaba aterrizando contenía densidad superficial. Ahora, con el potencial esperábamos que entre más lejano fuera el punto, menor fuera el potencial, y podemos ver que en las gráficas se ve que el potencial tiende a cero entre más lejano es este. Ahora, se puede ver una diferencia muy significativa en los campos y potenciales cuando no se tenía alguna barrera, definida sino que se tendía a cero, al igual que los campos cuando uno tenía una función trigonométrica y una función polinómica, por eso vemos que en la polinómica presenta cierto patrones cóncavos a diferencia de la trigonométrica. El caso más completo que podemos ver es el de Laplace en tres dimensiones, pues podemos ver que en este ejercicio el campo eléctrico tiene presencia muchísimo más amplia en la gráfica, pues en los que solo tienen dos dimensiones hay mucha presencia de campo y potencial en cero, mientras que en este se observa que puede llegar a ser cero el potencial en un punto muy lejano, tal y como la condición lo indica.

Para coordenadas esféricas se tomaron en cuenta que ambos problemas tenían simetría acimutal por lo que estos problemas podíamos tomar la ecuación de Laplace en solamente una dependencia de  $r$  y de  $\theta$ . por otro lado podemos ver que las condiciones frontera se cumplen completamente en ambos casos, tanto en el primer problema con la esfera de radio  $R$  como en las esferas concéntricas, esto se comprueba gráficamente mediante las simulaciones de la Figura 22 y de la Figura 23 , no tan solo vemos que el potencial eléctrico se mantiene continuo en todo el espacio. una de las condiciones que se plantearon en ambos problemas y son bastante visibles es que cuando el potencial avanza a través de  $r$  tendiendo al infinito y alejándose de la fuente, va perdiendo intensidad y se va haciendo cero el potencial. Por medio de la gráfica de campo magnético de la Figura 22 podemos comprobar que este tiene dirección radial conforme a la esfera de radio  $R$  y que se incrementa en la frontera debido a la densidad de carga superficial en  $r=R$ . Para el segundo problema en la región de la esfera de radio  $R$  se tenía que era una esfera con potencial constante de valor " $\varphi_0$ ", para facilitar los cálculos y brindar una simulación con resultados mas visibles se hizo que el valor " $\varphi_0$ " fuese igual a  $0v$ , si vemos la Figura 23 en su apartado de potencial eléctrico en 2D podemos encontrar esto ya que la primera esfera tiene un valor aterrizado a  $0v$ , el campo eléctrico también nos permite visualizar esto aunque no de manera tan fija, ya que este no depende de las esferas. La gráfica de densidad de carga de la Figura 23 fue simulada en 2D primeramente porque estamos en simetría acimutal y

es a phi constante y también porque se apreciaba mejor la manera que la densidad de carga afecta en la esfera de radio ."<sup>a</sup>; así mismo podemos observar que al hacer esta gráfica en las coordenadas cartesianas la densidad de carga superficial "sigma."<sup>en</sup> un "Y"menor tiene mayor influencia en la esfera de radio ."<sup>a</sup>"que cuando tiene un "Y"mayor y también se observa la simetría en el eje "X".

En la sección de coordenadas cilíndricas si analizamos la primera gráfica de la Figura 24, el potencial aumenta conforme incrementa el área que abarca la ecuación, cobra sentido ya que está sumergido en un campo eléctrico que no decrece con la distancia, como forma adicional podemos observar el resultado de la densidad de carga, allí se muestra como la carga depende únicamente del ángulo "Theta" por lo que se mantiene en constante aumento. También se puede observar como el cilindro es polarizado por el campo eléctrico, lo que parte la gráfica en dos, con signos opuestos pero igual en magnitud.

## CONCLUSIONES

1. Se cumple con los objetivos del proyecto.
2. Se cumple con lo esperado del potencial, siendo esto que si un punto tiende al infinito, el potencial tiende a cero.
3. La densidad de carga existe únicamente en barreras que no están aterrizadas.
4. El patrón de picos es influido por la función del potencial en la barrera.
5. Todo problema físico debe tener al menos una frontera conductora.
6. El potencial es continuo en el espacio.

## RECOMENDACIONES

1. Laplace en tres dimensiones puede resultar más complejo trabajar pero por comprensión y entendimiento de los fenómenos sería bueno un ejemplo con únicamente una barrera en cada eje y otro ejemplo con todas las barrera para poder ver más diferencias.
2. Utilizar un programa especial que sirva para este tipo de casos, ya que beneficiaría en gran medida el proceso permitiendo los mismos resultados y disminuiría el tiempo usado.

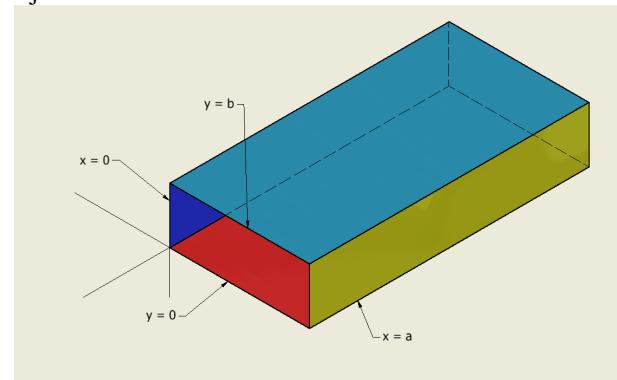
## REFERENCIAS

- [1] Fernández, T., y Tamaro, E. (2014). Biografía de Pierre-Simon Laplace. Retrieved 7 June 2020, from <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/laplace.htm>
- [2] Griffiths, D. (2008). Introduction to electrodynamics (3rd ed., pp. 110-116). San Francisco: Pearson.
- [3] Guizado, J. (2013). Ecuacion de laplace. Retrieved 7 June 2020, from <https://es.slideshare.net/joseantonioquizadordios/ecuacion-de-laplace>
- [4] Hayt, W., Buck, J. (2006). Engineering electromagnetics (7th ed., pp. 172-175). Boston: McGraw-Hill Higher Education.
- [5] Sevilla, M. (2009). LaPlace's and Poisson's Equations. Retrieved 8 June 2020, from <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/laplace.html>

## VIII. ANEXOS

### VIII-A. LAPLACE EN COORDENADAS RECTANGULARES

#### Ejercicio 1.1



Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} V(y=0) &= 0 & V(x=a) &= h(y) \\ V(y=b) &= 0 & g(y) &= 0 \\ V(x=0) &= g(y) & h(y) &= \arctan \frac{y}{a} \end{aligned}$$

Solución general:

$$Q(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(ky) + D \sin(ky))$$

Evaluamos condiciones iniciales:

a) Condición  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(k(0)) + D \sin(k(0))) \\ 0 &= (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos 0 + D \sin 0) \\ C &= 0 \end{aligned}$$

b) Condición  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (Ae^{k(0)} + Be^{-k(0)})(D \sin(ky)) \\ A + B &= 0 \Rightarrow A = -B \\ 0 &= (Ae^{kx} - Ae^{-kx})(D \sin(ky)) \\ F &= \frac{AD}{2} \\ F \sinh(kx) &= D \sin(ky) \end{aligned}$$

c) Condición  $y = b$ :

$$\begin{aligned} 0 &= F \sinh(kx)(D \sin kb) \\ 0 &= D \sin(kb) \\ k &= \frac{n\pi}{b} \\ Q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

d) Condición  $x = a$ :

$$\begin{aligned} h(y) &= F \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &< h(y), \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) > \\ \int_0^b h(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy &= \frac{b}{2} F_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \\ F_n &= \frac{2}{b \sin\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b \arctan \frac{y}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \\ R: Q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) V \end{aligned}$$

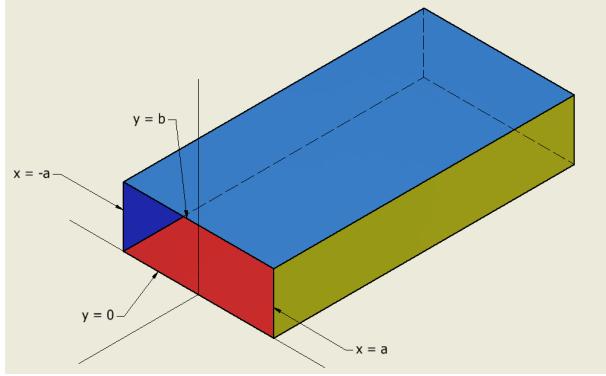
Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

■ Ejercicio 1.2



Condiciones iniciales:

$$V(y=0) = 0$$

$$V(y=b) = 0$$

$$V(x=-a) = g(y)$$

$$V(x=a) = h(y)$$

$$g(y) = 2y^3 + 5$$

$$h(y) = 2y^3 + 5$$

Solución general:

$$Q(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(ky) + D \sin(ky))$$

Evaluamos condiciones iniciales:

a) Condición  $y = 0$ :

$$0 = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(k(0)) + D \sin(k(0)))$$

$$0 = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos 0 + D \sin 0)$$

$$C = 0$$

b) Condición  $y = b$ :

$$0 = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(D \sin(kb))$$

$$0 = D \sin(kb)$$

$$k = \frac{n\pi}{b}$$

c) Condición  $x = -a$ :

$$g(y) = (Ae^{-ka} + Be^{ka})(D \sin(ky))$$

d) Condición  $x = a$ :

$$h(y) = (Ae^{ka} + Be^{-ka})(D \sin(ky))$$

Ahora, sabemos que  $g(y) = h(y)$  entonces podemos dividir la ecuación de la condición  $x = -a$  entre la ecuación de la condición  $x = a$ .

$$\frac{g(y)}{h(y)} = \frac{(Ae^{-ka} + Be^{ka})(D \sin(ky))}{(Ae^{ka} + Be^{-ka})(D \sin(ky))}$$

Para que esta ecuación pueda cumplirse,  $A = B$ , entonces:

$$F = \frac{AD}{2}$$

$$Q(x,y) = F \cosh(kx)(D \sin(ky))$$

$$Q(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Ahora tomo alguna de las dos condiciones iniciales que se usaron al dividir y evalúo:

$$g(y) = F \cosh\left(\frac{n\pi}{b}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$< g(y), \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) >$$

$$\int_0^b g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = \frac{b}{2} F_n \cosh(n\pi)$$

$$F_n = \frac{2}{b \cosh(n\pi)} \int_0^b (2y^3 + 5) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy$$

$$R: Q(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

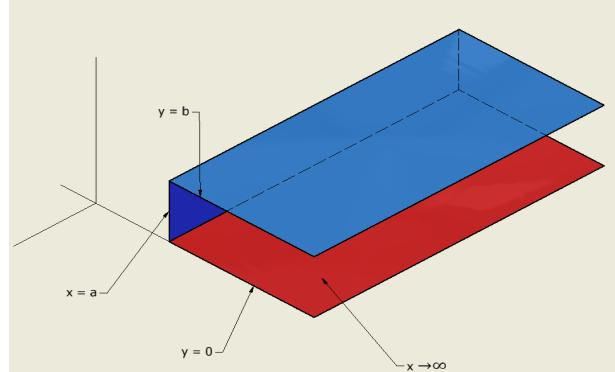
Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

■ Ejercicio 2.1



Condiciones iniciales:

$$V(y=0) = 0$$

$$V(y=b) = 0$$

$$V(x \rightarrow \infty) = g(y)$$

$$V(x=a) = h(y)$$

$$g(y) = 0$$

$$h(y) = \arctan\frac{y}{a}$$

Solución general:

$$Q(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(ky) + D \sin(ky))$$

Evaluamos condiciones iniciales:

a) Condición  $x \rightarrow \infty$ :

$$0 = (Ae^{k(\infty)} + Be^{-k(\infty)})(C \cos(k(\infty)) + D \sin(k(\infty)))$$

$$Ae^\infty = \infty$$

$$Be^{-\infty} = 0$$

Para que esto se cumpla:  $A = 0$

b) Condición  $y = 0$ :

$$0 = (Be^{-kx})(C \cos(k(0)) + D \sin(k(0)))$$

$$0 = (Be^{-kx})(C \cos 0 + D \sin 0)$$

$$C = 0$$

c) Condición  $y = b$ :

$$0 = (Be^{-kb})(D \sin(kb))$$

$$\begin{aligned} F &= BD \\ 0 &= Fe^{-kx} \sin kb \\ k &= \frac{n\pi}{b} \\ Q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

d) Condición  $x = a$ :

$$\begin{aligned} h(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &< h(y), \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) > \\ \int_0^b h(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy &= \frac{b}{2} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} \\ F_n &= \frac{2}{be^{-\frac{n\pi}{b}a}} \int_0^b (\arctan \frac{y}{a}) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \end{aligned}$$

$$\text{R: } Q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{V}$$

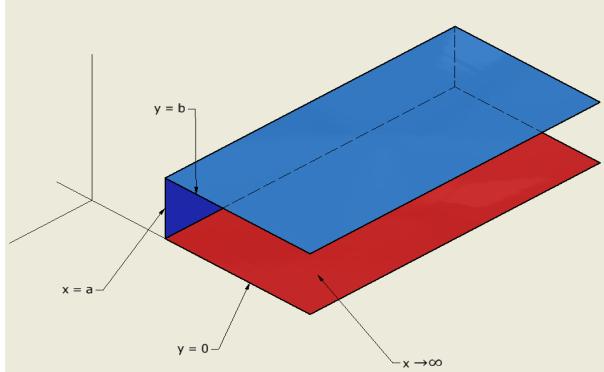
Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

■ Ejercicio 2.2



Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} V(y=0) &= 0 & V(x=a) &= h(y) \\ V(y=b) &= 0 & h(y) &= 2y^3 + 5 \\ V(x \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned}$$

Solución general:

$$Q(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \cos(ky) + D \sin(ky))$$

Evaluamos condiciones iniciales:

a) Condición  $x \rightarrow \infty$ :

$$0 = (Ae^{k(\infty)} + Be^{-k(\infty)})(C \cos(k(y)) + D \sin(k(y)))$$

$$Ae^\infty = \infty$$

$$Be^{-\infty} = 0$$

Para que esto se cumpla:  $A = 0$

b) Condición  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (Be^{-kx})(C \cos(k(y)) + D \sin(k(y))) \\ 0 &= (Be^{-kx})(C \cos 0 + D \sin 0) \\ C &= 0 \end{aligned}$$

c) Condición  $y = b$ :

$$0 = (Be^{-kx})(D \sin(ky))$$

$$\begin{aligned} F &= BD \\ 0 &= Fe^{-kx} \sin kb \\ k &= \frac{n\pi}{b} \\ Q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

d) Condición  $x = a$ :

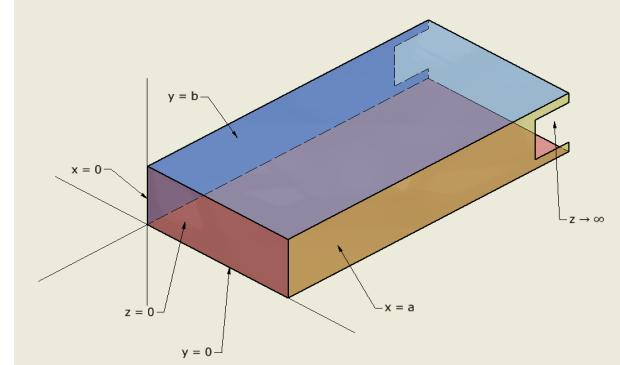
$$\begin{aligned} h(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &< h(y), \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) > \\ \int_0^b h(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy &= \frac{b}{2} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} \\ F_n &= \frac{2}{be^{-\frac{n\pi}{b}a}} \int_0^b (2y^3 + 5) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R: } Q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{V} \\ \text{Campo eléctrico:} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi \end{aligned}$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

■ Ejercicio 3



Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} V(y=0) &= 0 & V(z \rightarrow \infty) &= 0 \\ V(y=b) &= 0 & V(z=0) &= V(x, y) \\ V(x=0) &= 0 & V(x, y) &= xy^2 \\ V(x=a) &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener la solución general trabajamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \\ \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = C_3$$

$$C_1 = -\nu^2 \quad C_2 = -\eta^2 \quad C_3 = \eta^2 + \nu^2$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = X(-\nu^2) = (A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x))$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = Y(-\eta^2) = (C \cos(\eta y) + D \sin(\eta y))$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = Z(\eta^2 + \nu^2) = (E e^{\sqrt{(\nu)^2 + (\eta)^2} z} + F e^{-\sqrt{(\nu)^2 + (\eta)^2} z})$$

Solución general:

$$V(x, y, z) = (A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x))(C \cos(\eta y) + D \sin(\eta y))(E e^{\sqrt{(\nu)^2 + (\eta)^2} z} + F e^{-\sqrt{(\nu)^2 + (\eta)^2} z})$$

Evaluamos condiciones iniciales:

a) Condición  $y = 0$ :

$$0 = C \cos(\eta(0)) + D \sin(\eta(0))$$

$$C = 0$$

b) Condición  $x = 0$ :

$$0 = A \cos(\nu(0)) + B \sin(\nu(0))$$

$$A = 0$$

c) Condición  $y = b$ :

$$0 = D \sin(\eta b)$$

$$\eta = \frac{n\pi}{b}$$

d) Condición  $x = a$ :

$$0 = B \sin(\nu(a))$$

$$\nu = \frac{m\pi}{a}$$

e) Condición  $z \rightarrow \infty$ :

$$0 = E e^{\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} z} + F e^{-\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} z}$$

$$E = 0$$

$$Q(x, y, z) = B \sin(\frac{m\pi}{a} x) D \sin(\frac{n\pi}{b} y) F e^{-\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} z}$$

$$G = BDF$$

f) Condición  $z=0$ :

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_n \sin(\frac{m\pi}{a} x) \dots$$

$$\dots \sin(\frac{n\pi}{b} y) e^{-\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}(0)}$$

$$G_n = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\frac{n\pi}{b} y) dy dx$$

$$R: Q(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_n \sin(\frac{m\pi}{a} x) \dots$$

$$\dots \sin(\frac{n\pi}{b} y) e^{-\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}(z)} V$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## VIII-B. ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Obtención de solución general :

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla^2 \varphi = [\frac{\delta_\tau(r^2 \delta_\tau \varphi)}{r^2}] + [\frac{\delta_\theta(\sin \theta \delta_\theta \varphi)}{r^2 \sin \theta}] + [\frac{\delta_\phi^2 \varphi}{r^2 \sin^2 \theta}]$$

debido a que tenemos simetría acimutal, es decir que nuestra solución no depende de la variable  $\phi$  llegamos

a lo siguiente:

$$\nabla^2 \varphi = [\frac{\delta_\tau(r^2 \delta_\tau \varphi)}{r^2}] + [\frac{\delta_\theta(\sin \theta \delta_\theta \varphi)}{r^2 \sin \theta}]$$

aplicando separación de variables:

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta) : \quad \nabla^2 \varphi = [\frac{(\Theta)\delta_\tau(r^2 \delta_\tau R)}{r^2}] + [\frac{R\delta_\theta(\sin \theta \delta_\theta \Theta)}{r^2 \sin \theta}] = 0 \Big|_{\mathbb{R}(\not\leq)}$$

igualando constantes  $l(l+1)$ :

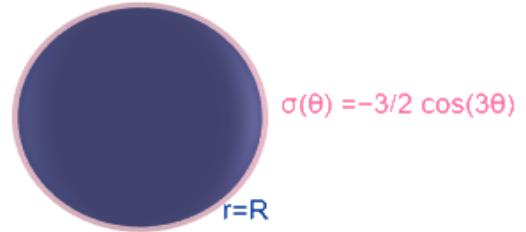
$$(1) \frac{d}{dr} (\frac{r^2 dR}{d_r}) = l(l+1)R$$

$$(2) \frac{d}{d_r} (\sin \theta |\Theta|) = -l(l+1) \sin \theta |\Theta|$$

Solución General:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_L r^l + \frac{B_L}{r^{l+1}}) P_L(\cos \theta)$$

### Ejercicio 1



$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Condiciones frontera :

$$\varphi(0, \theta, \phi) = \exists$$

$$\varphi_{IN}(R, \theta, \phi) = \varphi_{OUT}(R, \theta, \phi)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, \theta, \phi) = 0$$

$$\delta_\eta \varphi_{IN} - \delta_\eta \varphi_{OUT} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Big|_{\tau=\mathbb{R}}$$

Los potenciales para cada región entonces son:

$$\varphi_{IN} = \sum_{n=1}^{\infty} A_L r^l (P_L \cos \theta)$$

$$\varphi_{OUT} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_L (P_L \cos \theta)}{r^{l+1}}$$

por condición 2:  $\varphi_{in} = \varphi_{out}$

$$A_l r^l P_l \cos \theta = \frac{B_l P_l \cos \theta}{r^{l+1}}$$

$$\therefore B_l = A_l r^{2l+1} \Big|_{r=R}$$

por condición 4:  $\delta_n \varphi_{in} - \delta_n \varphi_{out} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\delta_n \varphi_{in} = l A_l r^{l-1} p_l \cos \theta$$

$$\delta_n \varphi_{out} = \frac{-(l+1) B_l}{r^{l+2}}$$

$$\sigma = \epsilon_0 [l A_l r^{l-1} + \frac{(l+1) B_l}{r^{l+2}}] P_l \cos \theta$$

sustituyendo  $B_l$  y  $\sigma$ :

$$\epsilon_0 [l A_l r^{l-1} + \frac{(l+1)(A_l r^{2l+1})}{r^{l+2}}] P_l \cos \theta \Big|_R = -6 \cos^3 \theta + \frac{9 \cos \theta}{2}$$

reduciendo la expresión de la izquierda :

$$\epsilon_0 [lA_l r^{l-1} + \frac{(l+1)(A_l r^{2l+1})}{r^{l+2}}] P_l \cos \theta |_R =$$

$$\epsilon_0 (2l+1) A_l r^{l-1} P_l \cos \theta |_R$$

Utilizando los polinomios de legendre 1 y 3 :

$$\epsilon_0 [3A_1 \cos \theta + \frac{35A_3 R^2 \cos^3 \theta}{2}] = -6 \cos^3 \theta + \frac{9 \cos \theta}{2}$$

Igualamos  $\cos^3 \theta$  :

$$A_3 = \frac{-12}{35\epsilon_0 R^2}$$

igualamos  $\cos \theta$  :

$$\epsilon_0 [3A_1 - \frac{21A_3 R^2}{2}] \cos \theta = \frac{9 \cos \theta}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (\frac{3}{\epsilon_0} + 7A_3 R^2)$$

$$A_1 = \frac{1}{2\epsilon_0} (3 - 7 \frac{-12R^2}{35R^2})$$

$$A_1 = \frac{3}{10\epsilon_0}$$

obtenemos los términos de B :

$$B_1 = A_1 R^3 = \frac{3R^3}{10\epsilon_0}$$

$$B_3 = A_3 R^7 = \frac{-12R^5}{35\epsilon_0}$$

finalmente obtenemos los potenciales en las regiones mediante la sustitución de los valores encontrados

$$\varphi_{in} = A_1 r \cos \theta + A_3 r^3 [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}]$$

$$\therefore \varphi_{in} = \frac{3r \cos \theta}{10\epsilon_0} - \frac{12r^3}{35\epsilon_0 R^2} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}] V$$

$$\varphi_{out} = \frac{B_1 \cos \theta}{r^2} + \frac{B_3}{r^4} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}]$$

$$\therefore \varphi_{out} = \frac{3R^3 \cos \theta}{10\epsilon_0 r^2} - \frac{12R^5}{35\epsilon_0 r^4} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}] V$$

Campo Eléctrico :

el campo viene dado por  $\vec{E} = -\nabla \varphi$

adentro:

$$\vec{E} = \frac{-\delta}{\delta r} [\frac{3r \cos \theta}{10\epsilon_0} - \frac{12r^3}{35\epsilon_0 R^2} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}]] \hat{r}$$

$$-\frac{\delta}{r \delta \theta} [\frac{3r \cos \theta}{10\epsilon_0} - \frac{12r^3}{35\epsilon_0 R^2} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}]] \hat{\theta} [\frac{V}{m}]$$

$$\therefore \vec{E} = [-\frac{3 \cos \theta}{10\epsilon_0} + \frac{18r^2(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{35\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

$$-\frac{[3 \sin \theta (12r^2(-5 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta) + 7R^2)]}{70\epsilon_0 R^2} \hat{\theta} [\frac{V}{m}]]$$

afuera:

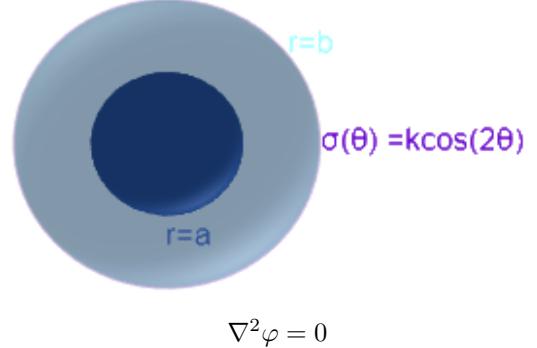
$$\vec{E} = \frac{-\delta}{\delta r} [\frac{3R^3 \cos \theta}{10\epsilon_0 r^2} - \frac{12R^5}{35\epsilon_0 r^4} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}]] \hat{r}$$

$$-\frac{\delta}{r \delta \theta} [\frac{3R^3 \cos \theta}{10\epsilon_0 r^2} - \frac{12R^5}{35\epsilon_0 r^4} [\frac{5 \cos^3 \theta}{2} - \frac{3 \cos \theta}{2}]] \hat{\theta} [\frac{V}{m}]$$

$$\therefore \vec{E} = [\frac{3R^3 \cos \theta}{5\epsilon_0 r^3} - \frac{24R^5(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{35\epsilon_0 r^5}] \hat{r}$$

$$-\frac{[21R^3 r^2 \sin \theta - 12R^5(-15 \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \sin \theta)]}{70\epsilon_0 r^5} \hat{\theta} [\frac{V}{m}]$$

## Ejercicio 2



Condiciones Frontera :

$$\varphi_{IN}(R, \theta, \phi) = \varphi_{OUT}(R, \theta, \phi)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, \theta, \phi) = 0$$

$$\delta_\eta \varphi_{IN} - \delta_\eta \varphi_{OUT} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} |_{\tau=\mathbb{R}}$$

Los potenciales para cada región entonces son:

- $r < a$  :

$$\varphi_0 = 0;$$

Utilizamos la suposición de que la esfera a esta aterrizada para la facilitación del cálculo.

- $a < r < b$ :

$$\varphi = \sum_l^\infty [A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}] P_l \cos \theta$$

- $r > b$ :

$$\varphi = \sum_l^\infty [C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}] P_l \cos \theta$$

Para la primera esfera de radio  $a$  :

$$\varphi_{in} = 0 \text{ en } r < a$$

$$\sum_0^\infty [A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}}] P_l \cos \theta = 0$$

$$\therefore B_l = -A_l a^{2l+1}$$

Evaluando condiciones frontera:

por condición 2:

$$\varphi_{out} = \sum_0^\infty [\frac{D_l}{r^{l+1}}] P_l \cos \theta$$

por condición 1:

$$\sum_0^\infty [A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}}] P_l \cos \theta = \sum_0^\infty [\frac{D_l}{b^{l+1}}] P_l \cos \theta$$

$$A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}} = \frac{D_l}{b^{l+1}}$$

$$D_l = B_l + A_l b^{2l+1}$$

sustituyendo  $B_l$ :

$$D_l = A_l (b^{2l+1} - a^{2l+1})$$

por condición 3:

$$\delta_l \varphi_{in} = \sum [l A_l b^{l+1} - \frac{B_l(l+1)}{b^{l+2}}] P_l \cos \theta$$

$$\delta_l \varphi_{in} = \frac{l A_l b^{2l+1} + B_l - l B_l}{b^{l+2}}$$

$$\delta_l \varphi_{out} = \sum [-\frac{D_l(l+1)}{b^{l+2}}] P_l \cos \theta$$

$$\sum [ \frac{A_l b^{2l+1} + B_l - l B_l}{b^{l+2}} + \frac{D_l(l+1)}{b^{l+2}} ] P_l \cos \theta = \frac{2K \cos^2 \theta - k}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 [\sum [(2l+1) A_l b^{l-1} P_l \cos \theta]] = 2k \cos^2 \theta - k$$

utilizando  $P_0$  y  $P_2$ :

$$[\frac{A_0}{b} - \frac{5bA_2}{2} + \frac{15A_2 b \cos^2 \theta}{2}] = \frac{2k \cos^2 \theta - k}{\epsilon_0}$$

igualando  $\cos^2 \theta$ :

$$[\frac{15A_2 b \cos^2 \theta}{2}] = \frac{2k \cos^2 \theta}{\epsilon_0}$$

$$A_2 = \frac{4k}{15b\epsilon_0}$$

igualando constantes:

$$[\frac{A_0}{b} - \frac{5bA_2}{2}] = \frac{-k}{\epsilon_0}$$

$$A_0 = \frac{5b^2 A_2}{2} - \frac{kb}{\epsilon_0}$$

sustituyendo  $A_2$ :

$$A_0 = -\frac{kb}{3\epsilon_0}$$

Encontrar términos  $B_l$  y  $D_l$  mediante sustitución de  $A_l$ :

$$B_l = -A_l a^{2l+1}$$

$$B_0 = \frac{kba}{3\epsilon_0} \text{ y } B_2 = -\frac{4ka^5}{15be_0}$$

$$D_l = A_l (b^{2l+1} - a^{2l+1})$$

$$D_0 = \frac{-kb(b-a)}{3\epsilon_0} \text{ y } D_2 = \frac{4k(b^5-a^5)}{15be_0}$$

R// Potencial Eléctrico:

- $\varphi(r, \theta) = \varphi_0 = 0V$

$$r < a$$

- $\varphi(r, \theta) = \frac{-kb}{3\epsilon_0} + \frac{kab}{3r\epsilon_0} + \left[ \frac{4kr^2}{15be_0} - \frac{4ka^5}{15br^3\epsilon_0} \right] \left( \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right) V$   
 $a < r < b$
- $\varphi(r, \theta) = -\frac{kb(b-a)}{3r\epsilon_0} + \frac{4k(b^5-a^5)(3\cos^2 \theta - 1)}{30br^3\epsilon_0} V$   
 $r > b$

Campo Eléctrico:

el campo viene dado por  $\vec{E} = -\nabla\varphi$

- $\vec{E}_{mid} = -\frac{\delta}{\delta r} [\varphi_{mid}] \hat{r} - \frac{\delta}{\delta \theta} [\varphi_{mid}] \hat{\theta}$

$$\therefore \vec{E}_{mid} = \left[ \frac{kba}{3r^2\epsilon_0} - \frac{2k(2r^5+3a^5)[3\cos^2 \theta - 1]}{15br^4\epsilon_0} \right] \hat{r} + \dots$$

$$\dots + \left[ \frac{2k \sin(2\theta)(r^5-a^5)}{5br^4\epsilon_0} \right] \hat{\theta} \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

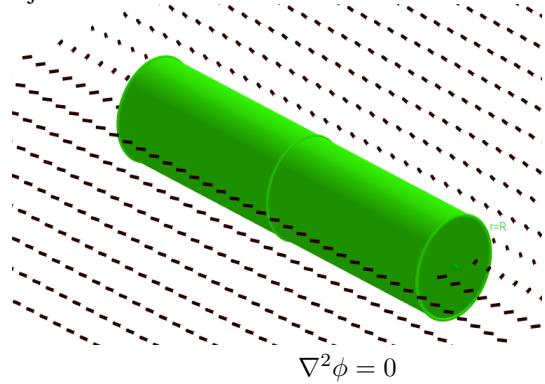
- $\vec{E}_{out} = -\frac{\delta}{\delta r} [\varphi_{out}] \hat{r} - \frac{\delta}{\delta \theta} [\varphi_{out}] \hat{\theta}$

$$\therefore \vec{E}_{out} = \left[ \frac{2k(b^5-a^5)(3\cos^2 \theta - 1)}{5be_0 r^4} - \frac{kb(b-a)}{e\epsilon_0 r^2} \right] \hat{r} + \dots$$

$$\dots + \left[ \frac{2k \sin(2\theta)(b^5-a^5)}{5br^4\epsilon_0} \right] \hat{\theta} \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

### VIII-C. LAPLACE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

#### Ejercicio 1.1



Condiciones iniciales:

$$Q(s, \phi, 0) = 0$$

$$Q(r, \phi, Z) = 0$$

$$Q(s, \phi, L) = \Phi(\phi)$$

$$V(s, \theta) = \&(s)\Phi(\phi)$$

$$\nabla^2 V(s, \theta) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \frac{\partial V}{\partial s}) + \frac{1}{s^2} (\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}) = 0$$

$$\frac{\Phi}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \frac{\partial \&}{\partial s}) + \frac{\&}{s^2} (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}) = 0$$

$$\frac{s}{\&} \frac{\partial}{\partial s} (s \frac{\partial \&}{\partial s}) = -\frac{1}{\Phi} (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}) = k^2$$

$$s \frac{\partial \&}{\partial s} = A \rightarrow \&(s) = A \ln s + B$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \rightarrow \Phi(\phi) = C\phi + D \therefore \Phi(\phi) = D$$

$$V(s, \phi) = S\Phi = A \ln s + B$$

Para  $k^2 > 0$

$$\frac{s}{\&} \frac{\partial}{\partial s} (s \frac{\partial \&}{\partial s}) = -k^2$$

$$s^2 \&'' + s\&' - k^2 \& = 0$$

$$\&(s) = As^n$$

$$As^n[n(n-1) + n - k^2] = 0$$

$$k = \pm n$$

$$\&(s) = As^n + Bs^{-n}$$

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0$$

$$\Phi(\phi) = C \cos n\phi + D \sin n\phi$$

$$V = s\Phi = (As^n + Bs^{-n})(C \cos n\phi + D \sin n\phi)$$

$$\text{R: } V(s, \phi) = A \ln s + B_0 + \dots$$

$$\dots \sum_{n=1}^{\infty} (A_n s^n + B_n s^{-n})(C \cos n\phi + D \sin n\phi) \text{ v}$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

#### Ejercicio 1.2

Cilindro en un campo  $E_0 y r = R$

$$V = -E_0 x = -E s \cos \theta$$

$$V(s, \phi) = A \ln s + B_0 + \dots$$

$$\dots \sum_{n=1}^{\infty} (A_n s^n + B_n s^{-n}) (C \cos n\phi + B \sin n\phi)$$

$$A_0 = 0$$

$$B_0 = 0$$

En un punto lejano  $A_1 = -E_0$ ;  $A_n = D_n = 0$  para  $n > 1$

$$\bar{V}(s, \phi) = -E_0 s \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n s^{-n} \cos n\phi$$

$$0 = -E_0 R \cos \phi + B_1 R^{-1} \cos \phi \text{ donde: } B_1 = E_0 R^2$$

$$\text{R: } V(s, \phi) = -E_0 s \left(1 - \frac{R^2}{s^2}\right) \cos \phi$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

Densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\sigma(\phi) = -\epsilon_0 \frac{\delta V}{\delta s} |_{s=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + \frac{R^2}{s^2}\right) \cos \phi |_{s=R} \dots$$

$$\therefore = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$$

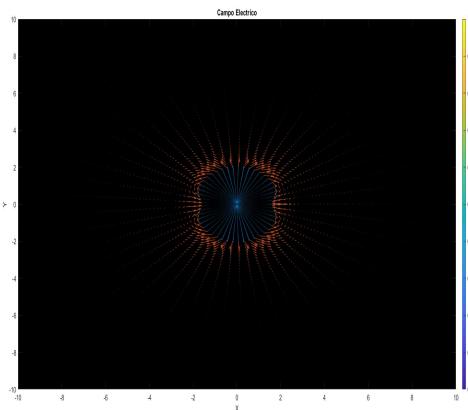


Figura 25. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga

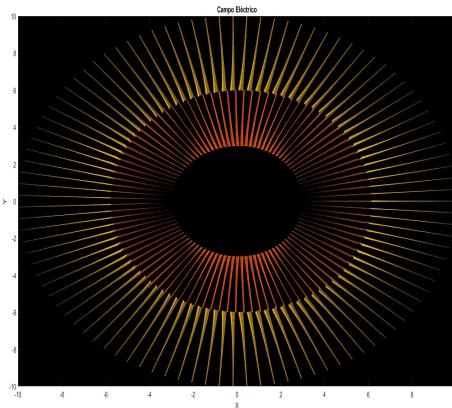


Figura 26. Potencial y campo eléctrico y densidad de carga con  $n = 10$

#### VIII-D. Aplicaciones Reales de La Ecuación de Laplace

- Una aplicación bastante común en la vida real es mediante los condensadores, ya que conseguir el potencial de estos condensadores que van a ir a múltiples circuitos es una dificultad que hace perder no tan solo tiempo sino dinero a las compañías que los manufacturan, mediante análisis por ecuación de Laplace es fácil deducir este potencial. [3]



- Mecánica de Fluidos: esta aplicación es menos común pero aun así es bastante útil ya que permite modelar el potencial de un cuerpo acuífero se puede definir por la altura del agua. [3]