

Guía de Estudio: Aplicaciones Lineales y Diagonalización

Álgebra II - Nivel Universitario

1. Aplicaciones lineales

Definición: Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo \mathbb{K} . Una función $T : V \rightarrow W$ se llama **aplicación lineal** si para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Ejemplo 1: Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, 3x + 4y)$. Verifiquemos que es lineal:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1 - y_1, 3x_1 + 4y_1) + (2x_2 - y_2, 3x_2 + 4y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ T(\alpha(x, y)) &= (2\alpha x - \alpha y, 3\alpha x + 4\alpha y) = \alpha(2x - y, 3x + 4y) = \alpha T(x, y) \end{aligned}$$

Por tanto, T es una aplicación lineal.

Ejemplo 2: Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, y, z) = 2x - y + 3z$. Comprobemos la linealidad:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 - y_1 + 3z_1) + (2x_2 - y_2 + 3z_2) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

Y:

$$T(\alpha(x, y, z)) = 2\alpha x - \alpha y + 3\alpha z = \alpha(2x - y + 3z) = \alpha T(x, y, z)$$

Por tanto, T es lineal.

Ejemplo 3: Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 2y, 4x - y)$. Verifiquemos:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2), 4(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + 2y_1, 4x_1 - y_1) + (x_2 + 2y_2, 4x_2 - y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ T(\alpha(x, y)) &= (\alpha x + 2\alpha y, 4\alpha x - \alpha y) = \alpha(x + 2y, 4x - y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ es una aplicación lineal.

—
Ejemplo 4: Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x^2 + y$. Comprobemos si es lineal:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1 + y_2 \\ &\neq (x_1^2 + y_1) + (x_2^2 + y_2) \end{aligned}$$

Por tanto, T **no es lineal** porque no se cumple la aditividad (debido al término cuadrático x^2).

—
Ejemplo 5: Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$. Comprobemos:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + y_1, y_1 + z_1, x_1 + z_1) + (x_2 + y_2, y_2 + z_2, x_2 + z_2) \end{aligned}$$

Y:

$$T(\alpha(x, y, z)) = (\alpha x + \alpha y, \alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha z) = \alpha T(x, y, z)$$

Por tanto, T es una aplicación lineal.

—
Conclusión: Una transformación es lineal si cumple las dos propiedades fundamentales:

1. Aditividad: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ 2. Homogeneidad: $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ El incumplimiento de cualquiera de ellas implica que T no es lineal.

2. Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Definición:

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}, \quad (\text{núcleo o espacio nulo})$$

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}, \quad (\text{imagen o rango})$$

Ejemplo 1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Núcleo: Resolver $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y, \quad z = -y$$

$$\ker(T) = \langle (-1, 1, -1) \rangle, \quad \dim(\ker T) = 1$$

Imagen: Las columnas de A generan $\text{Im}(T)$. Como las dos primeras son linealmente independientes:

$$\dim(\text{Im } T) = 2, \quad \text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Núcleo: Resolver $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{(0, 0, 0)\}, \quad \dim(\ker T) = 0$$

Imagen: Como las tres columnas son linealmente independientes,

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3, \quad \dim(\text{Im } T) = 3$$

(T es inyectiva y sobreyectiva, por tanto biyectiva.)

Ejemplo 3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, 2x - 2y)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Núcleo: Resolver $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y, \text{ sin restricción en } z$$

$$\ker(T) = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle, \quad \dim(\ker T) = 2$$

Imagen: Las columnas 1 y 2 son proporcionales, por lo tanto:

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{(1, 2)\}, \quad \dim(\text{Im } T) = 1$$

$$\Rightarrow \dim(V) = 3 = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$$

Ejemplo 4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Núcleo: Resolver $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z \text{ libre}$$

$$\ker(T) = \langle (0, 0, 1) \rangle, \quad \dim(\ker T) = 1$$

Imagen: Las dos primeras columnas son linealmente independientes, por tanto:

$$\text{Im}(T) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle, \quad \dim(\text{Im } T) = 2$$

(Proyecta \mathbb{R}^3 sobre el plano xy .)

Ejemplo 5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Núcleo: Resolver $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_1, \quad x_3 = x_1, \quad x_4 = -x_1$$

$$\ker(T) = \langle (1, -1, 1, -1) \rangle, \quad \dim(\ker T) = 1$$

Imagen: Como las tres filas son independientes:

$$\dim(\text{Im } T) = 3$$

$$\Rightarrow \dim(V) = 4 = 1 + 3$$

(Se verifica el teorema de la dimensión: rango + nulidad = dimensión del dominio.)

3. Teorema de la Dimensión (Rango–Nulidad)

Para una aplicación lineal $T : V \rightarrow W$ se cumple:

$$\boxed{\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)}$$

Este teorema, conocido también como ****teorema de rango–nulidad****, establece una relación fundamental entre el espacio de salida, el espacio de llegada y la estructura interna de una transformación lineal.

Ejemplo 1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Del ejemplo anterior:

$$\dim(V) = 3, \dim(\ker T) = 1, \dim(\operatorname{Im} T) = 2$$

$$3 = 1 + 2 \quad (\text{verificado})$$

Ejemplo 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(\ker T) = 0$$

Como A tiene rango 3:

$$\dim(\operatorname{Im} T) = 3$$

$$3 = 0 + 3 \quad (\text{verificado})$$

Ejemplo 3. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2, \quad x_3 = -x_2, \quad x_4 = x_2$$

$$\ker(T) = \text{span}\{(-1, 1, -1, 1)\}, \quad \dim(\ker T) = 1$$

Como las tres filas son linealmente independientes:

$$\dim(\text{Im } T) = 3$$

$$4 = 1 + 3 \quad (\text{verificado})$$

Ejemplo 4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La segunda fila es múltiplo de la primera, por tanto $\text{rango}(A) = 1$.

$$\dim(\text{Im } T) = 1$$

Como $\dim(V) = 3$, se tiene:

$$\dim(\ker T) = 3 - 1 = 2$$

$$3 = 2 + 1 \quad (\text{verificado})$$

Ejemplo 5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí el rango de A es 2 (las dos primeras filas son no nulas e independientes).

$$\dim(\operatorname{Im} T) = 2, \quad \dim(V) = 4$$

Por tanto:

$$\dim(\ker T) = 4 - 2 = 2$$

$$4 = 2 + 2 \quad (\text{verificado})$$

Conclusión: El teorema de la dimensión se cumple en todos los casos presentados y constituye una herramienta esencial para determinar la estructura de cualquier aplicación lineal a partir de su matriz asociada.

4. Matriz de Representación

Sea $T : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, con bases $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ en V y $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ en W . La **matriz de T respecto a B y C** es la matriz $[T]_C^B$ cuyas columnas son las coordenadas de $T(v_j)$ expresadas en la base C :

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. (Base canónica)

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$. En la base canónica $B = C = \{e_1, e_2\}$ con $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$:

$$T(e_1) = (1, 2), \quad T(e_2) = (1, -1)$$

Por tanto:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. (Cambio de base en el dominio)

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Tomemos la base $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)\}$ para el dominio y la base canónica C para la imagen.

Calculamos:

$$T(v_1) = T(1, 1) = (2, 0), \quad T(v_2) = T(1, -1) = (0, 2)$$

Por tanto:

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa una dilatación por un factor 2 respecto a la base B .

Ejemplo 3. (De \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, con base canónica en ambos espacios.

Evaluamos:

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (1, 1), \quad T(e_3) = (0, 1)$$

Por tanto:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la misma matriz usada en ejemplos anteriores de núcleo e imagen.

Ejemplo 4. (De \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 con base no canónica)

Sea $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$. Usamos la base $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ en el dominio y la base $C = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ en la imagen.

Primero, expresamos cada $T(e_j)$ como combinación lineal de los vectores de C .

$$T(e_1) = (1, 0, 1) = 0 \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) + 1 \cdot (1, 0, 1) \Rightarrow [T(e_1)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = (1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_C, \quad T(e_3) = (0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

Así:

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5. (De espacio polinómico a espacio vectorial)

Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $T(a+bx+cx^2) = (a, b, c)$. Usando la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$ en P_2 y la base canónica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ en \mathbb{R}^3 :

$$T(1) = (1, 0, 0), \quad T(x) = (0, 1, 0), \quad T(x^2) = (0, 0, 1)$$

Por tanto:

$$[T]_C^B = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6. (De espacio polinómico a sí mismo)

Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = p'(x)$$

Usamos la base $B = \{1, x, x^2\}$. Calculamos:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = 1, \quad T(x^2) = 2x$$

Expresamos en la base B :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa el operador derivada.

—

Conclusión: El cálculo de la matriz de representación permite traducir el comportamiento abstracto de una transformación lineal a un contexto algebraico concreto. Una vez obtenida la matriz, se pueden aplicar métodos matriciales para hallar núcleo, imagen, valores y vectores propios, o incluso diagonalizar la transformación.

5. Valores y Vectores Propios

Definición: Sea A una matriz cuadrada. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** de A si existe un vector no nulo \mathbf{v} tal que:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El vector \mathbf{v} se llama **vector propio** asociado a λ .

Para encontrarlos, se resuelve:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{ecuación característica})$$

y luego se obtiene \mathbf{v} resolviendo $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

Ejemplo 1. Matriz simétrica 2×2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3I)v = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

Valores propios: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ Vectores propios: $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$

Ejemplo 2. Matriz diagonalizable con valores repetidos

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 4$$

Para $\lambda = 4$:

$$(A - 4I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solo hay un vector propio independiente, por tanto A **no es diagonalizable**, aunque todos los valores propios son iguales.

Ejemplo 3. Matriz triangular superior

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 2 \text{ (doble)}, \quad \lambda_2 = 5$$

Para $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Matriz con valores propios negativos

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -1$$

Para $\lambda = 1$:

$$(A - I)v = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 = (1, -1)$$

Para $\lambda = -1$:

$$(A + I)v = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 1)$$

Ejemplo 5. Matriz 3×3 diagonalizable

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$$

Para cada valor:

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow v_1 = (1, 0, 0), \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow v_2 = (1, -\frac{3}{2}, 0), \quad \lambda_3 = 2 \Rightarrow v_3 = (1, -2, 1)$$

Todos los valores son distintos $\Rightarrow A$ es diagonalizable.

Ejemplo 6. Interpretación geométrica

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Los valores propios son **complejos**. Esto significa que A representa una **rotación de 90° en el plano**, pues no tiene vectores propios reales.

—

Conclusión: Los valores propios determinan los *factores de escala* por los cuales una transformación lineal estira o comprime el espacio, y los vectores propios indican las direcciones invariantes bajo la acción de la matriz. Si una matriz tiene suficientes vectores propios linealmente independientes, puede diagonalizarse, simplificando enormemente su estudio.

6. Multiplicidad Algebraica y Geométrica

Definición: Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ sobre un cuerpo \mathbb{K} .

- La **multiplicidad algebraica** de un valor propio λ es su número de repeticiones como raíz del polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- La **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del subespacio propio asociado, es decir:

$$m_g(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$$

Se cumple siempre:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Ejemplo 1: Matriz con valores propios distintos

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

Cada valor propio tiene multiplicidad algebraica $m_a = 1$. Para ambos, el espacio propio tiene dimensión 1, por lo tanto:

$$m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = 1$$

Luego, $m_a = m_g$ para cada valor propio.

Ejemplo 2: Matriz con valor propio repetido y completa diagonalización

Sea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$p_B(\lambda) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ (con } m_a = 2), \quad \lambda_2 = 2 \text{ (con } m_a = 1)$$

Para $\lambda = 3$:

$$(B - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$\text{Espacio propio: } E_3 = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \Rightarrow m_g(3) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 2: \quad E_2 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}, \quad m_g(2) = 1$$

Aquí, $m_a = m_g$ para todos los valores propios, por tanto B es diagonalizable.

Ejemplo 3: Matriz no diagonalizable

Sea

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ con } m_a = 2$$

Calculamos el espacio propio:

$$(C - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$E_2 = \text{span}\{(1, 0)\}, \quad m_g(2) = 1$$

Conclusión:

$$m_a(2) = 2, \quad m_g(2) = 1$$

Como $m_g < m_a$, la matriz C no es diagonalizable.

Ejemplo 4: Matriz con tres valores propios, uno repetido

Sea

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p_D(\lambda) = (4 - \lambda)^2(3 - \lambda) \\ \Rightarrow \lambda_1 = 4 \ (m_a = 2), \quad \lambda_2 = 3 \ (m_a = 1)$$

Para $\lambda = 4$:

$$(D - 4I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \ x_3 = 0 \Rightarrow E_4 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}, \ m_g(4) = 1$$

$$E_3 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}, \quad m_g(3) = 1$$

Por tanto:

$$m_a(4) = 2, \ m_g(4) = 1, \quad \Rightarrow D \text{ no es diagonalizable.}$$

Resumen:

Matriz	Valor Propio	m_a	m_g
A	1, 3	1, 1	1, 1
B	3, 2	2, 1	2, 1
C	2	2	1
D	4, 3	2, 1	1, 1

Conclusión: Una matriz es diagonalizable si y sólo si para cada valor propio λ , se cumple $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

7. Diagonalización

Una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz invertible P tal que:

$$P^{-1}AP = D$$

donde D es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de A . Las columnas de P son los **vectores propios** de A , y la diagonal de D contiene los valores propios correspondientes.

Condición necesaria y suficiente: Una matriz A es diagonalizable si y sólo si, para cada valor propio λ ,

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

donde m_g es la multiplicidad geométrica y m_a la multiplicidad algebraica.

Ejemplo 1: Matriz simétrica (siempre diagonalizable)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ya sabemos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, con vectores propios:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz de paso:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$P^{-1}AP = D$$

Por lo tanto, A es diagonalizable.

Ejemplo 2: Matriz diagonalizable con valor propio repetido

Sea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$p_B(\lambda) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

y los valores propios son $\lambda_1 = 3$ (con $m_a = 2$) y $\lambda_2 = 2$.

Los vectores propios son triviales:

$$E_3 = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}, \quad E_2 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$$

Por tanto:

$$m_g(3) = 2, \quad m_g(2) = 1$$

Como $m_g = m_a$ para todos los valores propios, B es diagonalizable. La matriz diagonal

es:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y $P = I_3$ en este caso.

Ejemplo 3: Matriz no diagonalizable (defectuosa)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p_C(\lambda) = (2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2, \quad m_a(2) = 2$$

El espacio propio:

$$(C - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$E_2 = \text{span}\{(1, 0)\}, \quad m_g(2) = 1$$

Como $m_g(2) < m_a(2)$, la matriz no es diagonalizable. De hecho, C sólo puede llevarse a forma **de Jordan**:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

donde el 1 sobre la diagonal representa la falta de suficientes vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo 4: Matriz 3x3 diagonalizable con tres valores propios distintos

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son 1, 2, 3, todos con multiplicidad $m_a = 1$ y $m_g = 1$. Es diagonal por definición, por lo tanto también diagonalizable. Además, cualquier matriz similar a D también será diagonalizable.

Ejemplo 5: Matriz triangular diagonalizable

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$p_E(\lambda) = (4 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

$\lambda_1 = 4$ (con $m_a = 2$), $\lambda_2 = 1$.

Para $\lambda = 4$:

$$(E - 4I)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_3 = 0 \Rightarrow E_4 = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$$

$$m_g(4) = 1 < m_a(4) = 2$$

Por tanto, E no es diagonalizable.

Ejemplo 6: Matriz ortogonal (siempre diagonalizable sobre \mathbb{R} o \mathbb{C})

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p_F(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, con vectores propios:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}FP = D$$

Por tanto, F es diagonalizable.

Conclusión general:

- Si una matriz tiene n valores propios distintos, es automáticamente diagonalizable.
- Si existen valores propios repetidos, debe cumplirse $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ para cada uno.
- Si $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$ para algún λ , la matriz no es diagonalizable y se lleva a forma de Jordan.

Resumen de ejemplos:

Matriz	Valores Propios	¿Diagonalizable?	Razón
A	1, 3	Sí	$m_g = m_a = 1$
B	3, 2	Sí	$m_g = m_a$
C	2	No	$m_g < m_a$
D	1, 2, 3	Sí	Distintos valores propios
E	4, 1	No	$m_g(4) < m_a(4)$
F	1, -1	Sí	Ortogonal y simétrica

Ejercicios Propuestos

1. Verifique si las siguientes aplicaciones son lineales:

(a) $T(x, y) = (x - y, 2y)$

(b) $T(x, y) = (x^2, y)$

2. Halle el núcleo e imagen de $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

3. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ determine sus valores y vectores propios.

4. Determine si $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

5. Verifique el teorema de la dimensión para la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$.

1 Ejercicios

Ejercicio 1

Sea la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 . Buscamos las coordenadas de $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ respecto de B , es decir escalar α, β, γ tales que:

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, 0) = (1, 2, 3).$$

Esto da el sistema de ecuaciones:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$

$$\alpha + \beta = 2,$$

$$\alpha = 3.$$

De la tercera ecuación $\alpha = 3$. Sustituyendo en la segunda: $3 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = -1$. Luego $\gamma = 1 - \alpha - \beta = 1 - 3 - (-1) = -1$.

Por tanto, las coordenadas de \mathbf{v} respecto de B son:

$$[\mathbf{v}]_B = (3, -1, -1).$$

Ejercicio 2

Sea la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Buscamos a, b, c tales que

$$a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(1, 0, 0) = (2, -1, 3).$$

Comparando componentes:

$$\begin{aligned}a + c &= 2, \\b &= -1, \\a &= 3.\end{aligned}$$

De $a = 3$ y $b = -1$ se obtiene $c = 2 - a = 2 - 3 = -1$.

Así,

$$[(2, -1, 3)]_B = (3, -1, -1).$$

Ejercicio 3

Demostrar que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, -x)$$

es una transformación lineal.

Prueba. Sea $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ en \mathbb{R}^3 , y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculamos $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\&= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), -(x_1 + x_2)) \\&= (x_1 - 2y_1 + z_1, -x_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2, -x_2) \\&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Y para homogeneidad:

$$\begin{aligned}T(\lambda \mathbf{u}) &= T(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \\&= (\lambda x_1 - 2\lambda y_1 + \lambda z_1, -\lambda x_1) \\&= \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1, -x_1) \\&= \lambda T(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Como ambas propiedades (aditividad y homogeneidad) se cumplen, T es lineal. \square

Ejercicio 4

Determinar si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + 2, y)$ es una transformación lineal. Observemos que una transformación lineal debe enviar el vector nulo al vector nulo:

$$f(0, 0) = (0 + 2, 0) = (2, 0).$$

Dado que $f(0, 0) \neq (0, 0)$, f no puede ser lineal.

Alternativamente, se puede ver que $f(0, 0) \neq 0$ o que f no preserva suma ya que la componente x tiene un "offset" constante 2.

Por tanto, f **no** es una transformación lineal.

Ejercicio 5

Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y, y - 2t).$$

a) Base del núcleo de T

Buscamos los vectores (x, y, z, t) que satisfacen

$$\begin{aligned}x - 2y &= 0, \\y - 2t &= 0.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación $y = 2t$. Sustituyendo en la primera: $x - 2(2t) = 0 \Rightarrow x = 4t$. No hay condicion sobre z , que queda libre. Tomando como parámetros t y z :

$$(x, y, z, t) = (4t, 2t, z, t) = t(4, 2, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0).$$

Por tanto, una base para $\ker(T)$ es

$$\{(4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}.$$

b) Todos los $v \in \mathbb{R}^4$ tales que $T(v) = (1, 1)$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 1, \\y - 2t &= 1.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación $y = 1 + 2t$. Sustituyendo en la primera:

$$x - 2(1 + 2t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 2 - 4t = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 4t.$$

La coordenada z es libre. Por tanto las soluciones se escriben como

$$(x, y, z, t) = (3 + 4t, 1 + 2t, z, t) = (3, 1, 0, 0) + t(4, 2, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0).$$

Observando que los dos vectores que multiplican t y z son precisamente la base del núcleo, podemos concluir que existen infinitas soluciones. Una solución particular es $v_0 = (3, 1, 0, 0)$, y la familia completa de soluciones es

$$\{ v_0 + w : w \in \ker(T) \}.$$

Ejercicio 6

Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y, y - 2t).$$

(a) Cálculo de $T(1, -2, 5, -1)$ y $T\left(\frac{2}{3}(1, -2, 5, -1)\right)$

Usamos linealidad y evaluación directa:

$$\begin{aligned}T(1, -2, 5, -1) &= (1 - 2(-2), -2 - 2(-1)) = (1 + 4, -2 + 2) = (5, 0), \\T\left(\frac{2}{3}(1, -2, 5, -1)\right) &= \frac{2}{3}T(1, -2, 5, -1) = \frac{2}{3}(5, 0) = \left(\frac{10}{3}, 0\right).\end{aligned}$$

(b) Hallar a, b tales que $T(a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 1)) = (11, -11)$

Formamos el vector combinado

$$v = a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 1) = (a + b, a - b, b, b).$$

Aplicando T :

$$T(v) = ((a + b) - 2(a - b), (a - b) - 2b) = (-a + 3b, a - 3b).$$

Imponiendo la igualdad con $(11, -11)$ obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -a + 3b &= 11, \\ a - 3b &= -11. \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones son equivalentes (la segunda es la opuesta de la primera), por tanto hay infinitas soluciones parametrizadas por b . Despejando:

$$a = 3b - 11, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos: $b = 0 \Rightarrow a = -11$, $b = 1 \Rightarrow a = -8$.

(c) Determinar $k \in \mathbb{R}$ tal que $(1, k, -1, 1) \in \ker(T)$

Necesitamos

$$T(1, k, -1, 1) = (1 - 2k, k - 2) = (0, 0).$$

Esto exige simultáneamente

$$\begin{aligned} 1 - 2k &= 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}, \\ k - 2 &= 0 \Rightarrow k = 2. \end{aligned}$$

No existe valor de k que satisfaga ambas ecuaciones, luego *no* existe k con la propiedad pedida.

(d) Núcleo de T y una base

Resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0, \\ y - 2t &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda $y = 2t$, de la primera $x = 4t$, y z es libre. Es decir

$$(x, y, z, t) = (4t, 2t, z, t) = t(4, 2, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0), \quad t, z \in \mathbb{R}.$$

Por tanto

$$\ker(T) = \text{span}\{(4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Una base natural para $\ker(T)$ es $\{(4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$.

(e) Imagen de T y su dimensión

Escribimos T como combinación lineal de las variables libres:

$$T(x, y, z, t) = x(1, 0) + y(-2, 1) + t(0, -2).$$

Por tanto

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{(1, 0), (-2, 1), (0, -2)\}.$$

Comprobamos que $(1, 0)$ y $(-2, 1)$ son linealmente independientes y generan la imagen; la tercera columna $(0, -2)$ es combinación de ellas. Entonces

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2.$$

(Consistente con el teorema rango-nulidad: $\dim \ker(T) = 4 - 2 = 2$.)

Ejercicio 7

Para cada transformación lineal calculamos rango y nulidad.

a)

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, 3y - 6x)$. Matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinante: $\det(A) = 2 \cdot 3 - (-1)(-6) = 6 - 6 = 0$. Las columnas son proporcionales, luego

$$\text{rank}(A) = 1, \quad \text{nul}(T) = 2 - 1 = 1.$$

b)

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$. Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Columnas $c_1 = (0, -1, 1, 1)$ y $c_2 = (1, 0, 3, -1)$ son linealmente independientes (no existe λ con $c_1 = \lambda c_2$), por tanto

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nul}(T) = 2 - 2 = 0.$$

c)

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$. Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cálculo del determinante muestra $\det(A) = 0$; las columnas suman cero (dependencia lineal). Se puede comprobar que hay 2 columnas independientes, por lo que

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nul}(T) = 3 - 2 = 1.$$

d)

$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $T(x, y, z, s) = (x - y, y - z, z - s, s, x)$. Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las cuatro columnas son linealmente independientes (se puede ver fijando componentes), luego

$$\text{rank}(A) = 4, \quad \text{nul}(T) = 4 - 4 = 0.$$