Guía de Cálculo I: Integración trigonométrica e integración por fracciones parciales

Índice

1. Introducción

Esta guía cubre técnicas comunes de integración que aparecen en un curso de Cálculo I: integrales trigonométricas (potencias y combinaciones de seno y coseno), integrales que conducen a funciones trigonométricas inversas (como arcsin, arctan), y la técnica de descomposición en fracciones parciales para racionales. Incluye ejemplos resueltos paso a paso.

2. Integrales trigonométricas básicas

2.1. Integrales elementales

Recordemos algunas integrales básicas:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$
$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C,$$
$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C.$$

2.2. Potencias de seno y coseno

Para integrar potencias pares usaremos identidades de ángulo doble:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Para potencias impares se separa un factor y se usa la identidad $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (o la análoga para coseno) y se realiza el cambio $u = \cos x$ (o $u = \sin x$).

2.3. Ejemplo: $\int \sin^3 x \, dx$

Resolvamos paso a paso:

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx.$$

Hacemos $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$, por lo que

$$\int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = -\int (1 - u^2) \, du = -\int (1 - u^2) \, du$$
$$= -\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

3. Integrales que conducen a funciones trigonométricas inversas

Hay formas estándar que resultan en funciones inversas trigonométricas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C,$$
$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcsec} |x| + C.$$

Además, integrales que presentan cuadráticas completables conducen a arctan tras completar el cuadrado.

3.1. Ejemplo: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Recordemos que la derivada de $\arcsin x$ es $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

3.2. Ejemplo: $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$

Completamos el cuadrado en el denominador:

$$x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x+2)^2 + 1.$$

Hacemos $u = x + 2$, $du = dx$, entonces

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C = \arctan(x+2) + C.$$

4. Integración por partes aplicada a funciones trig inversas

Si integras una función inversa trigonométrica, a menudo conviene usar integración por partes. Recordemos la fórmula: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

4.1. Ejemplo: $\int \arctan x\,dx$

Tomemos $u = \arctan x$ y $dv = dx$. Entonces $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$ y $v = x$. Por partes:

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Hacemos la sustitución $w = 1 + x^2$, $dw = 2x\,dx$, de modo que

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

Por tanto

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

5. Integración por fracciones parciales

Cuando se tiene la integral de un cociente de polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con grado(P)<grado(Q), se intenta descomponer en sumandos más simples cuyas integrales son inmediatas. Pasos generales:

1. Si $\deg P \geq \deg Q$, dividir polinomios primero (división larga).

2. Factorizar el denominador en factores lineales y cuadráticos irreducibles reales.
3. Escribir una descomposición con constantes desconocidas y resolverlas (por igualación de coeficientes o sustituciones).
4. Integrar cada término resultante.

Tipos de términos en la descomposición:

- Factores lineales distintos: $\dfrac{A}{x-a}$.
- Factores lineales repetidos: $\dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \dots$.
- Factores cuadráticos irreducibles: $\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$.

5.1. Ejemplo: $\int \dfrac{2x+3}{x^2-x-2}\,dx$

Factorizamos el denominador: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Buscamos constantes A, B tales que

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Igualando numeradores:

$$2x + 3 = A(x+1) + B(x-2) = (A+B)x + (A-2B).$$

Comparando coeficientes:

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ A - 2B &= 3. \end{aligned}$$

Resolviendo: De la primera $A = 2 - B$. Sustituimos en la segunda: $(2-B) - 2B = 3 \Rightarrow 2 - 3B = 3 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$. Luego $A = 2 - (-\frac{1}{3}) = \frac{7}{3}$. Por tanto

$$\frac{2x+3}{x^2-x-2} = \frac{7/3}{x-2} - \frac{1/3}{x+1}.$$

Integrando:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}\,dx = \frac{7}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

6. Ejercicios resueltos

A continuación hay varios ejercicios completos (al menos 5) con pasos.

Ejercicio 1

Calcule $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Solución: Separamos un factor de $\cos x$ para usar la identidad $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx.$$

Hacemos $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$, entonces

$$\int u^2(1 - u^2) \, du = \int (u^2 - u^4) \, du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + C.$$

Volviendo a x:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Ejercicio 2

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Solución: Directamente conocida: es la primitiva de $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

Ejercicio 3

Calcule $\int \arcsin x \, dx$.

Solución: Usamos integración por partes. Tomamos $u = \arcsin x$ (de donde $du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$) y $dv = dx$ (de donde $v = x$). Entonces

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Para la integral restante hacemos $w = 1 - x^2$, $dw = -2x \, dx$, entonces

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int w^{-1/2} dw = -\frac{1}{2}(2w^{1/2}) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Por tanto

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Ejercicio 4

Calcule $\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 4)} \, dx$.

Solución: La fracción es propia. Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Multiplicamos por $x(x^2+4)$:

$$x^2+1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x.$$

Expandimos y agrupamos:

$$x^2+1 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + 4A.$$

Igualamos coeficientes:

$$\begin{aligned} A+B &= 1, \\ C &= 0, \\ 4A &= 1. \end{aligned}$$

De $4A = 1$ tenemos $A = \frac{1}{4}$. Luego $B = 1 - A = \frac{3}{4}$ y $C = 0$. Entonces

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+4)} = \frac{1/4}{x} + \frac{(3/4)x}{x^2+4}.$$

Integramos término a término:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x(x^2+4)}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{4}\int \frac{x}{x^2+4}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{3}{8}\ln(x^2+4) + C. \end{aligned}$$

(En la segunda integral hicimos $u = x^2+4$, $du = 2x\,dx$.)

Ejercicio 5

Calcule $\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}dx$ (ya resuelto en la sección de fracciones parciales, se repite como ejercicio resuelto).

Solución: De la descomposición obtenida:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}dx = \frac{7}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

Ejercicio 6

Calcule $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ (ya mostrado en la sección de arctan).

Solución: Completando el cuadrado:

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2 + 1.$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u) + C = \arctan(x+2) + C.$$

Ejercicio 7 (más avanzado)

Calcule $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$.
Solución: Denominador con factor lineal repetido. Buscamos la descomposición

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Multiplicamos por $(x-1)^2(x+2)$:

$$1 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2.$$

Expandimos y agrupamos (o sustituimos valores estratégicos). Usamos sustituciones:

- $x = 1$ da: $1 = B(3) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$.
- $x = -2$ da: $1 = C(-3)^2 = 9C \Rightarrow C = \frac{1}{9}$.

Para A, compare coeficientes o sustituya otro valor; elegimos $x = 0$:

$$1 = A(-1)(2) + B(2) + C(1) = -2A + 2B + C.$$

Sustituyendo $B = 1/3$, $C = 1/9$:

$$1 = -2A + 2(1/3) + 1/9 = -2A + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = -2A + \frac{7}{9}.$$

Entonces

$$-2A = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow A = -\frac{1}{9}.$$

Por tanto la descomposición es

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Integrando:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{9} \ln|x+2| + C.$$

(La integral de $1/(x-1)^2$ es $-1/(x-1)$.)

7. Consejos y estrategias rápidas

- Reconoce patrones: $\frac{1}{1+x^2} \to \arctan$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \arcsin$.
- Para potencias trigonométricas impares, separa un factor para du conveniente.
- Para integrales racionales, asegúrate de que la fracción sea propia; si no, aplica división polinómica.
- Para denominadores cuadráticos irreducibles, completa el cuadrado para obtener la forma adecuada para arctan.

8. Ejercicios propuestos (sin resolver)

1. $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+1}{x^3-x}\, dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+8}.$

4. $\displaystyle\int x \arctan x\, dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$