Limites, construccion civil

Emilio Monardes Gaspar * Depto. Matemáticas *

November 2025

Guía de ejercicios resueltos: Límites

1. Límites por evaluación directa (funciones continuas)

1. $\lim_{x\to 3}(2x+5)$.
   Solución: Función polinómica continua, evaluar: $2\cdot 3+5=11$.

2. $\lim_{x\to -2}(x^2+3x+1)$.
   Solución: Evaluando: $(-2)^2+3(-2)+1=4-6+1=-1$.

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{x+1}$.
   Solución: Sustituir $x=0$: $\frac{0-0}{1}=0$.

4. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}$.
   Solución: Sustituir $x=1$: $\sqrt{4}=2$.

2. Límites resolvibles factorizando (indeterminación $0/0$)

1. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.
   Solución: Factorizar $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Simplificar y evaluar:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2\Rightarrow \lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.
   Solución: $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Entonces $\lim_{x\to 3}(x+3)=6$.

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.
   Solución: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Simplificar y evaluar: $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1+1+1=3$.

4. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.
Solución: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Simplificar y evaluar: $\lim_{x \to -1}(x-1) = -2$.

3. Factorización con división polinómica (cúbicas u otras)

1. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$.
Solución: Usar factorización suma de cubos: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Simplificar y evaluar: $\lim_{x \to -1}(x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.
Solución: $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$. Entonces $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12$.

3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$.
Solución: Factorizar $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$. Evaluar: $\lim_{x \to 1}(x^3 + x^2 + x + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

4. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x - 2}$.
Solución: Dividir polinomios (o factorizar por agrupación). Haciendo división sintética por $x = 2$: coeficientes $1, 3, -4, -12$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Cociente $x^2 + 5x + 6$. Entonces $\frac{num}{x-2} = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow \lim_{x \to 2}(x^2 + 5x + 6) = 4 + 10 + 6 = 20$.

4. Límites racionalizando (conjugados)

1. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.
Solución: Multiplicar por conjugado:
$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}.$$
Evaluar en $x = 4$: $\frac{1}{2+2} = 14$.

2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$.
Solución: Conjugado:
$$\frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + 2}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{x + 3 - 4}{(x-1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x + 3} + 2)}.$$

Simplificar y evaluar: $\frac{1}{\sqrt{4}+2} = 14$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
Solución: Conjugado:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Evaluar en $x = 0$: $\frac{1}{1+1} = 12$.

4. $\lim_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$.
Solución: Notar que $9 - x = -(x-9)$. Usar conjugado:

$$\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \frac{3-\sqrt{x}}{-(x-9)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}.$$

Multiplicar por conjugado:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}.$$

Evaluar en $x = 9$: $\frac{1}{3+3} = 16$.

5. Límites por cambio de variable (sustitución)

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
Solución: Tomar $u = 3x$ entonces cuando $x \to 0$, $u \to 0$. Tenemos $\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin u}{u} \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{x}$.
Solución: $u = 5x$. Entonces $\frac{\tan(5x)}{x} = \frac{\tan u}{u} \cdot 5 \to 5$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$.
Solución: Sabemos $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Entonces $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1^2 = 1$.

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$.
Solución: Usar identidad $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$:

$$\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \frac{2\sin^2(x)}{x^2} = 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 2.$$

6. Límites cuando $x \to \infty$ (comportamiento al infinito)

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-2}$.
   Solución: Dividir por x^2 (grado mayor):
   $$\frac{3+5/x-1/x^2}{1-2/x^2} \to \frac{3+0-0}{1-0} = 3.$$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-x}{2x^3+4}$.
   Solución: Dividir por x^3: $\frac{5-1/x^2}{2+4/x^3} \to \frac{5}{2}$.

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$.
   Solución: Escribir $\sqrt{x^2+3} = x\sqrt{1+3/x^2}$. Para $x \to \infty$, $|x| = x$.
   $$\frac{2x+1}{x\sqrt{1+3/x^2}} = \frac{2+1/x}{\sqrt{1+3/x^2}} \to \frac{2}{1} = 2.$$

4. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$.
   Solución: Primero $\frac{x-1}{x+1} \to 1$ (dividir por x): $\frac{1-1/x}{1+1/x} \to 1$. Entonces el cuadrado tiende a $1^2 = 1$.

Guía de Ejercicios: Límites (con respuestas)

1. Límites por evaluación directa

1. $\lim_{x\to3}(2x+1) = 7$
2. $\lim_{x\to-1}(x^2+4x) = -3$
3. $\lim_{x\to2}(x^3-3x+1) = 3$
4. $\lim_{x\to0}(\sin x + x) = 0$
5. $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}\right) = 3$

2. Límites resolviendo por factorización

1. $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$
2. $\lim_{x\to-3} \frac{x^2+3x}{x+3} = -3$
3. $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

4. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$
5. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = 12$

3. Límites por división polinómica

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27$
4. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = -3$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = 32$

4. Límites racionalizando

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$
2. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$
3. $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{6}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{2}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} = \frac{3}{4}$

5. Límites con cambio de variable

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{2x} = \frac{5}{2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(4x)}{x} = 4$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} = 4$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2} = \frac{9}{2}$

6. Límites cuando $x \to \infty$

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x^2+1} = 2$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x}{x^3+2} = 3$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x}{x^3+1} = 0$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^4+2}{2x^4-x} = \frac{7}{2}$