# Soluciones: Transformaciones lineales y matrices (Ejercicios)

November 24, 2025

## Conceptos relevantes para el estudio de diagonalizabilidad

En esta sección recopilamos los conceptos fundamentales necesarios para analizar si una matriz es diagonalizable, así como los procedimientos asociados al cálculo de valores propios, vectores propios, multiplicidades y espacios propios.

### 1. Valor propio y vector propio

Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** de $A$ si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Un vector no nulo $v$ que satisface esa ecuación se denomina **vector propio** (asociado al valor propio $\lambda$).

### 2. Polinomio característico

Para determinar los valores propios se calcula el **polinomio característico** de la matriz $A$, dado por

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Los valores propios son las raíces de $\chi_A(\lambda) = 0$.

### 3. Multiplicidad algebraica

Si el polinomio característico se factoriza como

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

entonces un valor propio $\lambda_i$ tiene **multiplicidad algebraica** $m_i$. Es el número de veces que aparece como raíz del polinomio característico.

### 4. Espacio propio y multiplicidad geométrica

Dado un valor propio $\lambda$, su **espacio propio** es

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)v = 0\}.$$

La **multiplicidad geométrica** de $\lambda$ es la dimensión de dicho subespacio:

$$\mathrm{mg}(\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)).$$

Se cumple siempre la desigualdad:

$$1 \leq \mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda),$$

donde $\mathrm{ma}(\lambda)$ es la multiplicidad algebraica.

## 5. Matriz diagonalizable

Una matriz cuadrada $A$ es **diagonalizable** sobre $\mathbb{R}$ si existe una matriz invertible $P$ tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

donde $D$ es una matriz diagonal.

Equivalentemente, $A$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de $A$.

## 6. Criterio práctico de diagonalizabilidad

Sea $A$ una matriz con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Entonces:

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable} \iff \text{para cada } \lambda_i,\ \mathrm{mg}(\lambda_i) = \mathrm{ma}(\lambda_i).}$$

Es decir, cada valor propio debe tener la mayor cantidad posible de vectores propios.

## 7. Caso con valores propios repetidos

El caso crítico para la diagonalizabilidad ocurre cuando un valor propio tiene multiplicidad algebraica mayor que 1. Para que la matriz sea diagonalizable, el espacio propio debe tener dimensión igual a esa multiplicidad. Si la dimensión es menor, falta "cantidad" de vectores propios y la matriz no puede diagonalizarse.

## 8. Núcleo de una matriz

El **núcleo** o **kernel** de una matriz $M$ es el conjunto

$$\mathrm{Ker}(M) = \{v : Mv = 0\}.$$

Al buscar vectores propios se calcula precisamente el núcleo de $A - \lambda I$.

## 9. Rango y nulidad

Para cualquier matriz $M$ se cumple el teorema rango–nulidad:

$$\dim(\mathrm{Ker}(M)) + \mathrm{rg}(M) = n.$$

En el caso de valores propios:

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)) = \mathrm{mg}(\lambda).$$

### 10. Matriz de cambio de base para diagonalizar

Si $v_1, \dots, v_n$ son vectores propios que forman una base del espacio, la matriz $P$ que diagonaliza $A$ se obtiene colocando esos vectores como columnas:

$$P = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n).$$

Y la matriz diagonal contiene los valores propios respectivos:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

### 11. Resumen conceptual

Para decidir si una matriz es diagonalizable:

1. Calcular el polinomio característico.
2. Leer las multiplicidades algebraicas de cada valor propio.
3. Para cada valor propio, calcular $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.
4. Determinar la multiplicidad geométrica.
5. Verificar si todas las multiplicidades geométricas coinciden con las algebraicas.

Si esta igualdad se cumple para todos los autovalores, la matriz es diagonalizable. En caso contrario, no.

## Pregunta previa: ¿Cómo saber si una aplicación $T : V \to W$ es una transformación lineal?

Una aplicación $T : V \to W$ (entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$) es lineal si y solo si verifica, para todo $u, v \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \qquad T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

En la práctica, para una fórmula dada de $T$ en coordenadas se verifica que las expresiones son combinación lineal (sin términos constantes ni productos entre coordenadas). Otra forma práctica: comprobar que la matriz (en bases canónicas) existe y que $T(x) = Ax$ para alguna matriz $A$ (esto implica linealidad).

## Ejercicio 6

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y,\ y - 2t).$$

### (a) Cálculos directos

Tomemos $v = (1, -2, 5, -1)^\top$. Entonces

$$T(1, -2, 5, -1) = (1 - 2(-2),\ -2 - 2(-1)) = (1 + 4,\ -2 + 2) = (5, 0).$$

Si multiplicamos el vector por $\frac{2}{3}$,

$$T\Big(\tfrac{2}{3}(1, -2, 5, -1)\Big) = \tfrac{2}{3}T(1, -2, 5, -1) = \tfrac{2}{3}(5, 0) = \Big(\tfrac{10}{3}, 0\Big).$$

### (b) Hallar $a, b$ tales que

$$T\big(a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 1)\big) = (11, -11).$$

Primero formamos el vector combinación:

$$u = a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 1) = (a + b,\ a - b,\ b,\ b).$$

Aplicando $T$,

$$T(u) = \big((a + b) - 2(a - b),\ (a - b) - 2b\big) = (a + b - 2a + 2b,\ a - b - 2b) = (-a + 3b,\ a - 3b).$$

Queremos que esto sea $(11, -11)$, es decir

$$-a + 3b = 11, \qquad a - 3b = -11.$$

Ambas ecuaciones son la misma (la segunda es $-1$ veces la primera), por lo tanto hay infinitas soluciones:

$$-a + 3b = 11 \quad \Longrightarrow \quad a = 3b - 11.$$

Así los pares $(a, b)$ con $a = 3b - 11$ satisfacen la condición.

### (c) Determinar $k \in \mathbb{R}$ tal que $(1, k, -1, 1) \in \operatorname{Ker}(T)$.

Sea $w = (1, k, -1, 1)$. Requerimos

$$T(w) = (1 - 2k,\ k - 2 \cdot 1) = (0, 0).$$

De las componentes obtenemos el sistema

$$1 - 2k = 0, \qquad k - 2 = 0.$$

La primera da $k = \frac{1}{2}$, la segunda $k = 2$. No hay $k$ que satisfaga ambas, luego **no existe** $k \in \mathbb{R}$ tal que $(1, k, -1, 1) \in \operatorname{Ker}(T)$.

## (d) Determinar $\mathrm{Ker}(T)$ y una base

Resolver $T(x, y, z, t) = (0, 0)$:

$$x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y, \qquad y - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2t.$$

Entonces $y = 2t$, $x = 2y = 4t$, y $z$ es libre. Escribimos vectores del núcleo usando parámetros $t, s \in \mathbb{R}$:

$$(x, y, z, t) = (4t, 2t, s, t) = t(4, 2, 0, 1) + s(0, 0, 1, 0).$$

Por tanto

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span}\{(4, 2, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0)\},$$

y una base es, por ejemplo, $\{(4, 2, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0)\}$.

## (e) Matriz asociada, imagen, base de la imagen y dimensión

La matriz asociada en las bases canónicas (dominio y codominio) se obtiene evaluando $T$ sobre los vectores estándar $e_1, e_2, e_3, e_4$ (las columnas):

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (-2, 1), \quad T(e_3) = (0, 0), \quad T(e_4) = (0, -2).$$

Por tanto la matriz ($2\times4$) es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La imagen Im es el subespacio generado por las columnas no nulas; observamos que las columnas 1 y 2 son linealmente independientes y generan la imagen:

$$\mathrm{Im} = \mathrm{span}\{(1, 0), (-2, 1)\}.$$

Por tanto una base de Im es $\{(1, 0), (-2, 1)\}$ y

$$\mathrm{rank}(A) = 2.$$

Finalmente, por el teorema rango-nulidad (dim dominio $= 4$),

$$\mathrm{nullity}(A) = \dim \mathrm{Ker}(T) = 4 - \mathrm{rank}(A) = 4 - 2 = 2.$$

## Ejercicio 8

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - ay - bz,\ ax - 2y - bz,\ ax - 5by + cz).$$

### (a) Encontrar $a, b, c$ si $(1, 2, 1) \in \text{Ker}(T)$.

Queremos $T(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$. Escribimos las ecuaciones:

$$1 - 2a - b = 0, \quad a - 4 - b = 0, \quad a - 10b + c = 0.$$

De las dos primeras: $b = 1 - 2a$ y $b = a - 4$. Igualando,

$$1 - 2a = a - 4 \quad \Rightarrow \quad 3a = 5 \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{5}{3}.$$

Entonces $b = a - 4 = \frac{5}{3} - 4 = -\frac{7}{3}$. Finalmente

$$c = -a + 10b = 10 \cdot \Big( -\tfrac{7}{3} \Big) - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{75}{3} = -25.$$

Por tanto $(a, b, c) = \big(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -25\big)$ hace que $(1, 2, 1) \in \text{Ker}(T)$.

### (b) Para $a = 1, b = 1, c = -1$ hallar base de $\text{Ker}(T)$ y de $\Im(T)$.

La matriz asociada en la base canónica (columnas = $T(e_i)$) cuando $a = 1, b = 1, c = -1$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

El núcleo (espacio nulo) tiene dimensión 1 y una base es, por ejemplo,

$$\text{Ker}(T) =< (1, 0, 1) >,$$

ya que $(1, 0, 1)$ es una solución de $M[x, y, z]^\top = 0$.

La imagen está generada por las columnas de $M$. Se comprueba que dos de ellas son independientes; una base de la imagen es

$$\text{Im} =< (1, 1, 1),\ (-1, -2, -5) >,$$

y $\text{rank}(M) = 2$.

## Ejercicio 15

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y,\ x + z,\ 0)$.

### (a) Matriz con respecto a distintas parejas de bases

**(i) $B$ y $C$ las bases canónicas.** Evaluando en $e_1, e_2, e_3$:

$$T(e_1) = (1, 1, 0), \quad T(e_2) = (1, 0, 0), \quad T(e_3) = (0, 1, 0).$$

La matriz es (columnas dichas imágenes):

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(ii) $B$ canónica y $C = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.** Expresamos $T(e_j)$ en la base $C$. Calculando coordenadas obtenemos las columnas

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir las imágenes en coordenadas respecto a $C$ son:

$$T(e_1) = (1, 0, 0)_C, \quad T(e_2) = (0, 1, -1)_C, \quad T(e_3) = (1, -1, 1)_C.$$

**(iii) $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $C = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.** Si calculamos $T$ sobre los vectores de $B$ y escribimos los resultados en coordenadas de $C$ se obtiene la matriz

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(En la solución anterior se mostraron estos cálculos paso a paso; aquí se presenta la matriz resultante.)

### (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y,\ 2y - 3z)$

**(i) $B$ y $C$ las bases canónicas.** Evaluando en $e_1, e_2, e_3$:

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (-1, 2), \quad T(e_3) = (0, -3).$$

La matriz $2 \times 3$ es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**(ii) $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $C$ base canónica de $\mathbb{R}^2$.** Calculando $T$ sobre los vectores de $B$ y tomando esas imágenes en la base canónica,

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

**(iii)** $B = \{(1,1,\frac{1}{3}),(2,-1,-1),(3,2,\frac{1}{2})\}$ **y** $C = \{(3,1),(1,\frac{5}{2})\}$**.** Expresando $T(b_j)$ en la base $C$ obtenemos (coordenadas respecto a $C$):

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & 1 & 0 \\ \frac{6}{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Ejercicio 17

Sean $B = \{(1,-1),(0,2)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $C = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

### (i) Determinar $[S]_{C\leftarrow B}$ si $S(x,y) = (2y,\ x-y,\ x)$.

Para cada vector $b_j \in B$ calculamos $S(b_j)$ y lo expresamos en coordenadas de $C$. Realizando los cálculos se obtiene la matriz

$$[S]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{20}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

(Esas columnas son las coordenadas de $S(1,-1)$ y $S(0,2)$ en la base $C$.)

### (ii) Determinar $T$ si

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí las columnas son las coordenadas (en la base $C$) de las imágenes de los vectores de $B$. Si deseamos la matriz estándar de $T$ (dominio canónica, codominio canónico) usamos la relación

$$[T]_{\text{can}} = [\,C\,]\,[T]_{C\leftarrow B}\,[\,B\,]^{-1},$$

donde $[B]$ es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base $B$ en coordenadas canónicas, y $[C]$ la matriz cuyas columnas son los vectores de $C$ en coordenadas canónicas. Calculando esto se obtiene la matriz estándar

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, para $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$,

$$T(x_1,x_2) = \Big(2x_1,\ \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2,\ -2x_1 - x_2\Big).$$

# Ejercicio 18

Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T(a + bx + cx^2) = (a - b,\ c).$$
Las bases dadas son $B = \{1,\ 1 + x,\ 1 + x - x^2\}$ para $P_2(\mathbb{R})$ y $B_0 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ para $\mathbb{R}^2$.

Evaluamos $T$ sobre los elementos de $B$:
$$T(1) = (1 - 0,\ 0) = (1, 0), \qquad T(1 + x) = (1 - 1,\ 0) = (0, 0),$$
$$T(1 + x - x^2) = (1 - 1,\ -1) = (0, -1).$$
Expresadas en la base canónica $B_0$, las columnas son $(1, 0), (0, 0), (0, -1)$. Luego la matriz de transformación (codominio en $B_0$, dominio en $B$) es
$$[T]_{B_0 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Ejercicio 4 (desarrollo paso a paso)

Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

### 1. Polinomio característico

Calculamos el polinomio característico $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Hacemos el determinante (por ejemplo desarrollando por la primera fila):

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} - a\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} + a\det\begin{pmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculando cada determinante:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 0\big) &= (1-\lambda)^2(2-\lambda), \\ -a\big((-1)(2-\lambda) - (-1)(1)\big) &= -a\big(-2+\lambda+1\big) = -a(\lambda-1), \\ a\big((-1)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 1\big) &= a(-(1-\lambda)) = a(\lambda-1). \end{aligned}$$

Sumando las tres contribuciones el término en $a$ se anula:

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - a(\lambda-1) + a(\lambda-1) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Reescribiendo,

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2.}$$

Por tanto los autovalores son $\lambda = 2$ (multiplicidad algebraica 1) y $\lambda = 1$ (multiplicidad algebraica 2).

### 2. Autovectores para $\lambda = 2$

Resolvemos $(A - 2I)v = 0$. La matriz $A - 2I$ es

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Planteamos el sistema para $v = (x, y, z)^\top$:

$$\begin{cases} -x + ay + az = 0, \\ -x - y - z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación $x = 0$. Sustituyendo en la segunda:

$$-0 - y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -z.$$

La primera ecuación con $x = 0$ se vuelve

$$ay + az = a(y + z) = a(-z + z) = 0,$$

que se satisface automáticamente. Tomando parámetro $t$ con $z = t$ obtenemos

$$v = t(0, -1, 1).$$

Por tanto el espacio propio asociado a $\lambda = 2$ es

$$E_2 = \operatorname{span}\{(0, -1, 1)\},$$

y su dimensión (multiplicidad geométrica) es 1.

## 3. Autovectores para $\lambda = 1$

Resolvemos $(A - I)v = 0$. La matriz $A - I$ es

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escribimos el sistema para $v = (x, y, z)^\top$:

$$\begin{cases} a(y + z) = 0, \\ -x - z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Observamos que las dos últimas ecuaciones son equivalentes (la tercera es $-1$ veces la segunda), así que producen una sola restricción: $x = -z$.

Ahora hay dos casos según el valor de $a$:

**Caso 1: $a \neq 0$.**
Si $a \neq 0$, de la primera ecuación $a(y + z) = 0$ se obtiene $y + z = 0$, es decir $y = -z$. Con $x = -z$ y $y = -z$ tomamos $z = t$ como parámetro y obtenemos

$$v = t(-1, -1, 1).$$

Por tanto en este caso

$$\operatorname{Ker}(A - I) =< (-1, -1, 1) >,$$

y la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ es 1.

**Caso 2:** $a = 0$**.**
Si $a = 0$, la primera ecuación se vuelve $0 = 0$ (no impone restricción), y solo queda la condición $x = -z$. En este caso $y$ es libre y $z$ es libre, por tanto hay dos parámetros. Escribiendo con parámetros $s, y$ (o $s, t$),

$$(x, y, z) = (-z,\ y,\ z) = y(0, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

De aquí

$$\mathrm{Ker}(A - I) =< (0, 1, 0),\ (-1, 0, 1) >,$$

y la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ es 2.

## 4. Conclusión sobre diagonalizabilidad

Una matriz real cuadrada es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ si y solo si, para cada autovalor, la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica y además hay un conjunto de vectores propios que forman una base de $\mathbb{R}^n$.

En nuestro caso:

- Para $\lambda = 2$ la multiplicidad algebraica es 1 y la geométrica es 1 (siempre).
- Para $\lambda = 1$ la multiplicidad algebraica es 2, y la multiplicidad geométrica es

$$\begin{cases} 2, & \text{si } a = 0, \\ 1, & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Por tanto $A$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ si y solo si la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ es 2, es decir exactamente cuando $a = 0$.

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable sobre } \mathbb{R} \iff a = 0.}$$

*Vectores propios en el caso $a = 0$:* si $a = 0$, una base de vectores propios es

$$E_2 =< (0, -1, 1) >, \qquad E_1 =< (0, 1, 0),\ (-1, 0, 1) >,$$

y tomando estas tres columnas obtenemos una matriz $P$ invertible con la cual $P^{-1}AP$ es diagonal.

## Ejercicio 5

Hallar autovalores y autovectores de las matrices:

### (i)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cálculo de espectro:

$$\text{autovalores: } \lambda = 2 \text{ (multiplicidad 2)}, \quad \lambda = 4 \text{ (multiplicidad 1)}.$$

Una base de autovectores para $\lambda = 2$ es, por ejemplo,

$$\{(1,1,0),\ (-1,0,1)\},$$

y para $\lambda = 4$ un autovector es $(1,0,1)$. Como la dimensión total de espacios propios suma 3, $A$ es diagonalizable; existe $P$ tal que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(2,2,4)$.

### (ii)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obtienen autovalores $\lambda = -1$ (multiplicidad 1) y $\lambda = 2$ (multiplicidad algebraica 2). Para $\lambda = 2$ la multiplicidad geométrica es 1 (solo un autovector independiente), por lo que **no** es diagonalizable (no hay suficientes autovectores).

## Ejercicio 6 (otra matriz)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

### (a) Para $a = 2$, ¿es diagonalizable?

Con $a = 2$ el polinomio característico factoriza como $\lambda(\lambda - 3)^2$. Los autovalores son 0 (simple) y 3 (multiplicidad 2). Calculando espacios propios se encuentran dos autovectores independientes asociados a $\lambda = 3$ y uno a $\lambda = 0$, en total 3 autovectores independientes. Por tanto, **sí** es diagonalizable cuando $a = 2$.

### (b) ¿Existe $a$ tal que 4 sea valor propio?

Imponiendo $\det(A - 4I) = 0$ se obtiene la condición $a = 6$. Es decir, 4 es autovalor *si y solo si* $a = 6$.

## Ejercicio 7

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene autovalores $\lambda_1 = 4$ (vector propio $(1,1,1)$) y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad 2 (subespacio ortogonal a $(1,1,1)$). Usando la descomposición en proyecciones se obtiene la fórmula

$$A^n = I + \frac{4^n - 1}{3} J,$$

donde $J$ es la matriz de todos unos ($J_{ij} = 1$). En particular,

$$A^{2001} = I + \frac{4^{2001} - 1}{3} J.$$

## Resumen de rangos y nulidades importantes

- En el **Ejercicio 6** (mapa $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$), la matriz asociada $A$ tiene $\operatorname{rank}(A) = 2$ y $\operatorname{nullity}(A) = 2$.
- En el **Ejercicio 8** (caso $a = 1, b = 1, c = -1$), la matriz tiene rango 2 y nulidad 1.
- En el **Ejercicio 15(b,i)** la matriz $2 \times 3$ tiene rango 2 (siendo 2 el máximo posible para una $2 \times 3$).

---

**Observación final:** he incluido pasos clave y resultados finales. Si quieres que convierta este '.tex' en PDF (es decir, que te suba el PDF generado) o que amplíe algún desarrollo concreto paso a paso (por ejemplo, mostrar la reducción por filas para obtener las bases de núcleos, o detallar la verificación de diagonalisabilidad para cada paso), dímelo y lo agrego directamente al documento.