

# Guía de Estudio: Aplicaciones Lineales y Diagonalización

Álgebra II - Nivel Universitario

---

## 1. Aplicaciones lineales

**Definición:** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ . Una función  $T : V \rightarrow W$  se llama **aplicación lineal** si para todo  $u, v \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$  se cumple:

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

**Ejemplo 1:** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (2x - y, 3x + 4y)$ . Verifiquemos que es lineal:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1 - y_1, 3x_1 + 4y_1) + (2x_2 - y_2, 3x_2 + 4y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ T(\alpha(x, y)) &= (2\alpha x - \alpha y, 3\alpha x + 4\alpha y) = \alpha(2x - y, 3x + 4y) = \alpha T(x, y) \end{aligned}$$

Por tanto,  $T$  es una aplicación lineal.

---

**Ejemplo 2:** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y, z) = 2x - y + 3z$ . Comprobemos la linealidad:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 - y_1 + 3z_1) + (2x_2 - y_2 + 3z_2) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

Y:

$$T(\alpha(x, y, z)) = 2\alpha x - \alpha y + 3\alpha z = \alpha(2x - y + 3z) = \alpha T(x, y, z)$$

Por tanto,  $T$  es lineal.

---

**Ejemplo 3:** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (x + 2y, 4x - y)$ . Verifiquemos:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2), 4(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + 2y_1, 4x_1 - y_1) + (x_2 + 2y_2, 4x_2 - y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ T(\alpha(x, y)) &= (\alpha x + 2\alpha y, 4\alpha x - \alpha y) = \alpha(x + 2y, 4x - y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow T$  es una aplicación lineal.

—

**Ejemplo 4:** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = x^2 + y$ . Comprobemos si es lineal:

$$\begin{aligned}T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1 + y_2 \\&\neq (x_1^2 + y_1) + (x_2^2 + y_2)\end{aligned}$$

Por tanto,  $T$  **no es lineal** porque no se cumple la aditividad (debido al término cuadrático  $x^2$ ).

—

**Ejemplo 5:** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ . Comprobemos:

$$\begin{aligned}T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + z_1 + z_2) \\&= (x_1 + y_1, y_1 + z_1, x_1 + z_1) + (x_2 + y_2, y_2 + z_2, x_2 + z_2)\end{aligned}$$

Y:

$$T(\alpha(x, y, z)) = (\alpha x + \alpha y, \alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha z) = \alpha T(x, y, z)$$

Por tanto,  $T$  es una aplicación lineal.

—

**Conclusión:** Una transformación es lineal si cumple las dos propiedades fundamentales:

1. Aditividad:  $T(u + v) = T(u) + T(v)$
  2. Homogeneidad:  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
- El incumplimiento de cualquiera de ellas implica que  $T$  no es lineal.

## 2. Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

**Definición:**

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}, \quad (\text{núcleo o espacio nulo})$$

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}, \quad (\text{imagen o rango})$$

**Ejemplo 1.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Núcleo:** Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y, z = -y$$

$$\ker(T) = \langle(-1, 1, -1)\rangle, \quad \dim(\ker T) = 1$$

**Imagen:** Las columnas de  $A$  generan  $\text{Im}(T)$ . Como las dos primeras son linealmente independientes:

$$\dim(\text{Im } T) = 2, \quad \text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

**Ejemplo 2.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Núcleo:** Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, y = 0, x = 0$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{(0, 0, 0)\}, \quad \dim(\ker T) = 0$$

**Imagen:** Como las tres columnas son linealmente independientes,

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3, \quad \dim(\text{Im } T) = 3$$

( $T$  es inyectiva y sobreyectiva, por tanto biyectiva.)

**Ejemplo 3.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y, z) = (x - y, 2x - 2y)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Núcleo:** Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y, \text{ sin restricción en } z$$

$$\ker(T) = \langle(1, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle, \quad \dim(\ker T) = 2$$

**Imagen:** Las columnas 1 y 2 son proporcionales, por lo tanto:

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{(1, 2)\}, \quad \dim(\text{Im } T) = 1$$

$$\Rightarrow \dim(V) = 3 = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$$

**Ejemplo 4.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Núcleo:** Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \Rightarrow z \text{ libre} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\ker(T) = \langle (0, 0, 1) \rangle, \quad \dim(\ker T) = 1$$

**Imagen:** Las dos primeras columnas son linealmente independientes, por tanto:

$$\text{Im}(T) = \langle \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \rangle, \quad \dim(\text{Im } T) = 2$$

(Proyecta  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano  $xy$ .)

**Ejemplo 5.** Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Núcleo:** Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -x_1, \quad x_3 = x_1, \quad x_4 = -x_1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\ker(T) = \langle (1, -1, 1, -1) \rangle, \quad \dim(\ker T) = 1$$

**Imagen:** Como las tres filas son independientes:

$$\dim(\text{Im } T) = 3$$

$$\Rightarrow \dim(V) = 4 = 1 + 3$$

(Se verifica el teorema de la dimensión: rango + nulidad = dimensión del dominio.)

### 3. Teorema de la Dimensión (Rango–Nulidad)

Para una aplicación lineal  $T : V \rightarrow W$  se cumple:

$$\boxed{\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)}$$

Este teorema, conocido también como \*\*teorema de rango–nulidad\*\*, establece una relación fundamental entre el espacio de salida, el espacio de llegada y la estructura interna de una transformación lineal.

**Ejemplo 1.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Del ejemplo anterior:

$$\dim(V) = 3, \quad \dim(\ker T) = 1, \quad \dim(\text{Im } T) = 2$$

$$3 = 1 + 2 \quad (\text{verificado})$$

**Ejemplo 2.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \quad \Rightarrow x = y = z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(\ker T) = 0$$

Como  $A$  tiene rango 3:

$$\dim(\text{Im } T) = 3$$

$$3 = 0 + 3 \quad (\text{verificado})$$

**Ejemplo 3.** Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2, x_3 = -x_2, x_4 = x_2$$

$$\ker(T) = \text{span}\{(-1, 1, -1, 1)\}, \quad \dim(\ker T) = 1$$

Como las tres filas son linealmente independientes:

$$\dim(\text{Im } T) = 3$$

$$4 = 1 + 3 \quad (\text{verificado})$$

**Ejemplo 4.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La segunda fila es múltiplo de la primera, por tanto  $\text{rango}(A) = 1$ .

$$\dim(\text{Im } T) = 1$$

Como  $\dim(V) = 3$ , se tiene:

$$\dim(\ker T) = 3 - 1 = 2$$

$$3 = 2 + 1 \quad (\text{verificado})$$

**Ejemplo 5.** Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  con matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí el rango de  $A$  es 2 (las dos primeras filas son no nulas e independientes).

$$\dim(\text{Im } T) = 2, \quad \dim(V) = 4$$

Por tanto:

$$\dim(\ker T) = 4 - 2 = 2$$

$$4 = 2 + 2 \quad (\text{verificado})$$

**Conclusión:** El teorema de la dimensión se cumple en todos los casos presentados y constituye una herramienta esencial para determinar la estructura de cualquier aplicación lineal a partir de su matriz asociada.

## 4. Matriz de Representación

Sea  $T : V \rightarrow W$  una aplicación lineal, con bases  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  en  $V$  y  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  en  $W$ . La **matriz de  $T$  respecto a  $B$  y  $C$**  es la matriz  $[T]_C^B$  cuyas columnas son las coordenadas de  $T(v_j)$  expresadas en la base  $C$ :

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 1. (Base canónica)

Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$ . En la base canónica  $B = C = \{e_1, e_2\}$  con  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ :

$$T(e_1) = (1, 2), \quad T(e_2) = (1, -1)$$

Por tanto:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 2. (Cambio de base en el dominio)

Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x+y, x-y)$ . Tomemos la base  $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)\}$  para el dominio y la base canónica  $C$  para la imagen.

Calculamos:

$$T(v_1) = T(1, 1) = (2, 0), \quad T(v_2) = T(1, -1) = (0, 2)$$

Por tanto:

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa una dilatación por un factor 2 respecto a la base  $B$ .

### Ejemplo 3. (De $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ )

Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ , con base canónica en ambos espacios.

Evaluamos:

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (1, 1), \quad T(e_3) = (0, 1)$$

Por tanto:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la misma matriz usada en ejemplos anteriores de núcleo e imagen.

---

### Ejemplo 4. (De $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ con base no canónica)

Sea  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ . Usamos la base  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  en el dominio y la base  $C = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$  en la imagen.

Primero, expresamos cada  $T(e_j)$  como combinación lineal de los vectores de  $C$ .

$$T(e_1) = (1, 0, 1) = 0 \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) + 1 \cdot (1, 0, 1) \Rightarrow [T(e_1)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = (1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_3) = (0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

Así:

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


---

### Ejemplo 5. (De espacio polinómico a espacio vectorial)

Sea  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $T(a+bx+cx^2) = (a, b, c)$ . Usando la base estándar  $B = \{1, x, x^2\}$  en  $P_2$  y la base canónica  $C = \{e_1, e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$ :

$$T(1) = (1, 0, 0), \quad T(x) = (0, 1, 0), \quad T(x^2) = (0, 0, 1)$$

Por tanto:

$$[T]_C^B = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


---

### Ejemplo 6. (De espacio polinómico a sí mismo)

Sea  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  definida por

$$T(p(x)) = p'(x)$$

Usamos la base  $B = \{1, x, x^2\}$ . Calculamos:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = 1, \quad T(x^2) = 2x$$

Expresamos en la base  $B$ :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa el operador derivada.

---

**Conclusión:** El cálculo de la matriz de representación permite traducir el comportamiento abstracto de una transformación lineal a un contexto algebraico concreto. Una vez obtenida la matriz, se pueden aplicar métodos matriciales para hallar núcleo, imagen, valores y vectores propios, o incluso diagonalizar la transformación.

## 5. Valores y Vectores Propios

**Definición:** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Un número  $\lambda \in \mathbb{K}$  es un **valor propio** de  $A$  si existe un vector no nulo  $\mathbf{v}$  tal que:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El vector  $\mathbf{v}$  se llama **vector propio** asociado a  $\lambda$ .

Para encontrarlos, se resuelve:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{ecuación característica})$$

y luego se obtiene  $\mathbf{v}$  resolviendo  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ .

---

### Ejemplo 1. Matriz simétrica $2 \times 2$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 1, \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Para  $\lambda_1 = 1$ :

$$(A - I)v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para  $\lambda_2 = 3$ :

$$(A - 3I)v = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

Valores propios:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$  Vectores propios:  $v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 1)$

---

## Ejemplo 2. Matriz diagonalizable con valores repetidos

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 4$$

Para  $\lambda = 4$ :

$$(A - 4I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solo hay un vector propio independiente, por tanto  $A$  \*\*no es diagonalizable\*\*, aunque todos los valores propios son iguales.

---

## Ejemplo 3. Matriz triangular superior

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 2 \text{ (doble)}, \quad \lambda_2 = 5$$

Para  $\lambda = 2$ :

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $\lambda = 5$ :

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

#### Ejemplo 4. Matriz con valores propios negativos

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -1$$

Para  $\lambda = 1$ :

$$(A - I)v = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 = (1, -1)$$

Para  $\lambda = -1$ :

$$(A + I)v = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 1)$$

---

#### Ejemplo 5. Matriz $3 \times 3$ diagonalizable

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$$

Para cada valor:

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow v_1 = (1, 0, 0), \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow v_2 = (1, -\frac{3}{2}, 0), \quad \lambda_3 = 2 \Rightarrow v_3 = (1, -2, 1)$$

Todos los valores son distintos  $\Rightarrow A$  es diagonalizable.

---

#### Ejemplo 6. Interpretación geométrica

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Los valores propios son **complejos**. Esto significa que  $A$  representa una \*\*rotación de  $90^\circ$  en el plano\*\*, pues no tiene vectores propios reales.

---

**Conclusión:** Los valores propios determinan los *factores de escala* por los cuales una transformación lineal estira o comprime el espacio, y los vectores propios indican las direcciones invariantes bajo la acción de la matriz. Si una matriz tiene suficientes vectores propios linealmente independientes, puede diagonalizarse, simplificando enormemente su estudio.

## 6. Multiplicidad Algebraica y Geométrica

**Definición:** Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ .

- La **multiplicidad algebraica** de un valor propio  $\lambda$  es su número de repeticiones como raíz del polinomio característico  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .
- La **multiplicidad geométrica** de  $\lambda$  es la dimensión del subespacio propio asociado, es decir:

$$m_g(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$$

Se cumple siempre:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

### Ejemplo 1: Matriz con valores propios distintos

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

Cada valor propio tiene multiplicidad algebraica  $m_a = 1$ . Para ambos, el espacio propio tiene dimensión 1, por lo tanto:

$$m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = 1$$

Luego,  $m_a = m_g$  para cada valor propio.

**Ejemplo 2: Matriz con valor propio repetido y completa diagonalización**

Sea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$p_B(\lambda) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ (con } m_a = 2), \quad \lambda_2 = 2 \text{ (con } m_a = 1)$$

Para  $\lambda = 3$ :

$$(B - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$\text{Espacio propio: } E_3 = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \Rightarrow m_g(3) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 2 : \quad E_2 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}, \quad m_g(2) = 1$$

Aquí,  $m_a = m_g$  para todos los valores propios, por tanto  $B$  es diagonalizable.**Ejemplo 3: Matriz no diagonalizable**

Sea

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ con } m_a = 2$$

Calculamos el espacio propio:

$$(C - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$E_2 = \text{span}\{(1, 0)\}, \quad m_g(2) = 1$$

**Conclusión:**

$$m_a(2) = 2, \quad m_g(2) = 1$$

Como  $m_g < m_a$ , la matriz  $C$  no es diagonalizable.**Ejemplo 4: Matriz con tres valores propios, uno repetido**

Sea

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p_D(\lambda) = (4 - \lambda)^2(3 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4 \ (m_a = 2), \quad \lambda_2 = 3 \ (m_a = 1)$$

Para  $\lambda = 4$ :

$$(D - 4I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \ x_3 = 0 \Rightarrow E_4 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}, \ m_g(4) = 1$$

$$E_3 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}, \quad m_g(3) = 1$$

Por tanto:

$$m_a(4) = 2, \ m_g(4) = 1, \quad \Rightarrow D \text{ no es diagonalizable.}$$

**Resumen:**

Matriz	Valor Propio	$m_a$	$m_g$
$A$	1, 3	1, 1	1, 1
$B$	3, 2	2, 1	2, 1
$C$	2	2	1
$D$	4, 3	2, 1	1, 1

**Conclusión:** Una matriz es diagonalizable si y sólo si para cada valor propio  $\lambda$ , se cumple  $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ .

## 7. Diagonalización

Una matriz  $A$  es **diagonalizable** si existe una matriz invertible  $P$  tal que:

$$P^{-1}AP = D$$

donde  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de  $A$ . Las columnas de  $P$  son los **vectores propios** de  $A$ , y la diagonal de  $D$  contiene los valores propios correspondientes.

**Condición necesaria y suficiente:** Una matriz  $A$  es diagonalizable si y sólo si, para cada valor propio  $\lambda$ ,

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

donde  $m_g$  es la multiplicidad geométrica y  $m_a$  la multiplicidad algebraica.

### Ejemplo 1: Matriz simétrica (siempre diagonalizable)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ya sabemos que los valores propios son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 3$ , con vectores propios:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz de paso:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$P^{-1}AP = D$$

Por lo tanto,  $A$  es diagonalizable.

### Ejemplo 2: Matriz diagonalizable con valor propio repetido

Sea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$p_B(\lambda) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

y los valores propios son  $\lambda_1 = 3$  (con  $m_a = 2$ ) y  $\lambda_2 = 2$ .

Los vectores propios son triviales:

$$E_3 = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}, \quad E_2 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$$

Por tanto:

$$m_g(3) = 2, \quad m_g(2) = 1$$

Como  $m_g = m_a$  para todos los valores propios,  $B$  es diagonalizable. La matriz diagonal

es:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y  $P = I_3$  en este caso.

### Ejemplo 3: Matriz no diagonalizable (defectuosa)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p_C(\lambda) = (2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2, \quad m_a(2) = 2$$

El espacio propio:

$$(C - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$E_2 = \text{span}\{(1, 0)\}, \quad m_g(2) = 1$$

Como  $m_g(2) < m_a(2)$ , la matriz no es diagonalizable. De hecho,  $C$  sólo puede llevarse a forma de Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

donde el 1 sobre la diagonal representa la falta de suficientes vectores propios linealmente independientes.

### Ejemplo 4: Matriz 3x3 diagonalizable con tres valores propios distintos

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son 1, 2, 3, todos con multiplicidad  $m_a = 1$  y  $m_g = 1$ . Es diagonal por definición, por lo tanto también diagonalizable. Además, cualquier matriz similar a  $D$  también será diagonalizable.

### Ejemplo 5: Matriz triangular diagonalizable

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$p_E(\lambda) = (4 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

$\lambda_1 = 4$  (con  $m_a = 2$ ),  $\lambda_2 = 1$ .

Para  $\lambda = 4$ :

$$(E - 4I)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow E_4 = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$$

$$m_g(4) = 1 < m_a(4) = 2$$

Por tanto,  $E$  no es diagonalizable.

### Ejemplo 6: Matriz ortogonal (siempre diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ )

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p_F(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Valores propios  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ , con vectores propios:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}FP = D$$

Por tanto,  $F$  es diagonalizable.

### Conclusión general:

- Si una matriz tiene  $n$  valores propios distintos, es automáticamente diagonalizable.
- Si existen valores propios repetidos, debe cumplirse  $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$  para cada uno.
- Si  $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$  para algún  $\lambda$ , la matriz no es diagonalizable y se lleva a forma de Jordan.

### Resumen de ejemplos:

Matriz	Valores Propios	¿Diagonalizable?	Razón
$A$	1, 3	Sí	$m_g = m_a = 1$
$B$	3, 2	Sí	$m_g = m_a$
$C$	2	No	$m_g < m_a$
$D$	1, 2, 3	Sí	Distintos valores propios
$E$	4, 1	No	$m_g(4) < m_a(4)$
$F$	1, -1	Sí	Ortogonal y simétrica

## Ejercicios Propuestos

1. Verifique si las siguientes aplicaciones son lineales:
  - (a)  $T(x, y) = (x - y, 2y)$
  - (b)  $T(x, y) = (x^2, y)$
2. Halle el núcleo e imagen de  $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ .
3. Para la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  determine sus valores y vectores propios.
4. Determine si  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  es diagonalizable.
5. Verifique el teorema de la dimensión para la aplicación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ .

## 1 Ejercicios

### Ejercicio 1

Sea la base  $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Buscamos las coordenadas de  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  respecto de  $B$ , es decir escalar  $\alpha, \beta, \gamma$  tales que:

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, 0) = (1, 2, 3).$$

Esto da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ \alpha + \beta &= 2, \\ \alpha &= 3. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación  $\alpha = 3$ . Sustituyendo en la segunda:  $3 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = -1$ . Luego  $\gamma = 1 - \alpha - \beta = 1 - 3 - (-1) = -1$ .

Por tanto, las coordenadas de  $\mathbf{v}$  respecto de  $B$  son:

$$[\mathbf{v}]_B = (3, -1, -1).$$

## Ejercicio 2

Sea la base  $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ . Buscamos  $a, b, c$  tales que

$$a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(1, 0, 0) = (2, -1, 3).$$

Comparando componentes:

$$\begin{aligned} a + c &= 2, \\ b &= -1, \\ a &= 3. \end{aligned}$$

De  $a = 3$  y  $b = -1$  se obtiene  $c = 2 - a = 2 - 3 = -1$ .

Así,

$$[(2, -1, 3)]_B = (3, -1, -1).$$

## Ejercicio 3

Demostrar que  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, -x)$$

es una transformación lineal.

**Prueba.** Sea  $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$  en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculamos  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), -(x_1 + x_2)) \\ &= (x_1 - 2y_1 + z_1, -x_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2, -x_2) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Y para homogeneidad:

$$\begin{aligned}
 T(\lambda \mathbf{u}) &= T(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \\
 &= (\lambda x_1 - 2\lambda y_1 + \lambda z_1, -\lambda x_1) \\
 &= \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1, -x_1) \\
 &= \lambda T(\mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

Como ambas propiedades (adicitividad y homogeneidad) se cumplen,  $T$  es lineal.  $\square$

### Ejercicio 4

Determinar si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x, y) = (x + 2, y)$  es una transformación lineal. Observemos que una transformación lineal debe enviar el vector nulo al vector nulo:

$$f(0, 0) = (0 + 2, 0) = (2, 0).$$

Dado que  $f(0, 0) \neq (0, 0)$ ,  $f$  no puede ser lineal.

Alternativamente, se puede ver que  $f(0, 0) \neq 0$  o que  $f$  no preserva suma ya que la componente  $x$  tiene un "offset" constante 2.

Por tanto,  $f$  **no** es una transformación lineal.

### Ejercicio 5

Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y, y - 2t).$$

#### a) Base del núcleo de $T$

Buscamos los vectores  $(x, y, z, t)$  que satisfacen

$$\begin{aligned}
 x - 2y &= 0, \\
 y - 2t &= 0.
 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación  $y = 2t$ . Sustituyendo en la primera:  $x - 2(2t) = 0 \Rightarrow x = 4t$ . No hay condición sobre  $z$ , que queda libre. Tomando como parámetros  $t$  y  $z$ :

$$(x, y, z, t) = (4t, 2t, z, t) = t(4, 2, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0).$$

Por tanto, una base para  $\ker(T)$  es

$$\{(4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}.$$

b) Todos los  $v \in \mathbb{R}^4$  tales que  $T(v) = (1, 1)$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 1, \\y - 2t &= 1.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación  $y = 1 + 2t$ . Sustituyendo en la primera:

$$x - 2(1 + 2t) = 1 \Rightarrow x - 2 - 4t = 1 \Rightarrow x = 3 + 4t.$$

La coordenada  $z$  es libre. Por tanto las soluciones se escriben como

$$(x, y, z, t) = (3 + 4t, 1 + 2t, z, t) = (3, 1, 0, 0) + t(4, 2, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0).$$

Observando que los dos vectores que multiplican  $t$  y  $z$  son precisamente la base del núcleo, podemos concluir que existen infinitas soluciones. Una solución particular es  $v_0 = (3, 1, 0, 0)$ , y la familia completa de soluciones es

$$\{v_0 + w : w \in \ker(T)\}.$$

## Ejercicio 6

Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y, y - 2t).$$

(a) Cálculo de  $T(1, -2, 5, -1)$  y  $T\left(\frac{2}{3}(1, -2, 5, -1)\right)$

Usamos linealidad y evaluación directa:

$$\begin{aligned}T(1, -2, 5, -1) &= (1 - 2(-2), -2 - 2(-1)) = (1 + 4, -2 + 2) = (5, 0), \\T\left(\frac{2}{3}(1, -2, 5, -1)\right) &= \frac{2}{3}T(1, -2, 5, -1) = \frac{2}{3}(5, 0) = \left(\frac{10}{3}, 0\right).\end{aligned}$$

(b) Hallar  $a, b$  tales que  $T(a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 1)) = (11, -11)$

Formamos el vector combinado

$$v = a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 1) = (a + b, a - b, b, b).$$

Aplicando  $T$ :

$$T(v) = ((a + b) - 2(a - b), (a - b) - 2b) = (-a + 3b, a - 3b).$$

Imponiendo la igualdad con  $(11, -11)$  obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -a + 3b &= 11, \\ a - 3b &= -11. \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones son equivalentes (la segunda es la opuesta de la primera), por tanto hay infinitas soluciones parametrizadas por  $b$ . Despejando:

$$a = 3b - 11, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos:  $b = 0 \Rightarrow a = -11$ ,  $b = 1 \Rightarrow a = -8$ .

**(c) Determinar  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $(1, k, -1, 1) \in \ker(T)$**

Necesitamos

$$T(1, k, -1, 1) = (1 - 2k, k - 2) = (0, 0).$$

Esto exige simultáneamente

$$\begin{aligned} 1 - 2k &= 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}, \\ k - 2 &= 0 \Rightarrow k = 2. \end{aligned}$$

No existe valor de  $k$  que satisfaga ambas ecuaciones, luego *no* existe  $k$  con la propiedad pedida.

**(d) Núcleo de  $T$  y una base**

Resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0, \\ y - 2t &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda  $y = 2t$ , de la primera  $x = 4t$ , y  $z$  es libre. Es decir

$$(x, y, z, t) = (4t, 2t, z, t) = t(4, 2, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0), \quad t, z \in \mathbb{R}.$$

Por tanto

$$\ker(T) = \text{span}\{(4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Una base natural para  $\ker(T)$  es  $\{(4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ .

### (e) Imagen de $T$ y su dimensión

Escribimos  $T$  como combinación lineal de las variables libres:

$$T(x, y, z, t) = x(1, 0) + y(-2, 1) + t(0, -2).$$

Por tanto

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{(1, 0), (-2, 1), (0, -2)\}.$$

Comprobamos que  $(1, 0)$  y  $(-2, 1)$  son linealmente independientes y generan la imagen; la tercera columna  $(0, -2)$  es combinación de ellas. Entonces

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2.$$

(Consistente con el teorema rango-nulidad:  $\dim \ker(T) = 4 - 2 = 2$ .)

## Ejercicio 7

Para cada transformación lineal calculamos rango y nulidad.

a)

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (2x - y, 3y - 6x)$ . Matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinante:  $\det(A) = 2 \cdot 3 - (-1)(-6) = 6 - 6 = 0$ . Las columnas son proporcionales, luego

$$\text{rank}(A) = 1, \quad \text{nul}(T) = 2 - 1 = 1.$$

b)

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$ . Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Columnas  $c_1 = (0, -1, 1, 1)$  y  $c_2 = (1, 0, 3, -1)$  son linealmente independientes (no existe  $\lambda$  con  $c_1 = \lambda c_2$ ), por tanto

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nul}(T) = 2 - 2 = 0.$$

c)

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ . Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cálculo del determinante muestra  $\det(A) = 0$ ; las columnas suman cero (dependencia lineal). Se puede comprobar que hay 2 columnas independientes, por lo que

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{nul}(T) = 3 - 2 = 1.$$

d)

$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ,  $T(x, y, z, s) = (x - y, y - z, z - s, s, x)$ . Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las cuatro columnas son linealmente independientes (se puede ver fijando componentes), luego

$$\text{rank}(A) = 4, \quad \text{nul}(T) = 4 - 4 = 0.$$