Министерство науки высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет информационных технологий и программирования

Расчётно-графическая работа №1
По дисциплине «Теория вероятности»

Лабораторная работа №1 по теме «Классическое определение вероятности»

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович
Выполнили студенты группы №M3204:
Воротникова Эмилия

Санкт-Петербург

2025

Ужас Аркхэма.
Вычисление вероятности наличия актив–оружия у Роланда Бэнкса к концу первого хода

1) Модель и обозначения

- Полный размер колоды перед началом игры: $N = 33$ (30 обычных + 2 персональные + 1 базовая слабость).
- Размер стартовой руки: $H = 5$.
- Число активов-оружий в колоде: $W = 5$ (Револьвер Роланда, Пистолет .45, Мачете, 2×Нож).
- Карта «Патрульный» в единственном экземпляре: $P = 1$.
- Прочих карт: $N_{\text{other}} = N - W - P = 27$.

Муллиган по условию: оставляем на руке *все* оружия и *Патрульного* (если пришёл); остальные карты меняем.
Событие «успех»: «к концу первого хода оружие лежит в игровой зоне». Принимаем (по условию), что если оружие есть в итоговой руке после муллигана, то его можно разыграть (ресурсов хватает).

2) Полное разбиение исходов стартовой руки

Пусть A — число оружий, пришедших в стартовую руку; $B \in \{0, 1\}$ — пришёл ли «Патрульный». Тогда $C = H - A - B$ — число «прочих» карт.

Общая мощность пространства исходов стартовой руки:

$$\binom{N}{H} = \binom{33}{5} = 237\,336.$$

Вероятность конкретного исхода $(A = a, B = b)$ при старте:

$$\Pr(A{=}a, B{=}b) = \frac{\binom{W}{a}\binom{P}{b}\binom{N_{\text{other}}}{H-a-b}}{\binom{N}{H}}, \qquad a = 0, \ldots, 5, \;\; b \in \{0, 1\}, \;\; H - a - b \geq 0.$$

Перечислим **все** допустимые пары (a, b) и их вероятности.

a	b	Формула	Точная дробь	Десятичная
0	0	$\frac{\binom{5}{0}\binom{1}{0}\binom{27}{5}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{13455}{39556}$	0.3401506725
0	1	$\frac{\binom{5}{0}\binom{1}{1}\binom{27}{4}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{2925}{39556}$	0.0739457984
1	0	$\frac{\binom{5}{1}\binom{1}{0}\binom{27}{4}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{14625}{39556}$	0.3697289918
1	1	$\frac{\binom{5}{1}\binom{1}{1}\binom{27}{3}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{4875}{79112}$	0.0616214986
2	0	$\frac{\binom{5}{2}\binom{1}{0}\binom{27}{3}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{4875}{39556}$	0.1232429973
2	1	$\frac{\binom{5}{2}\binom{1}{1}\binom{27}{2}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{585}{39556}$	0.0147891597
3	0	$\frac{\binom{5}{3}\binom{1}{0}\binom{27}{2}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{585}{39556}$	0.0147891597
3	1	$\frac{\binom{5}{3}\binom{1}{1}\binom{27}{1}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{45}{39556}$	0.0011376277
4	0	$\frac{\binom{5}{4}\binom{1}{0}\binom{27}{1}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{45}{79112}$	0.0005688138
4	1	$\frac{\binom{5}{4}\binom{1}{1}\binom{27}{0}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{5}{237336}$	0.0000210672
5	0	$\frac{\binom{5}{5}\binom{1}{0}\binom{27}{0}}{\binom{33}{5}}$	$\frac{1}{237336}$	0.0000042134

Проверка нормировки: суммы дробей дают 1 (ровно).

3) Что происходит на муллигане

Интересны только случаи $a = 0$ — когда на старте оружия нет. Их два:

- $(a, b) = (0, 0)$: оружия нет и «Патрульного» нет. Игрок меняет **5** карт ($r = 5$).
- $(a, b) = (0, 1)$: оружия нет, но «Патрульный» есть. Игрок меняет **4** карты ($r = 4$).

После взятия стартовой руки остаётся $N - H = 28$ карт. При $a = 0$ *все* $W = 5$ оружий остались в колоде.

Вероятность «провала на муллигане» — не вытянуть ни одного оружия среди r новых карт (гипергеометрия):

$$\Pr(\text{fail} \mid r) = \frac{\binom{28-W}{r}}{\binom{28}{r}} = \frac{\binom{23}{r}}{\binom{28}{r}}.$$

Конкретные значения:

$$\Pr(\text{fail} \mid r{=}5) = \frac{\binom{23}{5}}{\binom{28}{5}} = \frac{33\,649}{98\,280} = \frac{4807}{14040} \approx 0.342378917,$$

$$\Pr(\text{fail} \mid r{=}4) = \frac{\binom{23}{4}}{\binom{28}{4}} = \frac{8\,855}{20\,475} = \frac{253}{585} \approx 0.432478632.$$

Тогда условные вероятности *успеха* после замены:

$$\Pr(\text{succ} \mid r{=}5) = 1 - \frac{4807}{14040} = \frac{9233}{14040} \approx 0.657621083, \qquad \Pr(\text{succ} \mid r{=}4) = 1 - \frac{253}{585} = \frac{332}{585} \approx 0.56752136$$

4) Теорема сложения + умножения

Итоговую вероятность успеха считаем по закону полной вероятности (разбиение по (A, B)):

$$\Pr(\text{успех}) = \sum_{a,b} \Pr(A{=}a, B{=}b) \cdot \Pr(\text{успех} \mid A{=}a, B{=}b).$$

Правила для условной части:

- Если $a \geq 1$ (в стартовой руке уже есть оружие), то $\Pr(\text{успех} \mid A{=}a, B{=}b) = 1$ — игрок просто разыграет его в ход.
- Если $a = 0, b = 0$, то $\Pr(\text{успех} \mid A{=}0, B{=}0) = \Pr(\text{succ} \mid r{=}5) = \frac{9233}{14040}$.
- Если $a = 0, b = 1$, то $\Pr(\text{успех} \mid A{=}0, B{=}1) = \Pr(\text{succ} \mid r{=}4) = \frac{332}{585}$.

Обозначим $p_{a,b} = \Pr(A{=}a, B{=}b)$, $s_{a,b} = \Pr(\text{успех} \mid A{=}a, B{=}b)$, вклад исхода: $p_{a,b}s_{a,b}$.

4.1. Исходы с немедленным успехом ($a \geq 1$)

Здесь $s_{a,b} = 1$, поэтому вклад равен $p_{a,b}$.

(a, b)	$p_{a,b}$ (точно)	Десятичная	Вклад
(1,0)	14625/39556	0.3697289918	0.3697289918
(1,1)	4875/79112	0.0616214986	0.0616214986
(2,0)	4875/39556	0.1232429973	0.1232429973
(2,1)	585/39556	0.0147891597	0.0147891597
(3,0)	585/39556	0.0147891597	0.0147891597
(3,1)	45/39556	0.0011376277	0.0011376277
(4,0)	45/79112	0.0005688138	0.0005688138
(4,1)	5/237336	0.0000210672	0.0000210672
(5,0)	1/237336	0.0000042134	0.0000042134

Сумма этих вкладов (то же, что вероятность «уже на старте есть оружие»):

$$\sum_{a\geq 1,b} p_{a,b} = 1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{33}{5}} = \frac{5794}{9889} \approx 0.5859035292.$$

4.2. Исходы с нулём оружий на старте ($a = 0$)

Здесь $s_{0,0} = \dfrac{9233}{14040}$, $s_{0,1} = \dfrac{332}{585}$.
Для $(0, 0)$:

$$p_{0,0} = \frac{13455}{39556} \approx 0.3401506725, \qquad \text{вклад}_{0,0} = \frac{13455}{39556} \cdot \frac{9233}{14040} = \frac{212359}{949344} \approx 0.2236902535.$$

Для $(0, 1)$:

$$p_{0,1} = \frac{2925}{39556} \approx 0.0739457984, \qquad \text{вклад}_{0,1} = \frac{2925}{39556} \cdot \frac{332}{585} = \frac{415}{9889} \approx 0.0419658206.$$

4.3. Сумма всех вкладов (общая вероятность успеха)

Складываем:

$$\Pr(\text{успех}) = \Big(\sum_{a\geq 1,b} p_{a,b}\Big) + \text{вклад}_{0,0} + \text{вклад}_{0,1} = \frac{5794}{9889} + \frac{212359}{949344} + \frac{415}{9889} = \boxed{\frac{73493}{86304}} \approx \boxed{0.851559603} = \boxed{85}$$

5) Альтернативная проверка через дополнение («от противного»)

Провал возможен *только* если на старте $a = 0$ и ещё и муллиган не дал оружие:

$$\Pr(\text{провал}) = p_{0,0} \cdot \Pr(\text{fail} \mid r{=}5) + p_{0,1} \cdot \Pr(\text{fail} \mid r{=}4).$$

Числа:

$$p_{0,0} \cdot \frac{4807}{14040} = \frac{10051}{86304} \approx 0.116460419, \qquad p_{0,1} \cdot \frac{253}{585} = \frac{115}{3596} = \frac{2760}{86304} \approx 0.031979978.$$

Сумма:

$$\Pr(\text{провал}) = \frac{10051}{86304} + \frac{2760}{86304} = \frac{12811}{86304} \approx 0.148440397.$$

Тогда

$$\Pr(\text{успех}) = 1 - \Pr(\text{провал}) = 1 - \frac{12811}{86304} = \frac{73493}{86304} \approx 0.851559603,$$

что совпадает с результатом из пункта 4.

6) Сравнение с эмпирическими вычислениями (200 испытаний)

Проведём компьютерную симуляцию описанной стратегии муллигана: в стартовой руке сохраняем все оружия и, если пришёл, «Патрульного»; остальные карты заменяем. Успехом считаем наличие хотя бы одного оружия в итоговой руке (его можно разыграть в первый ход).

Результаты серии из $n = 200$ испытаний

По факту получено $k = 173$ успехов, то есть

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{173}{200} = 0.865 \quad (86.5\,\%).$$

Стандартная ошибка оценки:

$$\mathrm{SE}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.865 \cdot 0.135}{200}} \approx 0.02416.$$

Для ориентировочного 95% интервала по нормальному приближению:

$$\hat{p} \pm 1.96 \cdot \mathrm{SE} \ \approx \ 0.865 \pm 0.0473 \ = \ [0.818;\ 0.912].$$

Более корректная для долей *оценка Уилсона* (при $z = 1.96$):

$$\hat{p}_W = \frac{\hat{p} + \frac{z^2}{2n}}{1 + \frac{z^2}{n}} \approx 0.8581, \qquad \Delta_W \approx 0.0474,$$

что даёт

$$\boxed{\hat{p}_W \pm \Delta_W \ = \ 0.858 \pm 0.047 \ \Rightarrow \ [0.811;\ 0.906].}$$

Сопоставление с теорией

Теоретическое значение из раздела 4:

$$p = \frac{73493}{86304} \approx 0.85156.$$

Оно попадает внутрь обоих 95% доверительных интервалов для эмпирической частоты ($[0.818; 0.912]$ и $[0.811; 0.906]$). Следовательно, *эмпирика согласуется с теорией* при объёме выборки $n = 200$. Небольшое превышение $\hat{p} = 0.865$ над $p = 0.8516$ объясняется обычной выборочной флуктуацией порядка $\pm 2\hat{\sigma} \approx \pm 0.048$.

Исходный код симуляции (Python) находится в репозитории, реализующий описанную стратегию; в нашем эксперименте он давал приведённые числа (серия фиксирована по зерну генератора). Ссылка на репозиторий

7) Что именно использовано из теории вероятностей

- **Классическая модель:** равновозможные сочетания без возвращения $\Rightarrow$ биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$.
- **Гипергеометрическое распределение** для «ни одного успеха в r вытяжках»: $\Pr = \dfrac{\binom{N-K}{r}}{\binom{N}{r}}$.
- **Теорема умножения** и **закон полной вероятности** для суммирования вкладов по разбиению (A, B).
- **Оценка доли** $\hat{p} = k/n$, стандартная ошибка, нормальный и **уилсоновский** доверительные интервалы.

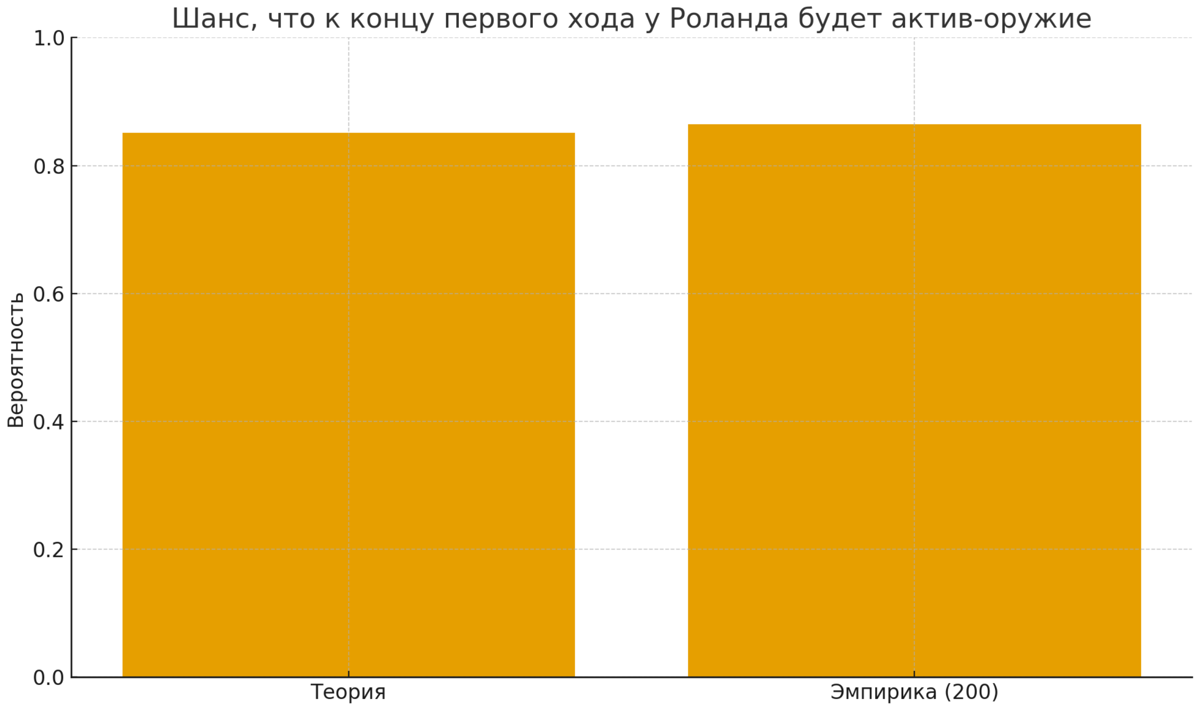

Рис. 1:

8) Итог

При описанной стратегии (оптимальный муллиган, «Патрульного» не сбрасываем):

$$\boxed{\Pr(\text{оружие в игре к концу 1-го хода}) = \frac{73493}{86304} \approx 85.16\%.}$$

Эмпирическая оценка по 200 испытаниям: $\boxed{\hat{p} = 0.865}$ (86.5 %); теоретическое значение лежит в 95% доверительном интервале эмпирики, что подтверждает корректность теоретической модели.